

Lavoro di maturità in fisica

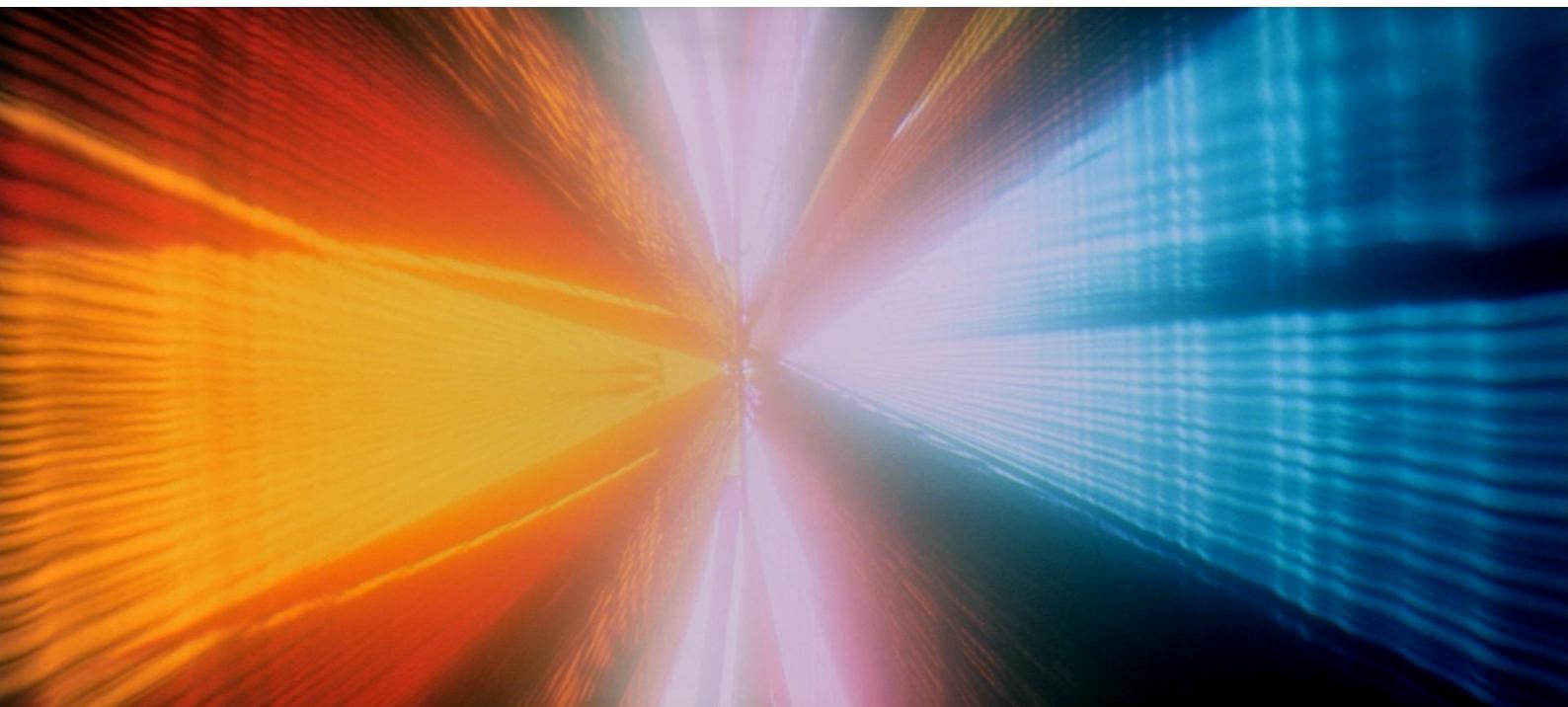
Relatività ristretta e sue applicazioni allo SwissFEL

Theo Saporiti

2016

Liceo Cantonale di Lugano 2

Professoressa responsabile: Chiara Mastropietro



“La nostra immaginazione è tesa al massimo; non, come nelle storie fantastiche, per immaginare cose che in realtà non esistono, ma proprio per comprendere ciò che davvero esiste.”

Richard Feynman

Immagine di copertina tratta dal film *2001: A Space Odyssey*.

