Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θεωρία & Συνοπτική Μεθοδολογία

Μόνο για Επανάληψη.

Επισήμανση στην θεωρία:

- **Σταθερές Μεταβλητές:**
  - $e = 2.71\ldots$
  - $\pi = 3.14\ldots$
- **Ο φυσικός λογάριθμος είναι ο λογάριθμος με βάση "e":**

$$\ln\theta = \log_e\theta$$

- **Βασική ιδιότητα του λογάριθμου:**

$$\log_\alpha\theta = x \iff \alpha^x = \theta$$

- **Σύνολα Αριθμών:**

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

  - $\mathbb{N}$: Φυσικοί αριθμοί.
    - Δηλαδή $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z}$: Ακέραιοι Αριθμοί.
    - Δηλαδή $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
  - $\mathbb{Q}$: Ρητοί αριθμοί
    - Δηλαδή όλοι οι αριθμοί που μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα κλάσμα ακέραιων αριθμών.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

  - $\mathbb{R}$: Πραγματικοί αριθμοί
    - Δηλαδή $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$Άρρητοι αριθμοι
  - **Αξίζει να σημειωθεί** πως ο αστερίσκος στα σύνολα των αριθμών συμβολίζει το παρακάτω:
    - $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$
    - $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$
    - $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
    - $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- **Διαστήματα:**
  - $x \in (\alpha, \beta) \iff \alpha < x < \beta$
  - $x \in [\alpha, \beta) \iff \alpha \leq x < \beta$
  - $x \in (\alpha, \beta] \iff \alpha < x \leq \beta$
  - $x \in [\alpha, \beta] \iff \alpha \leq x \leq \beta$

- **Ιδιότητες Ανισοτήτων:**
    - Για $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και έστω $\gamma \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha < \beta \iff \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

$$\alpha < \beta \iff \alpha - \gamma < \beta - \gamma$$

    - Για $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχουμε:
        - Για κάθε $\gamma > 0$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

        - Για κάθε $\gamma < 0$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

    - Επιτρέπεται η πρόσθεση κατά μέλη (**ΜΟΝΟ** για την **ίδια** ανισοτική φορά). Η “αφαίρεση” μπορεί να γίνει μόνο με τα παρακάτω βήματα. Έστω $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$:

        1. Πολλαπλασιάζω με το -1:

$$\alpha < \beta \iff -\alpha > -\beta$$

        2. Προσθέτω κατά μέλη:

$$-\beta < -\alpha, \quad \gamma < \delta \implies \gamma - \beta < \delta - \alpha$$

    - Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^\nu < \beta^\nu \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

    - Αν όμως $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^{2\nu+1} < \beta^{2\nu+1} \text{ όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

    Ουσιαστικά, το $2\nu+1 =$ περιττός αριθμός. Άρα θα μπορούμε να πούμε $\nu \in \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

    - Άν $\alpha, \beta \gtrless 0$ (δηλαδή α, β ομόσημα):

$$\alpha \gtrless \beta \iff \frac{1}{\alpha} \lessgtr \frac{1}{\beta}$$

Ενότητα 1

Κεφάλαιο 1.2

Ορισμός Συνάρτησης

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμου το A μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

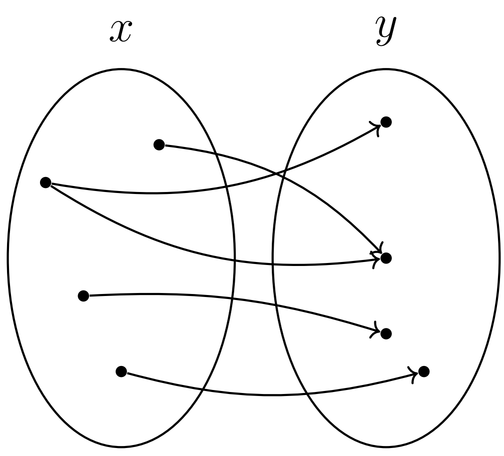
Συμβολικά τον παραπάνω ορισμό τον γράφουμε:

