

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θεωρία & Συνοπτική Μεθοδολογία
Μόνο για Επανάληψη.

Επισήμανση στην θεωρία:

- **Σταθερές Μεταβλητές:**

- $e = 2.71 \dots$
- $\pi = 3.14 \dots$

- **Ο φυσικός λογάριθμος είναι ο λογάριθμος με βάση “e”:**

$$\ln \theta = \log_e \theta$$

- **Βασική ιδιότητα του λογάριθμου:**

$$\log_{\alpha} \theta = x \iff \alpha^x = \theta$$

- **Σύνολα Αριθμών:**

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

- \mathbb{N} : Φυσικοί αριθμοί.
 - Δηλαδή $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- \mathbb{Z} : Ακέραιοι Αριθμοί.
 - Δηλαδή $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- \mathbb{Q} : Ρητοί αριθμοί
 - Δηλαδή όλοι οι αριθμοί που μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα κλάσμα ακέραιων αριθμών.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- \mathbb{R} : Πραγματικοί αριθμοί
 - Δηλαδή $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Άρρητοι αριθμοί}$
- **Αξίζει να σημειωθεί** πως ο αστερίσκος στα σύνολα των αριθμών συμβολίζει το παρακάτω:
 - $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$
 - $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$
 - $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
 - $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Διαστήματα:**

- $x \in (\alpha, \beta) \iff \alpha < x < \beta$
- $x \in [\alpha, \beta) \iff \alpha \leq x < \beta$
- $x \in (\alpha, \beta] \iff \alpha < x \leq \beta$
- $x \in [\alpha, \beta] \iff \alpha \leq x \leq \beta$

• **Ιδιότητες Ανισοτήτων:**

- Για $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και έστω $\gamma \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha < \beta \iff \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

$$\alpha < \beta \iff \alpha - \gamma < \beta - \gamma$$

- Για $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχουμε:

- Για κάθε $\gamma > 0$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

- Για κάθε $\gamma < 0$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

- Επιτρέπεται η πρόσθεση κατά μέλη (**ΜΟΝΟ** για την **ίδια** ανισοτική φορά). Η “αφαίρεση” μπορεί να γίνει μόνο με τα παρακάτω βήματα. Έστω $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$:

1. Πολλαπλασιάζω με το -1 :

$$\alpha < \beta \iff -\alpha > -\beta$$

2. Προσθέτω κατά μέλη:

$$-\beta < -\alpha, \quad \gamma < \delta \implies \gamma - \beta < \delta - \alpha$$

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^\nu < \beta^\nu \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

- Αν όμως $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^{2\nu+1} < \beta^{2\nu+1} \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

Ουσιαστικά, το $2\nu+1 =$ περιττός αριθμός. Άρα θα μπορούμε να πούμε $\nu \in \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

- Αν $\alpha, \beta \geq 0$ (δηλαδή α, β ομόσημα):

$$\alpha \geq \beta \iff \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$$

Ενότητα 1

Κεφάλαιο 1.2

Ορισμός Συνάρτησης

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

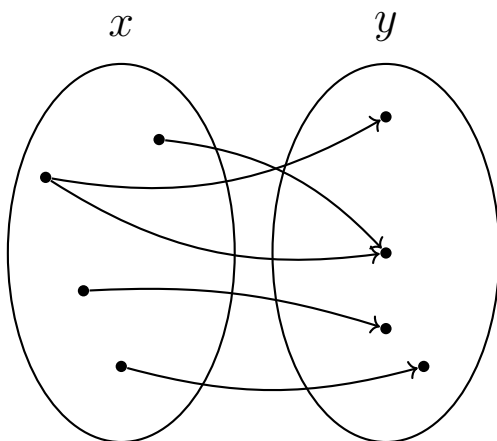
Συμβολικά τον παραπάνω ορισμό τον γράφουμε:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

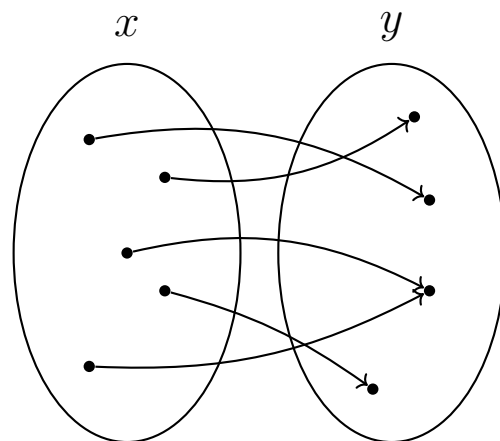
- x : ανεξάρτητη μεταβλητή
 y : εξαρτημένη μεταβλητή
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ορίζεται και ως $A = D_f$
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$ (ή $f(D_f)$). Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

(Ο λόγος που λέει για κάποιο και όχι για κάθε είναι γιατί τότε θα εννοούσε ότι το ίδιο y είναι αποτέλεσμα της f για όλα τα x στο A . Δηλαδή πως η f είναι σταθερή ($f(x) = y$ για κάθε $x \in A$). Αυτό προφανώς δεν ισχύει για τις περισσότερες συναρτήσεις.)



