Ψηφιακά Φίλτρα
8ο Εξάμηνο

Εργασία 1

Μπεκιάρης Θεοφάνης ΑΕΜ:8200

<u>Ερώτημα 1</u>

Ο πίνακα αυτοσυσχέτισης **R** του σήματος $u(n)$ και το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης **p** υπολογίστηκαν στο χέρι όπως φαίνεται στις παρακάτω φωτογραφίες.

Εχουμε: $u(n) = 0,25u(n-1) - 0,12u(n-2) + v(n)$

$$E[u(n)\cdot u(n-k)] = 0,25E[u(n-1)\cdot u(n-k)] - 0,12E[u(n-2)u(n-k)] + E[u(n)v(n)]$$

$$r(k) = 0,25r(k-1) - 0,12r(k-2) + r_{uv}$$

Οπου
$$r_{uv} = \begin{cases} \sigma_v^2 = 0,32, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Για $k=0,1,2$ προκύπτει σύστημα με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους:

$$r(0) = 0,25r(1) - 0,12r(2) + \sigma_v^2, \quad k=0$$
$$r(1) = 0,25r(0) - 0,12r(1), \quad k=1$$
$$r(2) = 0,25r(1) - 0,12r(0), \quad k=2$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0,12 \\ -0,25 & 1,12 & 0 \\ 0,12 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3417 \\ 0,0763 \\ -0,0219 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) \\ r(1) & r(0) & r(1) \\ r(2) & r(1) & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3417 & 0,0763 & -0,0219 \\ 0,0763 & 0,3417 & 0,0763 \\ -0,0219 & 0,0763 & 0,3417 \end{bmatrix}$$

Ισχυει:

$$d(n) = x(n) + \upsilon(n)$$

Αρα

$$p(-k) = E[u(n-k)\,d(n)] = E[u(n-k)\,x(n)] + E[u(n-k)\,\upsilon(n)]$$
$$= r_{ux}(-k) + r_{u\upsilon}(-k)$$

$$r_{u\upsilon} = \begin{cases} \sigma_\upsilon^2 & , k=0 \\ 0 & , k\neq 0 \end{cases}$$

$$r_{ux}(-k) = E[u(n-k)\,x(n)] = E[(u(n-k-1) + u(n-k-2) + \upsilon(n-k))\cdot x(n)]$$
$$= r_{ux}(k+1) + r_{ux}(k+2) + \cancel{r_{\upsilon x}} \rightarrow 0 \text{ (Ασυσχέτιστα)}$$

Ισοδύναμα:

$$r_{ux}(k) = r_{ux}(-k+1) + r_{ux}(-k+2)$$

Για τιμές $k=0,1,2$ είναι

$$\left.\begin{aligned} r_{ux}(0) &= r_{ux}(1) + r_{ux}(2) \\ r_{ux}(1) &= r_{ux}(0) + r_{ux}(1) \\ r_{ux}(2) &= r_{ux}(1) + r_{ux}(0) \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} & r_{ux}(0) = r_{ux}(1) = r_{ux}(2) = 0 \text{ ή} \\ & r_{ux}(0) = r_{ux}(-1) = r_{ux}(-2) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως

$$p(0) = r_{ux}(0) + r_{u\upsilon}(0) = 0 + \sigma_\upsilon^2 = 0{,}32$$
$$p(-1) = r_{ux}(1) + r_{u\upsilon}(1) = 0 + 0 = 0$$
$$p(-2) = r_{ux}(2) + r_{u\upsilon}(2) = 0 + 0 = 0$$

$$\underline{p} = [p(0)\ \ p(-1)\ \ p(-2)]^T = [0{,}32\ \ 0\ \ 0]^T$$

Οι συντελεστές του φίλτρου *Wiener* (**w**o) με την βοηθεια της εξίσωσης **R*w=p** και την χρήση του matlab προκύπτουν:

w=[1 -0.25 0.12]

