Premiers pas et structures de contrôle

Calcul formel – TP 1& 2

Toutes les questions peuvent être traitées avec l'aide de Sage*,*
sauf lorsque l'on vous demande de faire une preuve « à la main » !

1. Nombre de chiffres d'un entier

Le nombre de chiffres d'un entier N strictement positif est l'entier k tel que

$$10^{k-1} \leqslant N < 10^k.$$

Par exemple, pour $N = 1\,234$, on a $10^3 \leqslant 1\,234 < 10^4$ et N a bien 4 chiffres.

1. À l'aide du logarithme décimal et de la partie entière, calculer le nombre de chiffres k d'un entier N.
   Fonctions utiles : le logarithme décimal `log(x,10)` ; la fonction partie entière `floor()`.
2. On considère le développement de l'expression $(x + y + z)^n$.
   Par exemple, $n = 4$ est le plus petit entier tel que l'un des coefficients ait au moins 2 chiffres :

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+4x^3z+12x^2yz+12xy^2z \\ &\quad +4y^3z+6x^2z^2+12xyz^2+6y^2z^2+4xz^3+4yz^3+z^4.\end{aligned}$$

   Énigme. Trouver le plus petit entier n tel que l'un des coefficients du développement de $(x + y + z)^n$ ait au moins 10 chiffres.
   Fonctions utiles : `expand()`, `coefficient()` : par exemple si `P = 3*x^2*y + 7*x*y^2 + y^3` alors `P.coefficient(x*y^2)` renvoie 7.

2. Constante de Champernowne

La constante de Champernowne est un réel dont les décimales sont formées de tous les entiers $1, 2, 3, \ldots$ écrits dans cet ordre :

$$C = 0,\,123456789101112\ldots$$

1. On note $C_1 = 0,1$; $C_2 = 0,12$; $C_3 = 0,123$; etc. Définir le nombre C_{99} qui retourne la valeur approchée de C, sous la forme d'un nombre à virgule, prenant en compte les entiers de 1 à 99.
   Indications. Construire ce nombre sous la forme d'une somme.
   Fonctions utiles : l'affichage numérique d'un décimal `n()` (par exemple `pi.n(digits=50)` affiche 50 décimales de π).

2. On souhaite extraire les décimales de C comprises entre les rangs a et b. Par exemple, les décimales extraites entre les rangs $a = 8$ et $b = 11$ forment l'entier 8910.

   Énigme. Quel est le rang a pour lequel le nombre 888 apparaît pour la première fois entre les rangs a et $a + 2$?

   Fonctions utiles :
   - la partie entière d'un réel `floor()`,
   - l'opérateur modulo `%` (par exemple `13%5` renvoie 3).

3. Nombres pseudo-premiers d'Euler

On dit qu'un entier impair p supérieur ou égal à 3 vérifie, pour un entier n fixé, le n-test d'Euler si

$$n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

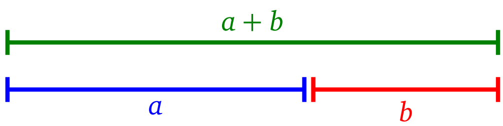
Le petit théorème de Fermat affirme : « *si p est un nombre premier supérieur ou égal à 3, alors p vérifie le n-test d'Euler, quelque soit n non divisible par p.* »
Dans la suite p est un entier impair supérieur ou égal à 3 quelconque.

1. Écrire une fonction `test_euler(n,p)` qui renvoie Vrai (`True`) si p vérifie le n-test d'Euler et Faux (`False`) sinon.
2. Vérifier que 217 vérifie le 5-test d'Euler mais n'est pourtant pas un nombre premier.
3. **Énigme.** Trouver le plus petit entier impair p supérieur ou égal à 3 qui vérifie toutes les conditions suivantes :
   - p vérifie le 2-test d'Euler,
   - p vérifie le 3-test d'Euler,
   - p vérifie le 5-test d'Euler,
   - et pourtant p n'est pas un nombre premier.

   Fonction utile : `is_prime()`

4. Le nombre d'or

Le nombre d'or est la proportion qui permet de diviser *esthétiquement* un segment en deux parties non égales :



La proportion vérifie :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Autrement dit « la grande longueur divisée par la petite longueur est égale à la longueur totale divisée par la grande longueur ».
On note cette proportion le ***nombre d'or*** :

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

1. Montrer à la main que φ vérifie l'équation :
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$
En utilisant Sage, en déduire que
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
et en donner une approximation numérique.
Fonctions utiles : `solve()`, `n()`
2. Dessiner la « spirale d'or » d'équation polaire
$$r(\theta) = \varphi^{2\theta/\pi}.$$
Fonctions utiles : `polar_plot()`
3. On définit la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 1 + \frac{1}{1}$, $u_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, $u_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$ ... et plus généralement :
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 0.$$
   (a) Calculer les premiers termes de la suite et leurs valeurs numériques approchées. Quelle semble être la limite ?
   (b) Prouver à la main votre conjecture !
4. On souhaite montrer que « *pour tout entier n positif, il existe deux suites a_n et b_n d'entiers telles que $\varphi^n = a_n\varphi + b_n$.* »
Par exemple $\varphi^5 = \frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{11}{2} = 5\varphi + 3$, donc $a_5 = 5$ et $b_5 = 3$.
   (a) Vérifier expérimentalement ce résultat pour les premières valeurs de n.
   (b) **Énigme.** Pour $n = 18$, $\varphi^{18} = a_{18}\varphi + b_{18}$. Que vaut $a_{18} + b_{18}$?
   (c) Prouver l'assertion à la main et par récurrence (utiliser la relation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$).

   Fonction utile : `expand()`