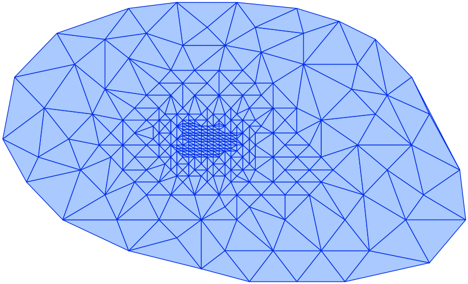


Métodos Numéricos para Geração de Malhas – SME0250

Fecho Convexo

Afonso Paiva
ICMC-USP

12 de agosto de 2016

Definição

Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ é convexo quando para quaisquer pontos $x, y \in K$, o segmento de reta $\overline{xy}$ ligando x e y em $\mathbb{R}^d$ está totalmente contido em K.

Preliminares Matemáticos

Definição

Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ é convexo quando para quaisquer pontos $x, y \in K$, o segmento de reta $\overline{xy}$ ligando x e y em $\mathbb{R}^d$ está totalmente contido em K.

Fecho Convexo

Definição

O fecho convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é o menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ que contém S, e é denotado por $\mathrm{conv}(S)$.

Fecho Convexo

Definição

O fecho convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é o menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ que contém S, e é denotado por $\mathrm{conv}(S)$. Mais precisamente, o fecho convexo de S é caracterizado por:

- $\mathrm{conv}(S)$ é convexo;
- $S \subseteq \mathrm{conv}(S)$;
- K convexo, $S \subseteq K \Rightarrow K \supseteq \mathrm{conv}(S)$.

Fecho Convexo

Definição

O fecho convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é o menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ que contém S, e é denotado por $\operatorname{conv}(S)$. Mais precisamente, o fecho convexo de S é caracterizado por:

- $\operatorname{conv}(S)$ é convexo;
- $S \subseteq \operatorname{conv}(S)$;
- K convexo, $S \subseteq K \Rightarrow K \supseteq \operatorname{conv}(S)$.

Proposição 1 (no quadro)

$$\operatorname{conv}(S) = \bigcap_{\substack{K \text{ convexo} \\ K \supseteq S}} K$$

Fecho Convexo

As duas definições anteriores de fecho convexo são muito abstratas. Uma caracterização mais concreta usa a noção de combinação convexa.

Fecho Convexo

As duas definições anteriores de fecho convexo são muito abstratas. Uma caracterização mais concreta usa a noção de combinação convexa.

Definição

Um ponto $\mathbf{p}$ é uma combinação convexa dos pontos $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ quando $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{p}_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Fecho Convexo

As duas definições anteriores de fecho convexo são muito abstratas. Uma caracterização mais concreta usa a noção de combinação convexa.

Definição

Um ponto $\mathbf{p}$ é uma combinação convexa dos pontos $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ quando $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{p}_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Definição

Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ é fechado por combinações convexas quando K contém todas as combinações convexas de pontos de K.

Fecho Convexo

As duas definições anteriores de fecho convexo são muito abstratas. Uma caracterização mais concreta usa a noção de combinação convexa.

Definição

Um ponto $\mathbf{p}$ é uma combinação convexa dos pontos $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ quando $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{p}_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Definição

Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ é fechado por combinações convexas quando K contém todas as combinações convexas de pontos de K.

Proposição 2 (exercício)

Um conjunto é convexo se e somente se ele é fechado por combinações convexas. Dica: use indução matemática.

Proposição 3

O fecho convexo de um conjunto S é o conjunto das combinações convexas de pontos de S.

Fecho Convexo

Proposição 3

O fecho convexo de um conjunto S é o conjunto das combinações convexas de pontos de S.

Prova: precisamos mostrar que $\text{conv}(S) = C$ onde

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{p}_i \; : \; \mathbf{p}_i \in S, \; \lambda_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Fecho Convexo

Proposição 3

O fecho convexo de um conjunto S é o conjunto das combinações convexas de pontos de S.

Prova: precisamos mostrar que $\text{conv}(S) = C$ onde

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{p}_i \ : \ \mathbf{p}_i \in S, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

$(\Leftarrow)$ Como $S \subseteq \text{conv}(S)$ e pela Prop. 2 então $\text{conv}(S) \supseteq C$.

Fecho Convexo

Proposição 3

O fecho convexo de um conjunto S é o conjunto das combinações convexas de pontos de S.

Prova: precisamos mostrar que $\mathrm{conv}(S) = C$ onde

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{p}_i \ : \ \mathbf{p}_i \in S, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

($\Leftarrow$) Como $S \subseteq \mathrm{conv}(S)$ e pela Prop. 2 então $\mathrm{conv}(S) \supseteq C$.

($\Rightarrow$) como $S \subseteq C$ e C é convexo (provar) então $\mathrm{conv}(S) \subseteq C$.

$\blacksquare$

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Problema: se S é conjunto finito de pontos como definir $\text{conv}(S)$?

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Problema: se S é conjunto finito de pontos como definir $\text{conv}(S)$?

Precisamos de uma caracterização de $\text{conv}(S)$ que seja discreta, isto é, representável num computador.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Problema: se S é conjunto finito de pontos como definir $\text{conv}(S)$?

Precisamos de uma caracterização de $\text{conv}(S)$ que seja discreta, isto é, representável num computador.

Teorema 1

O fecho convexo de um conjunto finito de pontos no plano é um polígono convexo cujos vértices são pontos do conjunto dado.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

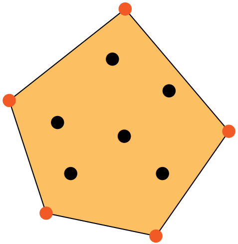
Problema: se S é conjunto finito de pontos como definir $\mathrm{conv}(S)$?

Precisamos de uma caracterização de $\mathrm{conv}(S)$ que seja discreta, isto é, representável num computador.

Teorema 1

O fecho convexo de um conjunto finito de pontos no plano é um polígono convexo cujos vértices são pontos do conjunto dado.

Para calcular $\mathrm{conv}(S)$ basta identificar os pontos de S que são vértices de $\mathrm{conv}(S)$ e listá-los na ordem em que eles aparecem na fronteira.



Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Definição

Dado um conjunto convexo K, o ponto $\mathbf{p} \in K$ é um ponto extremo de K quando $\mathbf{p}$ não pode ser escrito como combinação convexa não trivial de pontos de K. Em outras palavras,

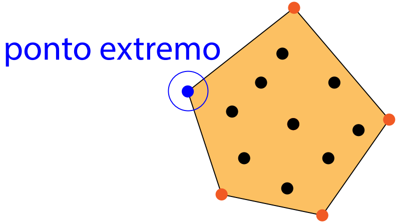
$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{p}_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_i\,, \ \text{ para algum } i$$

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Definição

Dado um conjunto convexo K, o ponto $\mathbf{p} \in K$ é um ponto extremo de K quando $\mathbf{p}$ não pode ser escrito como combinação convexa não trivial de pontos de K. Em outras palavras,

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{p}_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_i\,, \text{ para algum } i$$

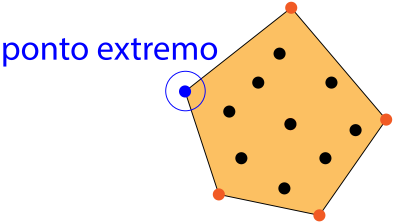


Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Definição

Dado um conjunto convexo K, o ponto $\mathbf{p} \in K$ é um ponto extremo de K quando $\mathbf{p}$ não pode ser escrito como combinação convexa não trivial de pontos de K. Em outras palavras,

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{p}_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_i\,, \;\; \text{para algum } i$$



Proposição 4 (no quadro)

Os pontos extremos de $\mathrm{conv}(S)$ estão em S.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Proposição 5

Seja K um conjunto convexo. Então os pontos extremos de K estão na fronteira de K.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Proposição 5

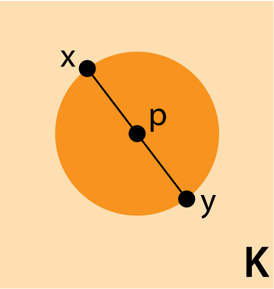
Seja K um conjunto convexo. Então os pontos extremos de K estão na fronteira de K.

Idéia da Prova da Prop. 5: vamos mostrar por absurdo, nenhum ponto interior pode ser ponto extremo.

Proposição 5

Seja K um conjunto convexo. Então os pontos extremos de K estão na fronteira de K.

Idéia da Prova da Prop. 5: vamos mostrar por absurdo, nenhum ponto interior pode ser ponto extremo.



■

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Proposição 6

Se um ponto está na fronteira de K, mas não é um ponto extremo, então ele está no interior de um segmento de reta definido por pontos extremos de K.

Proposição 6

Se um ponto está na fronteira de K, mas não é um ponto extremo, então ele está no interior de um segmento de reta definido por pontos extremos de K.

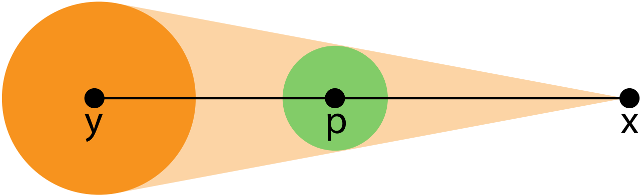
Idéia da Prova da Prop. 6: seja $\mathbf{p}$ um ponto na fronteira de K que não é ponto extremo. Então $\mathbf{p}$ está no interior de um segmento determinado por dois pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ onde um desses pontos (por exemplo, $\mathbf{y}$) está no interior.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Proposição 6

Se um ponto está na fronteira de K, mas não é um ponto extremo, então ele está no interior de um segmento de reta definido por pontos extremos de K.

Idéia da Prova da Prop. 6: seja $\mathbf{p}$ um ponto na fronteira de K que não é ponto extremo. Então $\mathbf{p}$ está no interior de um segmento determinado por dois pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ onde um desses pontos (por exemplo, $\mathbf{y}$) está no interior.



■

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Teorema 1

O fecho convexo de um conjunto finito de pontos no plano é um polígono convexo cujos vértices são pontos do conjunto dado.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Teorema 1

O fecho convexo de um conjunto finito de pontos no plano é um polígono convexo cujos vértices são pontos do conjunto dado.

Resumindo:

- A fronteira de um conjunto convexo K é formada por pontos extremos e segmentos de reta.

Fecho Convexo de um Conjunto Finito

Teorema 1

O fecho convexo de um conjunto finito de pontos no plano é um polígono convexo cujos vértices são pontos do conjunto dado.