Για το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα *Jmin* θα το υπολογίσουμε με την βοήθεια του προγράμματος Matlab με την χρήση των προηγούμενων αποτελεσμάτων και του παρακάτω τύπου:

$$\text{Jmin} = \sigma_d^2 - \underline{p}^T R^{-1} \underline{p}$$

Για γρήγορη και ορθή εκτέλεση των πράψεων μεταξύ των πινάκων εκτελούμε το δέυτερο μέρος της εξίσωσης με την βοήθεια του matlab και προκύπτει οτι είναι ισο με 0.32

Η διακύμανση του σήματος d(n) που αποτελεί τον πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης θα την υπολογίσουμε με το χέρι όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\sigma_d^2 = E[d(n)\cdot d(n)] = E[(x(n)+U(n))\cdot(x(n)+U(n))]$$

$$= E[x(n)\cdot x(n)] + \underbrace{E[\cancel{x(n)U(n)}]}_{\to 0} + \underbrace{E[\cancel{U(n)}x(n)]}_{\to 0} + E[U(n)U(n)]$$

$$= E[x^2(n)] + \sigma_U^2$$

$$E(x^2(n)) = E\left[A^2(n)\cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{8} n + \phi\right)\right]$$

A ανεξαρτητη απο το ημιτονο

$$= E[A^2(n)]\cdot E\Big[\underbrace{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{4} n + 2\phi\right)}_{\text{Τριγωνομετρική ταυτότητα}}\Big]$$

$$= \sigma_A^2\cdot\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{E\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} n + 2\phi\right)\right]}_{0}\Big)$$

Αρα τελικα εχουμε:

$$\sigma_d^2 = \sigma_A^2/2 = 0{,}15/2$$

$$\sigma_d^2 = 0{,}075$$

Τελικά απο τα παραπάνω η ελάχιστη τιμή είναι ίση με

$$J_{min}=0.075-0.32$$

$$J_{min}= -0.245$$

STABILIT Y CONDITION

Σχετικά με την τιμή **μ** του αλγόριθμου ***Steepest descent*** ισχύει ότι:

$$\mathbf{0< \mu< 2/\lambda_{max}}$$

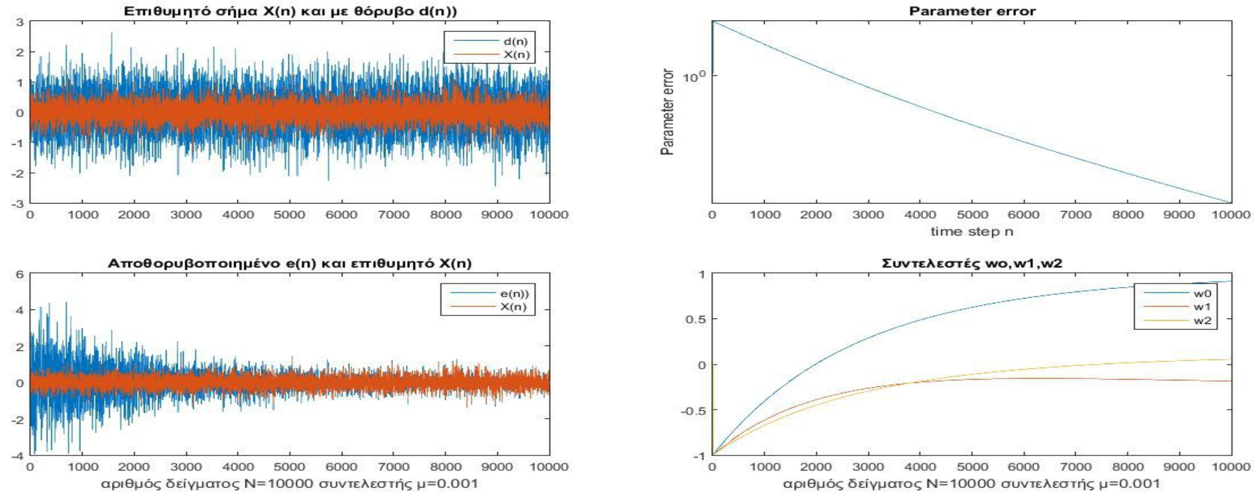
όπου $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ η μέγιστη ιδιοτημή του πίνακα R.
Με την βοήθεια της συνάρτησης eig(R) του matlab οι ιδιοτημές του πίνακα προκύπτουν $\lambda 1=0.2223$, $\lambda 2=0.3636$ και $\lambda 3=0.4392$ επομένως $\boldsymbol{\lambda_{max}} = 0.4392$ και τελικά :

