Développement limités usuels (en zéro)

Définition 1 *Soit f définie sur un intervalle I. On dit que f admet un développement limité en $a \in \mathrm{I}$ à l'ordre n s'il existe des scalaires $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Proposition 1 *Si f admet un développement limité en $a \in \mathrm{I}$ à l'ordre n, alors ce développement est unique.*

Proposition 2 *Soit f définie sur un intervalle I contenant zéro et qui admet un développement limité en zéro à l'ordre n.*
- *Si f est paire, les termes d'ordre impair sont nuls ;*
- *Si f est impaire, les termes d'ordre pair sont nuls.*

$$\begin{array}{rclccc}
\dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2 & + \ldots + & x^n & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
\dfrac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2 & + \ldots + & (-1)^n x^n & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 & + \ldots + & \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
\mathrm{Arctan}\, x & = & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5} & + \ldots + & (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} & + \mathrm{O}(x^{2n+3}) \\
\ln(1-x) & = & -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3} & + \ldots + & -\dfrac{x^n}{n} & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) & = & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3} & + \ldots + & (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
\mathrm{e}^x & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2!} & + \ldots + & \dfrac{x^n}{n!} & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
\sin x & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!} & + \ldots + & (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+3}) \\
\cos x & = & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!} & + \ldots + & (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+2}) \\
\mathrm{sh}\, x & = & x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!} & + \ldots + & \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+3}) \\
\mathrm{ch}\, x & = & 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!} & + \ldots + & \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+2})
\end{array}$$

Équivalents usuels

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{sh}\ x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{ch}\ x \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x^\alpha - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \alpha(x-1) \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Arcsin}\ x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{Arccos}\ x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arctan}\ x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sin x - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

$$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\mathrm{sh}\ x - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$$

$$\mathrm{ch}\ x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Formulaire (non exhaustif)

1 Trigonométrie

1. $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$;
2. $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$;
3. $\cos^2 t + \sin^2 = 1$;
4. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
5. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
6. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$;
7. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$;
8. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$;
9. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$;
10. $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$;
11. $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$;
12. $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
13. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
14. $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
15. $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$;
16. $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$;
17. $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$;
18. $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

2 Trigonométrie hyperbolique

1. $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^{t} + e^{-t}}{2}$;
2. $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}$;
3. $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$;
4. etc.

3 Calcul de sommes

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Si $q \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \sum_{k=0}^{n-p} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} u_{i,j} \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}$$

Si $u_{i,j} = u_{j,i}$
$$2\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} u_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} u_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} u_{i,i}$$

4 Formule du binôme

$$\forall (a,b,n) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{N} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

5 Identité de Bernoulli

$$\forall (x, y, n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}^* \qquad x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

6 Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_n$ suite vérifiant $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $a \neq 1$. On pose α point fixe de l'équation de récurrence, *i.e.* $\alpha = a\alpha + b$. On a

$$\begin{cases} u_{n+1} &= a u_n + b \\ \alpha &= a\alpha + b \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Le suite $(u_n - \alpha)_n$ est donc géometrique de raison a.

7 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 1 *Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente linéaire d'ordre deux vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. L'équation caractéristique (R) *est*

$$r^2 - ar - b = 0$$

- *Si* (R) *admet deux racines α, β distinctes, alors*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

- *Si* (R) *admet une racine double α, alors*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n$$

- *Si $(a, b) \in \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*}$ et* (R) *admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \underline{\mathbb{R}^2} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

8 Théorème des accroissements finis

Théorème 2 *Soit $f \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ et f dérivable sur $]a\,;b[$. Alors*

$$\exists c \in \,]a\,;b[\quad | \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 1 (IAF) *Soit $f \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$, f dérivable sur $]a\,;b[$ avec* $\displaystyle\sup_{t \in]a\,;b[} |f'(t)| \leqslant \mathrm{M}$.

Alors $$|f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{M}\,|b - a|$$

9 Théorème de Taylor-Young

Théorème 3 *Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $a \in \mathrm{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$. On a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

10 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 4 *Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. On a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

11 Sommes de Riemann

Théorème 5 *Soit $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

12 Algèbre linéaire

On note $\mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires de $\mathbb{K}$.

Proposition 1 *Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ famille de vecteurs de E un $\mathbb{K}$-ev. On a*

$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in\mathrm{I}} = \left\{\sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i x_i,\ (\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}\right\}$$

En particulier, pour $x \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{Vect}\,(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{K}\}$$

et pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$, on a

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une famille libre et génératrice est une* base *de E.*

13 Projections, projecteurs

Définition 2 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G des sev supplémentaires de E. On appelle* projection *sur F parallèlement à G l'application notée $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ définie par*

$$p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x = a + b \mapsto a \quad \textit{avec} \quad (a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$$

Définition 3 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que p est un* projecteur *si $p^2 = p$.*

Théorème 6 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une projection de E est un projecteur. Réciproquement, un projecteur p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.*

14 Involutions linéaires, symétries

Définition 4 *Soit F et G deux sev supplémentaires de E. On appelle* symétrie *par rapport à F parallèment à G l'application notée $s_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ définie par*

$$s_{\mathrm{F},\mathrm{G}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x = u + v \mapsto u - v \quad \textit{avec} \quad (u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$$

Définition 5 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que s est une* involution linéaire *si $s^2 = \mathrm{id}$.*

Théorème 7 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une symétrie de E est une involution linéaire. Réciproquement, une involution linéaire est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$.*

15 Forme linéaire, hyperplan

Définition 6 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. Un élément de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ *est une* forme linéaire.