Δεν είναι συνάρτηση.



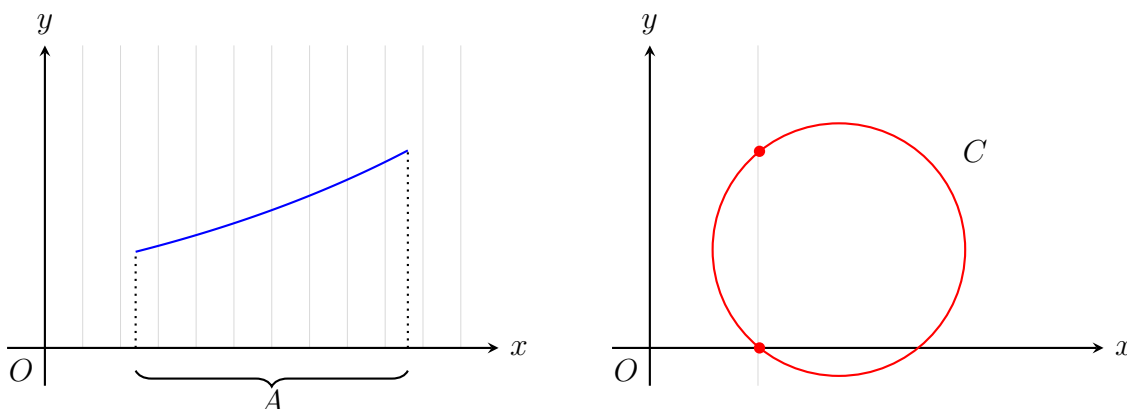
Είναι συνάρτηση.

Συνάρτηση	Περιορισμός
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)}, \nu \in \mathbb{N}^* - 1$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \ln(P(x))$	$P(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\varphi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\varphi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = (P(x))^{Q(x)}$	$P(x) > 0$ ή $(P(x) = 0$ και $Q(x) > 0)$ ή $(P(x) < 0$ και $Q(x) \in \mathbb{Z})$

Ορισμός Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

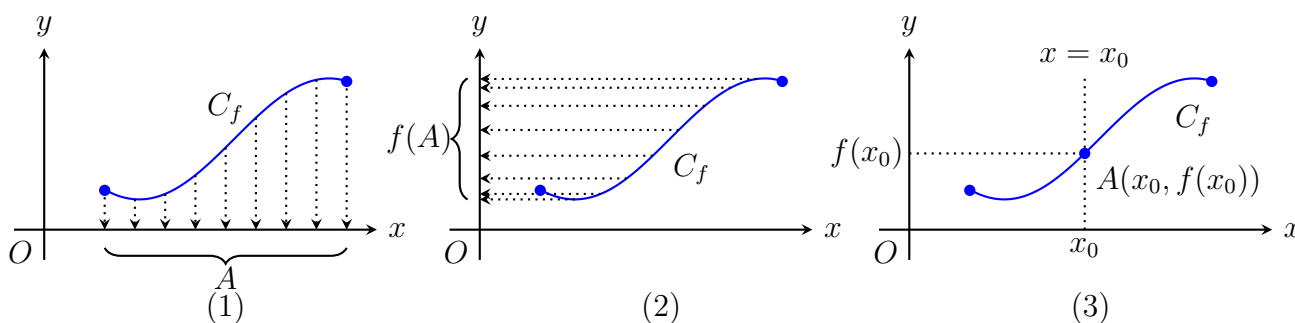
Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y), x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται με C_f .