Resumindo:

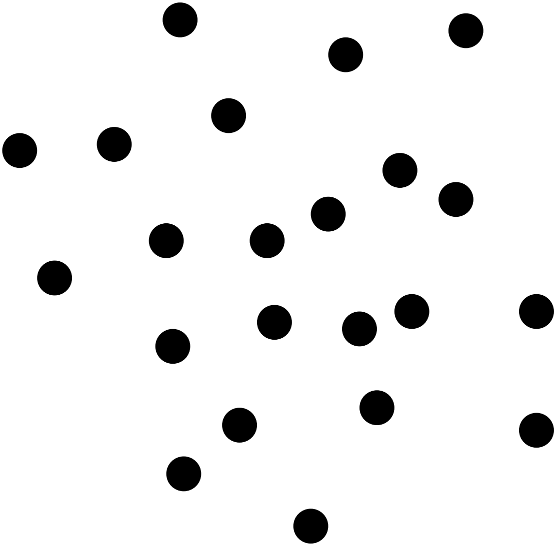
- A fronteira de um conjunto convexo K é formada por pontos extremos e segmentos de reta.

Portanto, quando S é finito, $\text{conv}(S)$ é realmente um polígono convexo cujos vértices são pontos de S.

$\blacksquare$

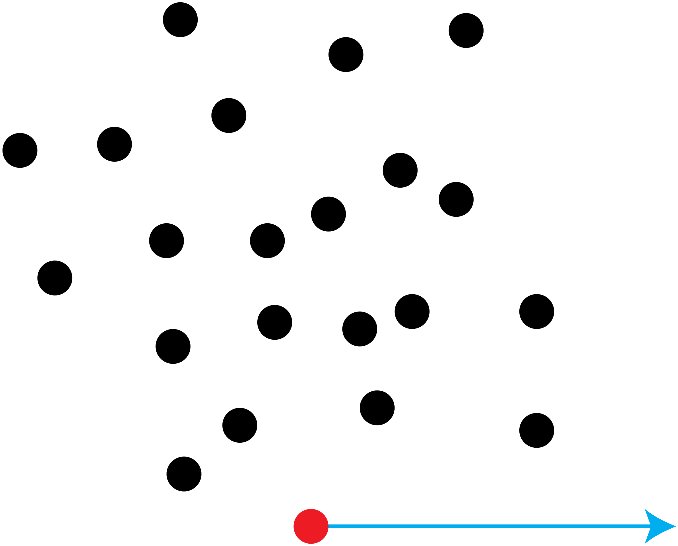
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



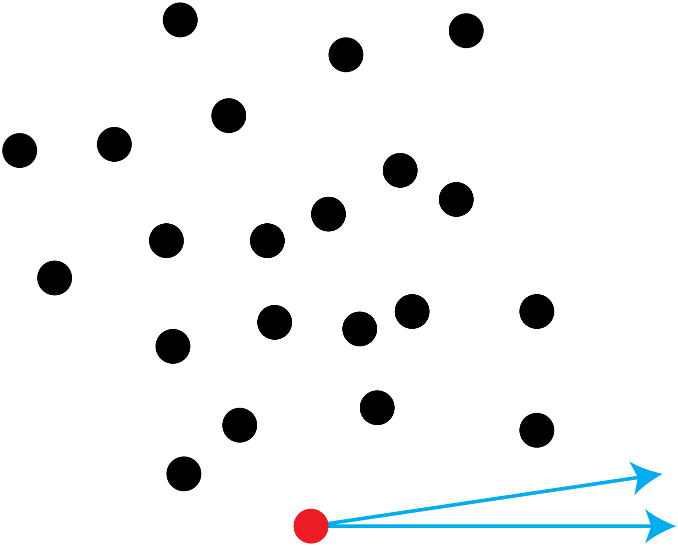
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



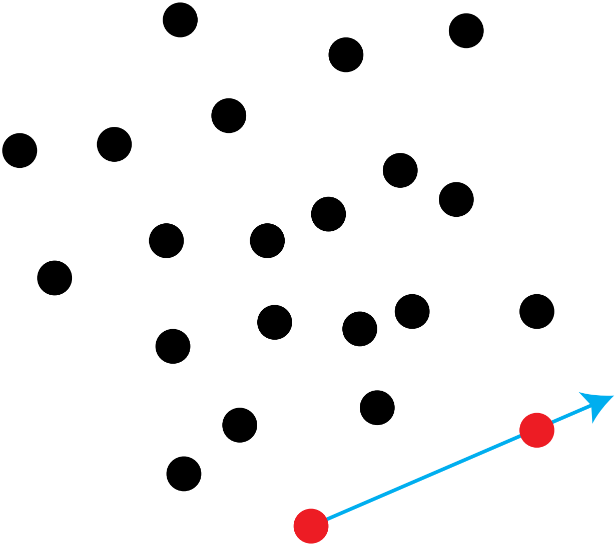
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



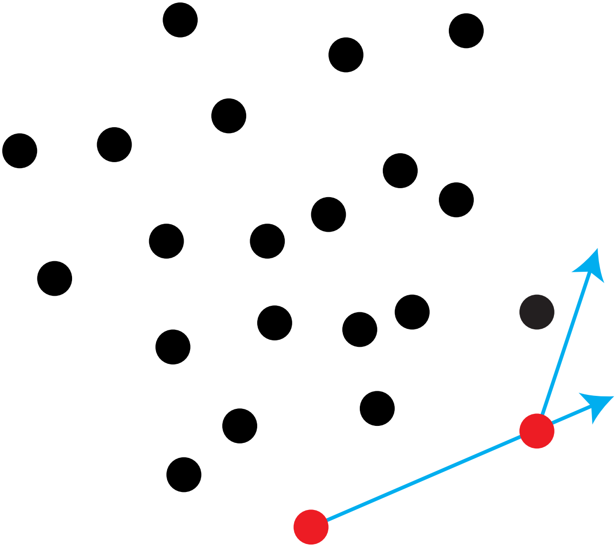
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



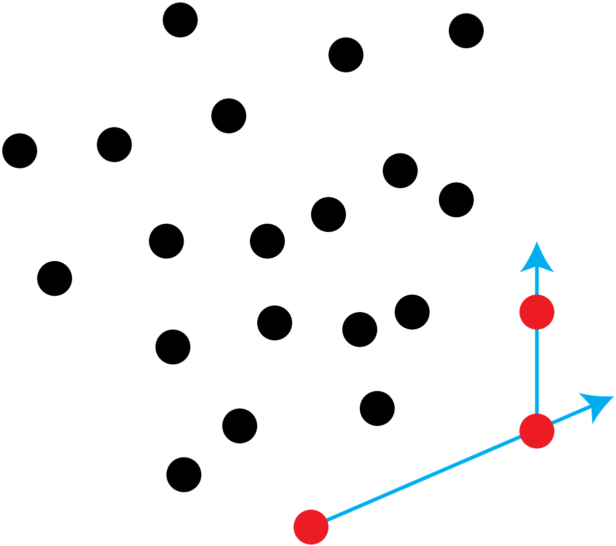
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



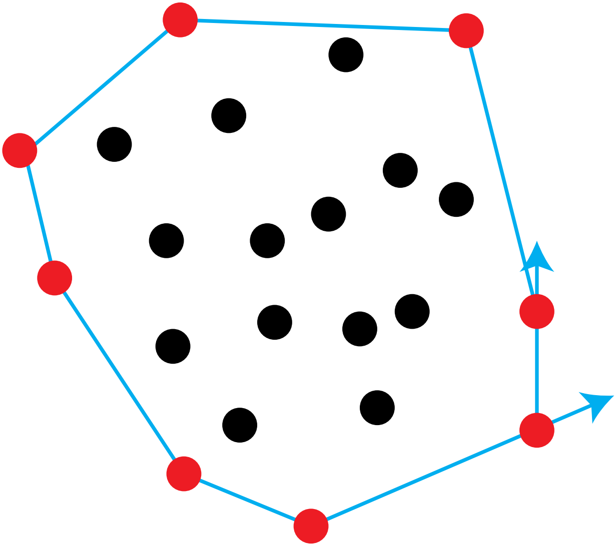
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis



Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Jarvis

$\mathbf{p}_1 =$ ponto de ordenada mínima;

$\mathbf{p}_2 = \mathit{next}(\mathbf{p}_1, (1,0));$

$i = 2;$

repeat

    $\mathbf{p}_{i+1} = \mathit{next}(\mathbf{p}_i, \overrightarrow{\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_i});$

    $i = i + 1;$

until $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1$

Fecho Convexo 2D

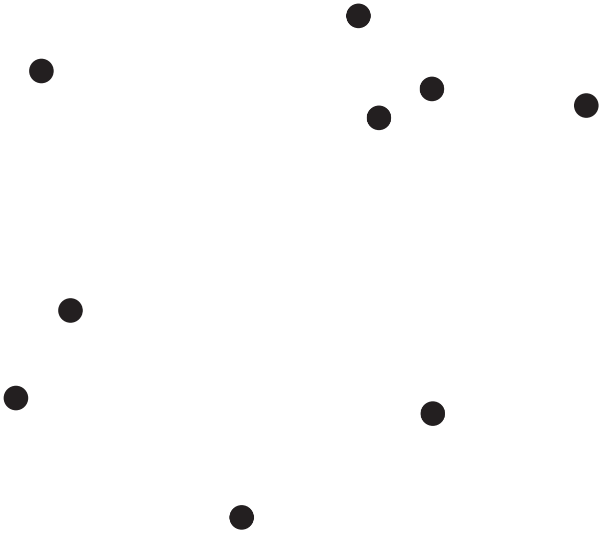
Algoritmo de Jarvis

$\mathbf{p}_1 =$ ponto de ordenada mínima;
$\mathbf{p}_2 = next(\mathbf{p}_1, (1,0));$
$i = 2;$
repeat
    $\mathbf{p}_{i+1} = next(\mathbf{p}_i, \overrightarrow{\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_i});$
    $i = i + 1;$
until $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1$

Complexidade: $O(n^2)$

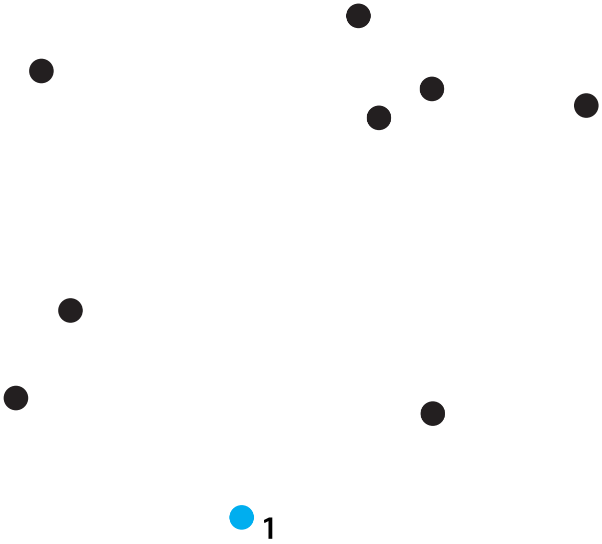
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



