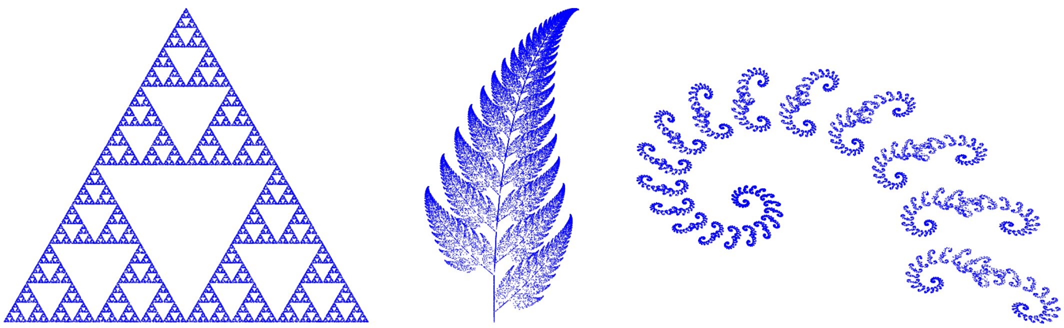
Courbes et surfaces

Calcul formel – TP 6

Toutes les questions peuvent être traitées avec l'aide de `Sage`*,*
sauf lorsque l'on vous demande de faire une preuve « à la main » !

1. IFS

Nous allons dessiner des IFS (*Iterated Function System*) qui sont des fractales d'un type spécial. Elles s'obtiennent en itérant plus ou moins au hasard des transformations affines du plans. De gauche à droite : le triangle de Sierpinski, une feuille de fougère, une spirale fractale.



Une ***transformation affine*** est une application du plan dans lui-même qui au point de coordonnées (x, y) associe le point de coordonnées (x', y') défini par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\begin{cases} x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f \end{cases}$$

1. (a) Écrire une fonction `transformation` qui prend en entrée x, y, a, b, c, d, e, f et renvoie x', y'.

   (b) Tracer le carré de sommet $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ et son image par la :
   - la translation de vecteur $(2,1)$ $(a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 1,\ e = 2,\ f = 1)$;
   - l'homothétie centrée à l'origine et de rapport 2 $(a = 2,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 2,\ e = 0,\ f = 0)$;
   - la rotation centrée à l'origine et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ $(a = \cos\theta,\ b = -\sin\theta,\ c = \sin\theta,\ d = \cos\theta,\ e = 0,\ f = 0)$;
   - la transformation affine définie par : $a = 1,\ b = 2,\ c = -1,\ d = 3,\ e = 2,\ f = -1$.

2. On souhaite tirer au hasard un nombre entier entre 0 et n en respectant certaines probabilités $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$. Par exemple, si $(p_0, p_1, p_2) = (0.25, 0.50, 0.25)$ alors on tirera 0 dans 25% des cas, 1 dans 50% des cas et 2 dans les 25% restants.

   Écrire une fonction `hasard` qui prend en entrée une liste de probabilités $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ (avec $p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$) et renvoie le rang k avec une probabilité p_k.

   Indications : Tirer un nombre $0 \leqslant x < 1$ au hasard avec la fonction `random`. Si $0 \leqslant x < p_0$ alors $k = 0$; si $p_0 \leqslant x < p_0 + p_1$ alors $k = 1$; si $p_0 + p_1 \leqslant x < p_0 + p_1 + p_2$ alors $k = 2$... Par exemple si $(p_0, p_1, p_2) = (0.25, 0.50, 0.25)$ et que $x = 0.365$ alors $k = 1$.