$$\mathbf{0< \mu< 4.55}$$

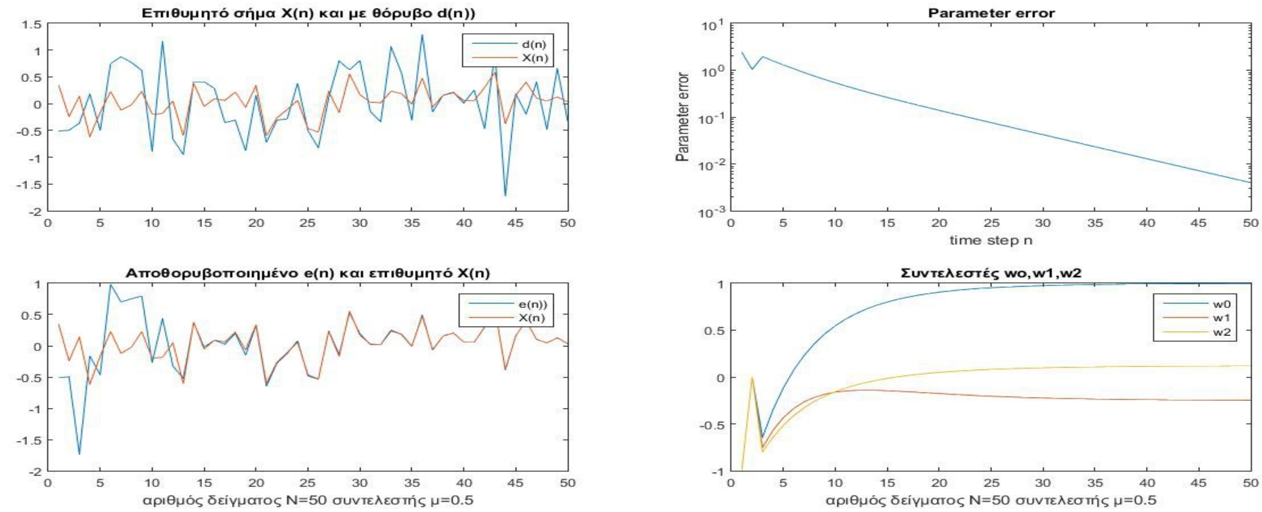
Ερώτημα 2

Το παραπάνω σύστημα με τις αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν μοντελοποιείται σε κώδικα Matlab ο οποίος βρίσκεται στον φάκελο susthma_erwthma2.Στον κώδικα δημιουργούμε τα σήματα A(n),X(n),U(n),d(n) και εισάγοντας τα αποτελέσματα που βρίκαμε απο τα προηγούμενα για τους πίνακες R και p εκτελούμε τον αλγόριθμο Steepest Descent.Εκτελούμε τον κώδικα για αριθμό βημάτων χρόνου ίσο με 50 και συντελεστή σύγκλισης ίσο με μ=1,ετσι παίρνουμε τα αποτελέσματα που φάινονται στα παρακάτω διαγράμματα.