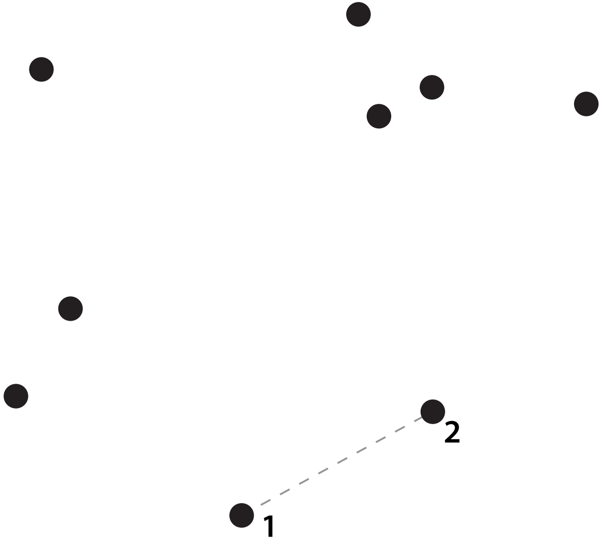
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



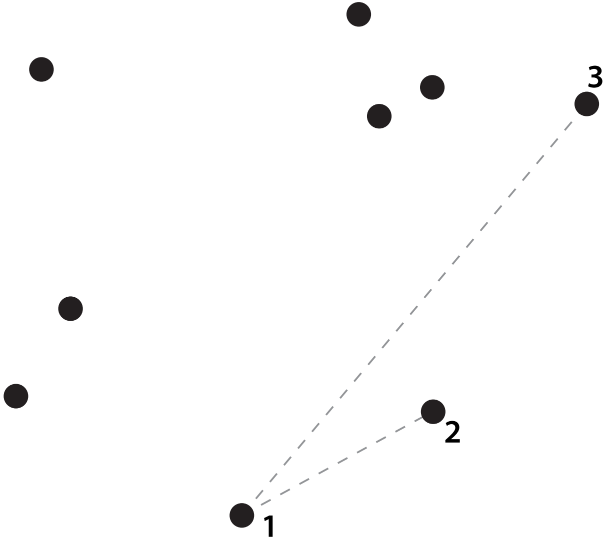
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



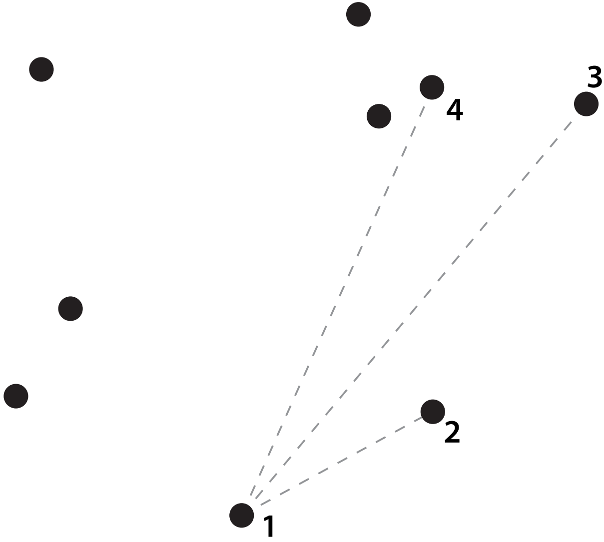
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



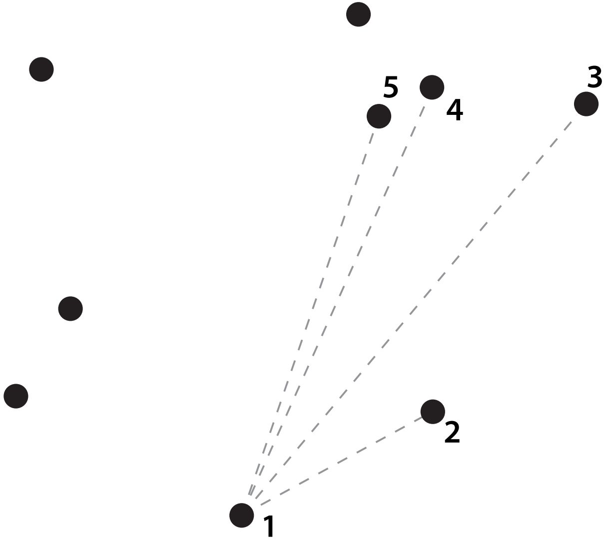
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



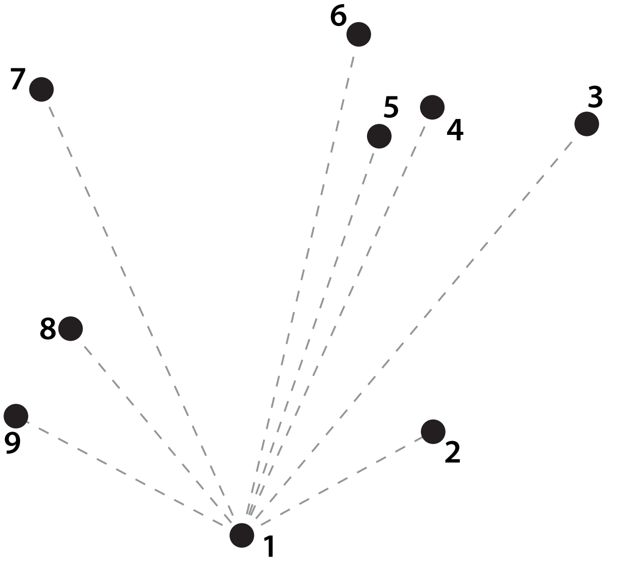
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



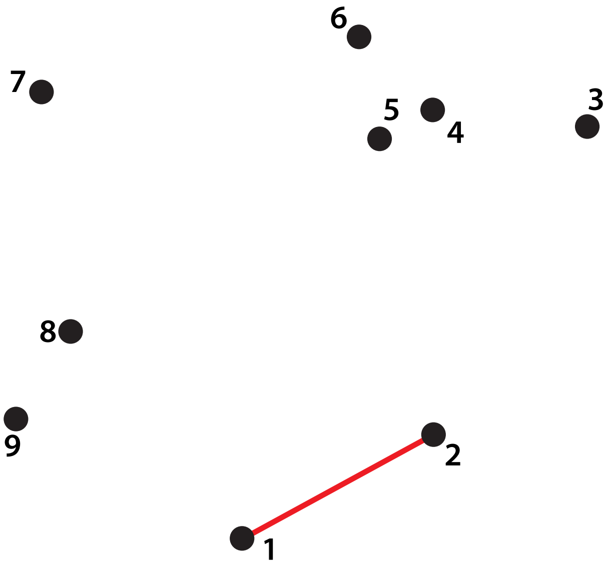
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



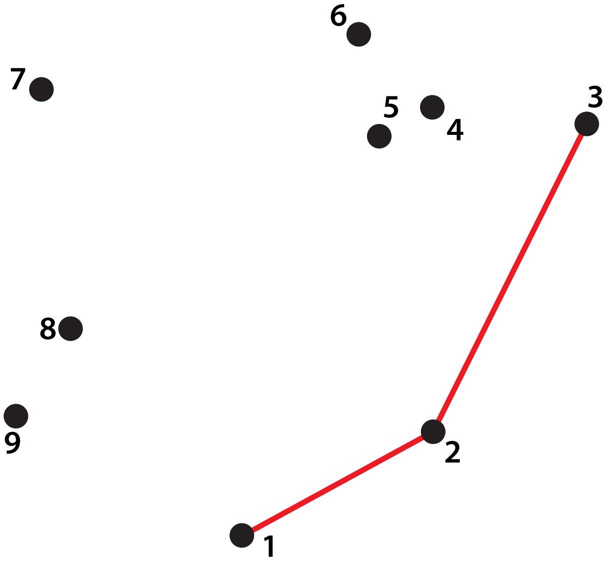
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



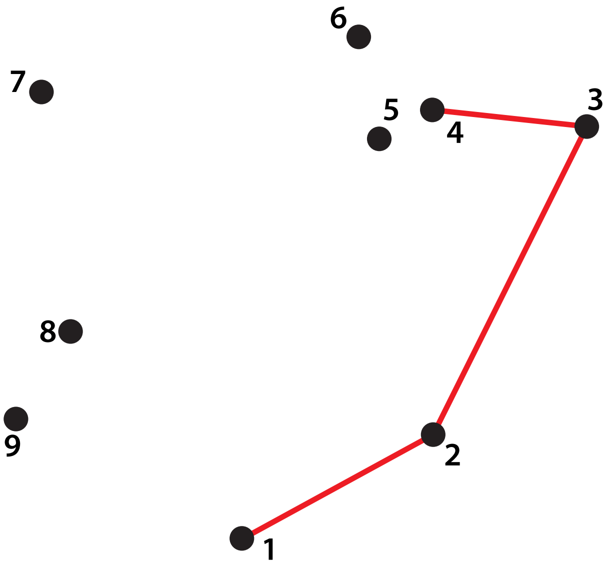
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



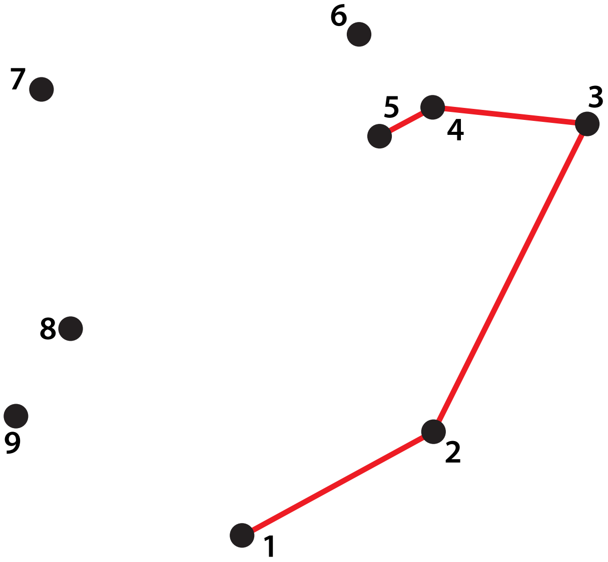
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



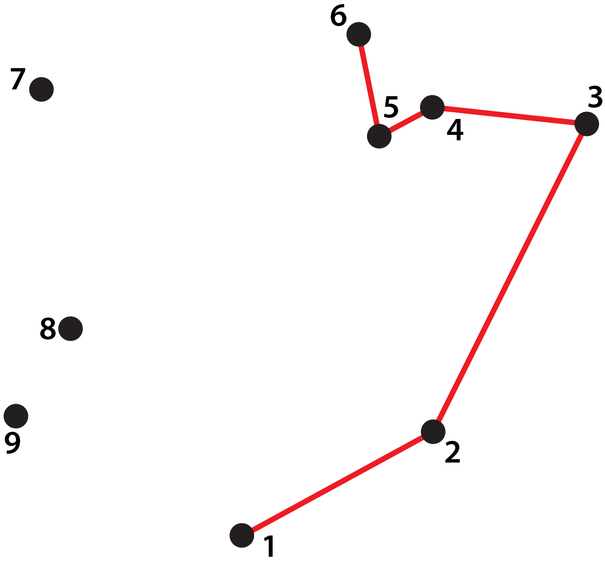
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



