Suites récurrentes et visualisation

Calcul formel – TP 4

Toutes les questions peuvent être traitées avec l'aide de Sage*,*
sauf lorsque l'on vous demande de faire une preuve « à la main » !

1. Fractions continues

1. Partant d'une liste finie $[a_0, a_1 \dots, a_n]$, écrire une fonction qui calcule le nombre rationnel x associé à la fraction
$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots \frac{1}{a_n}}}}.$$
Indication. Partir de la fin de la liste.

Proposition 1. Tout réel x peut s'écrire sous la forme d'une ***fraction continue*** :
$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$
La liste associée $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ est éventuellement infinie.

Proposition 2. Soit x un réel et $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ la suite associée à la fraction continue. On définit les ***quotients approchés*** par
$$p_{-2} = 0,\ q_{-2} = 1, \quad p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0 \qquad \text{et pour } k \geqslant 0 \qquad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$
Lorsque $n \to +\infty$, alors $p_n/q_n \to x$.

2. Écrire une fonction qui partant d'une liste $[a_0, a_1, a_2 \dots a_N]$ et d'un entier n (inférieur à N), renvoie le quotient approché p_n/q_n.
Deviner quel réel a pour développement en fraction continue $[1, 1, 1, \dots]$.
3. Étant donné un réel x et un entier n, construire la liste $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ de la fraction continue correspondant à une approximation de x par la méthode suivante : on pose $y_0 = x$, puis pour $k \geqslant 0$ et tant que y_k n'est pas un entier, on pose
$$a_k = E(y_k) \quad \text{et} \quad y_{k+1} = \frac{1}{y_k - a_k}.$$
4. **Énigme.** Le développement en fraction continue de $x = \sqrt{\pi}$ commence par $[1, 1, 3, 2, 1, 1, 6 \dots]$ ainsi $a_6 = 6$. Quel est le plus petit entier n tel que $a_n = 59$?
Indication. Afin de ne pas *surmener* la machine (le temps de calcul sera déjà assez long), penser à appliquer la méthode `simplify_rational()` au réel y_k calculé à chaque étape.

2. Une suite récurrente

Nous allons étudier la suite définie par

$$u_0 = a \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n\sqrt{1-u_n^2}.$$

1. (a) Définir la fonction
$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$
   (b) Tracer sur un même graphe, dans l'intervalle $[0,1]$: la première bissectrice, la droite d'équation $y = 1$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.
   (c) Montrer (à la main et en vous aidant de la représentation graphique) que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $[0,1]$.
2. Écrire une fonction qui calcule les termes $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ de la suite. Visualiser cette suite sur le graphique précédent pour différentes valeurs du terme initial a.
3. **Points fixes.** Trouver les valeurs du terme initial a qui donnent une suite (u_n) constante.
4. **Cycles d'ordre 2.** Trouver les valeurs du terme initial a qui donnent une suite (u_n) périodique de période 2 (la suite est alors $(u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, u_1, \dots)$ avec $u_0 \neq u_1$).
5. **Cycles d'ordre 3.** Trouver les valeurs du terme initial a qui donnent une suite (u_n) périodique de période 3 (la suite est alors $(u_0, u_1, u_2, u_0, u_1, u_2, \dots)$ avec $u_0 \neq u_1 \neq u_2$).
   Énigme. Quelle est la partie entière de 1 000 fois la somme des termes a possibles ?

3. Le *page rank* de Google

L'idée novatrice de Google, qui a fait son succès, a été de classer les pages internet en fonction de leur popularité (le *page rank*). Le *page rank* d'une page k dépend du nombre d'autres pages ayant un lien vers cette page k : une page contribue à la popularité d'une page k en proportion de sa propre popularité et en proportion inverse du nombre total de pages qu'elle cite.