Indice

Premessa	1
Tema	1
Motivazioni	1
Obiettivi	2
Abstract	4
Introduzione	5
1 Le origini	7
1.1 La meccanica classica	7
1.1.1 Piccola nota storica	7
1.1.2 Concetti matematici indispensabili	9
1.1.3 Concetti fisici indispensabili	12
1.1.4 Lo spazio e il tempo	13
1.1.5 Le grandezze fisiche basilari	14
1.1.6 I principi della dinamica	16
1.1.7 Il principio di relatività galileiana	17
1.1.8 Trasformazioni di Galileo	19
1.1.9 Invarianza sotto trasformazioni galileiane	20
1.1.10 L'etere	21
1.2 L'esperimento di Michelson-Morley	23
2 Un primo sguardo	27
2.1 Introduzione alla relatività ristretta	27
2.1.1 Lo schema epistemologico	27
2.1.2 I due postulati della relatività ristretta	28
2.1.3 Fattore di Lorentz	30
2.1.4 Contrazioni perpendicolari	31
2.1.5 Dilatazione del tempo	32
2.1.6 Contrazione delle lunghezze	34
2.1.7 Evidenza sperimentale: i raggi cosmici	35
2.1.8 Conseguenze delle dilatazioni e contrazioni	36
3 Uno sguardo più approfondito	38
3.1 Trasformazioni di Lorentz	38
3.1.1 Caso standard	38
3.1.2 Caso generale	41

3.1.3	Conseguenze della trasformazione di Lorentz	43
3.1.4	Relatività della simultaneità	47
3.1.5	Cono di luce	48
3.1.6	Evidenza sperimentale: effetto Doppler relativistico	50
3.1.7	Casi speciali e casi limite	55
3.2	Quadrivelocità	56
3.2.1	Derivazione	56
3.2.2	Composizione delle velocità	58
3.2.3	Evidenza sperimentale: radiazione di sincrotrone	61
3.3	Rappresentazioni grafiche	63
3.3.1	Diagrammi classici	63
3.3.2	Diagrammi di Minkowski	65
3.3.3	Diagrammi di Loedel	68
3.3.4	Disegno numerico	70
3.4	Enermoto	80
3.4.1	Quantità di moto	80
3.4.2	Energie	84
3.4.3	Conservazione dell'enermoto	87
3.4.4	Il triangolo dell'enermoto	88
3.4.5	Evidenza sperimentale: effetto Compton	91
3.5	Quadriaccelerazione	94
3.6	Quadriforza	95
3.6.1	Derivazione	95
3.6.2	I principi della dinamica	96
3.7	Paradossi	97
3.7.1	Il paradosso del bastone	97
3.7.2	Il paradosso del puntatore laser	98
3.7.3	Il paradosso della scala	98
3.7.4	Il paradosso dei due gemelli	99
4	Lavori sperimentali	103
4.1	Esperimento di Thomson	103
4.1.1	Introduzione	103
4.1.2	Apparato sperimentale	103
4.1.3	Calcoli	105
4.1.4	Analisi dei dati	106
4.2	SwissFEL	110
4.2.1	Il Paul Scherrer Institut	110
4.2.2	Lo SwissFEL	110
4.2.3	Simulazione numerica	113
5	Termine del lavoro	124
5.1	Conclusioni	124
5.2	Ringraziamenti	125
5.3	Appendice	126

Indice delle figure

1	Vignetta comica satirica verso il manco di spirito critico nelle scienze.	6
1.1	I fisici e i matematici che contribuirono alla teoria della relatività ristretta.	8
1.2	L'evento E visto da S e S'	19
1.3	Terra in moto rispetto all'etere.	23
1.4	Schema dell'interferometro di Michelson.	24
1.5	Frange d'interferenza circolari prodotte da una luce monocromatica rossa diffratta in un foro circolare.	26
2.1	Riproduzione dello schema disegnato da Albert Einstein in una lettera al suo amico Maurice Solovine nel 1952.	28
2.2	Grafico della funzione <i>inversa</i> di $\gamma(\beta)$	31
2.3	Il paradosso dei due tubi.	32
2.4	Orologio a luce.	33
2.5	Andamento di $N(t)$ secondo la meccanica classica e relativistica.	36
3.1	Configurazione standard.	39
3.2	Configurazione generale.	41
3.3	Una possibile interpretazione di uno spaziotempo tridimensionale M_3	44
3.4	Il concetto di parametrizzazione.	45
3.5	Cono di luce dell'evento O e regioni relative a quest'ultimo dello spaziotempo.	50
3.6	Effetto Doppler classico.	51
3.7	Spettro di emissione (nell'intervallo del <i>visibile</i>) dell'elemento ferro Fe	54
3.8	Ipotetico sistema stellare binario.	55
3.9	Le traiettorie del fotone γ viste da S' e S	62
3.10	Radiazione nel caso non relativistico e nel caso relativistico.	62
3.11	Cambio base che mantiene i punti (eventi) <i>fissi</i> sul piano (spaziotempo). . .	65
3.12	Tipico diagramma <i>antenato</i> a quello di Minkowski.	66
3.13	Costruzione di un diagramma di Minkowski.	67
3.14	Diagramma di Minkowski contenente un evento osservato da S e S'	68
3.15	Linee d'universo di due fasci luminosi, un evento a coordinata temporale negativa e illustrazione grafica della reciproca dilatazione temporale dovuto al moto dei referenziali.	69
3.16	Reciproco effetto della contrazione delle lunghezze dovuto al moto dei refe- renziali.	70
3.17	L'applicazione eseguita all'interno di <i>Google Chrome 55</i>	78