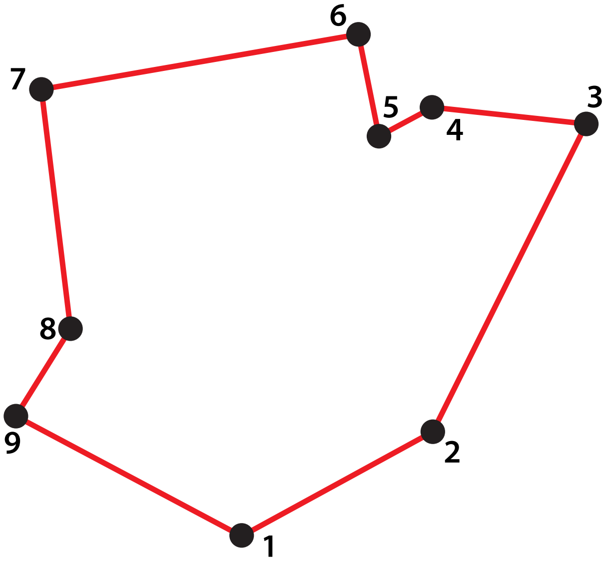
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



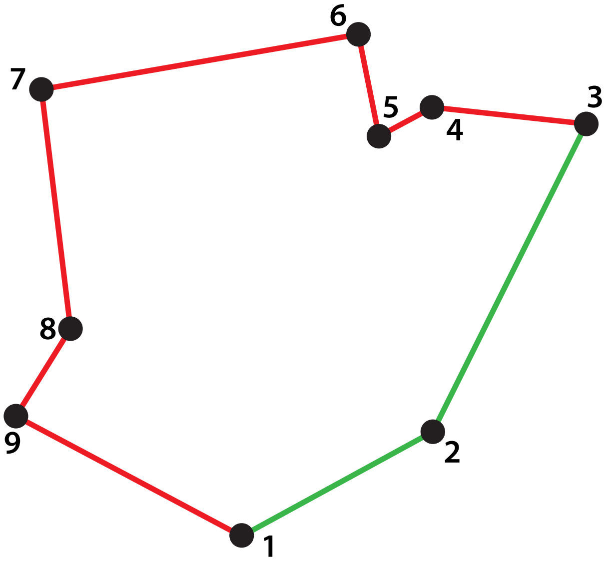
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



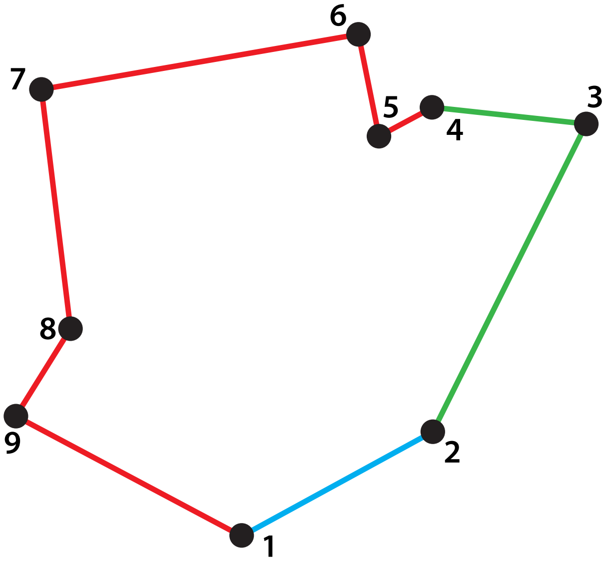
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



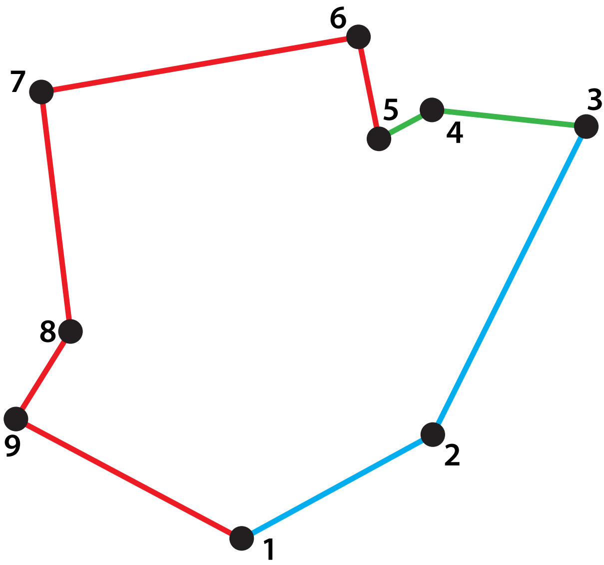
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



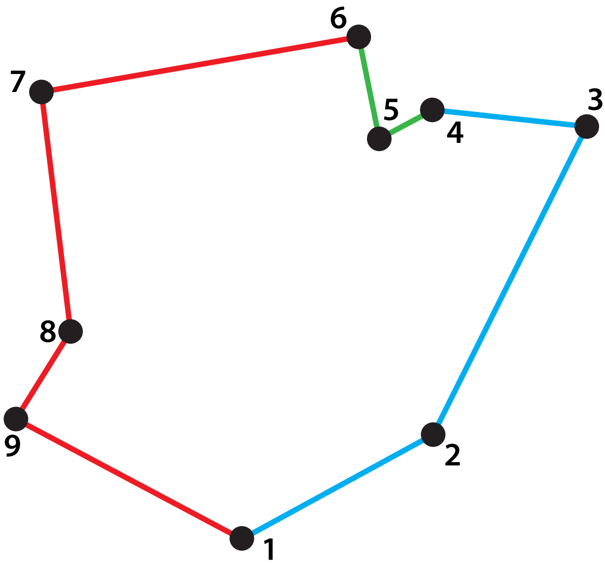
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



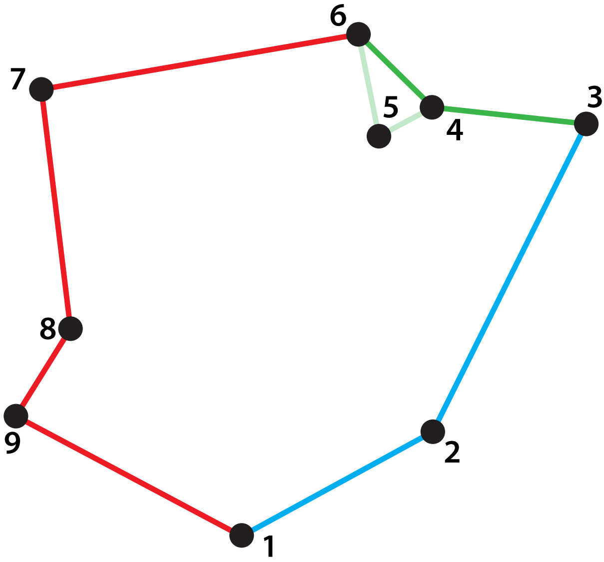
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



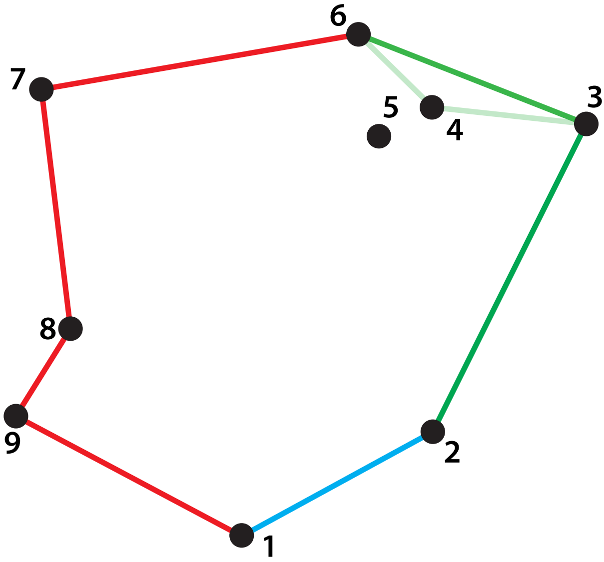
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



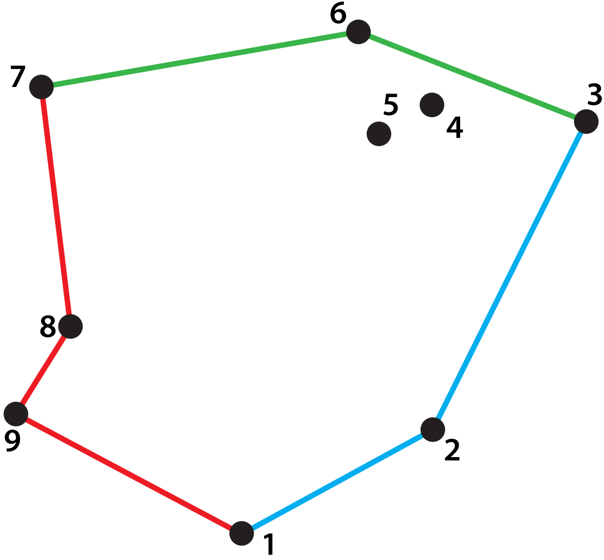
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



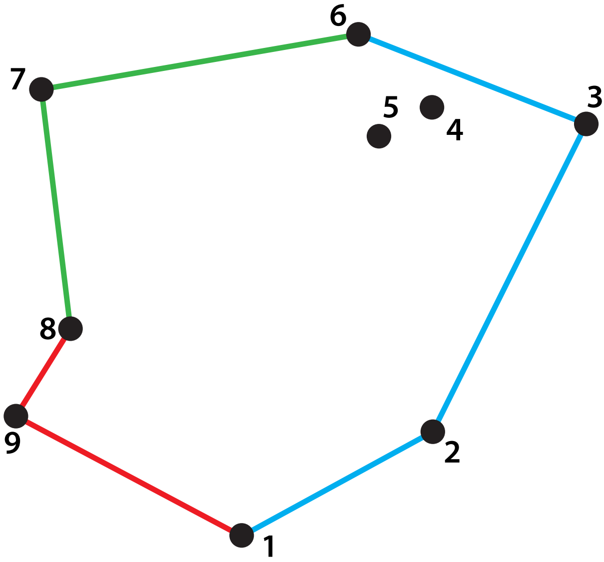
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



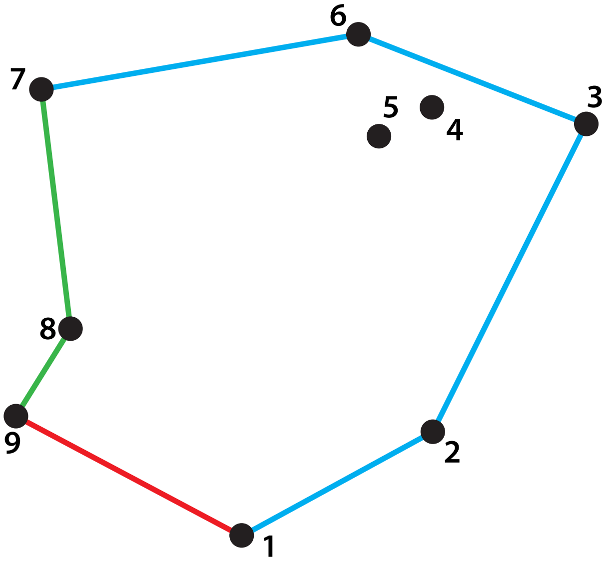
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