Définition 7 *Un* hyperplan *est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Théorème 8 *Soit* H *sev de* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. On a*

$$\mathrm{H} \textit{ hyperplan de } \mathrm{E} \iff \exists x \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H} \quad | \quad \mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathrm{H}$$

16 Algèbre linéaire en dimension finie

Théorème 9 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev avec* $\dim \mathrm{E} = n$*. Une famille de vecteurs de* E *est une base si et seulement si elle libre et constituée de* n *vecteurs ou si et seulement si elle est génératrice et constituée de* n *vecteurs.*

Théorème 10 *Formule de Grassmann Soient* F, G *sev de dimensions finies de* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. On a*

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$$

Proposition 2 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie,* F *et* G *deux sev de* E*. On a l'équivalence*

$$\begin{cases} \mathrm{F} \subset \mathrm{G} \\ \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G} \end{cases} \iff \mathrm{F} = \mathrm{G}$$

Théorème 11 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* F, G *des sev de* E*. On a*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \end{cases}$$
$$\iff \exists \mathscr{B}_{\mathrm{F}}, \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \textit{ bases respectives de } \mathrm{F},\mathrm{G} \mid \mathscr{B}_{\mathrm{F}} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \textit{ base de } \mathrm{E}$$

Théorème 12 *Théorème du rang Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *avec* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* F *un* $\mathbb{K}$*-ev.*

On a

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f$$

Théorème 13 *Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *avec* E *et* F *des* $\mathbb{K}$*-ev de* <u>*même*</u> *dimension finie. On a*

$$f \textit{ bijective} \iff f \textit{ injective} \iff f \textit{ surjective}$$

En particulier, si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$*, on a*

$$f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathrm{E}}\} \iff \mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{E} \iff \det f \neq 0$$

Théorème 14 *Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ *avec* E *et* F *des* $\mathbb{K}$*-ev de dimensions finies. On a*

$$\mathrm{rg}\, g \circ f \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$$

17 Produit matriciel

Définition 8 *Soient* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*. On définit* $\mathrm{AB} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ *par* $\mathrm{AB} = (c_{i,j})$ *où* $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$ *pour tout* $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,q]\!]$.

Proposition 3 *Soit* $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. On a la relation*

$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1\,;\,n]\!]^4 \qquad \mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{i,\ell}$$

Proposition 4 *Pour tout* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*, on a* ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\, {}^t\mathrm{A}$.

18 Trace

Définition 9 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. La* trace *de la matrice* A *notée* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ *est définie par*

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 15 *Soit* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$*. On a* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$*.*

19 Déterminants

Définition 10 *Pour* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

Définition 11 *Pour* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, on appelle* comatrice *de* A *notée* $\mathrm{Com}\,\mathrm{A}$ *la matrice des* cofacteurs *de* A*, i.e.* $\mathrm{Com}\,\mathrm{A} = \left((-1)^{i+j} \det \mathrm{A}_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *avec* $\mathrm{A}_{i,j}$ *la matrice extraite ed* A *par suppression de sa* i*-ème ligne et* j*-ème colonne.*

Proposition 5 *Soit* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*. On a :*

1. $$\det {}^t\mathrm{A} = \det \mathrm{A}$$
2. $$\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det \mathrm{A}$$
3. $$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det \mathrm{A} \neq 0$$
4. $$\det(\mathrm{AB}) = (\det \mathrm{A})(\det \mathrm{B})$$
5. $$\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{Com}\,\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{I}_n$$

Théorème 16 *Soit* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ *et* $\mathrm{A} = \left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. Le déterminant* $\det \mathrm{A}$ *dit* de Vandermonde *vaut*

$$\det \mathrm{A} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

20 Matrices et rang

Théorème 17 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. On a* $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} \leqslant \min(n, p)$*.*

Théorème 18 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = r$*. Il existe* P, Q *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ *avec* $\mathrm{J}_r = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, 0)$*.*

21 Équations différentielles linéaires

Théorème 19 *Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{H}$$

Soit $x \in \mathrm{S_H}$, solution de l'équation homogène (H), *on a :*

1. *Si* (R) *admet deux racines distinctes α et β,*

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$$

2. *Si* (R) *admet une racine double α,*

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = (\lambda t + \mu)e^{\alpha t}$$

3. *Si $(a,b) \in \underline{\mathbb{R}^2}$ et* (R) *admet deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}s$ $(s \neq 0)$*

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = e^{rt}\left[\lambda\cos(st) + \mu\sin(st)\right]$$

Proposition 6 *Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $m \in \mathbb{K}$. L'équation*

$$x'' + ax' + bx = \mathrm{P}(t)e^{mt} \tag{L}$$

admet une solution particulière de la forme

1. $x_0(t) = \mathrm{Q}(t)e^{mt}$ *si m pas racine de* (R)
2. $x_0(t) = t\mathrm{Q}(t)e^{mt}$ *si m racine simple de* (R)
3. $x_0(t) = t^2\mathrm{Q}(t)e^{mt}$ *si m racine double de* (R)

avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$.

