Calculs d'intégrales

Calcul formel – TP 7

Toutes les questions peuvent être traitées avec l'aide de Sage*,*
sauf lorsque l'on vous demande de faire une preuve « à la main » !

1. Polynômes de Legendre

Travaux pratiques 1.
Les *polynômes tordus de Legendre* P_n sont des polynômes définis par des relations intégrales. Chaque polynôme P_n est de degré n, à coefficient dominant positif et vérifie les relations suivantes :

$$\int_0^1 P_k(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pour tout } \ 0 \leqslant k < n,$$

et

$$\int_0^1 P_n(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}.$$

Ainsi $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = 2x - 1$.

1. Pour déterminer P_2, poser $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ puis résoudre le système défini par les équations
$$\int_0^1 P_2(x)P_0(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_0^1 P_2(x)P_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_0^1 P_2(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$$
où les inconnues sont a, b et c avec a strictement positif.
2. Calculer ensuite P_3 et vérifier que $P_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$; puis déterminer P_4.
3. Il existe une formule directe qui donne P_n par un calcul de dérivée n-ème :
$$P_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big[(x^2 - x)^n\big].$$
Conjecturer la formule définissant la constante c_n.
4. **Énigme.** Calculer $P_7(x)$ par la méthode de votre choix. Quel est le coefficient devant x^5 ?

Fonctions utiles :

- `solve( [eq1, eq2, eq3], a,b,c )` permet de résoudre plusieurs équations avec plusieurs inconnues.
- Pour ceux qui voudraient automatiser les calculs pour de grandes valeurs de n, vous pouvez définir une liste de variables $a_0, a_1, \ldots, a_n$ par la commande :

```
liste_coeff = [ var('a%d' % i) for i in (0..n) ]
```

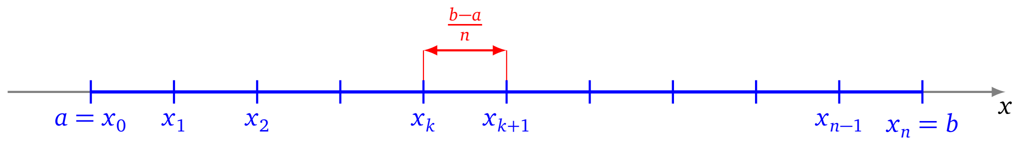
2. Calcul approché d'intégrales

Il arrive très souvent que l'on ne puisse pas calculer de façon exacte les intégrales. C'est pourquoi nous étudions différentes façons d'obtenir des valeurs approchées d'une intégrale par des méthodes numériques. On souhaite trouver une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

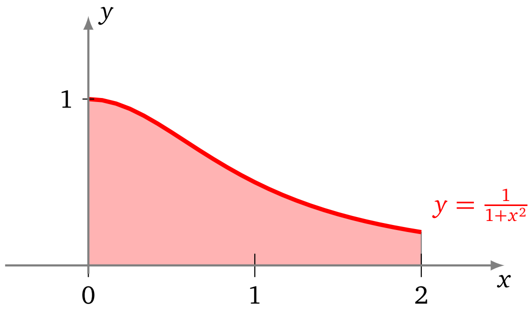
Les méthodes d'approximation que vous allez étudier sont toutes basées sur le même principe :

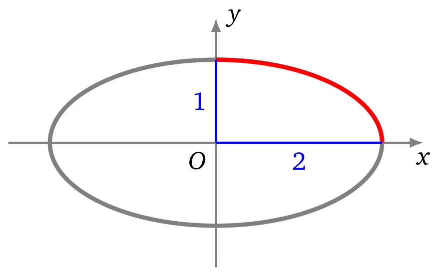
- On divise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de la façon suivante. On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors $x_0 = a$ et $x_n = b$. Cela définit une subdivision régulière composée de n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ $(0 \leqslant k < n)$, chaque sous-intervalle ayant une longueur constante $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.



- Sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on approche l'aire sous la courbe par l'aire d'une figure géométrique simple.

Nous allons tester nos approximations sur deux exemples :





- L'intégrale

$$I = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \big[\arctan(x)\big]_0^2 = \arctan 2$$

correspond géométriquement au calcul d'une aire sous la courbe et nous permettra d'obtenir une valeur approchée de $\arctan 2$.