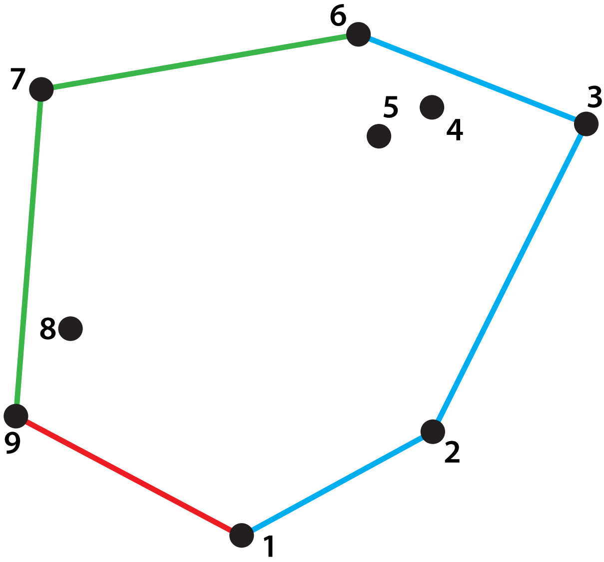
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



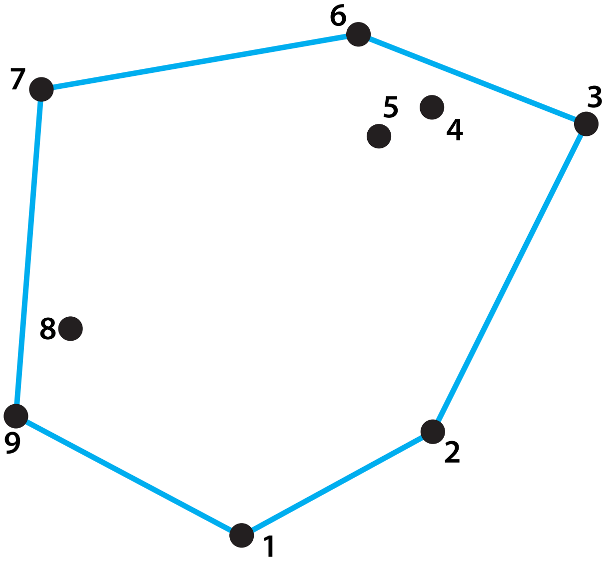
Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham



Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham

$\mathbf{p}_1 =$ ponto de ordenada mínima;
Ordenação angular dos pontos em relação a $\mathbf{p}_1$;
$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_1$;
$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1$; (pontos do fecho convexo)
$\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2$;
$k = 2$;
for $i = 3$ **to** $n + 1$ **do**
    while $k > 1$ e $\triangle \mathbf{q}_{k-1}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_i$ não for convexo **do**
        $k = k - 1$;
    end while
    $k = k + 1$;
    $\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_i$;
end for

Fecho Convexo 2D

Algoritmo de Graham

$\mathbf{p}_1 =$ ponto de ordenada mínima;

Ordenação angular dos pontos em relação a $\mathbf{p}_1$;

$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_1$;

$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1$; (pontos do fecho convexo)

$\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2$;

$k = 2$;

for $i = 3$ **to** $n + 1$ **do**

  while $k > 1$ e $\triangle \mathbf{q}_{k-1}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_i$ não for convexo **do**

    $k = k - 1$;

  end while

  $k = k + 1$;

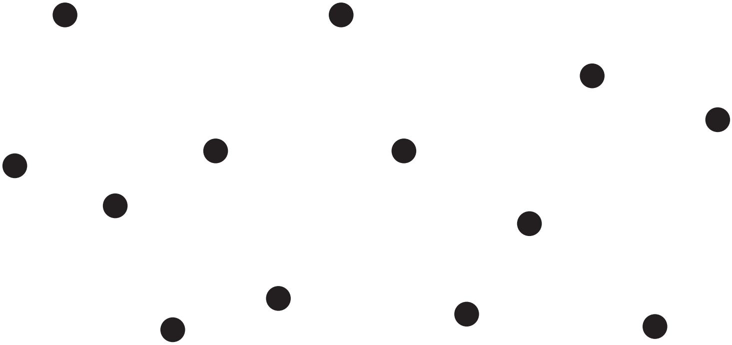
  $\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_i$;

end for

Complexidade: $O(n \log(n))$

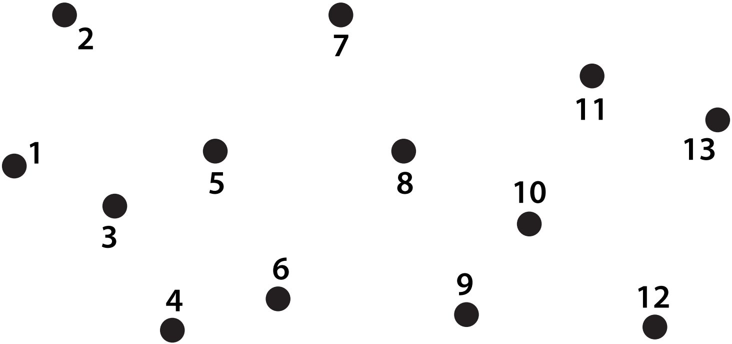
Fecho Convexo 2D

Algoritmo Incremental

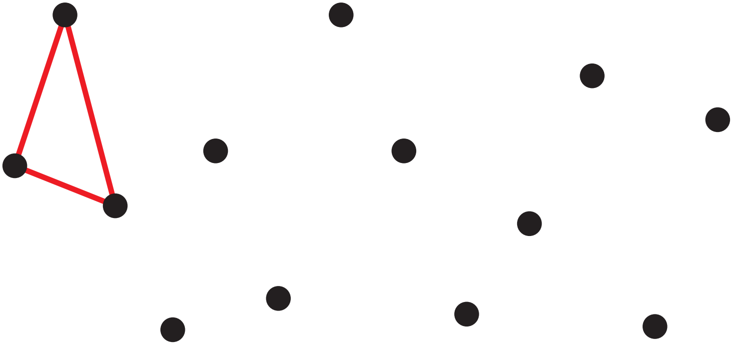


Fecho Convexo 2D

Algoritmo Incremental



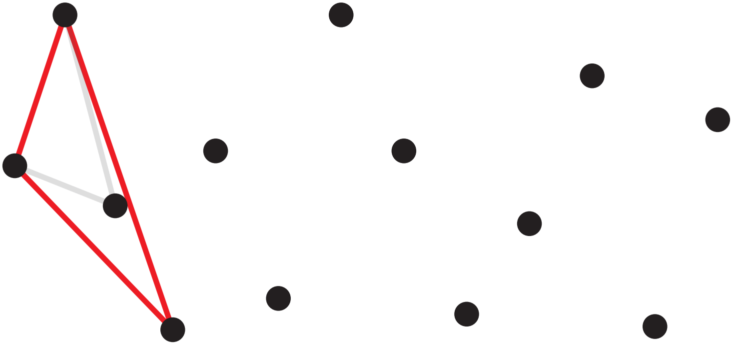
Ordenar os pontos em relação ao eixo x.



Inicialize uma lista circular (ordenada) com 3 primeiros pontos.

Fecho Convexo 2D

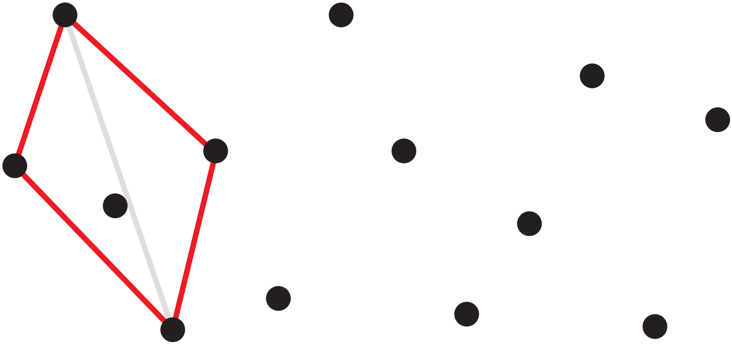
Algoritmo Incremental



Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

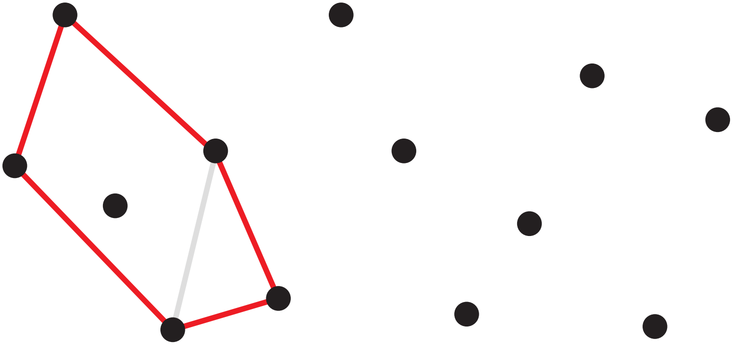
Algoritmo Incremental



Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

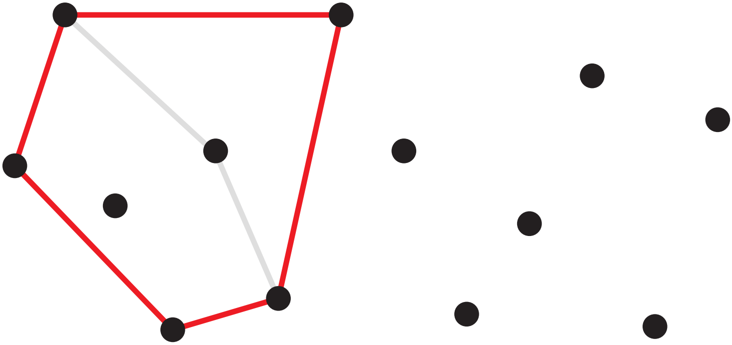
Algoritmo Incremental



Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

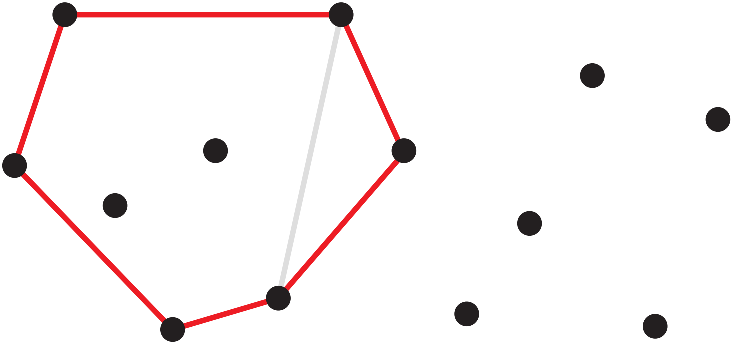
Algoritmo Incremental



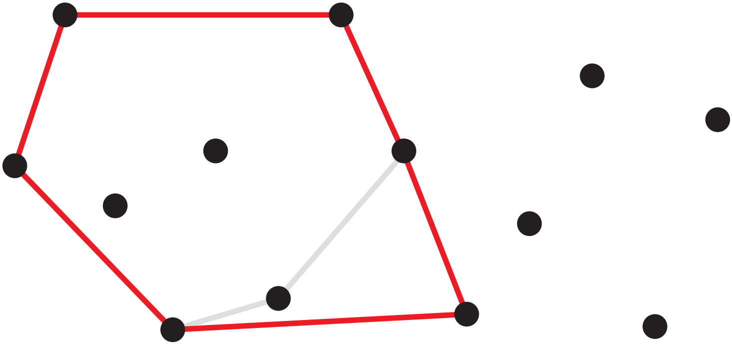
Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