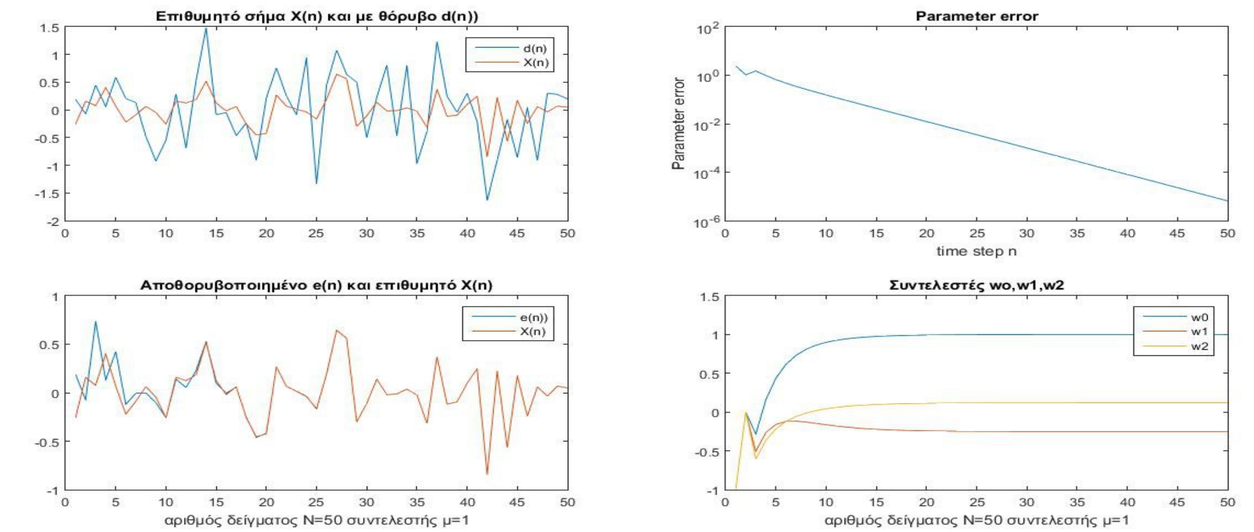
Αριθμός Δειγμάτων N=10000 και μ=0.001



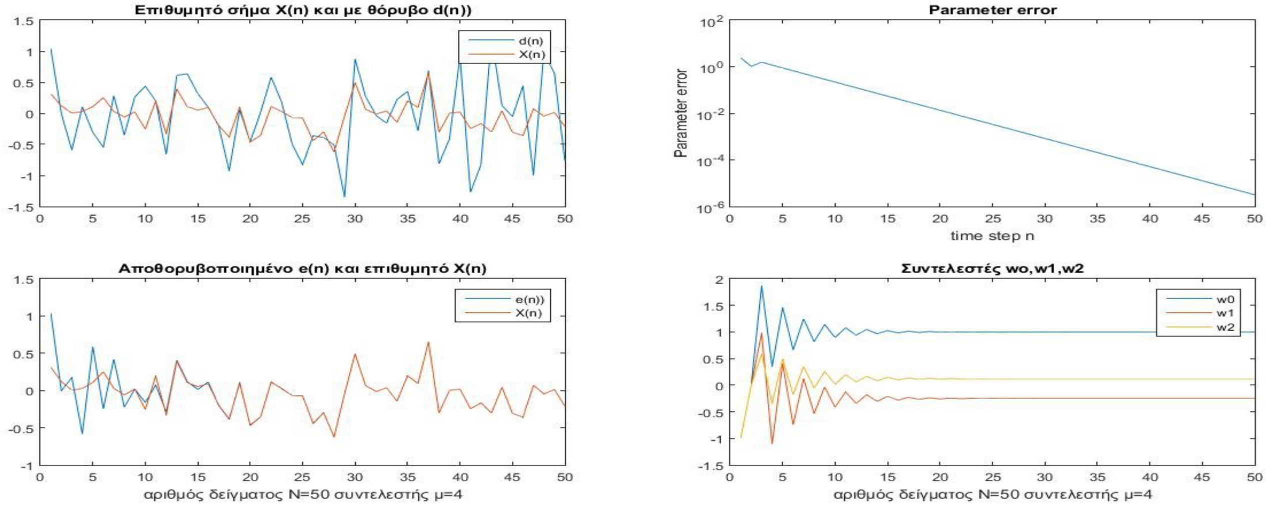
Αριθμός Δειγμάτων N=50 και μ=0.5



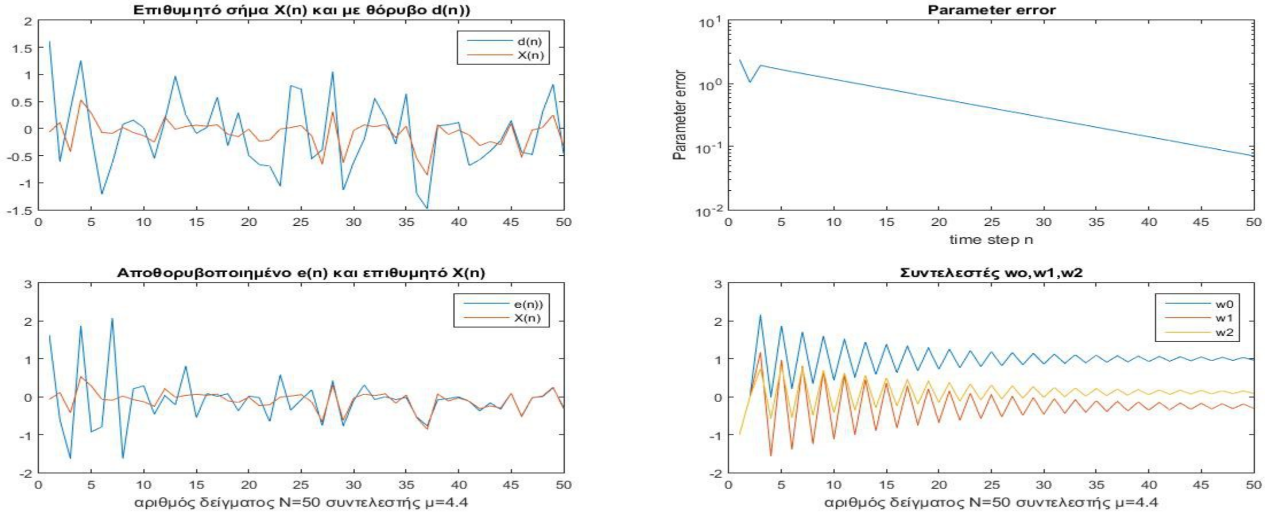
Αριθμός Δειγμάτων N=50 και μ=1



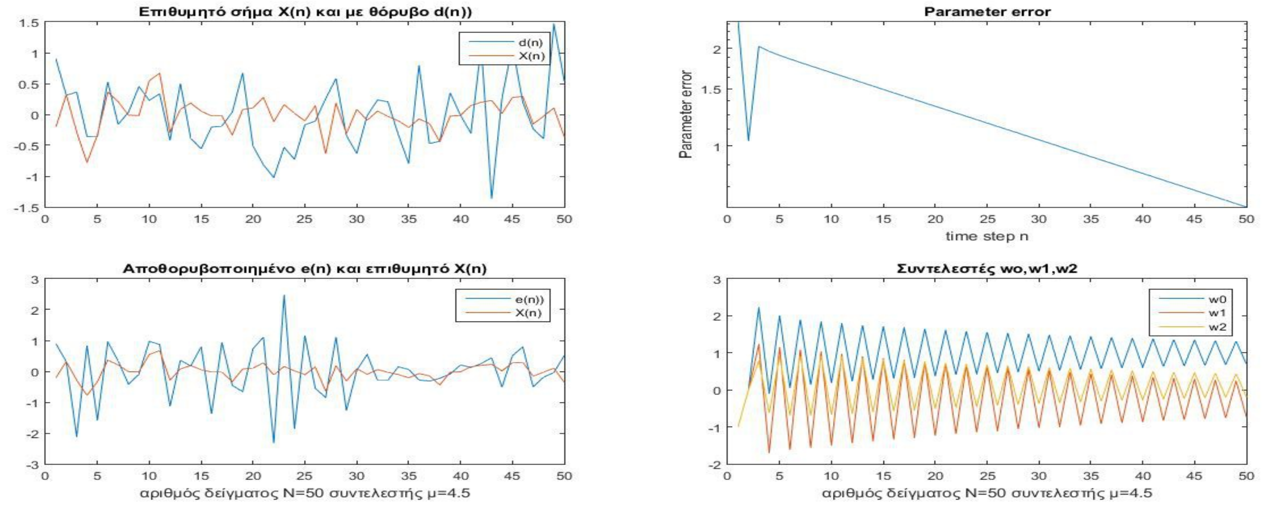
Αριθμός Δειγμάτων N=50 και μ=4



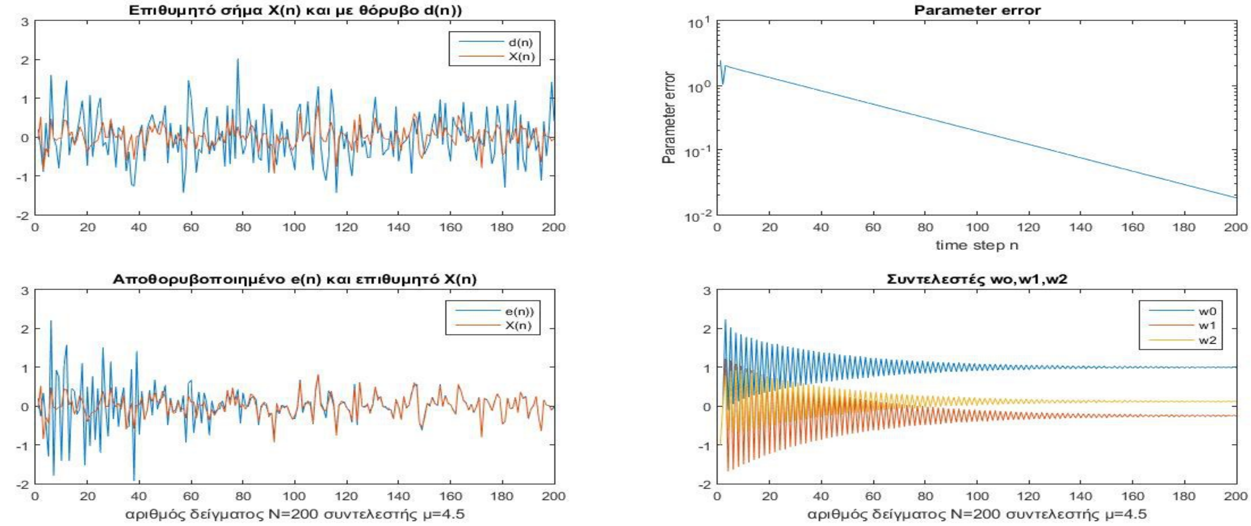
Αριθμός Δειγμάτων N=50 και μ=4.4



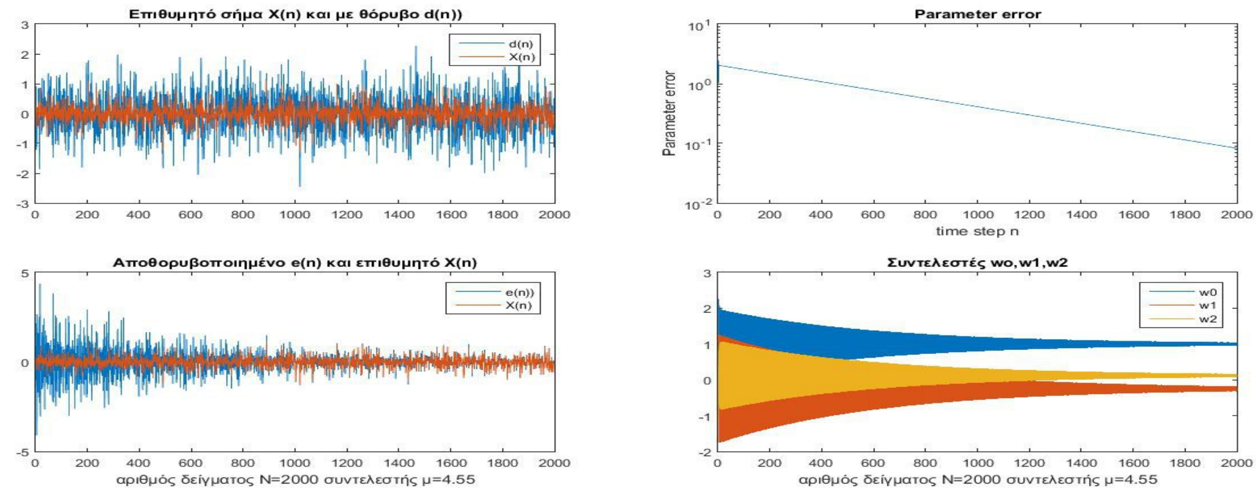
Αριθμός Δειγμάτων N=50 και μ=4.5



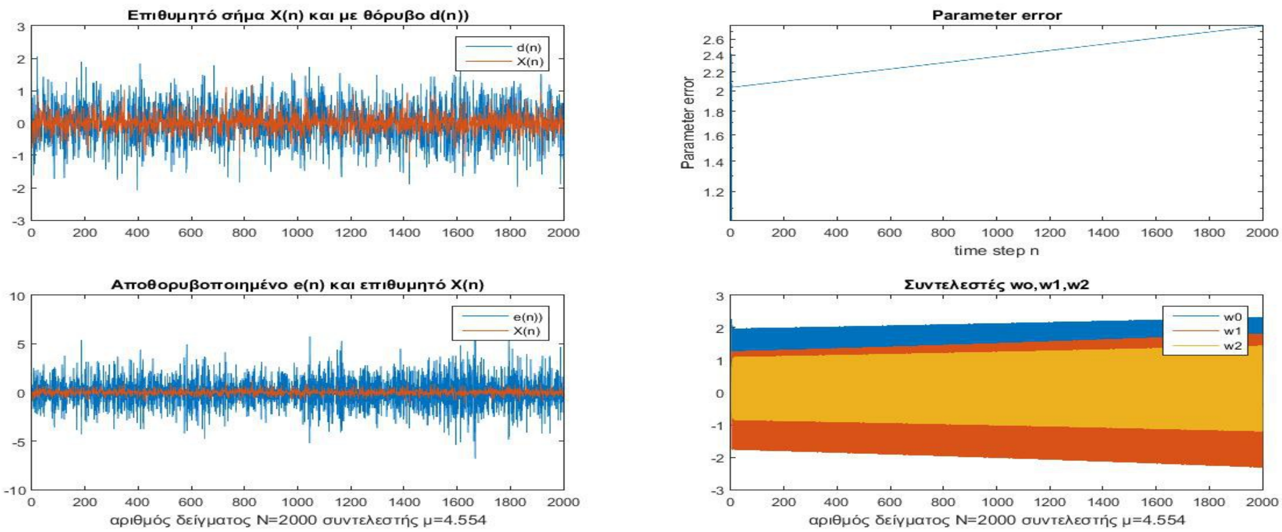
Αριθμός Δειγμάτων N=200 και μ=4.5