22 Polynômes

Théorème 20 *Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ avec $\mathrm{B} \neq 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}$. On a :*

$$\exists!(\mathrm{Q},\mathrm{R}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \mid \mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \quad \text{et} \quad \deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{B}$$

Le polynôme Q est appelé quotient *et R le* reste *de la division euclidienne de A par B.*

Proposition 7 *Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a*

$$\begin{aligned} a \text{ racine de P d'ordre } m &\iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)^m\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(a) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0 \\ \mathrm{P}^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 8 *Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a*

$$\begin{aligned} a \text{ racine de P d'ordre au moins } m &\iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)^m\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \\ &\iff \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 21 (Formules de Taylor) *Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On a*

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$$

.

Théorème 22 (Polynômes de Lagrange) *Soient $x_0, \ldots, x_n$ réels distincts. Il existe une unique famille de polynômes $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ telle que $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2$ et on a*

$$\forall i \in [\![0\,;n]\!] \qquad \mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \prod_{k \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}} \left(\frac{\mathrm{X} - x_k}{x_i - x_k}\right)$$

Quelques graphes

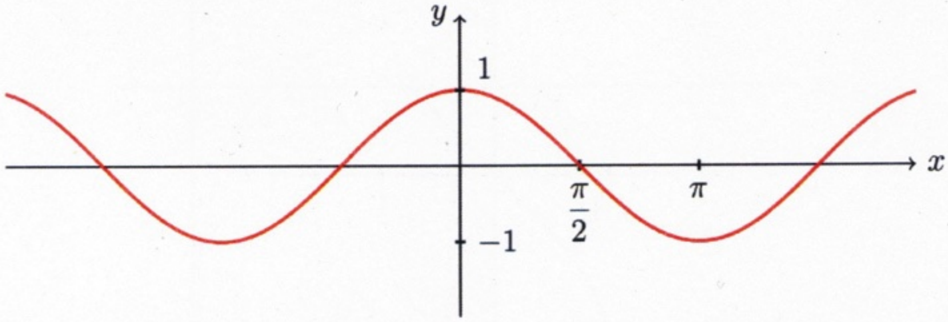