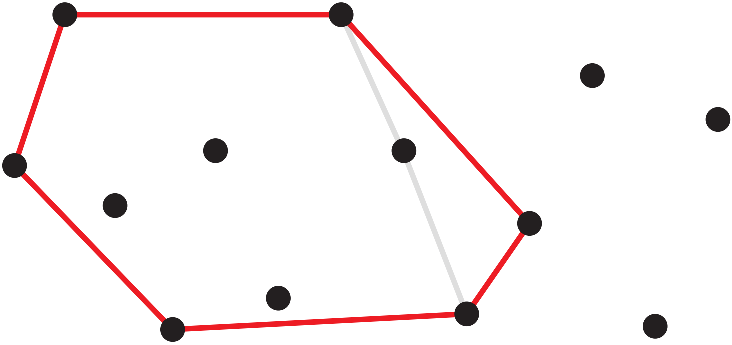
Algoritmo Incremental



Inserir um novo ponto na lista circular.



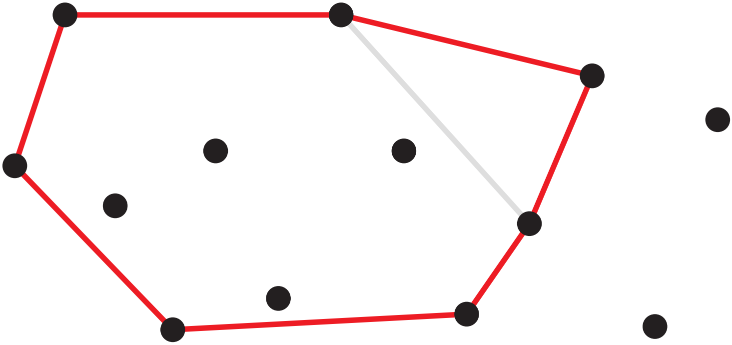
Inserir um novo ponto na lista circular.



Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

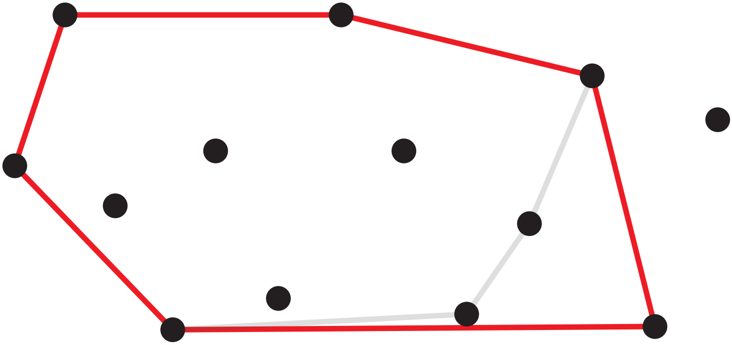
Algoritmo Incremental



Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

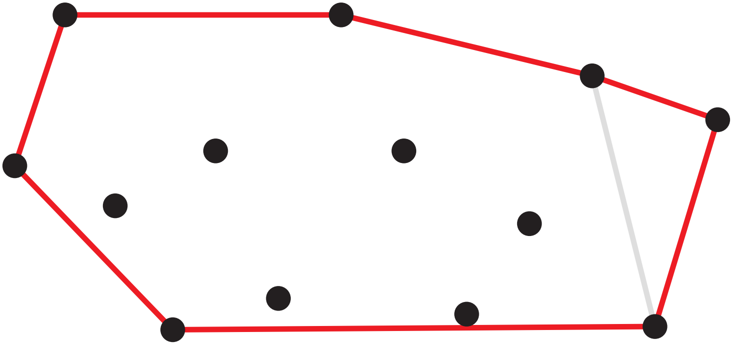
Algoritmo Incremental



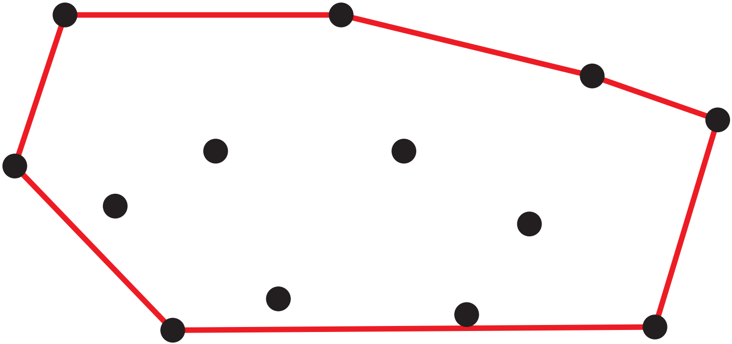
Inserir um novo ponto na lista circular.

Fecho Convexo 2D

Algoritmo Incremental



Inserir um novo ponto na lista circular.

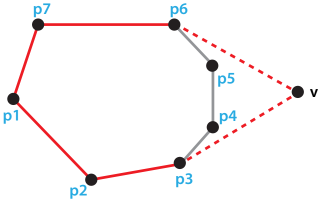


No final os pontos da lista fornecem o fecho convexo!

Fecho Convexo 2D

Algoritmo Incremental

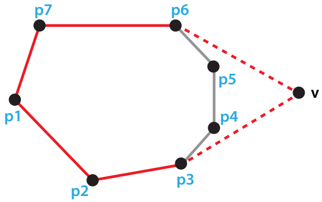
Ordene os pontos em relação a x;
Inicialize uma lista circular com 3 primeiros pontos;
$\mathbf{p}_1 =$ ponto de ordenada mínima;
for $\mathbf{v}$ o próximo ponto em x **do**
    $k = 1$;
    while $\text{area}(\triangle \mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1} \mathbf{v}) > 0$ **do**
        $k = k + 1$;
    end while
    $i = k$;
    while $\text{area}(\triangle \mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1} \mathbf{v}) < 0$ **do**
        $k = k + 1$;
    end while
    $j = k$;
    Atualize a lista $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_i\} \cup \{\mathbf{v}\} \cup \{\mathbf{p}_j, \ldots, \mathbf{p}_n\}$;
end for



Fecho Convexo 2D

Algoritmo Incremental

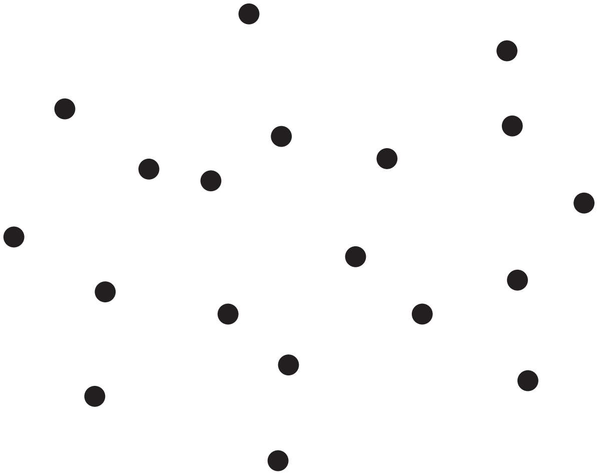
Ordene os pontos em relação a x;
Inicialize uma lista circular com 3 primeiros pontos;
$\mathbf{p}_1 =$ ponto de ordenada mínima;
for $\mathbf{v}$ o próximo ponto em x **do**
    $k = 1$;
    while $\mathrm{area}(\triangle \mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1} \mathbf{v}) > 0$ **do**
        $k = k + 1$;
    end while
    $i = k$;
    while $\mathrm{area}(\triangle \mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1} \mathbf{v}) < 0$ **do**
        $k = k + 1$;
    end while
    $j = k$;
    Atualize a lista $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_i\} \cup \{\mathbf{v}\} \cup \{\mathbf{p}_j, \ldots, \mathbf{p}_n\}$;
end for



Complexidade: $O(n \log(n))$

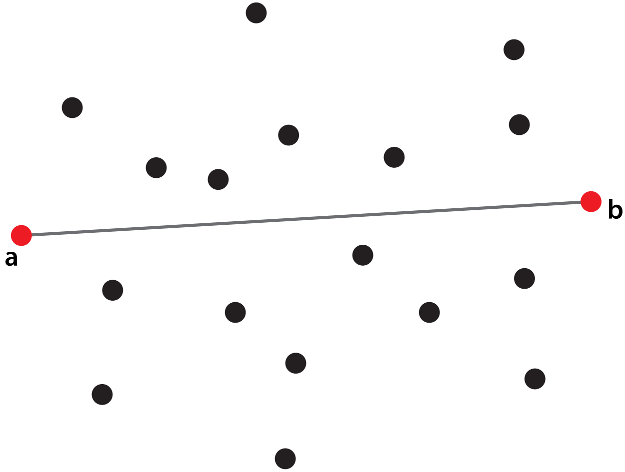
Fecho Convexo 2D

Quickhull



Fecho Convexo 2D

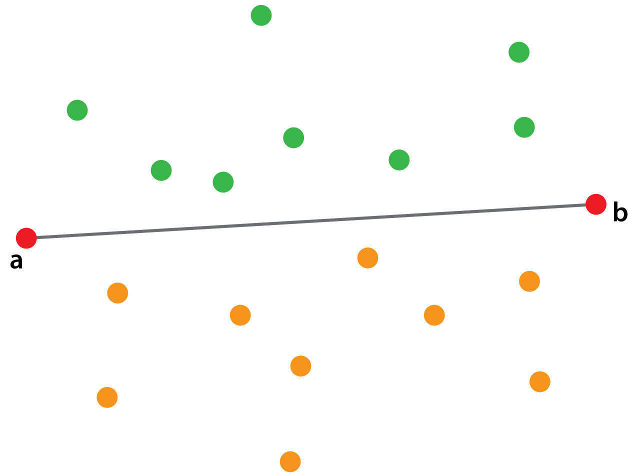
Quickhull



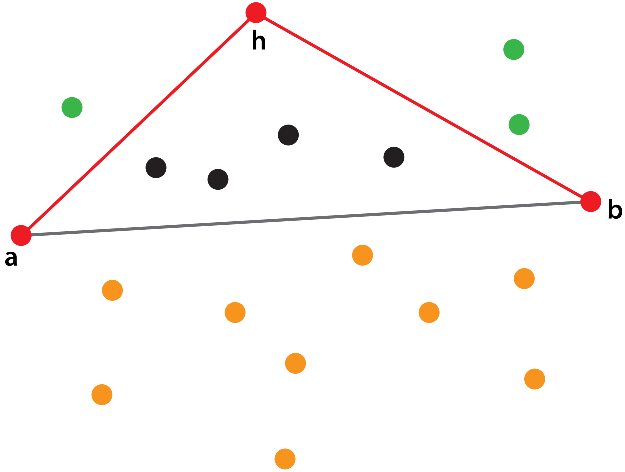
Encontre os pontos de maior e menor x.