- Pour une page k, notons $\{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$ les pages ayant un lien vers la page k.
- Notons $N(i)$ le nombre de liens partant de la page i.
- La popularité de la page k est donnée par la formule :
$$\mathrm{pr}(k) = \sum_{i \in \{i_1,\dots,i_\ell\}} \frac{\mathrm{pr}(i)}{N(i)}$$

Approximation du *page rank*. Cette formule n'est pas utilisable en pratique. En effet, pour calculer $\mathrm{pr}(k)$, il faudrait d'abord calculer toutes les $\mathrm{pr}(i)$, mais certaines de ces $\mathrm{pr}(i)$ dépendent de $\mathrm{pr}(k)$...
Pour obtenir une approximation de $\mathrm{pr}(k)$, on construit une suite $\mathrm{pr}_n(k)$ comme suit :

- on initialise $\mathrm{pr}_0(k) = 1$ pour tous les k,
- on calcule $\mathrm{pr}_{n+1}(k)$ par la formule
$$\mathrm{pr}_{n+1}(k) = \sum_{i \in \{i_1,\dots,i_\ell\}} \frac{\mathrm{pr}_n(i)}{N(i)}.$$

On admet que la suite $(\mathrm{pr}_n(k))_n$ tend vers $\mathrm{pr}(k)$ lorsque n tend vers l'infini.
Cas concret. Voici une liste de pages numérotées de 0 à 9 ainsi que les liens présents sur cette page.

0	[1,2,3]	5	[1,3,7,9]
1	[2,3,4]	6	[4,8]
2	[3,4]	7	[1,3,5,9]
3	[1,5,7,9]	8	[0,9]
4	[0]	9	[6,7,8]

Exemple.

- La page 5 a des liens vers les pages $1,3,7,9$. Ainsi $N(5)=4$.
- On cherche dans le tableau les pages citant la page 5, à savoir les pages 3 et 7.
- À l'initialisation, on a $p_0(0)=1$, $p_0(1)=1\ldots$
- On calcule alors

$$p_1(5)=\frac{p_0(3)}{N(3)}+\frac{p_0(7)}{N(7)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Énigme. Quelles sont les trois pages ayant le *page rank* le plus élevé ? Après avoir effectué suffisamment d'itérations, donner la réponse en formant un nombre à trois chiffres (par exemple si les pages les plus vues étaient la 1, puis la 2, puis la 3, alors la réponse attendue serait 123).

4. Attracteur de Hénon

L'attracteur de Hénon est l'ensemble de points généré par l'application répétée de la fonction :

$$H(x,y)=\left(y+1-\alpha x^2,\beta x\right)$$

Les résultats sont très sensibles aux conditions initiales. Définir exactement la fonction H par :

```
def H(x,y):
    return y+1-alpha*x^2, beta*x
```

1. Écrire une fonction `henon` dont les paramètres sont le point initial (x_0,y_0), le nombre d'itérations n, ainsi que α, β et qui affiche le graphique des points itérés :

$$(x_0,y_0) \qquad (x_1,y_1)=H(x_0,y_0) \qquad (x_2,y_2)=H(x_1,y_1) \quad \ldots \quad (x_n,y_n)=H(x_{n-1},y_{n-1})$$

   Application : $(x_0,y_0)=(0,0)$, $n=20$, $\alpha=14/10$, $\beta=3/10$.

   Application : $(x_0,y_0)=(0,0)$, $n=1000$, $\alpha=1.4$, $\beta=0.3$. Que peut-on remarquer ?

2. Écrire une fonction `zoom_henon` qui ajoute des paramètres $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ et qui affiche seulement les itérés dont les abscisses sont comprises (au sens large) entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ et dont les ordonnées sont comprises (au sens large) entre $y_{\min}$ et $y_{\max}$.

   Énigme. Soit $(x_0,y_0)=(0,0)$, $n=10\,000$, $\alpha=1.4$, $\beta=0.3$ et le zoom $x_{\min}=0.30$, $x_{\max}=0.32$, $y_{\min}=0.20$, $y_{\max}=0.22$. Quel est l'ordre de grandeur (multiple de 100) du nombre de points dans cette fenêtre ?

   Pour de belles images afficher ensuite plus de points.

3. Écrire une procédure `sensibilite_henon` qui a pour arguments deux points initiaux (x_0,y_0) et (x_0',y_0') et qui retourne le tracé des points dont les abscisses sont les abscisses des itérés à partir du premier point alors que les ordonnées sont les abscisses des itérés à partir du second point.

   Application : $(x_0,y_0)=(0,0)$, $(x_0',y_0')=(0.00001,0.000001)$, $\alpha=1.4$, $\beta=0.3$ avec $n=10$, puis $n=100$.

   Quelle est votre conclusion ?