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$
$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

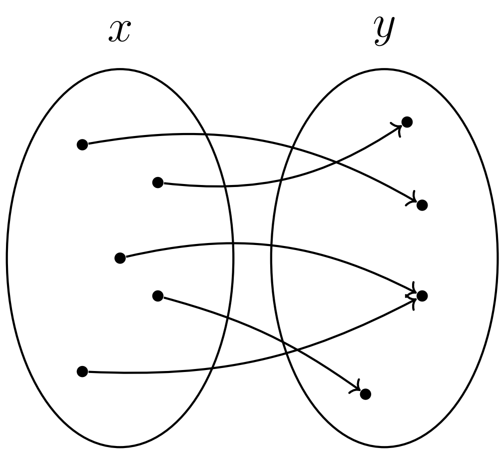
- x : ανεξάρτητη μεταβλητή
  y : εξαρτημένη μεταβλητή
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ορίζεται και ως $A = D_f$
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$ (ή $f(D_f)$). Είναι δηλαδή:

  $$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

  (Ο λόγος που λέει για κάποιο και όχι για κάθε είναι γιατί τότε θα εννοούσε ότι το ίδιο y είναι αποτέλεσμα της f για όλα τα x στο A. Δηλαδή πως η f είναι σταθερή ($f(x) = y$ για κάθε $x \in A$). Αυτό προφανώς δεν ισχύει για τις περισσότερες συναρτήσεις.)



Δεν είναι συνάρτηση.



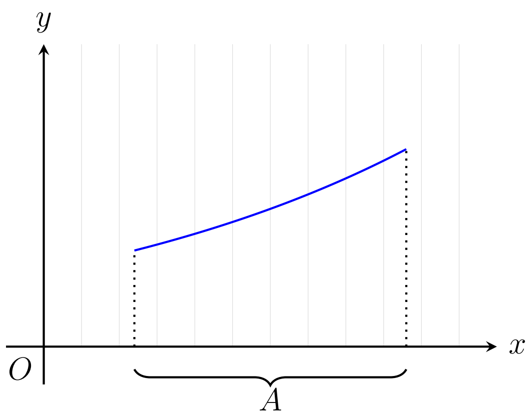
Είναι συνάρτηση.

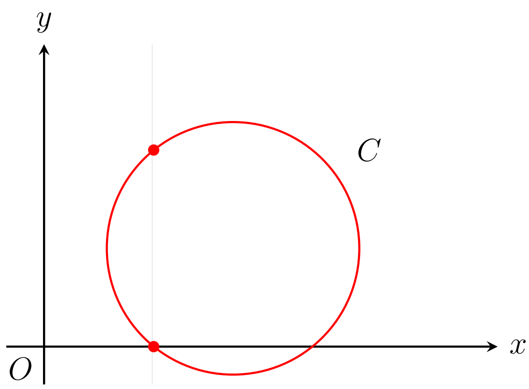
Συνάρτηση	**Περιορισμός**
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)}, \nu \in \mathbb{N}^* - 1$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \ln(P(x))$	$P(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\varphi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\varphi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = (P(x))^{Q(x)}$	$P(x) > 0$ ή ($P(x) = 0$ και $Q(x) > 0$) ή ($P(x) < 0$ και $Q(x) \in \mathbb{Z}$)

Ορισμός Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμου A και Oxy ενα συστημα συντενταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y), x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται με C_f.