3.18 Scie degli eventi trasformati con la trasformazione di Galileo e con la trasformazione di Lorentz.	79
3.19 La situazione presa in esame raffigurata nei due referenziali scelti.	81
3.20 Il triangolo dell'enermoto.	89
3.21 Un fotone γ collide con una particella massiva p	91
3.22 Il referenziale del garage e quello della scala.	99
3.23 Linee d'universo di Alice (A) e di Barbara (B), che giace lungo l'asse dei tempi di questo diagramma.	100
3.24 Grafico di una funzione $\sqrt{1 - \beta(t)^2}$ con la sua rispettiva area sottesa equivalente in valore numerico a $\Delta\lambda$	101
 4.1 Apparato sperimentale impiegato.	104
4.2 Studio della traiettoria circolare degli elettroni sottoposti al campo magnetico generato dalla corrente nelle bobine.	106
4.3 Deflessione parabolica del fascio di elettroni grazie ad un campo elettrico localmente uniforme orientato verso il basso.	107
4.4 Schema non in scala dei componenti principali dell'acceleratore.	111
4.5 Fotografia satellitare del PSI.	112
4.6 Progetto digitale dell'iniettore.	113
4.7 Profilo del campo elettrico normalizzato al tempo iniziale posto arbitrariamente a zero.	114
4.8 Visualizzazione <i>fisica</i> dell'integrazione numerica e dei <i>passi di integrazione</i>	114
4.9 Distribuzione delle energie (cinetiche) secondo la fase di oscillazione del campo elettrico nel caso della meccanica classica.	119
4.10 Andamento delle velocità in funzione del tempo nel caso della meccanica classica.	120
4.11 Distribuzione delle energie (totali) secondo la fase di oscillazione del campo elettrico nel caso della meccanica relativistica.	120
4.12 Andamento delle velocità in funzione del tempo nel caso della meccanica relativistica.	121
4.13 Valori delle misurazioni eseguite al PSI sull'acceleratore SwissFEL il 22 ottobre 2016 verso fine mattinata.	122
4.14 Particolare porzione del grafico in figura 4.11.	123

Salvo dove espressamente citato, tutte le illustrazioni, tutti gli schemi, tutte le fotografie e tutti i grafici sono di mia esclusiva produzione.

Premessa

Tema

Il tema di questo lavoro di maturità, proposto dalla professoressa Chiara Mastropietro agli allievi di terza liceo verso la fine dell'anno 2015, è *"I cent'anni che sconvolsero la fisica (e la nostra visione del mondo)"*.

Di tutti questi sconvolgimenti subiti dalla fisica lungo il XX secolo, ho deciso di interessarmi proprio al primo, avvenuto a inizio novecento. Questa completa rivalutazione di alcuni concetti fondamentali in fisica, quali lo spazio e il tempo, prende il nome di *teoria della relatività ristretta*.

Motivazioni

A dicembre 2015, quando ho dovuto iscrivermi a uno dei tanti LAM proposti, ero abbastanza indeciso tra un lavoro a carattere fisico e uno a carattere informatico. Alla fine, come dimostra l'esistenza di questo documento, ho deciso di seguire la *via fisica*: le ragioni di tale scelta sono elencate di seguito.

