Μαθηματικά Γ’ Λυκείου

Θεωρία & Συνοπτική Μεθοδολογία
Μόνο για Επανάληψη.

Επισήμανση στην θεωρία:

- **Σταθερές Μεταβλητές:**
  - $e = 2.71\ldots$
  - $\pi = 3.14\ldots$
- **Ο φυσικός λογάριθμος είναι ο λογάριθμος με βάση “e”:**

$$\ln\theta = \log_e\theta$$

- **Βασική ιδιότητα του λογάριθμου:**

$$\log_\alpha\theta = x \iff \alpha^x = \theta$$

- **Σύνολα Αριθμών:**

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

  - $\mathbb{N}$: Φυσικοί αριθμοί.
    - Δηλαδή $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z}$: Ακέραιοι Αριθμοί.
    - Δηλαδή $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
  - $\mathbb{Q}$: Ρητοί αριθμοί
    - Δηλαδή όλοι οι αριθμοί που μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα κλάσμα ακέραιων αριθμών.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

  - $\mathbb{R}$: Πραγματικοί αριθμοί
    - Δηλαδή $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$Άρρητοι αριθμοι
  - **Αξίζει να σημειωθεί** πως ο αστερίσκος στα σύνολα των αριθμών συμβολίζει το παρακάτω:
    - $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$
    - $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$
    - $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
    - $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- **Διαστήματα:**
  - $x \in (\alpha, \beta) \iff \alpha < x < \beta$
  - $x \in [\alpha, \beta) \iff \alpha \leq x < \beta$
  - $x \in (\alpha, \beta] \iff \alpha < x \leq \beta$
  - $x \in [\alpha, \beta] \iff \alpha \leq x \leq \beta$

- **Ιδιότητες Ανισοτήτων:**
  - Για $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και έστω $\gamma \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha < \beta \iff \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

$$\alpha < \beta \iff \alpha - \gamma < \beta - \gamma$$

  - Για $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχουμε:
    - Για κάθε $\gamma > 0$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

    - Για κάθε $\gamma < 0$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

  - Επιτρέπεται η πρόσθεση κατά μέλη (**ΜΟΝΟ** για την **ίδια** ανισοτική φορά). Η “αφαίρεση” μπορεί να γίνει μόνο με τα παρακάτω βήματα. Έστω $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$:
    1. Πολλαπλασιάζω με το -1:

$$\alpha < \beta \iff -\alpha > -\beta$$

    2. Προσθέτω κατά μέλη:

$$-\beta < -\alpha, \quad \gamma < \delta \implies \gamma - \beta < \delta - \alpha$$

  - Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^\nu < \beta^\nu \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

  - Αν όμως $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^{2\nu+1} < \beta^{2\nu+1} \text{ όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

  Ουσιαστικά, το $2\nu+1 =$ περιττός αριθμός. Άρα θα μπορούμε να πούμε $\nu \in \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
  - Άν $\alpha, \beta \gtrless 0$ (δηλαδή α, β ομόσημα):

$$\alpha \gtrless \beta \iff \frac{1}{\alpha} \lessgtr \frac{1}{\beta}$$

Ενότητα 1

Κεφάλαιο 1.2

Ορισμός Συνάρτησης

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμου το A μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

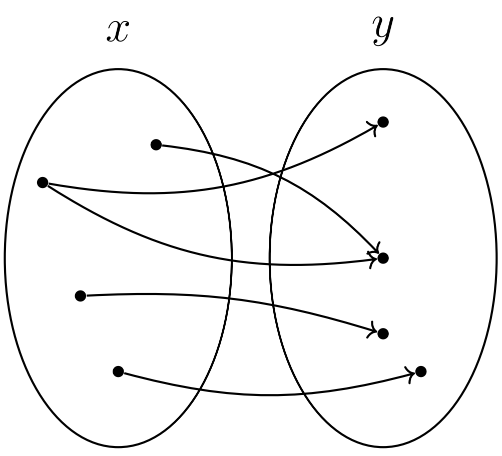
Συμβολικά τον παραπάνω ορισμό τον γράφουμε:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to \mathbb{R} \\ x &\xrightarrow{f} y = f(x) \end{aligned}$$