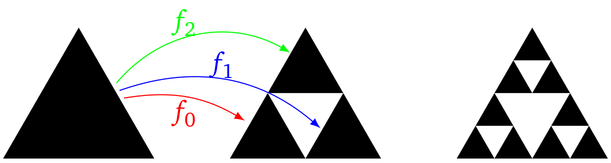
3. Écrire une fonction `ifs` qui étant donnée une liste de transformations $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ associées à des probabilités $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ trace la fractale correspondante. Le principe est le suivant :
   - on part du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$,
   - on choisit au hasard une transformation f_k avec la probabilité p_k,
   - on calcule $(x_1, y_1) = f_k(x_0, y_0)$,
   - on choisit au hasard une (nouvelle) transformation f_ℓ,
   - on calcule $(x_2, y_2) = f_\ell(x_1, y_1)$,
   - ...
   - on renvoie la liste des points (x_{100}, y_{100}) à (x_N, y_N) (avec par exemple $N = 10\,000$).

   Cette fonction prendra en entrée une liste de transformations associées à des probabilités (voir l'annexe en fin de section), ainsi que l'entier N, et renverra la liste des points (x_i, y_i), $i = 100 \ldots N$.

   Pour dessiner une liste de points, la fonction `points` peut être utile.

4. Tester votre fonction pour la feuille de fougère, le triangle de Sierpinski et la spirale fractale dont les paramètres sont donnés en annexe en fin de section.

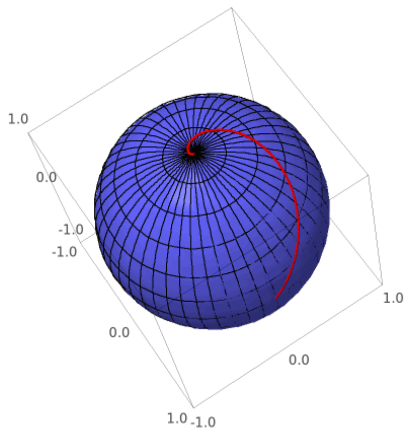
   Par exemple pour le triangle de Sierpinski, chacune des trois transformations (données en annexe) réduit la taille du triangle initial de moitié, puis le translate à la position voulue.



5. **Énigme.** Quel entier à quatre chiffres se cache dans le dessin de la fractale dont les 18 transformations sont données en annexe ?

2. Loxodromie de la sphère

Nous allons étudier directement les loxodromies de la sphère.



1. (a) Tracer la sphère (centrée à l'origine de rayon 1) donnée par l'équation paramétrique
$$\big(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u\big) \qquad u \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \quad v \in [-\pi, +\pi].$$
Vous utiliserez ici et dans la suite : `parametric_plot3d`.

   (b) La coordonnée u est la *latitude*, alors que v est la *longitude*. Tracer quelques méridiens (courbes sur la sphère d'équation $v = \text{cst}$) et quelques parallèles (courbes sur la sphère d'équation $u = \text{cst}$) et en particulier l'équateur (d'équation $u = 0$). Placer le pôle Nord (de coordonnées $(0, 0, 1)$).

2. Un navigateur part du point donné par $(u = 0, v = 0)$ (intersection de l'équateur et du méridien d'origine) et navigue à cap constant $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (son *cap* est l'angle entre le Nord et sa direction). Son parcours trace une *loxodromie* d'équation
$$\big(\cos u \cos V(u), \cos u \sin V(u), \sin u\big) \qquad u \in [0, +\tfrac{\pi}{2}]$$
où
$$V(u) = \tan\alpha \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$
Tracer cette loxodromie pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3. Tracer la projection *orthogonale* de cette loxodromie sur le plan de l'équateur (c'est une *spirale de Poinsot*).

4. **Énigme.** Toujours pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, à quelle latitude se trouve le navigateur lorsqu'il croise pour la première fois l'anti-méridien (c'est-à-dire le méridien d'équation $v = \pi = 180°$) ? Donnez votre réponse en degrés, arrondie à l'entier inférieur.