In primo luogo, poiché dopo il liceo ho intenzione di studiare fisica, mi è parsa allettante l'idea di potermi cimentare per praticamente un anno intero in questo *ambito*, se così vogliamo chiamarlo. In sostanza, volevo vedere come avrei reagito a questo *supplemento di fisica* rispetto alle ordinarie lezioni presenti nel corso FAM: ora, a gennaio 2017, posso affermare con certezza che il tempo impiegato per questo LAM non mi è assolutamente pesato e, anzi, continuerei ad ampliare indefinitamente quest'ultimo qualora mi fosse concesso farlo.

In secondo luogo, l'idea stessa di poter conoscere e comprendere questa famosissima teoria fisica, reputata *complicata*, ha rappresentato per me una sfida che non potevo non accettare. Benché sono perfettamente cosciente del fatto che prima o poi l'avrei comunque incontrata in ambito universitario, a volte la mia curiosità è preponderante e pertanto in questo caso non è riuscita a trattenersi.

Infine, come ultima motivazione derivante direttamente dalla prima, ho scelto di svolgere questo LAM in fisica perché mi piace *semplicemente di più* dell'informatica. Mi è difficile spiegare *perché* avviene questo fatto, così come mi è difficile spiegare perché, come potrete constatare, ho deciso di andare ben oltre la semplice comprensione della teoria in questione. Si tratta quindi di un particolare della mia personalità e perciò esso è probabilmente razionalmente *inspiegabile*.

Obiettivi

Mi sono posto diversi obiettivi da raggiungere durante questo anno di ricerca che adesso mi appresto ad illustrare. Gli obiettivi *raggiunti* sono i seguenti:

- Comprendere le basi fondamentali della teoria della relatività ristretta.
- Approfondire il più possibile tutti i concetti impiegati nella teoria.
- Analizzare criticamente le differenti interpretazioni della teoria.
- Mantenere un certo rigore matematico.

- Dimostrare autonomamente la (quasi) totalità delle leggi derivate.

Con *autonomamente* non intendo dire che *tutte* (anche se ce ne sono parecchie) le dimostrazioni sono di mia invenzione, poiché altrimenti il contenuto di questo LAM includerebbe e addirittura supererebbe il lavoro svolto da Albert Einstein più di cento anni fa: quello che invece intendo è il mio sistematico tentativo di derivare ogni formula rilevante in relatività ristretta *prima di leggere* la sua dimostrazione nella documentazione da me impiegata. Ad esempio, conoscendo l'espressione matematica dell'*energia totale* da una fonte X, ho sviluppato indipendentemente una dimostrazione *senza leggere* la dimostrazione proposta in X, verificando *solo in seguito* se quanto avevo ricavato fosse corretto.

- Riuscire a spiegare in modo semplice la totalità di quanto imparato.

In particolare, al fine di semplificare al lettore¹ il raggiungimento di questo obiettivo, per quanto riguarda gli aspetti teorici ad ogni conclusione di sottocapitolo sarà riassunto in un paragrafo intitolato “*Riassumendo*” quanto è stato trattato.

- Simulare numericamente una situazione fisica scrivendo un programma informatico.

- Imparare a usare **LATEX**.

Ho scelto di scrivere la totalità di questo LAM con tale *linguaggio di markup* poiché, oltre ad essere ampiamente impiegato in ambito accademico, senza di esso mi sarebbe stato molto difficile illustrate elegantemente tutte le formule matematiche presenti in questo lavoro (e la loro presenza, come il lettore presto constaterà, è del tutto preponderante).

- Imparare a disegnare schemi ed illustrazioni in grafica vettoriale.

In particolare, salvo dove espressamente citato nella didascalia, tutte le illustrazioni, tutte le fotografie e tutti i grafici sono di mia produzione. Le illustrazioni sono state disegnate con l'ausilio del programma *Ipe*, mentre i grafici sono stati prodotti con l'applicazione *Desmos* o il programma *Microsoft Excel*.

¹Il termine *lettore* comprende anche quello di *lettrice*.

Ho stimato un totale di circa 230 ore dedicate a questo lavoro di maturità, di cui il 39% erano le lezioni ordinarie di due ore ogni venerdì pomeriggio mentre il 18% le due visite al PSI. Malgrado ciò, esistono obiettivi *non raggiunti* per questioni di tempo, ossia:

- Descrivere l'elettrodinamica relativistica, ossia non limitarsi alla meccanica relativistica. Mi riferisco in particolare alla trasformazione del campo elettromagnetico secondo Lorentz, che non è stata affrontata in questo LAM.
- L'impiego delle funzioni iperboliche nella descrizione matematica dei fenomeni.