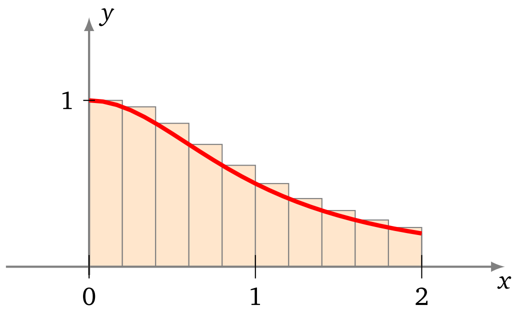
- Le (quart du) périmètre d'une ellipse est

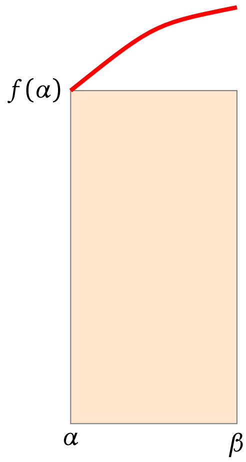
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

En effet, la longueur d'une courbe paramétrée $\big(x(t), y(t)\big)$, t variant dans l'intervalle $[a,b]$, est donnée par $\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$. Ce qui donne bien la formule J pour la paramétrisation de l'ellipse $\big(x(t) = 2\cos t, y(t) = \sin t\big)$.

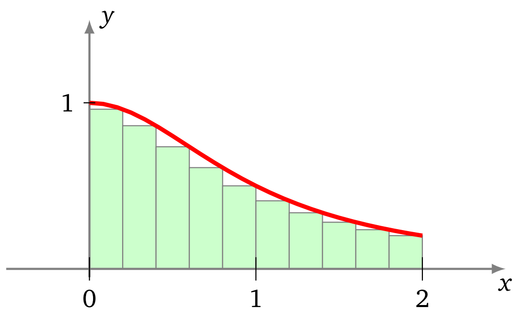
2.1. Méthode des rectangles

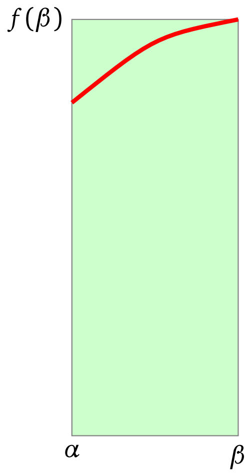
La ***méthode des rectangles à gauche*** consiste à approcher l'aire sous la courbe par l'aire de rectangles. La hauteur de chaque rectangle est la valeur à gauche de f sur le sous-intervalle (voir la figure ci-dessous). Pour un intervalle élémentaire, cela revient à approcher $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ par $(\beta - \alpha) f(\alpha)$.





On définit de même une ***méthode de rectangles à droite*** qui approche l'intégrale cherchée par $(\beta-\alpha)f(\beta)$ (voir la figure ci-dessous).