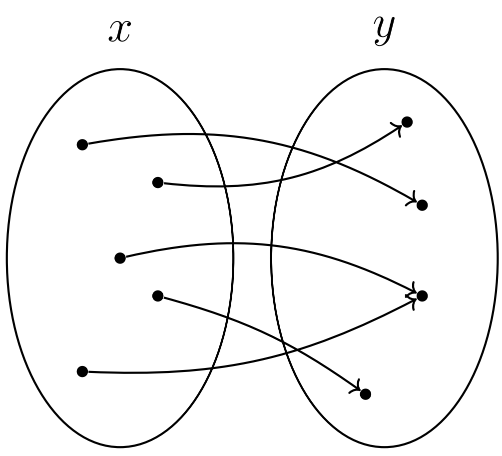
- x : ανεξάρτητη μεταβλητή
  y : εξαρτημένη μεταβλητή
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ορίζεται και ως $A = D_f$
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$ (ή $f(D_f)$). Είναι δηλαδή:

  $$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

  (Ο λόγος που λέει για κάποιο και όχι για κάθε είναι γιατί τότε θα εννοούσε ότι το ίδιο y είναι αποτέλεσμα της f για όλα τα x στο A. Δηλαδή πως η f είναι σταθερή ($f(x) = y$ για κάθε $x \in A$). Αυτό προφανώς δεν ισχύει για τις περισσότερες συναρτήσεις.)



Δεν είναι συνάρτηση.



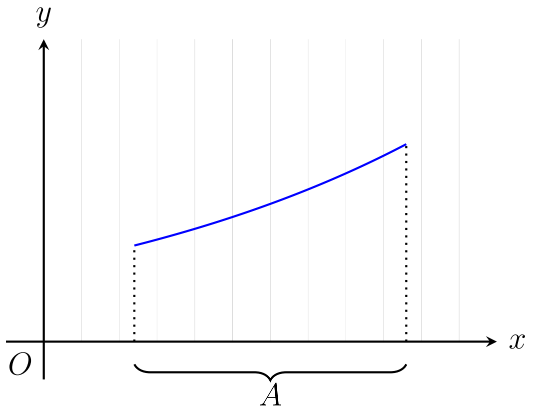
Είναι συνάρτηση.

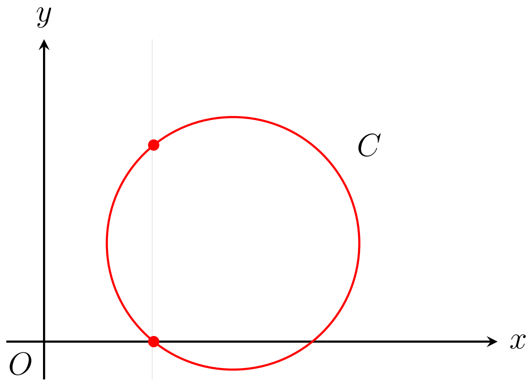
Συνάρτηση	**Περιορισμός**
$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}, \nu\in\mathbb{N}^*-1$	$P(x)\geq 0$
$f(x)=\ln(P(x))$	$P(x)>0$
$f(x)=\varepsilon\varphi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$
$f(x)=\sigma\varphi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$
$f(x)=(P(x))^{Q(x)}$	$P(x)>0$ ή ($P(x)=0$ και $Q(x)>0$) ή ($P(x)<0$ και $Q(x)\in\mathbb{Z}$)

Ορισμός Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμου A και Oxy ενα συστημα συντενταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y), x\in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται με C_f.