Abstract

In questo lavoro di maturità è intrapresa un'attenta e approfondita analisi della meccanica derivante dalla *teoria della relatività ristretta*² proposta da Albert Einstein nell'articolo *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*, pubblicato sul giornale scientifico *Annalen der Physik* nel 1905 [3]. Il duplice scopo di questo lavoro di maturità è quello di acquisire una conoscenza e una comprensione le più profonde possibili della teoria della relatività ristretta ed essere in grado di applicarla nell'elaborazione di una simulazione numerica che tenga conto degli effetti relativistici.

In questo LAM sono inizialmente presentate le idee ed i modelli che i fisici antecedenti ad Einstein hanno utilizzato per interpretare e prevedere l'Universo. Viene poi illustrato il problema fondamentale dell'etere, che porterà alla costruzione della nuova teoria della relatività ristretta. Dopodiché sono spiegate le basi della teoria, che viene successivamente analizzata in dettaglio, includendo anche evidenze sperimentali a sostegno della stessa e rappresentazioni grafiche accattivanti. Sono poi presentati e risolti alcuni apparenti paradossi che sembrano scaturire dalla teoria della relatività ristretta. Infine è presentata la parte sperimentale di questo lavoro di maturità, che comprende la determinazione del rapporto carica/massa dell'elettrone (effettuata nei laboratori di fisica del Liceo Cantonale di Lugano 2) e la discussione della simulazione numerica dell'iniettore dell'acceleratore di particelle *SwissFEL* del *Paul Scherrer Institut* rispetto ai dati reali misurati sul posto.

²Si può anche dire *teoria della relatività speciale*.

Introduzione

“Non accogliere mai nulla per vero che non conoscessi esser tale con evidenza.”

René Descartes

La teoria della relatività ristretta sconvolge numerose concezioni della realtà che abbiamo sempre considerato vere durante tutta la nostra esistenza. La citazione qui sopra del grande filosofo e matematico francese René Descartes è emblematica: per più di *duecento anni* tutti i fisici del mondo hanno considerato delle *certezze* concetti quali il tempo assoluto o la trasformazione di Galileo per qualsiasi velocità. Quello che voglio dire è che, anche di fronte ad apparenti evidenze sperimentali, non è *mai* possibile determinare cosa sia *assolutamente certo*: la teoria della relatività è *e resta una teoria* che potrebbe un giorno essere invalidata. Non si tratta della realtà, ma del *modello* più vicino ad essa che ad oggi conosciamo per quanto riguarda i sistemi di riferimento inerziali.

Lungo tutto questo LAM è pertanto richiesto da parte del lettore il più alto grado di *scetticismo* e *spirito critico* che egli possa manifestare. Si tratta di rimettere in discussione le fondamenta della sua percezione dell’Universo, un’operazione che gli conviene non prendere alla leggera (figura 1). È anche richiesta una certa *apertura* riguardo alle nuove idee poiché, usando le parole del filosofo statunitense John Dewey, “**ogni grande progresso della scienza è scaturito da una nuova audacia dell’immaginazione**” [26].

Il *rigore matematico* è stato per me una *priorità* lungo tutta la stesura di questo LAM. Ho fatto tutto il possibile per rendere assolutamente chiaro e privo di ambiguità qualsiasi passaggio matematico e qualsiasi derivazione. Le formule e le dimostrazioni che il lettore avrà modo di leggere in questo LAM potranno differire da quelle reperibili nella letteratura scientifica poiché la derivazione è di mia invenzione oppure mi sono sforzato di specificare rigorosamente le relazioni di dipendenza tra le grandezze fisiche: una piccola vittoria su questo fronte è l’assenza (a parte due eccezioni) della notazione di Leibniz, che utilizza gli *infinitesimi* come entità numeriche effettivamente esistenti.

La teoria implica nel suo nome il concetto di *relatività*: ciò è vero riguardo alcuni casi specifici ma non lo è in generale. Ad esempio, il fatto che un sistema di riferimento sia *inerziale* o meno è un fatto assoluto così come il suo *tempo proprio* dal momento che tutti gli *osservatori* vi sono concordi. Frasi quali “**tutto è relativo**” devono essere imperativamente abbandonate.