Fecho Convexo 2D

Quickhull



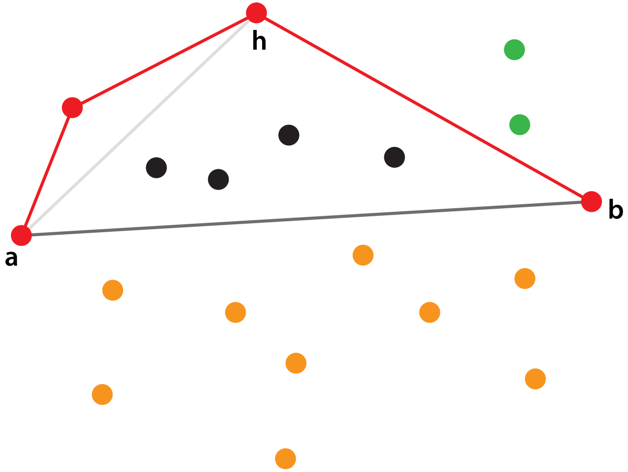
Separe os pontos em dois conjuntos: S_1 à esquerda de $\overline{\mathbf{ab}}$ e S_2 à esquerda de $\overline{\mathbf{ba}}$.



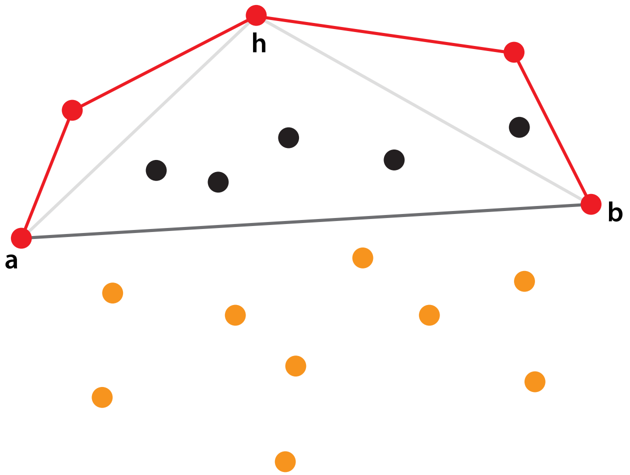
Ache o ponto $\mathbf{h} \in S_1$ mais distante de $\overline{\mathbf{ab}}$.

Fecho Convexo 2D

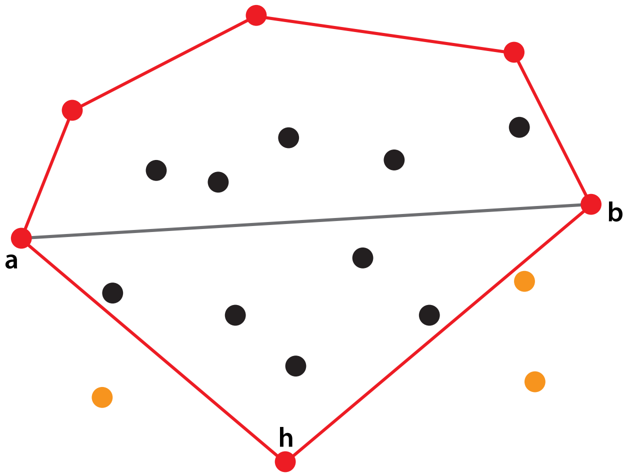
Quickhull



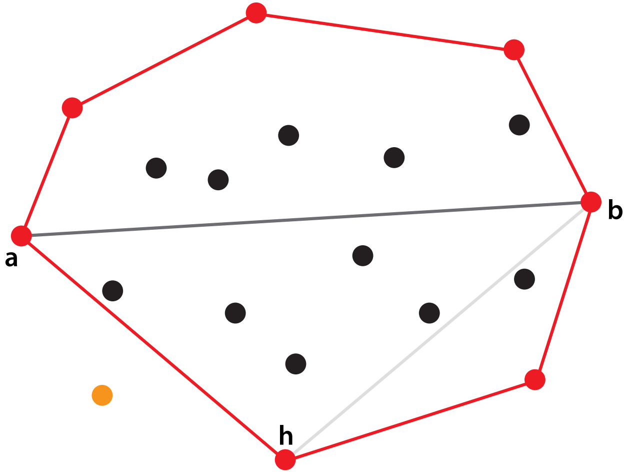
Repita o processo para os pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ah}}$.



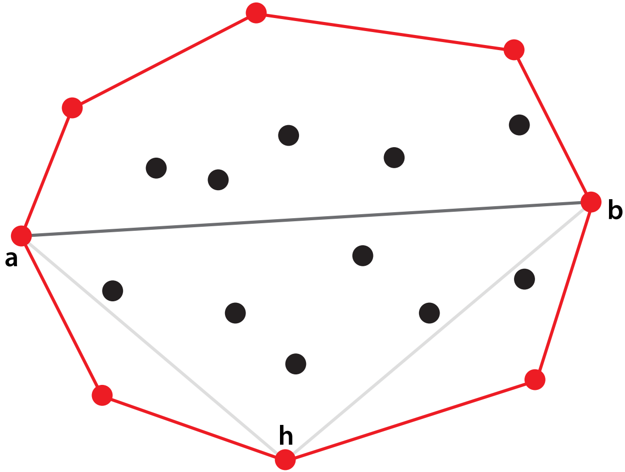
Repita o processo para os pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{hb}}$.



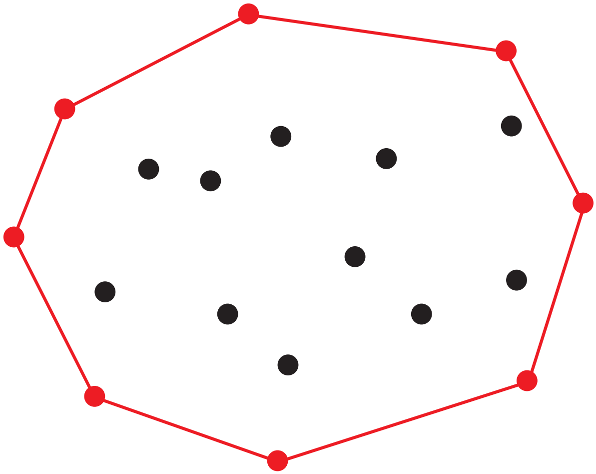
Repita o processo para os pontos em S_2.



Repita o processo para os pontos em S_2.



Repita o processo para os pontos em S_2.



Concatene os pontos das lista de S_1 e S_2 para ter o fecho convexo!

Quickhull(S)

1: $\mathbf{a}$ = ponto de abcissa mínima em S;
2: $\mathbf{b}$ = ponto de abcissa máxima em S;
3: S_1 = pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ab}}$;
4: S_2 = pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ba}}$;
5: $Hull(S_1, \overline{\mathbf{ab}})$;
6: $Hull(S_2, \overline{\mathbf{ba}})$;

Quickhull(S)

1: $\mathbf{a}$ = ponto de abcissa mínima em S;
2: $\mathbf{b}$ = ponto de abcissa máxima em S;
3: S_1 = pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ab}}$;
4: S_2 = pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ba}}$;
5: $Hull(S_1, \overline{\mathbf{ab}})$;
6: $Hull(S_2, \overline{\mathbf{ba}})$;

Hull(S,$\overline{\mathbf{pq}}$)

1: Encontre $\mathbf{h} \in S$ o ponto mais distante de $\overline{\mathbf{pq}}$;
2: $Hull(S, \overline{\mathbf{ph}})$;
3: $Hull(S, \overline{\mathbf{hq}})$;

Quickhull(S)

1: $\mathbf{a}$ = ponto de abcissa mínima em S;
2: $\mathbf{b}$ = ponto de abcissa máxima em S;
3: S_1 = pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ab}}$;
4: S_2 = pontos à esquerda de $\overline{\mathbf{ba}}$;
5: $Hull(S_1, \overline{\mathbf{ab}})$;
6: $Hull(S_2, \overline{\mathbf{ba}})$;

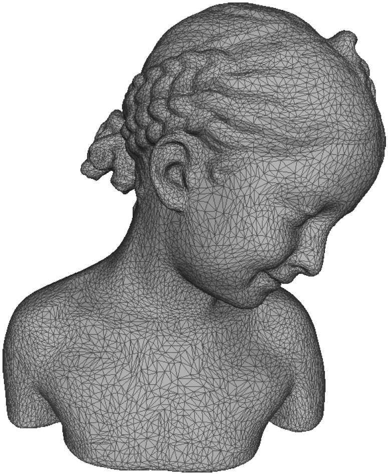
Hull(S,$\overline{\mathbf{pq}}$)

1: Encontre $\mathbf{h} \in S$ o ponto mais distante de $\overline{\mathbf{pq}}$;
2: $Hull(S, \overline{\mathbf{ph}})$;
3: $Hull(S, \overline{\mathbf{hq}})$;

Complexidade: $O(n \log(n))$

Volume de uma Malha Triangular

Objetivo: como calcular o volume de uma malha triangular fechada?

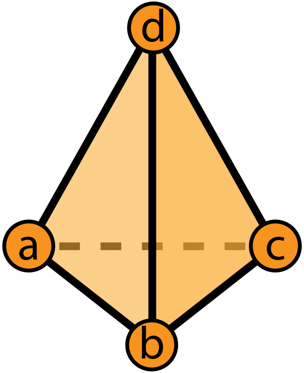


Volume de uma Malha Triangular

Solução: calcular o volume orientado de tetraedros.

Volume de uma Malha Triangular

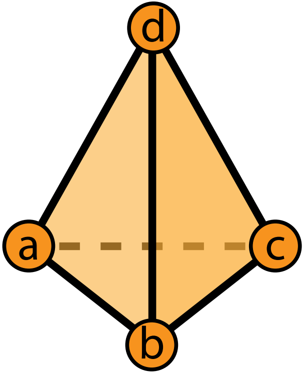
Solução: calcular o volume orientado de tetraedros.



$$\mathrm{vol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{bmatrix}$$

Volume de uma Malha Triangular

Solução: calcular o volume orientado de tetraedros.