Από τον ορισμό της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης, μπορούμε να αναπαραστήσουμε ποια είναι η συνάρτηση και ποια όχι. (Ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση, καθώς τουλάχιστον ένα x αντιστοιχεί σε παραπάνω από ένα y)



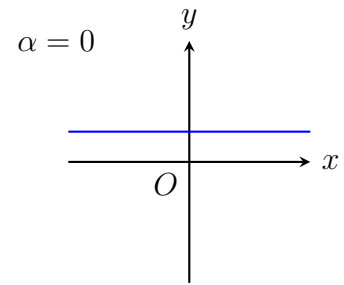
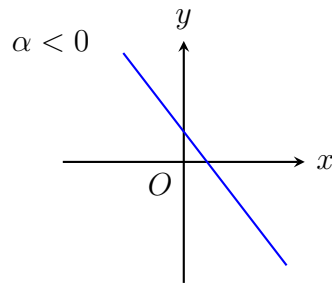
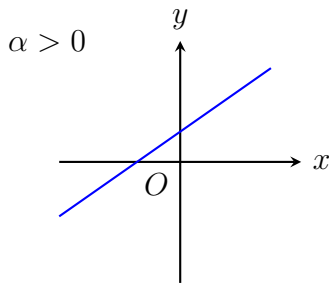
Έτσι από την γραφική παράσταση της C_f μπορούμε να συμπαιράνουμε:

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
2. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
3. Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .

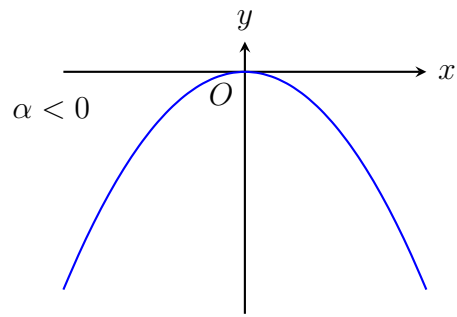
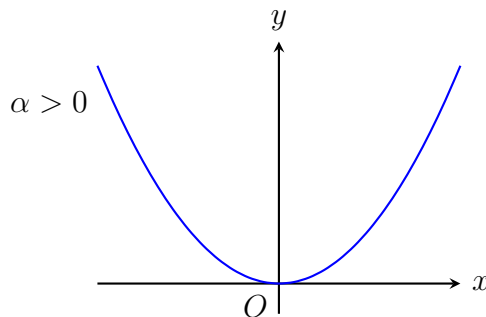


Κάποιες βασικές συναρτήσεις είναι:

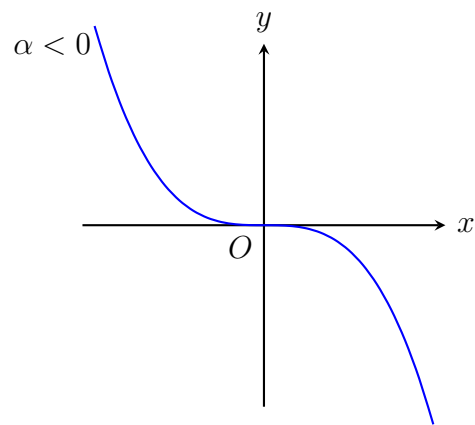
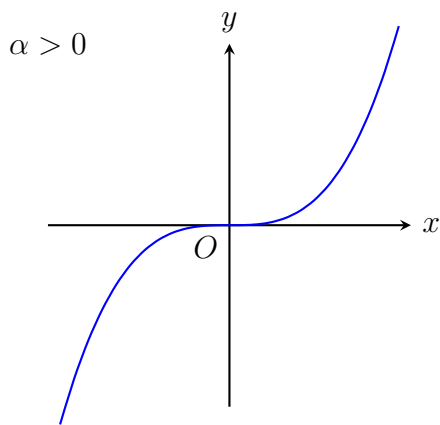
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



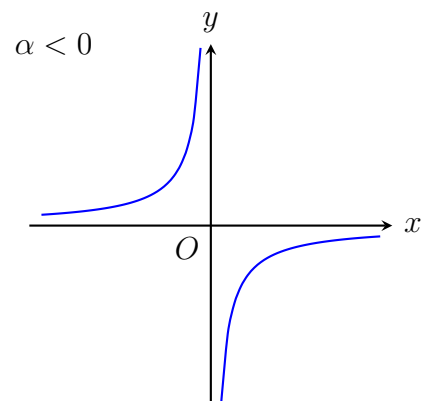
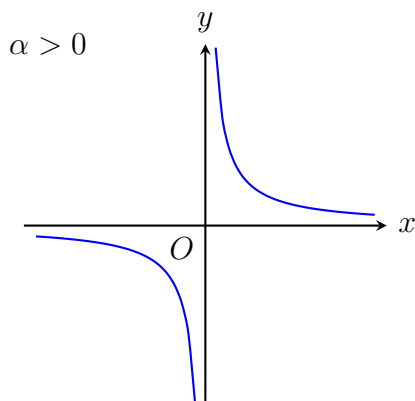
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$