Come ultima cosa vorrei mettere in guardia il lettore: mi è capitato, specialmente durante le prime fasi di documentazione, di domandarmi *perché* la Natura avesse deciso di comportarsi in questo modo. Se l’Universo è frutto di una qualche volontà, ci si domanda le ragioni che hanno portato alla formulazione di leggi tanto complicate fondate su concetti altrettanto astratti. La teoria della relatività ristretta ci insegna una cosa fondamentale ben espressa dal fisico statunitense Richard Feynman nella sua collana di lezioni di fisica [5]: “**se abbiamo un gruppo di concetti strani quali quello che il tempo va più lentamente quando ci si muove, e così via, che ci piacciono o meno è una questione assolutamente irrilevante. Il solo problema rilevante è se le idee siano coerenti con ciò che si è trovato sperimentalmente. In altre parole le idee strane hanno soltanto bisogno di accordarsi con l’esperienza e la sola ragione che abbiamo per discutere il comportamento degli orologi è**

così via è di dimostrare che benché la nozione della dilatazione del tempo sia strana, essa è *coerente col nostro modo di misurare il tempo*".

E con questo, auguro al lettore una felice ed appassionante lettura di questo laborioso lavoro di maturità in fisica.

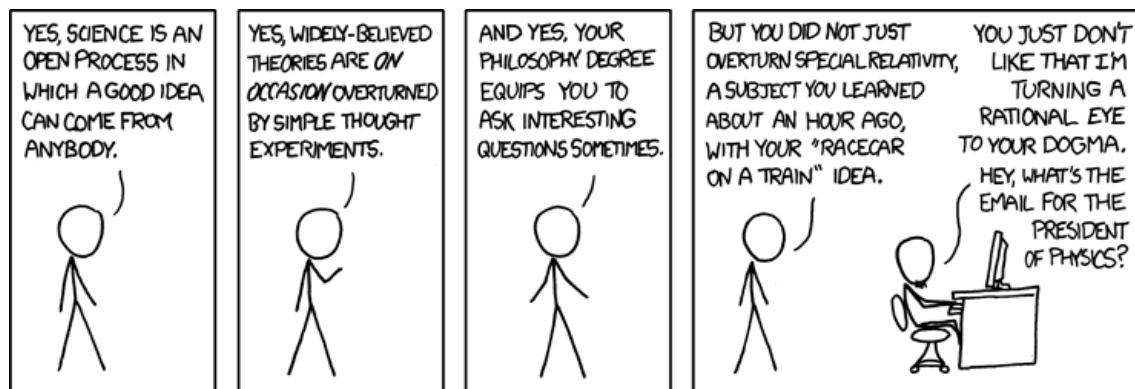


Figura 1. Vignetta comica satirica verso il manco di spirito critico nelle scienze. Fonte: Randall Munroe (xkcd.com).

Capitolo 1

Le origini

1.1 La meccanica classica

“*Parlare oscuramente lo sa fare ognuno, ma chiaro pochissimi.*”

Galileo Galilei

1.1.1 Piccola nota storica

Durante il XVII e XVIII secolo si sviluppò in Europa quella che oggi chiamiamo *meccanica classica*, ossia l’insieme delle teorie fisiche atte alla descrizione del moto dei corpi. Fino al 1905, anno in cui l’allora funzionario pubblico presso l’*Ufficio federale della proprietà intellettuale* Albert Einstein (1879 - 1955) pubblicò sulla rivista scientifica accademica *Annalen der Physik* l’articolo *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*¹ (*Sull’elettrodinamica dei corpi in movimento*), i fisici di tutto il mondo, anche in base alle ovvie evidenze sperimentali osservabili nella vita quotidiana, erano convinti della validità di queste teorie per *qualsiasi velocità* assunta dai corpi nel loro moto [3]. In particolare, come spiegherà in questo capitolo, fisici quali Sir Isaac Newton (1642 - 1727) credevano nell’esistenza di uno spazio e di un tempo *assoluti* come giustificazione al *primo principio della dinamica* [3].

Nel corso dell’Ottocento, quando la fisica si interessò all’*elettrodinamica*, il concetto di *etere luminifero*, inizialmente supposto ed introdotto nel Settecento, acquisì un certo interesse nelle menti collettive dei fisici. Molti (se non tutti) consideravano la sua esistenza plausibile e necessaria alla spiegazione dei fenomeni elettromagnetici. Alcuni di questi, come l’eminente Hendrik Lorentz (1853 - 1928), vi costruirono sopra intere teorie fisiche *del secondo ordine*² (mi riferisco alla *teoria dell’etere di Lorentz*, attuata immediatamente prima (1895) della teoria della relatività ristretta) capaci di prevedere *correttamente* alcuni comportamenti assunti dalla Natura [3].