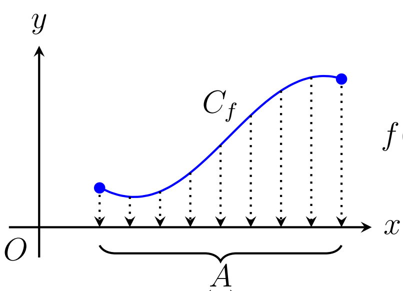
Από τον ορισμό της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης, μπορούμε να αναπαραστήσουμε ποια είναι η συνάρτηση και ποια όχι. (Ο κυκλος δεν είναι συνάρτηση, καθώς τουλάχιστον ένα x αντιστοιχεί σε παραπάνω απο ένα y)



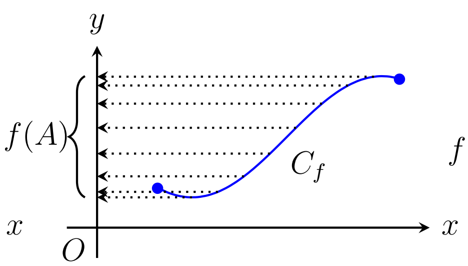


Έτσι από την γραφική παράσταση της C_f μπορούμε να συμπαιράνουμε:

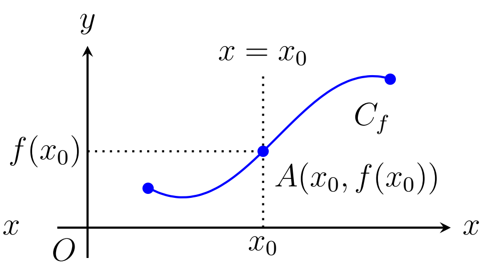
1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.
2. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.
3. Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f.



(1)



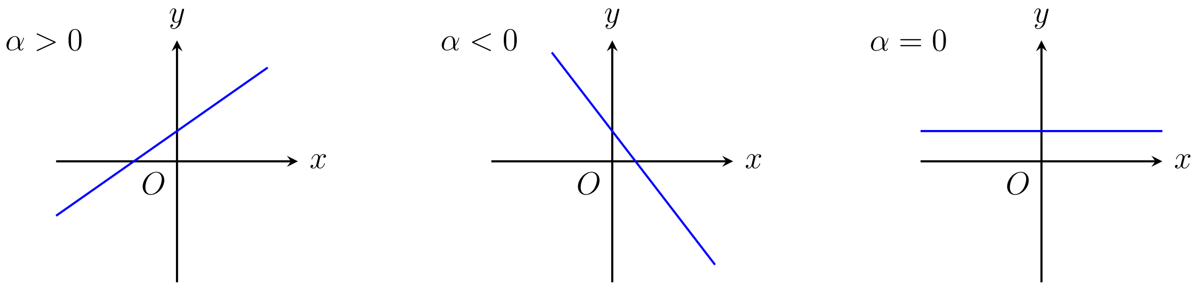
(2)



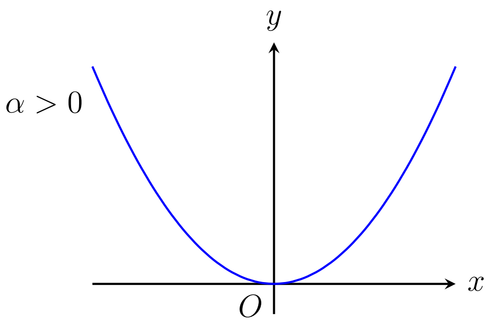
(3)

Κάποιες βασικές συναρτήσεις είναι:

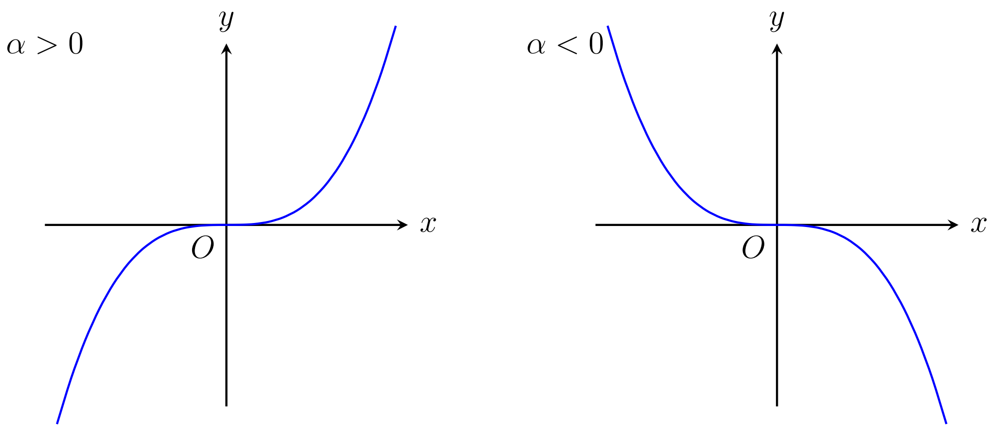
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



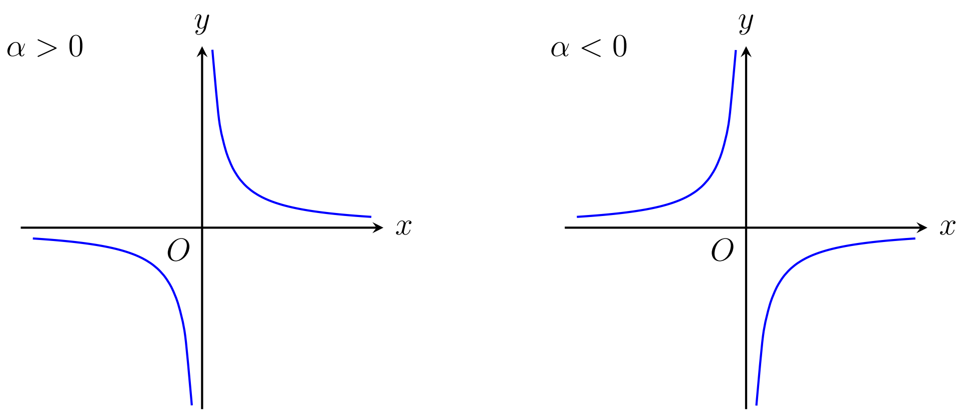
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$



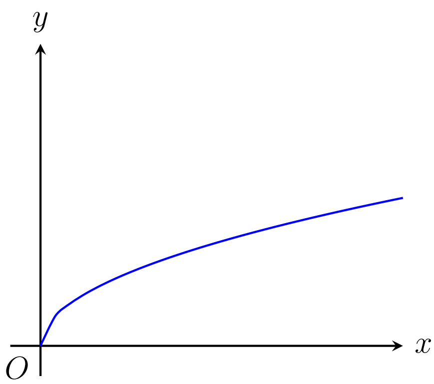
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3, \alpha \neq 0$



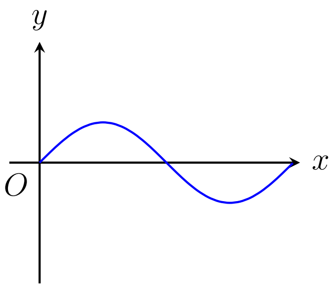
Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$ **και** $D_f = \mathbb{R}^*$

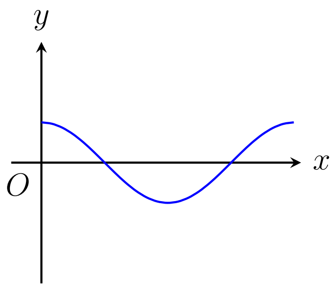


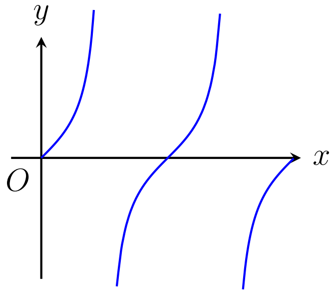
Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, \alpha \neq 0$ **και** $D_f = [0, +\infty)$