FIGURE 1 – $y = \cos x$

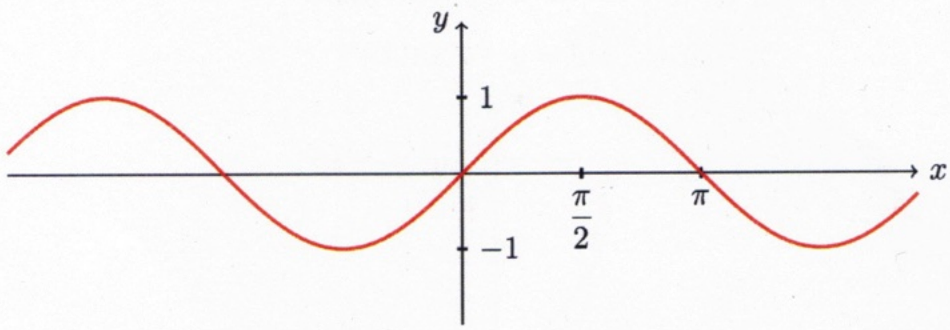

FIGURE 2 – $y = \sin x$

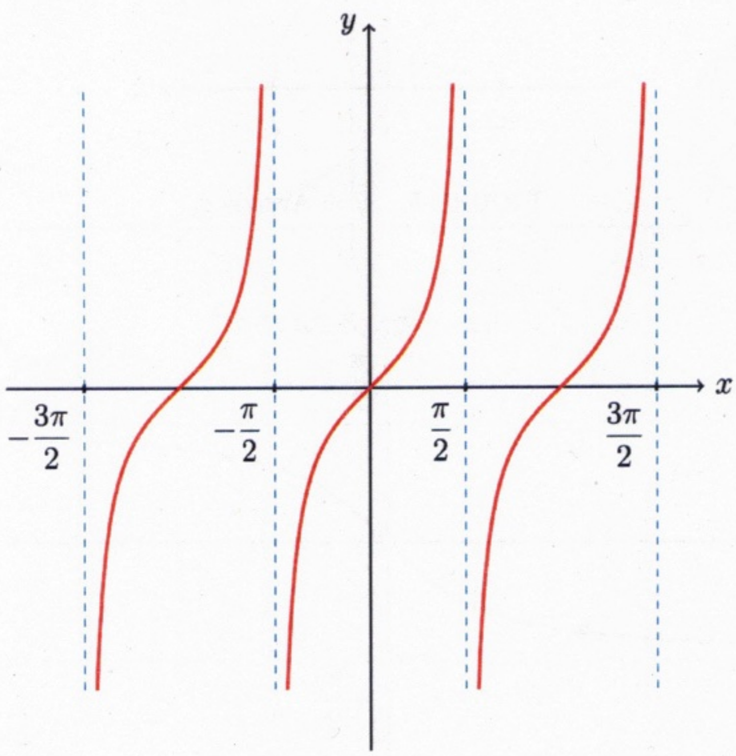

FIGURE 3 – $y = \tan x$

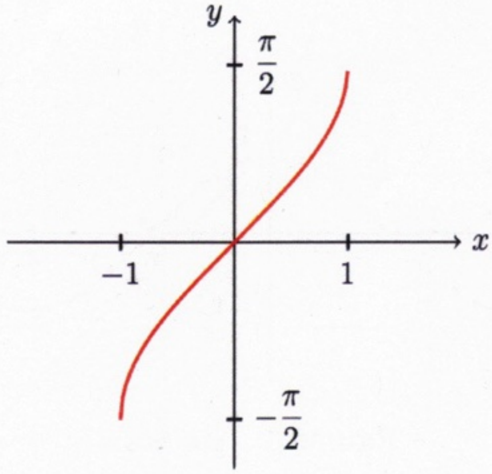

FIGURE 4 – $y = \text{Arcsin } x$

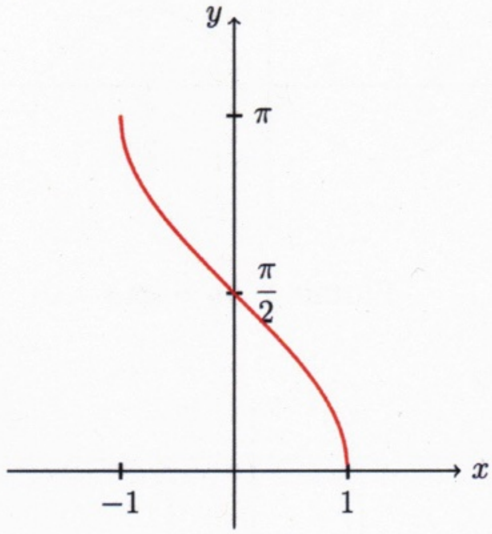

FIGURE 5 – $y = \text{Arccos } x$

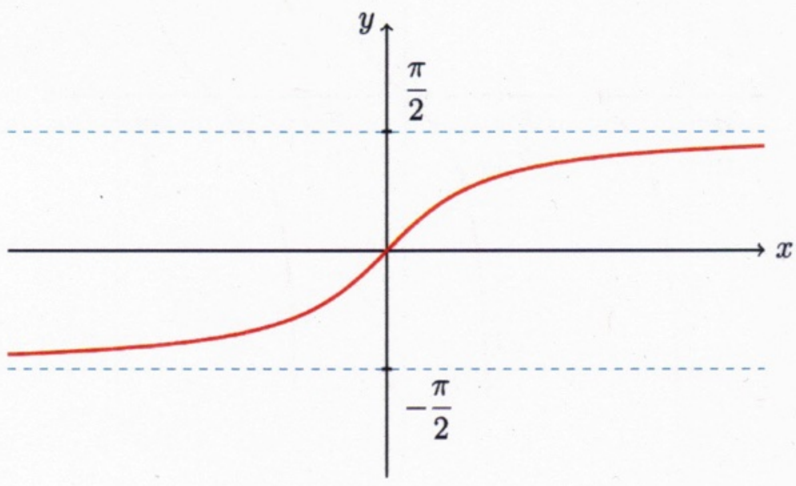

FIGURE 6 – $y = \text{Arctan } x$

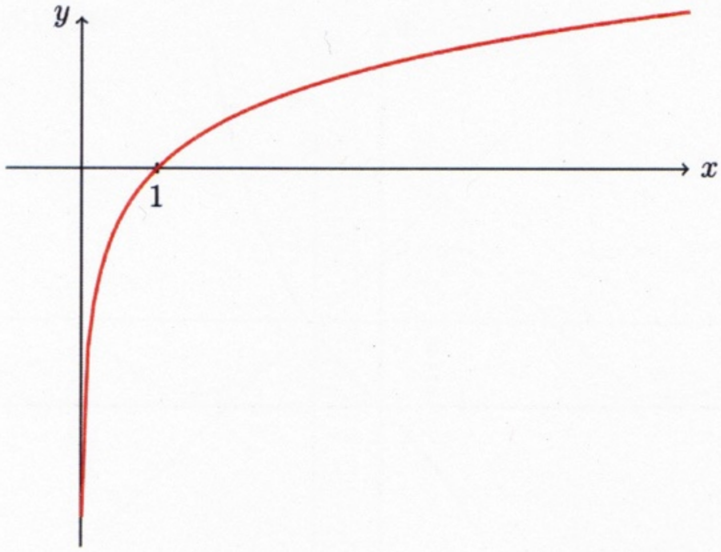

FIGURE 7 – $y = \ln x$

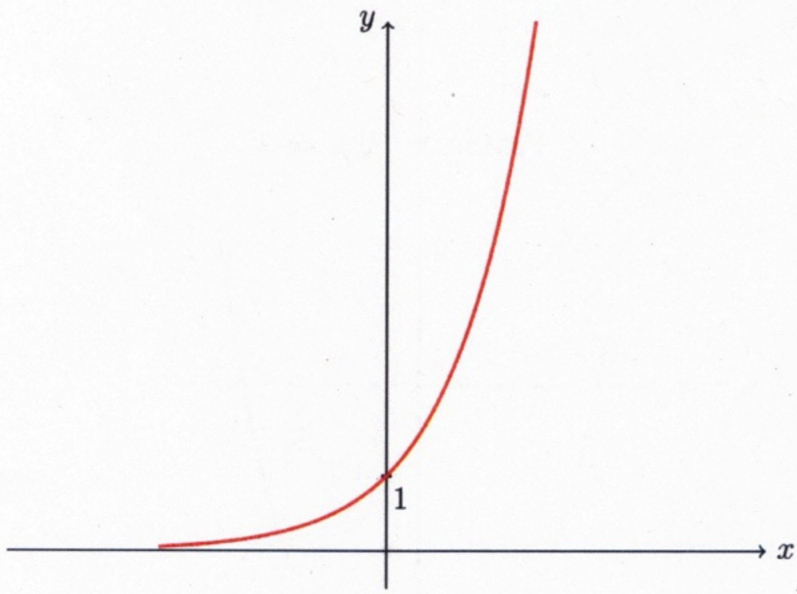

FIGURE 8 – $y = \exp x$

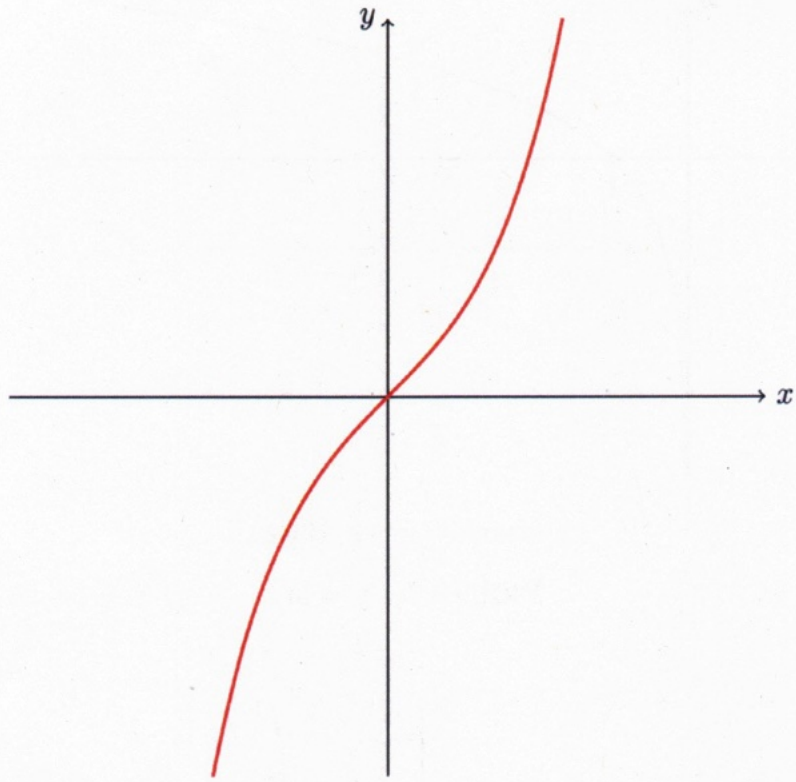

FIGURE 9 – $y = \text{sh } x$

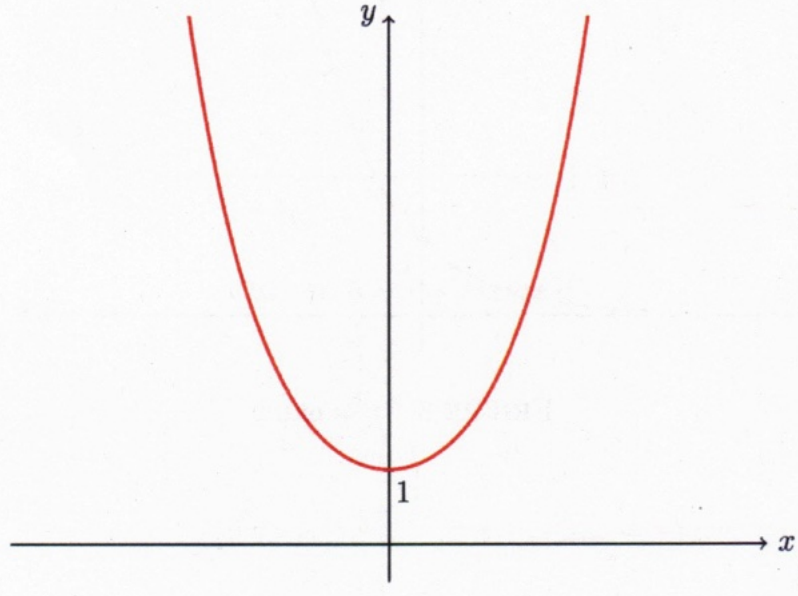