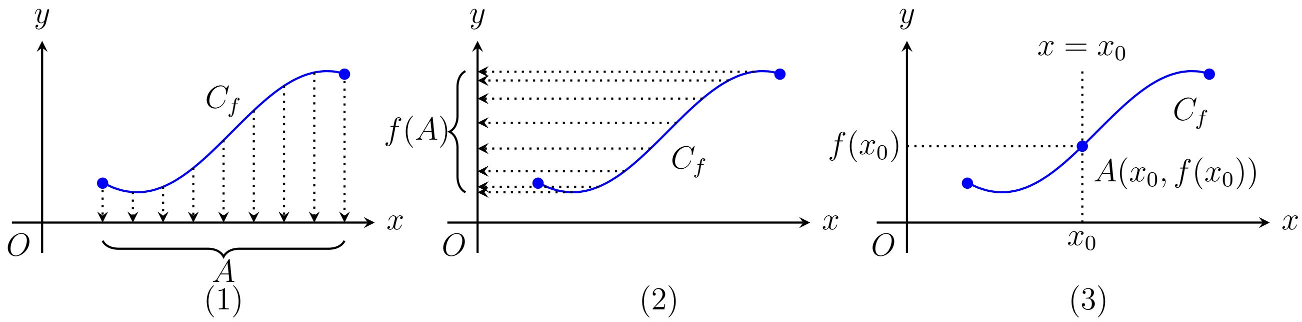
Από τον ορισμό της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης, μπορούμε να αναπαραστήσουμε ποια είναι η συνάρτηση και ποια όχι. (Ο κυκλος δεν είναι συνάρτηση, καθώς ένα x αντιστοιχεί σε παραπάνω απο ένα y)





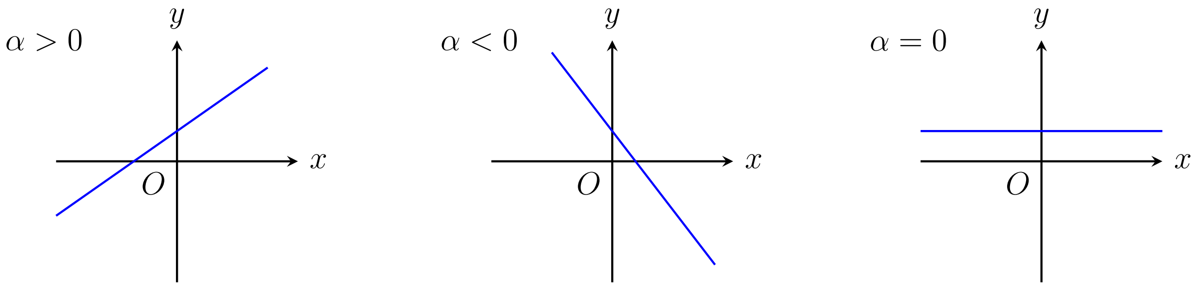
Έτσι από την γραφική παράσταση της C_f μπορούμε να συμπαιράνουμε:

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.
2. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.
3. Η τιμή της f στο $x_0\in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x=x_0$ και της C_f.

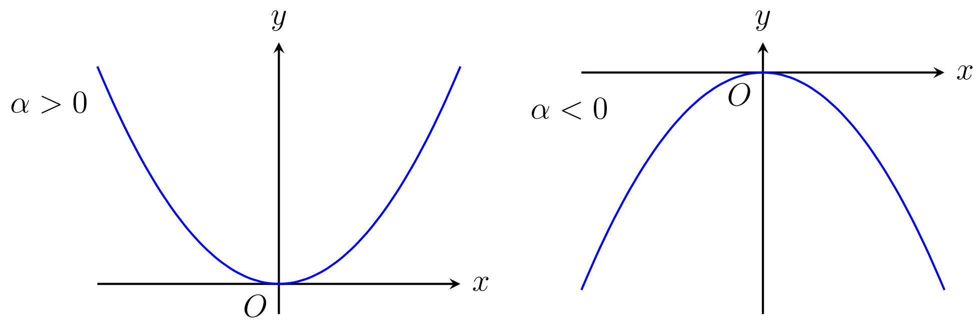


Κάποιες βασικές συναρτήσεις είναι:

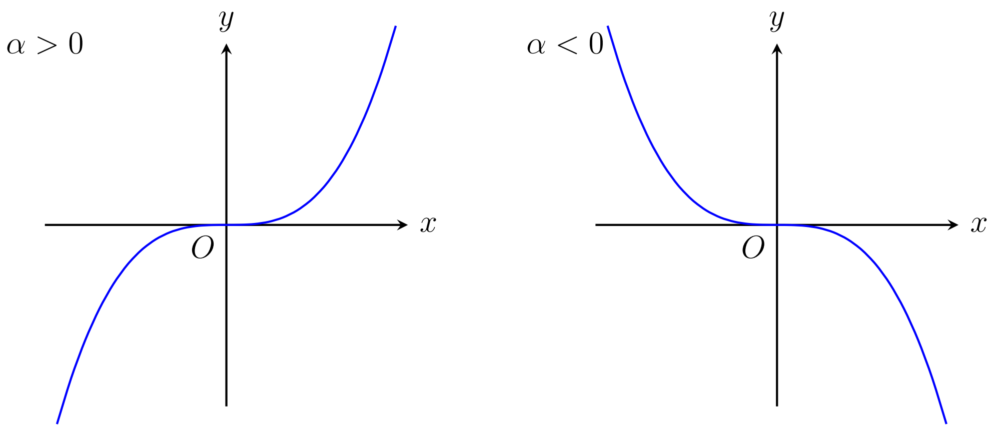
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