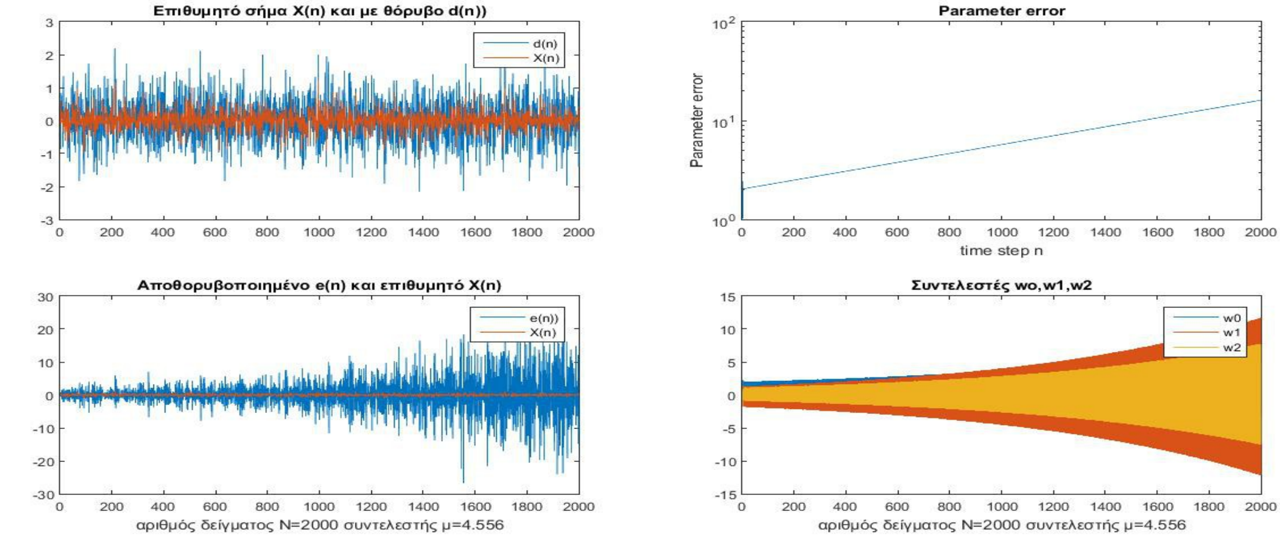
Αριθμός Δειγμάτων N=2000 και μ=4.55



Αριθμός Δειγμάτων N=2000 και μ=4.554



Αριθμός Δειγμάτων N=2000 και μ=4.556



Σχόλια

Απο τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε οτι η αποθορυβοποίηση του επιθυμητού σήματος d(n) γίνεται σε πάρα πολύ καλό βαθμό και η έξοδος του φίλτου πρόσεγγίζει ακριβώς το σήμα χωρίς θόρυβο X(n) αν ορίσουμε κατάλληλη τιμή στο μ.Βλέπουμε δηλαδή οτι η τιμή του μ καθορίζει τον ρυθμό σύγκλισης του αλγόριθμου Steepest Decsent προς τη βέλτιστη λύση *Wiener* (**w*o***),δηλαδή