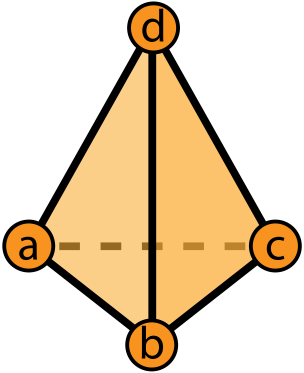
$$\mathrm{vol}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{6}\det\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 1: calcular a centróide da malha:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i$$

Volume de uma Malha Triangular

Solução: calcular o volume orientado de tetraedros.



$$\mathrm{vol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 1: calcular a centróide da malha:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i$$

Passo 2: calcular a soma dos volumes:

$$V = \left| \sum_{i \in T} \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i, \mathbf{v}_3^i, \mathbf{x}) \right|$$

Volume de uma Malha Triangular

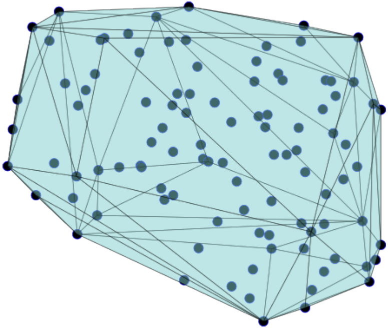
Exercício 1

Implemente em MATLAB uma função que calcule o volume de uma malha triangular.

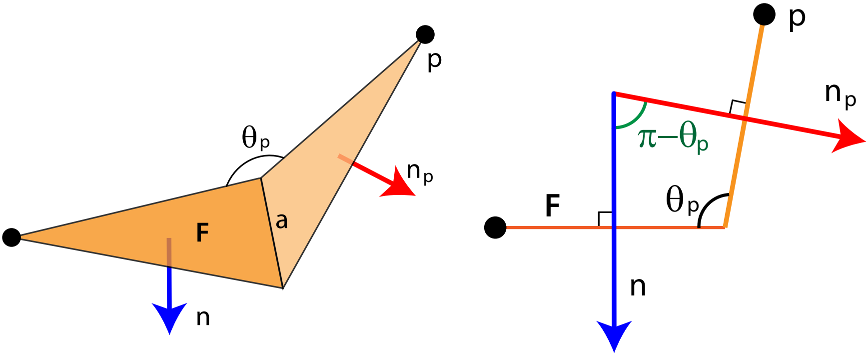
Fecho Convexo 3D

Entrada: dado um conjunto de pontos S no $\mathbb{R}^3$.

Objetivo: calcular conv(S), isto é, menor poliedro convexo que contém S e cujo vértices também são pontos de S.



Jarvis 3D



$$\cos(\theta_{\mathbf{p}}) = -\cos(\pi - \theta_{\mathbf{p}}) = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n_p}}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{n_p}\|}$$

$$\text{maximizar } \theta_{\mathbf{p}} \implies \text{minimizar } \cos(\theta_{\mathbf{p}})$$

Algoritmo Incremental 3D (Clarkson & Shor, 1989)

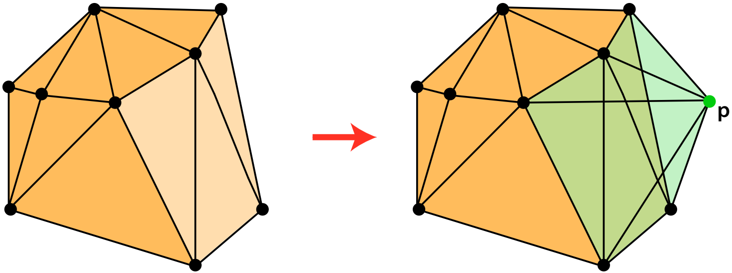
Dado $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. A cada passo do algoritmo, $\mathrm{conv}(S)$ é construído adicionando um ponto $\mathbf{p}_r$.

$$\mathrm{conv}(S_{r-1}) = \mathrm{conv}(\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{r-1}\})$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{conv}(S_r) = \mathrm{conv}(\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{r-1}, \mathbf{p}_r\})$$

Algoritmo Incremental 3D (Clarkson & Shor, 1989)

Dado $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. A cada passo do algoritmo, conv(S) é construído adicionando um ponto $\mathbf{p}_r$.

$$\text{conv}(S_{r-1}) = \text{conv}(\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{r-1}\})$$
$$\Downarrow$$
$$\text{conv}(S_r) = \text{conv}(\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{r-1}, \mathbf{p}_r\})$$



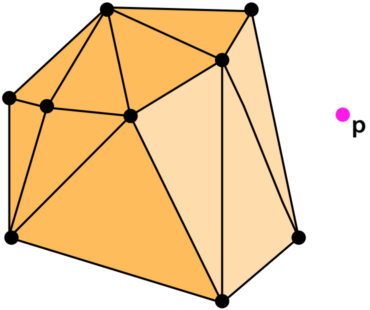
Complexidade: $O(n^2)$

Algoritmo Incremental 3D

1. Construa um tetraedro com 4 pontos de S;

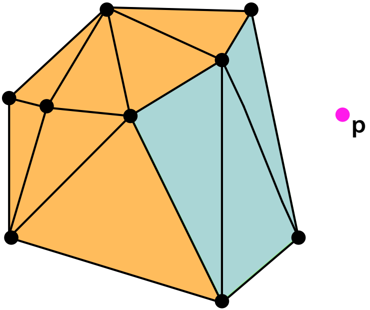
Algoritmo Incremental 3D

1. Construa um tetraedro com 4 pontos de S;
2. Para cada ponto restante $\mathbf{p}_r \in S$ faça:



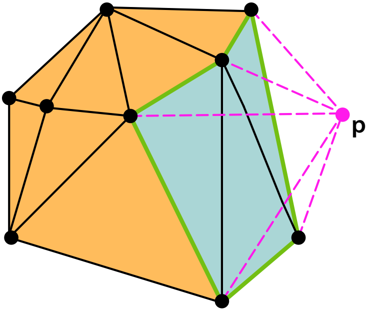
Algoritmo Incremental 3D

1. Construa um tetraedro com 4 pontos de S;
2. Para cada ponto restante $\mathbf{p}_r \in S$ faça:
   2.1 Determine as faces de $\mathrm{conv}(S_{r-1})$ visíveis a $\mathbf{p}_r$;



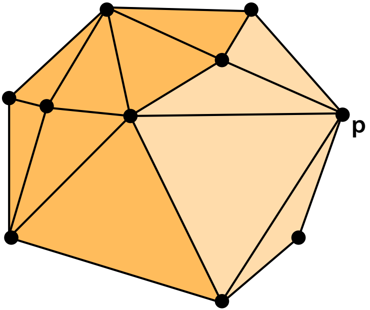
Algoritmo Incremental 3D

1. Construa um tetraedro com 4 pontos de S;
2. Para cada ponto restante $\mathbf{p}_r \in S$ faça:
   2.1 Determine as faces de $\text{conv}(S_{r-1})$ visíveis a $\mathbf{p}_r$;
   2.2 Determine as arestas de horizonte de $\text{conv}(S_{r-1})$ para $\mathbf{p}_r$;



Algoritmo Incremental 3D

1. Construa um tetraedro com 4 pontos de S;
2. Para cada ponto restante $\mathbf{p}_r \in S$ faça:
    2.1 Determine as faces de $\text{conv}(S_{r-1})$ visíveis a $\mathbf{p}_r$;
    2.2 Determine as arestas de horizonte de $\text{conv}(S_{r-1})$ para $\mathbf{p}_r$;
    2.3 Para cada aresta de horizonte e, crie uma nova face triangular conectando e a $\mathbf{p}_r$. Logo, $\mathbf{p}_r \in \text{conv}(S_r)$.



Visibilidade e Horizonte

Definição

Uma face f de $\text{conv}(S)$ é uma face visível a partir de um ponto $\mathbf{p}$, se o hiperplano que contém f separa $\text{conv}(S)$ de $\mathbf{p}$.

Visibilidade e Horizonte

Definição

Uma face f de $\text{conv}(S)$ é uma face visível a partir de um ponto $\mathbf{p}$, se o hiperplano que contém f separa $\text{conv}(S)$ de $\mathbf{p}$.

Cálculo da Visibilidade de Face: assumindo que as faces de $\text{conv}(S)$ estão orientadas no sentindo anti-horário. Para cada face f de $\text{conv}(S)$, a visibilidade de f a partir de um ponto $\mathbf{p}$ é dada pelo sinal do volume orientado do tetraedro formado pelo vértices $(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f)$ de f e $\mathbf{p}$.

Visibilidade e Horizonte

Definição

Uma face f de $\text{conv}(S)$ é uma face visível a partir de um ponto $\mathbf{p}$, se o hiperplano que contém f separa $\text{conv}(S)$ de $\mathbf{p}$.

Cálculo da Visibilidade de Face: assumindo que as faces de $\text{conv}(S)$ estão orientadas no sentindo anti-horário. Para cada face f de $\text{conv}(S)$, a visibilidade de f a partir de um ponto $\mathbf{p}$ é dada pelo sinal do volume orientado do tetraedro formado pelo vértices $(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f)$ de f e $\mathbf{p}$.

- se $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f, \mathbf{p}) > 0 \Longrightarrow f$ é visível

Visibilidade e Horizonte

Definição

Uma face f de conv(S) é uma face visível a partir de um ponto $\mathbf{p}$, se o hiperplano que contém f separa conv(S) de $\mathbf{p}$.

Cálculo da Visibilidade de Face: assumindo que as faces de conv(S) estão orientadas no sentindo anti-horário. Para cada face f de conv(S), a visibilidade de f a partir de um ponto $\mathbf{p}$ é dada pelo sinal do volume orientado do tetraedro formado pelo vértices $(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f)$ de f e $\mathbf{p}$.

- se $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f, \mathbf{p}) > 0 \Longrightarrow f$ é visível
- se $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f, \mathbf{p}) \leq 0 \Longrightarrow f$ não é visível

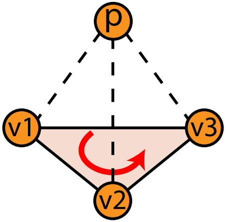
Visibilidade e Horizonte

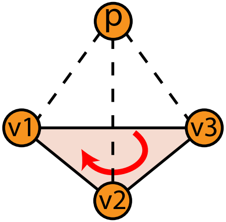
Definição

Uma face f de conv(S) é uma face visível a partir de um ponto $\mathbf{p}$, se o hiperplano que contém f separa conv(S) de $\mathbf{p}$.

Cálculo da Visibilidade de Face: assumindo que as faces de conv(S) estão orientadas no sentindo anti-horário. Para cada face f de conv(S), a visibilidade de f a partir de um ponto $\mathbf{p}$ é dada pelo sinal do volume orientado do tetraedro formado pelo vértices $(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f)$ de f e $\mathbf{p}$.

- se $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f, \mathbf{p}) > 0 \Longrightarrow f$ é visível
- se $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1^f, \mathbf{v}_2^f, \mathbf{v}_3^f, \mathbf{p}) \leq 0 \Longrightarrow f$ não é visível





Visibilidade e Horizonte

Definição

Uma aresta e de $\text{conv}(S)$ é uma aresta de horizonte se e é uma aresta adjacente a uma face visível e uma não visível.