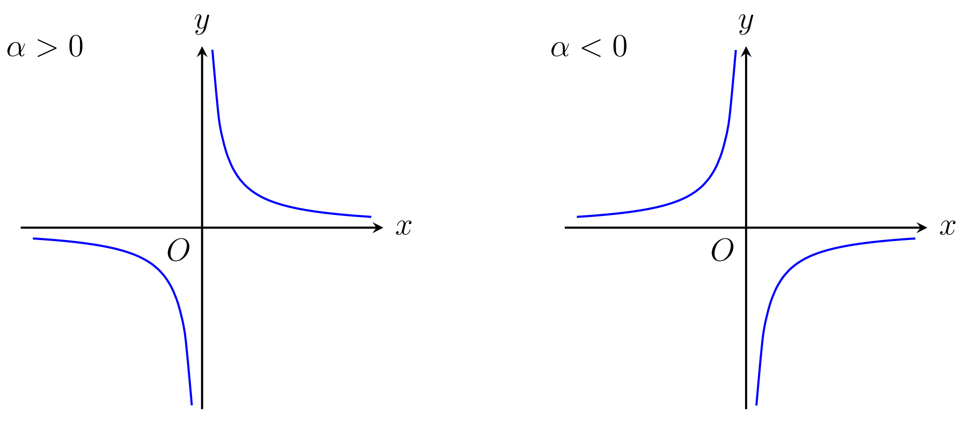
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$



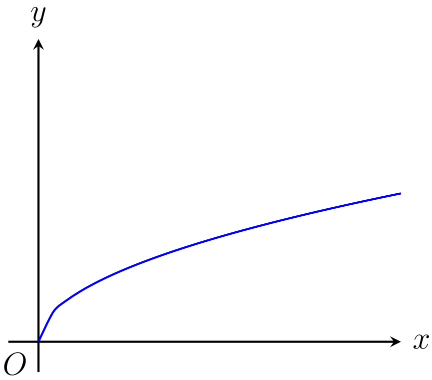
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3, \alpha \neq 0$



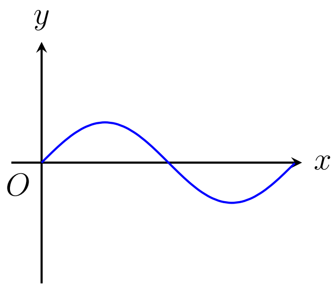
Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$ **και** $D_f = \mathbb{R}^*$

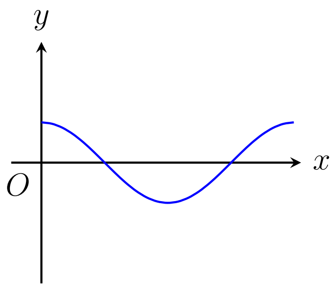


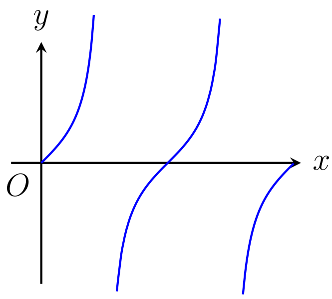
Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, \alpha \neq 0$ **και** $D_f = [0, +\infty)$



Η τριγωνομετρική συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x, f(x) = \sigma\upsilon\nu x, f(x) = \varepsilon\varphi x$