Η τριγωνομετρική συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x, f(x) = \sigma\upsilon\nu x, f(x) = \varepsilon\varphi x$



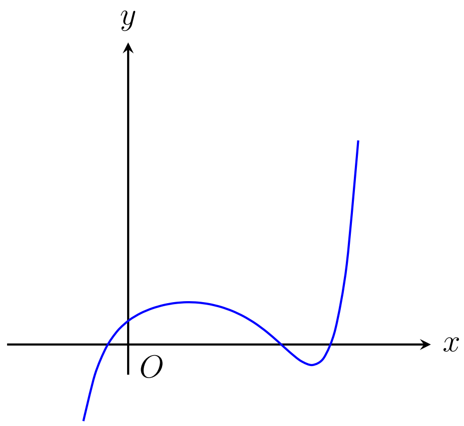




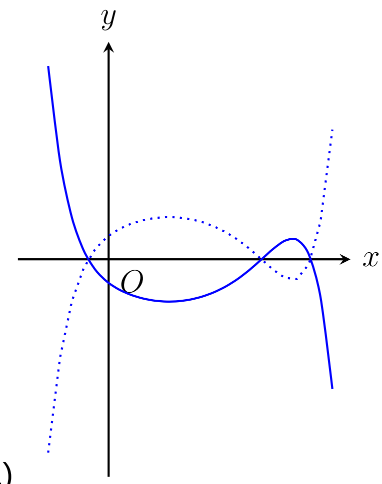
Τέλος, γνωρίζοντας την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (δηλαδή την C_f), μπορούμαι εύκολα να υπολογίσουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε αυτές τις περιπτώσεις, έστω υπάρχει $f(x)$:

1. $-f(x)$
2. $|f(x)|$
3. $f(-x)$ (εφόσον $-x \in D_f$)
4. $f(|x|)$ (εφόσον $|x| \in D_f$)

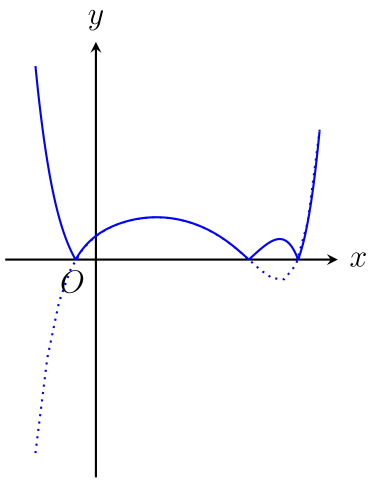
Άρα έστω η παρακάτω γραφική παράσταση συνάρτησης, C_f:



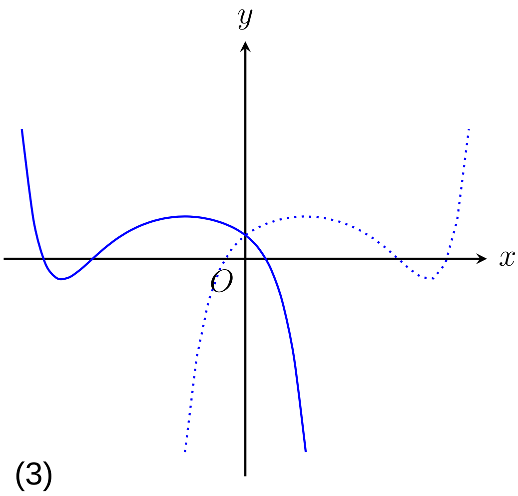
Μπορούμαι να σχεδιάσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:



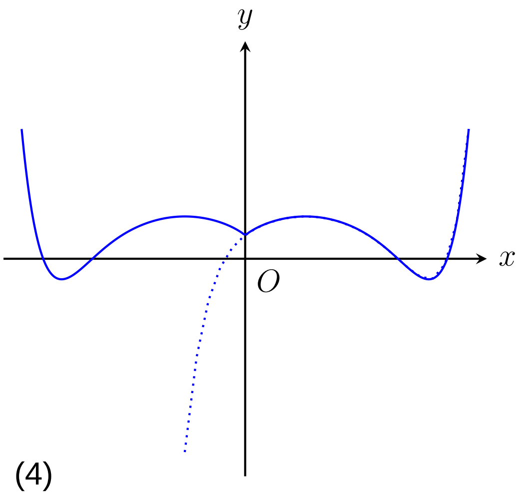
(1)



(2)



(3)

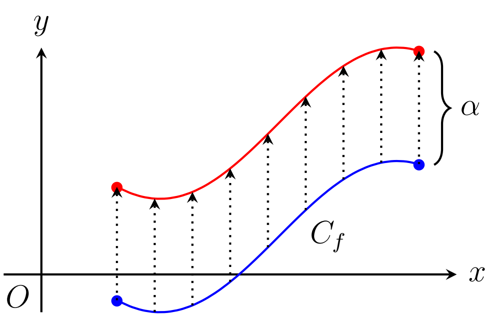


(4)

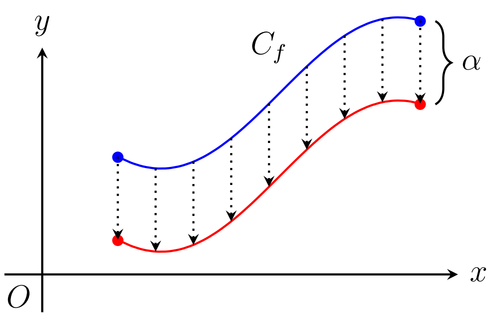
ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι αυτό που δόθηκε στο C_f, τότε: Οι δύο τελευταίες γραφικές παραστάσεις ((3),(4)) ***δεν*** αναπαριστώνται στο πεδίο ορισμού που έχει δοθεί για το C_f.

- Μετατόπιση Συνάρτησης

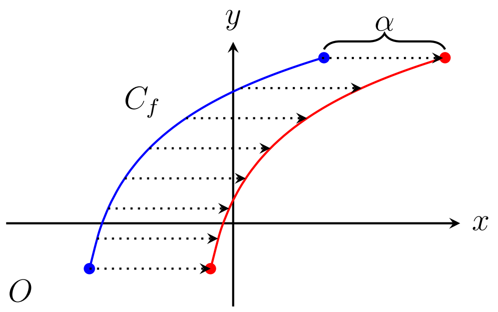
Επιπλέον, η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση γίνεται ως εξής:
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, και η γραφική παράσταση της C_f. Επίσης έστω $\alpha \in \mathbb{R}$.



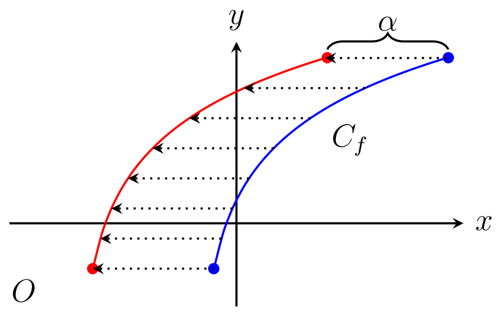
$f(x) + \alpha$, όταν $\alpha > 0$



$f(x) + \alpha$, όταν $\alpha < 0$



$f(x+\alpha)$, όταν $\alpha > 0$



$f(x+\alpha)$, όταν $\alpha < 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Για να ισχύοουν τα δύο τελευταία παραδείγματα πρέπει $x+\alpha \in A$, όπου A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

- Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** όταν ισχύει

$$f(-x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x, -x \in A.$$

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **περιττή** όταν ισχύει

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{για κάθε } x, -x \in A.$$

Παρατηρήσεις:

- Για να έχει νόημα να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, το πεδίο ορισμού A πρέπει να είναι **συμμετρικό** ως προς το 0, δηλαδή:

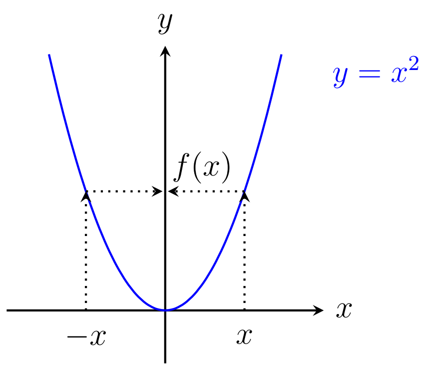
$$x \in A \implies -x \in A.$$

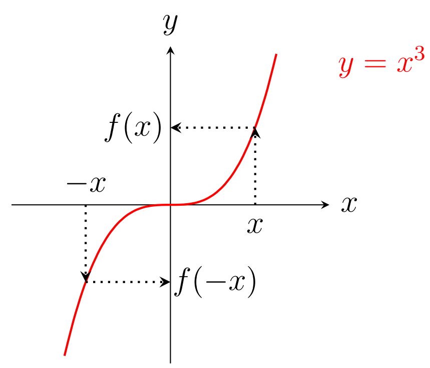
- Γραφικά:
  - Μια άρτια συνάρτηση έχει **άξονα συμμετρίας τον άξονα** y.
  - Μια περιττή συνάρτηση έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή** $O(0,0)$.
- Παραδείγματα:

$$f(x) = x^2 \quad \text{(άρτια)}, \qquad g(x) = x^3 \quad \text{(περιττή)}.$$

- Καμία συνάρτηση δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή, εκτός από τη μηδενική $f(x) = 0$.

Γραφικές Παραστάσεις:





- Ισότητα Συναρτήσεων

Ορισμός Ισότητας Συνάρτησης (σελ.23)

Δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ λέγονται **ίσες** όταν ισχύουν τα εξής:

1. Τα πεδία ορισμού τους είναι ίσα: $A = B$
2. και για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x) = g(x)$

Παρατηρήσεις:

- Αν τα πεδία ορισμού διαφέρουν, τότε οι συναρτήσεις **δεν** θεωρούνται ίσες, ακόμη κι αν έχουν ίδιους τύπους τύπου (π.χ. $f(x) = x^2$ με $A = \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2$ με $B = [0, +\infty)$ δεν είναι ίσες).
- Για να αποδείξουμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ίσες, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ίδιες τιμές για κάθε x (δηλάδή αρκεί να δείξουμε ότι έχουν και τον ίδιο τύπο).

Πράξεις Συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις για $x \in A \cap B$:

- **Άθροισμα:**
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
- **Διαφορά:**
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
- **Γινόμενο:**
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
- **Λόγος (πηλίκο):**
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{για } x \in A \cap B \text{ και } g(x) \neq 0$$

Παρατηρήσεις:

- Το πεδίο ορισμού κάθε πράξης είναι τομή των πεδίων ορισμού $A \cap B$, με επιπλέον περιορισμούς όπου χρειάζεται (π.χ. στο πηλίκο: $g(x) \neq 0$).
- Οι πράξεις συναρτήσεων κληρονομούν ιδιότητες από τις πράξεις αριθμών:
  - $(f + g)(x) = (g + f)(x)$ (αντιμεταθετική ιδιότητα),
  - $(f \cdot g)(x) = (g \cdot f)(x)$,
  - $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$ (προσεταιριστική ιδιότητα),
  - $(f \cdot (g + h))(x) = f \cdot g(x) + f \cdot h(x)$ (διανεμητική ιδιότητα).

Παράδειγμα: Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 1$, τότε:

$$(f + g)(x) = x^2 + (x + 1) = x^2 + x + 1,$$
$$(f \cdot g)(x) = x^2(x + 1) = x^3 + x^2.$$