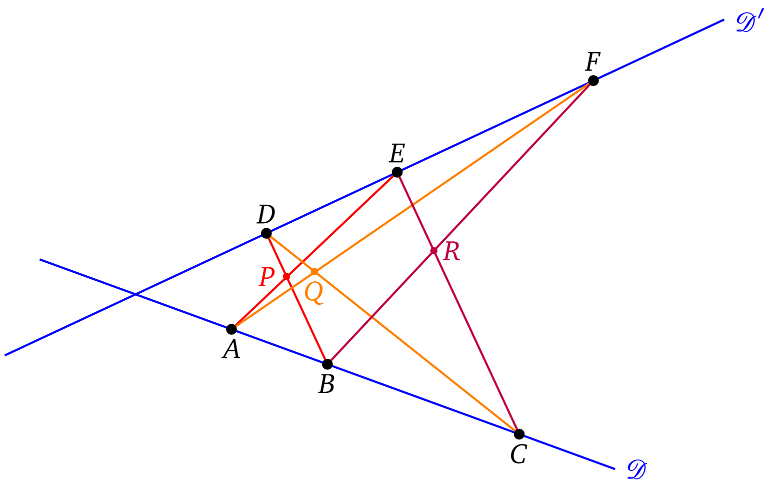
   Indications : on pourra s'aider d'un graphe de fonction pour localiser la solution puis utiliser `find_root()`.

5. Si le navigateur continue son voyage, il tournera une infinité de fois autour du pôle Nord, mais cependant il atteint le pôle après avoir parcouru une distance finie. Calculer cette distance lorsque le cap est $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Indication : la longueur d'une courbe paramétrique définie par $\big(x(u), y(u), z(u)\big)$ pour u décrivant $[a, b]$ est
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}\, du.$$

3. Théorème de Pappus

On considère deux droites concourantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ du plan. Soient A, B et C trois points distincts de $\mathscr{D}$ et D, E et F trois points distincts de $\mathscr{D}'$. Soient P, Q et R les points d'intersection respectivement de (AE) et (BD), (AF) et (CD), (BF) et (CE).

Théorème de Pappus. Les points P, Q et R sont alignés.

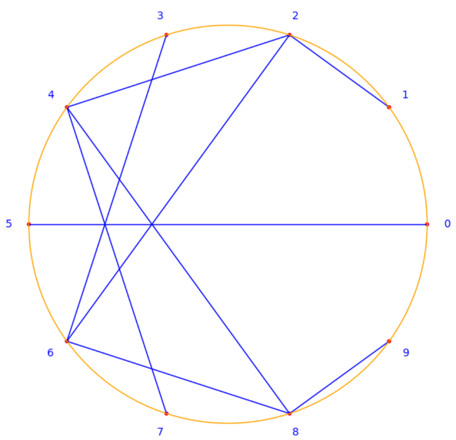


1. Étant donnés deux points M et N du plan, écrire une fonction `droite` qui calcule les coefficients a,b et c d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (MN).
2. Étant données deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ (données par leurs coefficients), écrire une fonction `intersection` qui calcule (s'il existe) le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
3. Étant donnés trois points P, Q et R, écrire une fonction qui vérifie si ces trois points sont alignés.
4. Démontrer le théorème de Pappus.

   Indications :
   - Supposer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent à l'origine (sans perte de généralité).
   - Pour les points de la droite $\mathscr{D}$: définir deux variables formelles x_A et y_A qui correspondent aux coordonnées de A, puis une variable formelle k de sorte que $B = (kx_A, ky_A)$, puis une variable formelle ℓ de sorte que $C = (\ell x_A, \ell y_A)$.
   - Faire de même pour les points de la droite $\mathscr{D}'$.
   - Prouver formellement le théorème.
5. **Énigme.** Dans le cas où $A = (1, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (6, 0)$, $D = (1, 1)$, $E = (2, 2)$, $F = (3, 3)$ calculer les coordonnées des points P, Q et R (sous forme de fractions irréductibles). Que vaut le produit des dénominateurs des abscisses x_P, x_Q et x_R ?

4. Le cœur des tables de multiplications

Les tables de multiplications n'ont pas fini de révéler tous leurs secrets !
On fixe un entier b (pour nous ce sera $b = 2$) et un entier n. On étudie la table des $a \times b \pmod n$, avec $a \in \{0, \dots, n-1\}$. On place sur un cercle n points équirépartis numérotés de 0 à $n - 1$. Pour chaque $a \in \{0, \dots, n-1\}$, on relie le point numéro a et le point numéro $a \times b \pmod n$ par un segment. Cela représente ***la table de b modulo n***.
Voici la table de $b = 2$ modulo $n = 10$.