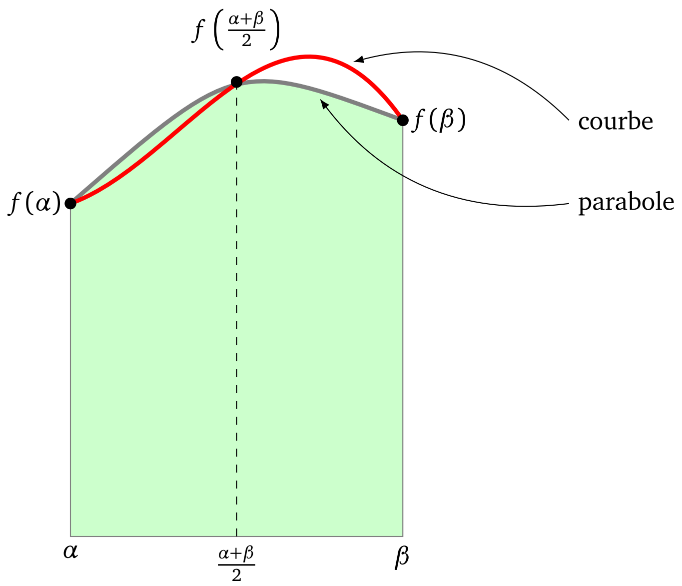


Travaux pratiques 2 (Méthode des rectangles)**.**

1. Écrire une fonction qui met en œuvre la méthode des rectangles à gauche ; puis la méthode des rectangles à droite.
2. (a) Quel encadrement théorique obtient-on si la fonction est décroissante ?
   (b) Donner l'encadrement de $I=\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, par des rationnels, obtenu pour $n=9$.
   Énigme. Ces deux fractions (sous forme irréductible) ont le même dénominateur. Quel est-il ?
   (c) Trouver une approximation à 10^{-2} près de $\arctan(2)$ par un nombre décimal.
3. Quelle approximation de $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2 x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ obtient-on pour $n=10$?

2.2. Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à approcher la courbe sur chaque intervalle élémentaire par une branche de parabole.



Cette parabole est celle qui passe par les trois points de la courbe :

- $\big(\alpha, f(\alpha)\big)$,
- $\big(\beta, f(\beta)\big)$,
- et le point dont l'abscisse est le milieu : $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$.

Il se trouve que l'aire sous cette portion de parabole se calcule très facilement, c'est :

$$\frac{\beta-\alpha}{6}\left(f(\alpha)+f(\beta)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right).$$

Travaux pratiques 3 (Méthode de Simpson)**.**

1. Écrire une fonction qui met en œuvre la méthode de Simpson.
2. Donner l'approximation de $I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ par un rationnel, obtenue pour une subdivision constituée de $n = 5$ sous-intervalles, puis $n = 10$ sous-intervalles.
3. (a) Quelle approximation de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx$ obtient-on pour $n = 10$?

   (b) **Énigme.** À partir de quel entier n, obtient-on 110 décimales numériquement stables pour J ?

   Par exemple pour $n = 5$, on trouve $J_5 = 2.422112289\ldots$ Les 6 premiers chiffres après la virgule sont ***numériquement stables***, c'est-à-dire qu'ils ne changeront plus pour de plus grandes valeurs de n (par exemple les 10 valeurs suivantes).

   Indications : `x.n(digits=150)` permet d'afficher 150 chiffres significatifs de x (attention, ce n'est pas exactement la même chose que le nombre de décimales après la virgule).

2.3. Majoration de l'erreur

Il est important de savoir quelle est l'erreur commise lorsque l'on approche une intégrale I. Une majoration de l'erreur est donnée par les résultats suivants et dépend de l'entier n (nombre de sous-intervalles de la subdivision). Autrement dit, ces résultats déterminent à quelle vitesse l'approximation converge vers l'intégrale.

Méthode des rectangles.
Voici l'erreur maximale commise pour la méthode des rectangles.

Proposition 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *; soit* $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. *Soit*

$$S_G(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

la somme des rectangles à gauche. Alors

$$\left|I - S_G(n)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} M_1.$$

Méthode de Simpson.
Voici l'erreur maximale commise pour la méthode de Simpson.

Proposition 2.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^4 *; soit* $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$. *Soit*

$$S_S(n) = \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

la somme de Simpson. Alors

$$\left|I - S_S(n)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4.$$

C'est mieux que la méthode des rectangles, grâce au terme en n^4 au dénominateur.

Travaux pratiques 4 (Majoration de l'erreur)**.**

1. Quelle est la plus petite valeur de n qui permet d'obtenir une approximation de J à 10^{-15} près par la méthode des rectangles ?
2. **Énigme.** Quelle est la plus petite valeur de n qui permet d'obtenir une approximation de J à 10^{-15} près par la méthode de Simpson ?

Demandez à `Sage` de faire les calculs numériques pour vous !
Fonctions utiles :

- `ff = abs(diff(f,x))`
- Tracé du graphe de `ff`.
- Maximum `ff.find_local_maximum(a,b)` (attention ! trouve seulement un maximum local et pas forcément le maximum global).
- Résoudre une inéquation avec `solve()`.

Vous savez ainsi certifier l'erreur de vos approximations. Bien sûr les erreurs calculées sont des erreurs maximales, les vitesses de convergence mesurées expérimentalement pouvant être beaucoup plus grandes.