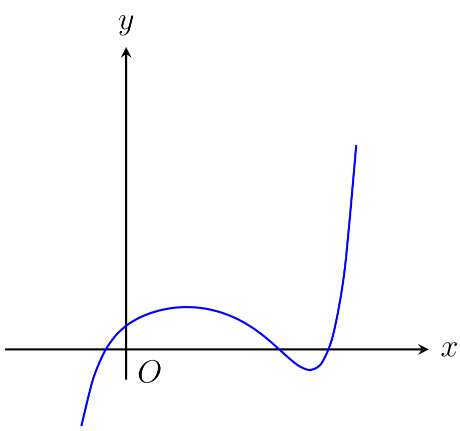




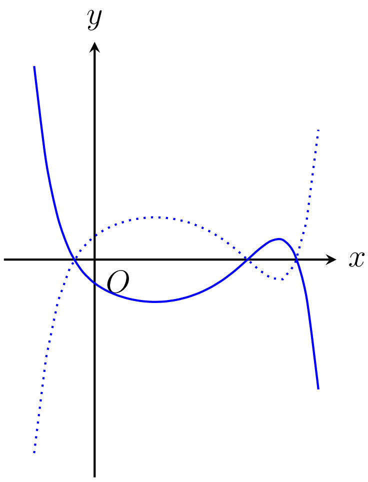
Τέλος, γνωρίζοντας την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (δηλαδή την C_f), μπορούμαι εύκολα να υπολογίσουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε αυτές τις περιπτώσεις, έστω υπάρχει $f(x)$:

1. $-f(x)$
2. $|f(x)|$
3. $f(-x)$ (εφόσον $-x \in D_f$)
4. $f(|x|)$ (εφόσον $|x| \in D_f$)

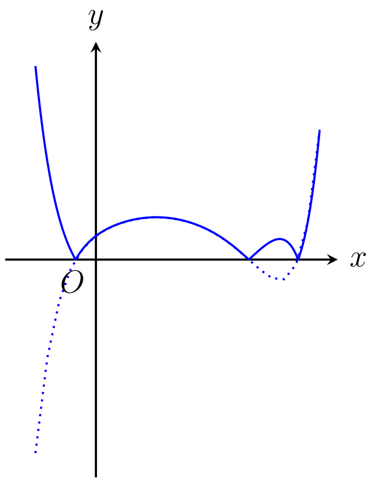
Άρα έστω η παρακάτω γραφική παράσταση συνάρτησης, C_f:



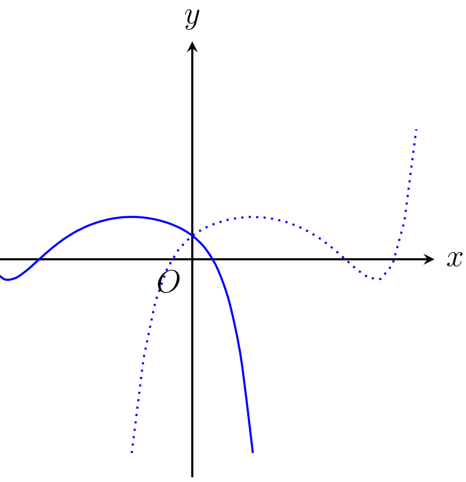
Μπορούμαι να σχεδιάσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:



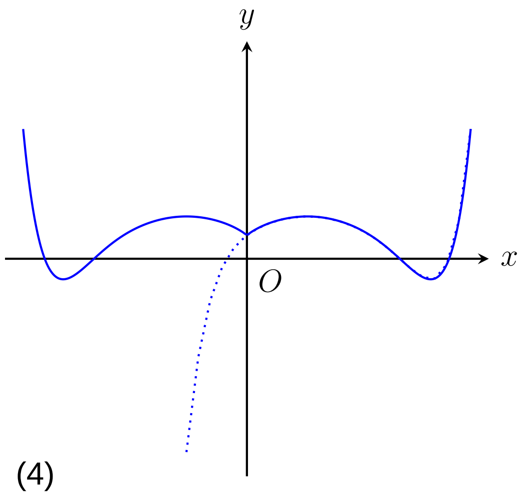
(1)



(2)



(3)



(4)

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι αυτό που δόθηκε στο C_f, τότε: Οι δύο τελευταίες γραφικές παραστάσεις ((3),(4)) ***δεν*** αναπαριστώνται στο πεδίο ορισμού που έχει δοθεί για το C_f.