Par exemple :
- le point 3 est relié au point 6, car $3 \times 2 = 6$;
- le point 4 est relié au point 8, car $4 \times 2 = 8$;
- le point 7 est relié au point 4, car $7 \times 2 = 14 = 4 \pmod{10}$.

1. Écrire une fonction qui, pour des paramètres b et n, trace la table de multiplication par b modulo n. Expérimenter pour $b = 2$ et de grandes valeurs de n.

   Fonctions utiles : `circle` et `line`.
2. **Énigme.** Pour $b = 29$ et $n = 112$, combien y a-t-il de segments ? (Attention un segment relie deux points *distincts* et si on relie le point P au point Q et le point Q au point P, cela ne compte que pour *un segment*.)

3. La *cardioïde* est la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos t$. On appelle $\mathscr{C}$ sa transformée par l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ centrée à l'origine puis la translation de vecteur $(-\frac{1}{3}, 0)$. Calculer (et tracer) l'équation cartésienne $M(t) = (x(t), y(t))$ de cette petite cardioïde $\mathscr{C}$.
4. Dans le cas $b = 2$, nous allons montrer que l'enveloppe des segments est, comme vous avez pu le constater, la cardioïde $\mathscr{C}$, on note $N(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $N'(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) = N(2t)$.
   (a) Montrer que les points $M(t)$, $N(t)$ et $N'(t)$ sont alignés.
   (b) Montrer que le segment $[N(t), N'(t)]$ est parallèle au vecteur tangent $(x'(t), y'(t))$ à la cardioïde $\mathscr{C}$.
   (c) Conclure.

Vous pouvez faire vos expérimentations avec d'autres valeurs de b et aussi regarder cette vidéo de Micmath pour de très belles images.

Annexe : IFS

Chaque transformation est définie par une liste `[a,b,c,d,e,f,p]` dans laquelle les 6 premiers éléments caractérisent la transformation affine elle-même et p la probabilité associée.

Triangle de Sierpinski

```
[0.5,0,0,0.5,0,0,0.33],
[0.5,0,0,0.5,0.5,0,0.33],
[0.5,0,0,0.5,0.25,0.5,0.34]
```

Fougère

```
[0,0,0,0.16,0,0,0.01],
[0.85,0.04,-0.04,0.85,0,1.60,0.85],
[0.20,-0.26,0.23,0.22,0,1.60,0.07],
[-0.15,0.28,0.26,0.24,0,0.44,0.07]
```

Spirale

```
[0.787879,-0.424242,0.242424,0.859848,1.758647,1.408065,0.896],
[-0.121212,0.257576,0.151515,0.053030,6.721654,1.377236,0.052],
[0.181818,-0.136364,0.090909,0.181818,6.086107,1.568035,0.052]
```

Énigme

```
[0.230769, 0.0, 0.0, 0.2, 0, 4, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.153846, 0.0, 3.0, 2.0, 0.05556],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 0, 2, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.153846, 0.0, 1.0, 0.0, 0.05552],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 1, 0, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.307692, 0.0, 5.0, 1.0, 0.05556],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 5, 4, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.307692, 0.0, 7.0, 0.0, 0.05556],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 4, 0, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.192308, 0.0, 9.0, 0.0, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.192308, 0.0, 9.0, 2.5, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.153846, 0.0, 11.0, 3.0, 0.05556],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 11, 4, 0.05556],
[0.0, -0.2, 0.153846, 0.0, 13.0, 2.0, 0.05556],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 10, 2, 0.05556],
```

```
[0.0, -0.2, 0.153846, 0.0, 11.0, 0.0, 0.05556],
[0.153846, 0.0, 0.0, 0.2, 11, 0, 0.05552],
[0.076923, 0.0, 0.0, 0.2, 12, 1, 0.05556]
```