# Suites récurrentes et preuves formelles

## Calcul formel – TP 3

*Toutes les questions peuvent être traitées avec l'aide de* Sage*,*
*sauf lorsque l'on vous demande de faire une preuve « à la main » !*

## 1. Nombres bis de Fibonacci

La suite bis de Fibonacci est définie par les relations suivantes :

$$P_0 = 3, \qquad P_1 = 0, \qquad P_2 = 2 \qquad \text{et} \qquad P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \quad \text{pour } n \geqslant 3.$$

1. Écrire une fonction qui calcule $P_n$ en fonction de $n$. Calculer les 20 premiers termes de la suite bis de Fibonacci.
2. Résoudre l'équation $x^3 - x - 1 = 0$. On note $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les solutions (réelle et complexes) de cette équation.
3. On note $Q_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ pour $n \geqslant 0$.
   (a) Vérifier que $P_n = Q_n$ pour les premières valeurs de $n$.
   (b) Montrer à l'aide du calcul formel que $Q_n = Q_{n-2} + Q_{n-3}$. Conclure.
4. Cette suite a la propriété étonnante suivante : « si $n$ est premier et supérieur ou égal à 3 alors $n$ divise $P_n$ ».
   (a) Modifier la fonction qui calcule $P_n$ en une fonction qui calcule seulement $P_n \pmod n$ (tous les calculs intermédiaires étant aussi effectués modulo $n$). Vérifier la propriété pour quelques nombres premiers.
   (b) **Énigme.** Pour le plus petit entier non premier $n$ supérieur ou égal à 2 tel que $n$ divise $P_n$, donner le nombre de chiffres de $P_n$.
   *Indication :* commencer à $n = 270000$ et patienter !

## 2. Une suite récurrente

On considère la suite définie par récurrence :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{u_{n-2}u_{n-1}}{3u_{n-2} + 4u_{n-1}} \qquad \text{pour } n \geqslant 2.$$

1. Écrire une fonction qui calcule $u_n$ en fonction de $n$. Donner les premières valeurs de la suite $(u_n)$ et proposer une conjecture.
2. **Méthode 1.**
   (a) Poser $v_n = \frac{1}{u_n}$. Trouver à la main une relation de récurrence simple liant $v_n$ à $v_{n-1}$ et $v_{n-2}$.
   (b) Trouver une formule directe qui donne $v_n$ en fonction de $n$.
   *Indication.* Suivre pas à pas la méthode du cours utilisée pour la suite de Fibonacci.
3. **Méthode 2.**
   Prouver formellement que la formule directe pour $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ (ou la formule conjecturée en 1.) vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)$.
   *Fonction utile :* `full_simplify()`
4. **Énigme.** Quel est le plus petit entier $n$ tel que $u_n$ soit strictement inférieur à $10^{-20}$ ?

## 3. La méthode de Halley

Le but est ici de calculer une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ par des méthodes itératives. On appliquera ces méthodes pour approcher $\sqrt[3]{5}$ par des rationnels.

1. **Méthode de Newton.**
   On pose $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Pour un certain choix de $u_0$, on définit la suite de Newton $(u_n)$ par récurrence : $u_{n+1} = \phi(u_n)$. Sous certaines conditions la suite $(u_n)$ converge vers une solution $c$ de $f(x) = 0$. De plus, la convergence est très rapide, en effet elle est « quadratique » : $|u_{n+1} - c| \leqslant k|u_n - c|^2$ (pour une constante $k \in \mathbb{R}$).
   En posant $f(x) = x^3 - 5$, calculer $\phi$ ainsi que les premiers termes de la suite récurrente définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \phi(u_n)$. Vérifier que $u_2 = \frac{503}{294}$.
2. **Méthode de Halley.**
   On cherche une méthode encore plus rapide pour approcher une solution de l'équation $f(x) = 0$. On suppose $f$ croissante, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$ et on applique la méthode de Newton à $g(x)$ (qui s'annule quand $f(x)$ s'annule). On pose donc $\psi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.
   Montrer par un calcul à la main que
   $$\psi(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2\big(f'(x)\big)^2 - f(x)f''(x)}.$$
   Pour un choix de $v_0$, la suite de Halley est définie par récurrence : $v_{n+1} = \psi(v_n)$. La convergence est « cubique » donc plus rapide : $|v_{n+1} - c| \leqslant k'|v_n - c|^3$ (pour une constante $k' \in \mathbb{R}$).
3. **Application.**
   En posant $f(x) = x^3 - 5$, calculer $\psi$ ainsi que les premiers termes de la suite récurrente définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \psi(v_n)$.
   **Énigme.** Le terme $v_2 = \frac{a}{b}$ écrit sous la forme d'une fraction irréductible est déjà une bonne approximation de $\sqrt[3]{5}$ par un rationnel. Combien vaut $a$ ?

# 4. Factorielle

Soit $p$ un nombre premier. Il existe des formules directes pour calculer la plus grande puissance de $p$ divisant $n!$. On note $v_p(n!)$ l'exposant correspondant.
Par exemple $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, donc $v_2(7!) = 4$, $v_3(7!) = 2$, $v_5(7!) = 1$ et $v_7(7!) = 1$.

1. **Première formule de Legendre :**
$$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} E\left(\frac{n}{p^k}\right).$$
$E(x)$ désigne la partie entière d'un réel $x$. Noter que la somme est en fait une somme finie. Prouver cette formule à la main en comptant d'abord les multiples de $p$, puis les multiples de $p^2$...
Implémenter le calcul de cette formule en une fonction `legendre1(n,p)`.

2. **Décomposition de $n$ en base $p$.**
L'écriture de $n$ en base $p$ est
$$n = a_\ell p^\ell + \cdots + a_k p^k + \cdots + a_1 p + a_0 \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant a_k < p \quad \text{et} \quad a_\ell \neq 0.$$
On obtient par exemple $a_0$ en calculant $n$ modulo $p$ ; on obtient $a_1$ en divisant d'abord $n - a_0$ par $p$ puis en prenant le reste modulo $p$...
Écrire une fonction qui calcule $a_k$ pour $k$ fixé (ou encore mieux tous les $a_k$).
Tester votre fonction avec $p = 2$ en comparant vos résultats avec l'écriture binaire de $n$ obtenue par `bin(n)`.

3. **Seconde formule de Legendre :**
$$v_p(n!) = \frac{n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_\ell)}{p - 1}.$$
Implémenter le calcul de cette formule en une fonction `legendre2(n,p)`.

4. **Énigme.** Par combien de zéros se termine $n!$ pour $n = 123\,456\,789$ ?
*Indication :* 10 n'est pas un nombre premier !