FIGURE 10 – $y = \text{ch } x$

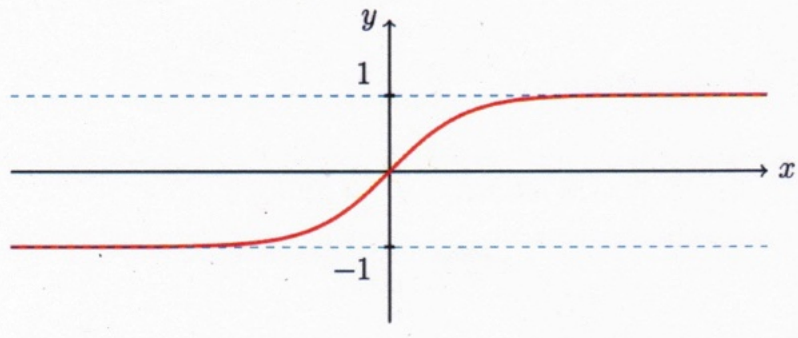

FIGURE 11 – $y = \text{th } x$

Positions relatives

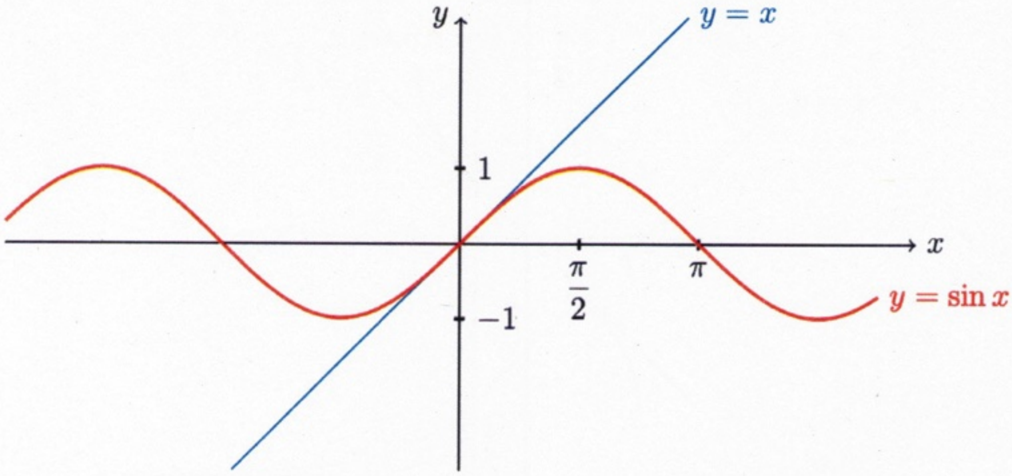

FIGURE 12 – Graphe de sin et de sa tangente en 0

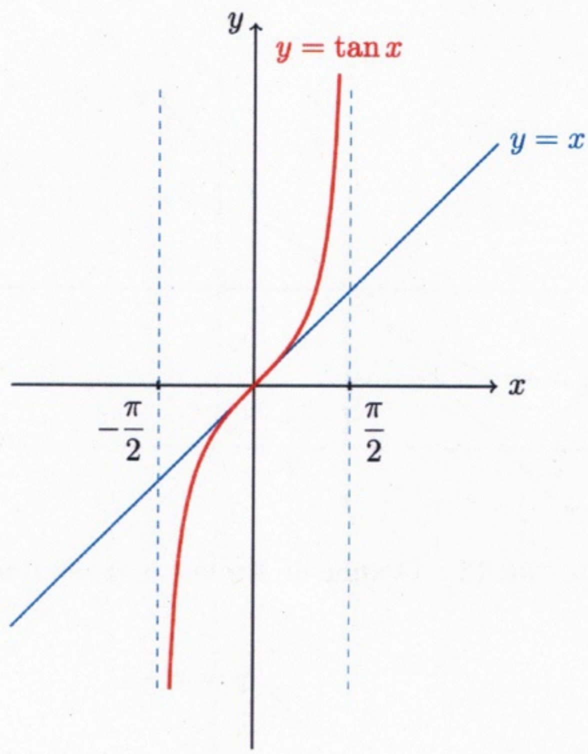

FIGURE 13 – Graphe de tan et de sa tangente en 0

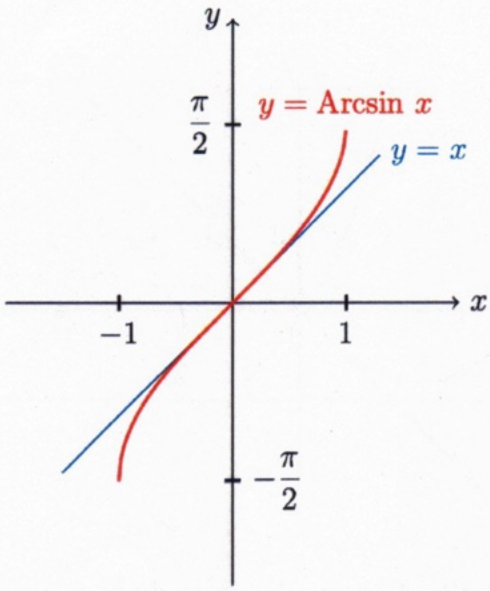

FIGURE 14 – Graphe de Arcsin et de sa tangente en 0

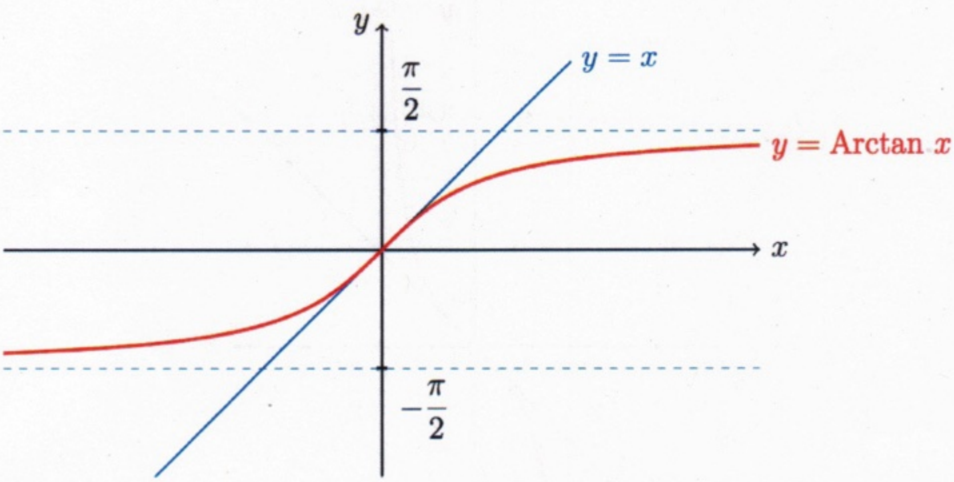

FIGURE 15 – Graphe de Arctan et de sa tangente en 0

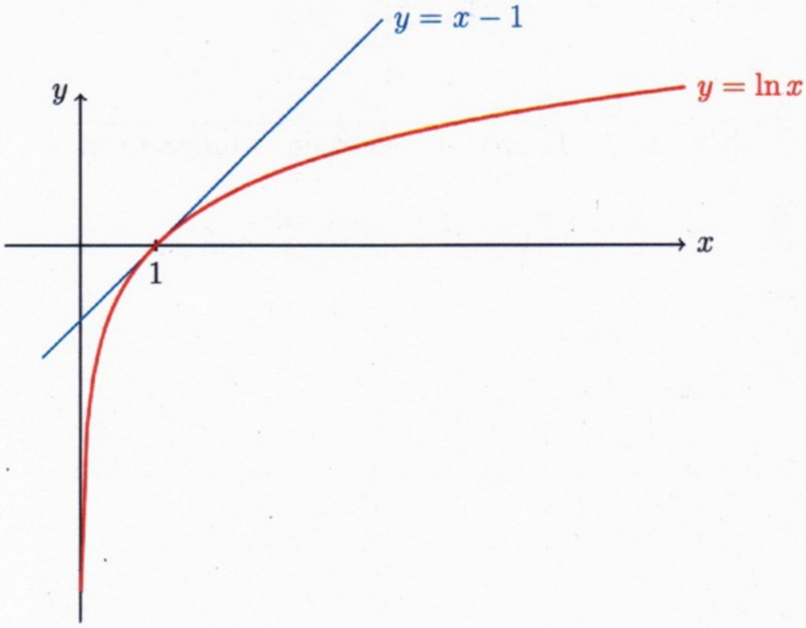

FIGURE 16 – Graphe de ln et de sa tangente en 1.