μετά απο πόσα βήματα απο τον συνολικό αριθμό N του δείγματος θα προσεγκίσουμε τις τιμές **w0.**Συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε οτι για τιμές του μ μέσα στο δίαστημα (0, 4.55] ο αλγοριθμός συγκλίνει προς τις τιμές w0.Για τιμές μακριά απο όρια του διστήματος (0, 4.55] χωρίς πολλές ταλαντώσεις και καθυστερήσεις συγκλίνει μέσα σε μόλις λίγες τιμές του δείγματος (περίπου 20) στις επιθυμητές τιμές **w0.**Για όσο μικρότερες τιμές του μ η σύγκλιση αργεί τόσο περισσότερο.Για όσο μεγαλύτερες βλέπουμε ότι αργεί τόσο περισσότερο και ότι τόσο πιο ασταθής είναι η σύγκλιση(ταλαντώσεις γύρο απο τις τιμές).Για τιμή μέχρι και 4.55 έχουμε σύγκλιση και για μ=4.55 χρειαζόμαστε τουλάζιστον 2000 βήματα για μία καλή προσέγγιση.Για τιμή μόλις μ=4.554 βλέπουμε οτι υπάρχει απόκλιση αντι για σύγκλιση και για μ=4.556 φαινεται ακόμα πιο ξεκάθαρα η σημασία της τιμής μ αφού η απόκλιση για τόσο μικρή μεταβολή της τιμής μ γίνεται αρκετά μεγάλη.

Ερώτημα 3

Τέλος,το τελευταίο αρχείο με τον κωδικα σε Matlab για το τελευταίο ερώτημα βρίσκεται στον φάκελο tragoudi.Η λογική υλοποίησης είναι ίδια με πρίν μονο που τώρα έχουμε το δείγμα τιμών των σημάτων d(n) και u(n) οποτε με τις κατάλληλες συναρτήσεις του matlab θα υπολογίσουμε το R ενώ το p ειναι ίσο με [σ_u^2 0 0].Με συναρτήσεις στο matlab βρίσκουμε και την μέγιστη ιδιοτημή του R και μέσω αυτής το δίαστημα τιμών του μ που για αριθμό δείγματος N=600000 απο το συνολικό τραγούδι sound είναι στο δίαστημα (0 , 0.1072].Το τραγούδι μετά την αποθορυβοποίηση και για τιμές του μ στο (0 , 0.1072] ακούγεται ξεκάθαρα και είναι το τραγούδι με τίτλο Mack the Knife-Bobby Darin.