¹Si tratta di uno dei quattro articoli pubblicati da Einstein nel 1905, collettivamente chiamati *Annus Mirabilis Papers* data la loro importanza scientifica.

²Con questa espressione si intendono teorie fisiche contemplanti le quantità $(v/c)^2$.

Anche se in realtà qualche decennio dopo Einstein confesserà di essere stato un po' troppo drastico [17], a partire dal 1905 egli negò energeticamente sia l'esistenza sia la necessità di questo etere in fisica, portando come argomentazione la teoria della relatività ristretta, capace di spiegare gli esiti negativi dell'*esperimento di Michelson-Morley*, che vedremo nei dettagli più tardi.

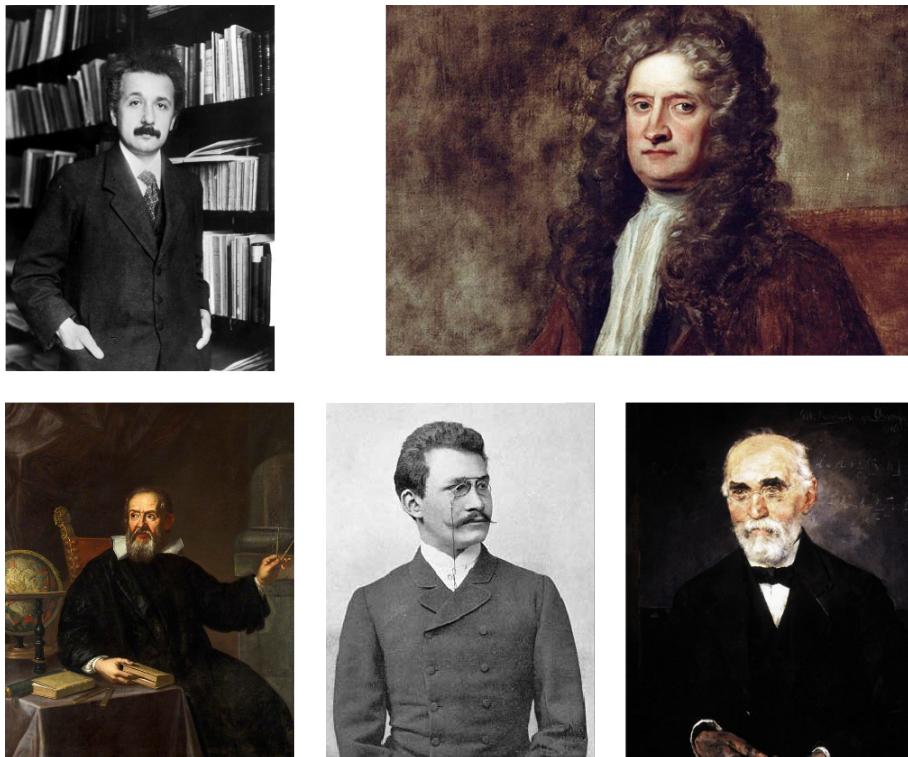


Figura 1.1. La teoria della relatività ristretta, così come la conosciamo oggi, non è frutto dell'esclusivo lavoro di Albert Einstein: molti fisici e molti matematici, precedenti e contemporanei, direttamente e indirettamente, hanno contribuito in diversi modi alla teoria ed alla sua interpretazione. Questo LAM tratterà principalmente i contributi delle persone presenti in figura, ossia (in senso orario partendo dall'angolo superiore sinistro): Albert Einstein (1879 - 1955), Sir Isaac Newton (1642 - 1727), Hendrik Lorentz (1853 - 1928), Hermann Minkowski (1864 - 1909) e Galileo Galilei (1564 - 1642).

1.1.2 Concetti matematici indispensabili

La fisica è una scienza prevalentemente quantitativa e pertanto è necessario disporre dei necessari bagagli matematici al fine di poterla capirla nella sua *magnifica* totalità. In questo LAM darò per scontate molte nozioni e teoremi di analisi matematica, di algebra lineare e più in particolare di calcolo vettoriale: pertanto ora non discuterò di tutti gli strumenti matematici che impiegherò ma richiamerò alla memoria soltanto quelli aventi una particolare importanza nella teoria della relatività ristretta.