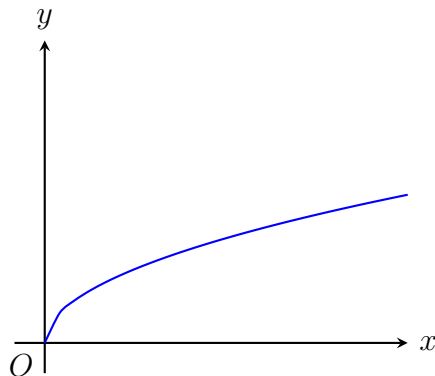
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3, \alpha \neq 0$



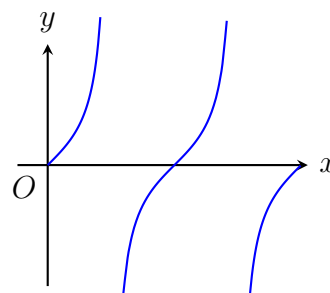
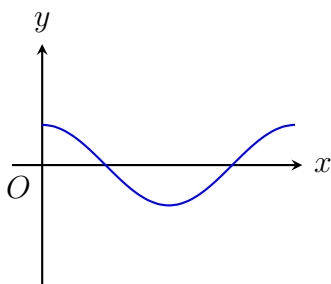
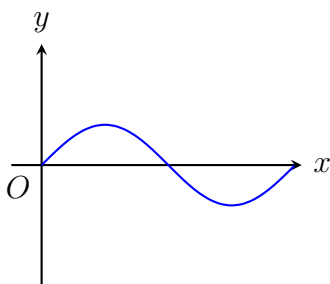
Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$ και $D_f = \mathbb{R}^*$



Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$ και $D_f = [0, +\infty)$



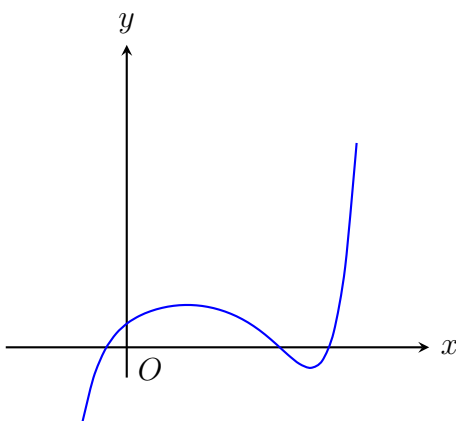
Η τριγωνομετρική συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \varepsilon\varphi x$



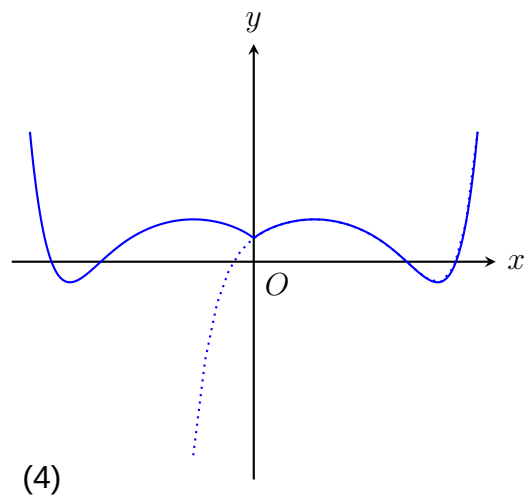
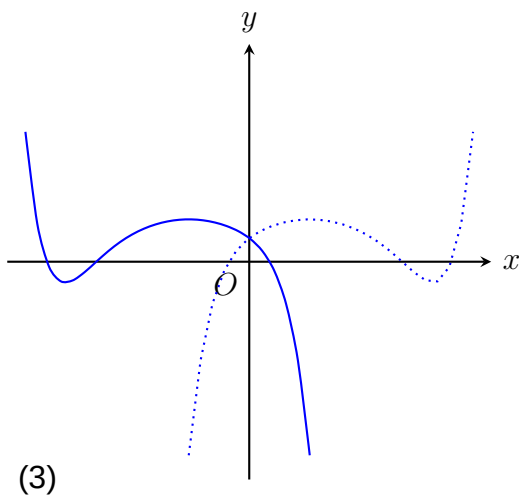
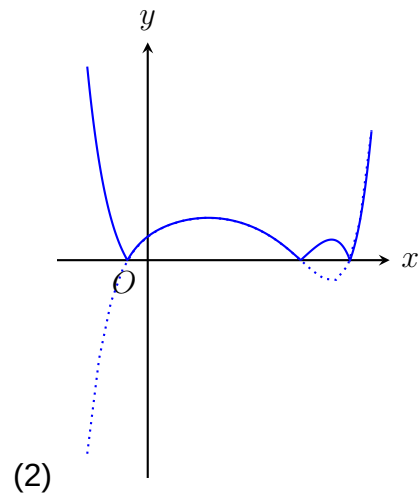
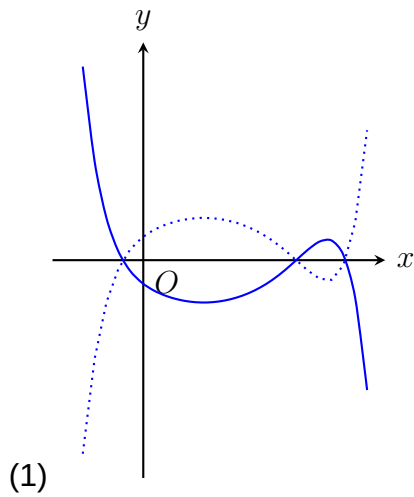
Τέλος, γνωρίζοντας την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (δηλαδή την C_f), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε αυτές τις περιπτώσεις, έστω υπάρχει $f(x)$:

1. $-f(x)$
2. $|f(x)|$
3. $f(-x)$ (εφόσον $-x \in D_f$)
4. $f(|x|)$ (εφόσον $|x| \in D_f$)

Άρα έστω η παρακάτω γραφική παράσταση συνάρτησης, C_f :

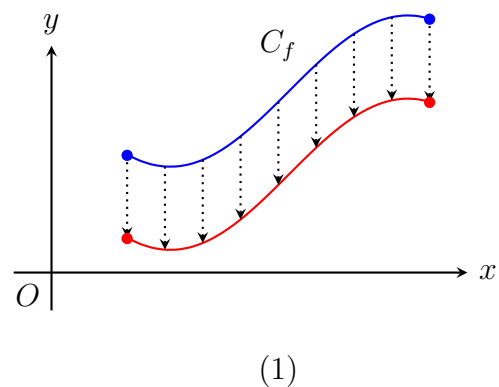
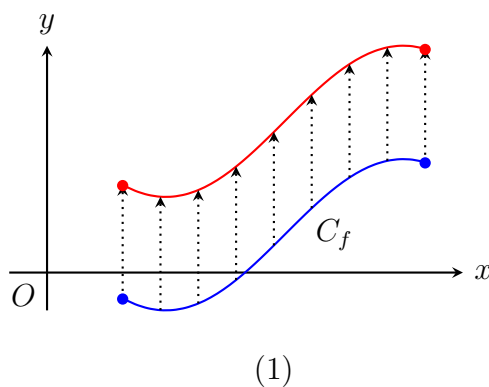


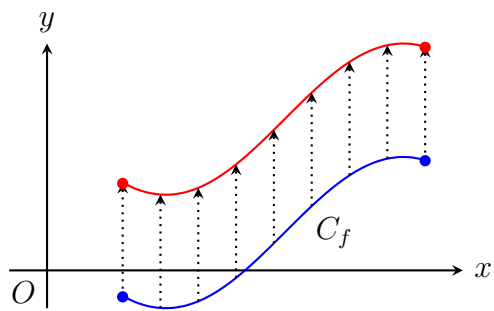
Μπορούμε να σχεδιάσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:



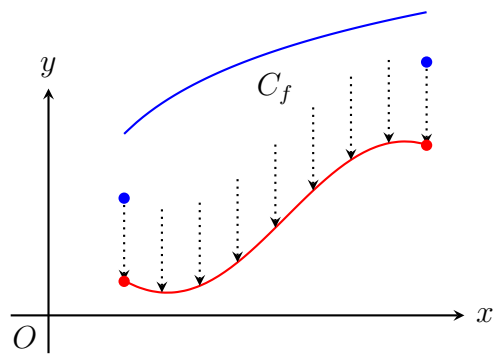
ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι αυτό που δόθηκε στο C_f , τότε: Οι δύο τελευταίες γραφικές παραστάσεις ((3),(4)) **δεν** αναπαριστώνται στο πεδίο ορισμού που έχει δοθεί για το C_f .

Επιπλέον, η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση γίνεται ως εξής:





(1)



(1)