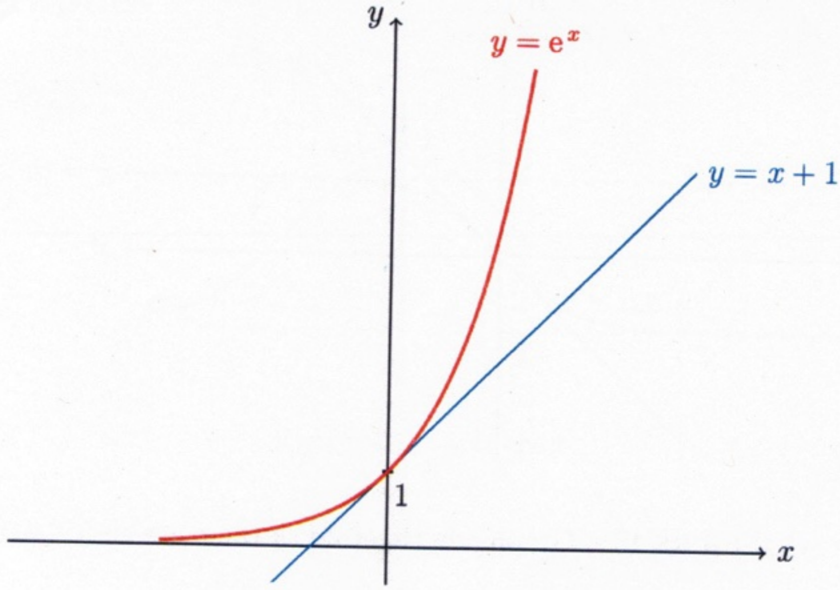

FIGURE 17 – Graphe de exp et de sa tangente en 0

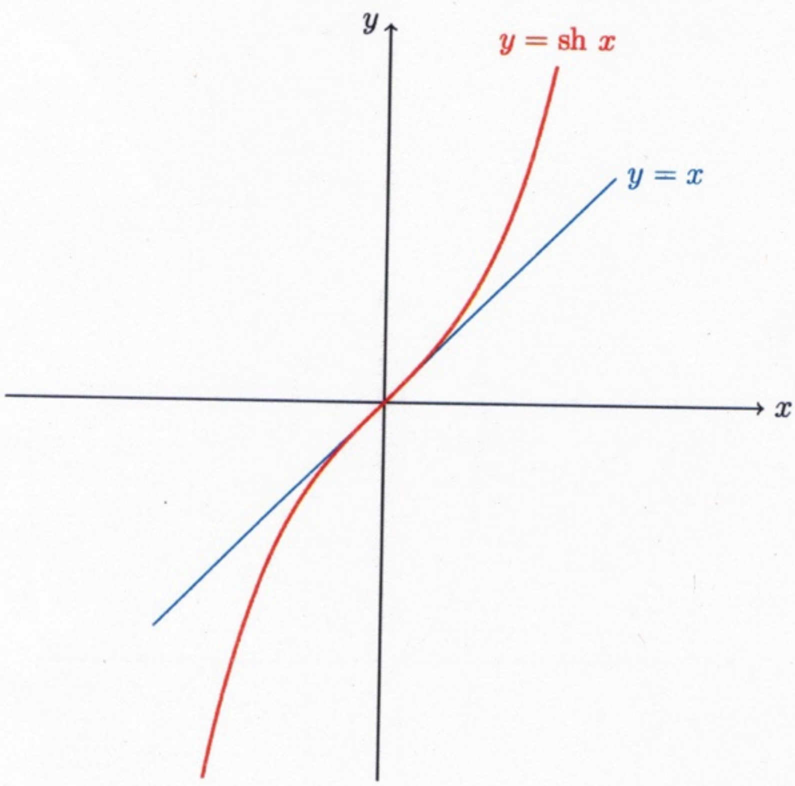

FIGURE 18 – Graphe de sh et de sa tangente en 0

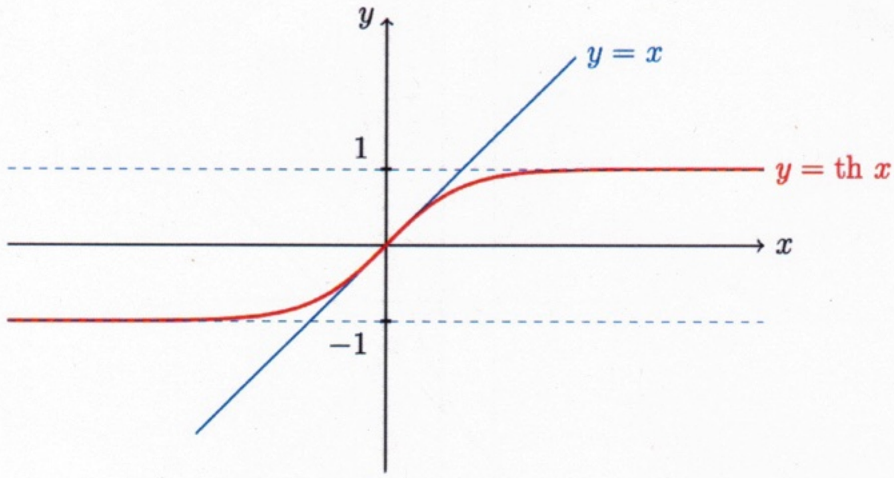

FIGURE 19 – Graphe de th et de sa tangente en 0