Spazio vettoriale Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica³ costruita su due insiemi legati da due operazioni binarie chiamate *somma* (+) e *moltiplicazione* (·). Il primo insieme A è un costituito da elementi chiamati *scalari*, indicati con lettere quali a, b, c , mentre il secondo insieme B è composto da elementi detti *vettori*, simboleggiati da lettere contrassegnate da una freccia quali $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Le due operazioni devono rispettare i seguenti assiomi:

- $(B, +)$ deve essere un *gruppo abeliano*;
- (\cdot) deve essere *semi-esterna*, vale a dire che prende un vettore ed uno scalare e restituisce un vettore;
- $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$;
- $a \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u}$;
- $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$;
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ dove 1 indica il neutro di (A, \cdot) .

Base e dimensione Una *combinazione lineare* di un vettore \vec{u} è la somma:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i \cdot \vec{v}_i) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Se per $\vec{u} = \vec{0}$ l'equazione è vera soltanto per le soluzioni banali $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ allora si dice che i vettori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} = S$ sono *indipendenti*, altrimenti si dice che sono *dipendenti*. L'indipendenza vettoriale implica l'impossibilità di scrivere la combinazione lineare di un qualsiasi vettore di S mediante i restanti $n - 1$ vettori. Perciò, se S è un insieme di vettori indipendenti, ogni vettore \vec{u} è espresso mediante *una sola* combinazione lineare e pertanto S , in quelle circostanze, è detta **base** di dimensione n . Se S fosse costituita da vettori dipendenti allora tale insieme si sarebbe chiamato *insieme di generatori* e non avrebbe permesso di stabilire univocamente i coefficienti λ_n per la combinazione lineare del vettore \vec{u} . Una **base canonica** è una base formata da vettori (in questo caso chiamati *versori*) aventi per componenti esclusivamente i numeri 0 o 1, dove 1 appare una sola volta per ogni vettore, in componenti diverse: ad esempio, nello spazio euclideo⁴ V_3 , la base canonica è $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e geometricamente si tratta di versori tra loro perpendicolari.

³Consultare l'appendice per maggiori informazioni.

⁴Ho deciso di porre l'indice indicante la dimensione in posizione inferiore nella speranza di non trarre in inganno il lettore inducendolo ad ipotizzare un eventuale elevamento a potenza oppure prodotto cartesiano.

Norma o modulo L'operazione che, preso un vettore, restituisce un numero secondo gli assiomi:

- $\|\vec{v}\| \geq 0$ (il valore 0 è riservato al vettore nullo $\vec{0}$);
- $\|k \cdot \vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\|$;
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (*disuguaglianza triangolare*).

In V_3 , impiegando il teorema di Pitagora, si ricava:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad \rightarrow \quad \|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v}^2 \quad \rightarrow \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}^2}.$$

Se per un vettore \vec{v} vale $\|\vec{v}\| = 1$ allora si dice che tale vettore è **normale**.

Prodotto scalare L'operazione binaria che, presi due vettori, restituisce un numero secondo le seguenti condizioni assiomatiche:

- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ (il valore 0 è riservato al caso $\vec{v} = \vec{0}$);
- $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
- $\langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;
- $\langle k \cdot \vec{v}, \vec{u} \rangle = k \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

In V_3 il prodotto scalare tra due vettori \vec{u} e \vec{v} (non nulli) formanti un angolo α nel piano che questi generano (essendo due vettori diversi in V_3 *sempre complanari se non collineari*) può essere definito così:

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha).$$

Ecco perché, sempre nello spazio euclideo, il concetto di **ortogonalità**⁵ tra due vettori può essere tradotto algebricamente nel prodotto scalare! Infatti, qualora i due vettori siano perpendicolari, $\alpha = \pi/2$ ossia $\cos(\pi/2) = 0$ e pertanto il prodotto scalare **risulta nullo**.

A questo punto, impiegando gli assiomi posti in precedenza, è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}, v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \rangle \\ &= u_1 v_1 \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle + u_1 v_2 \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle + u_1 v_3 \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle \\ &\quad + u_2 v_1 \langle \vec{j}, \vec{i} \rangle + u_2 v_2 \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle + u_2 v_3 \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle \\ &\quad + u_3 v_1 \langle \vec{k}, \vec{i} \rangle + u_3 v_2 \langle \vec{k}, \vec{j} \rangle + u_3 v_3 \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle. \end{aligned}$$

Essendo la base canonica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ costituita da versori perpendicolari tra loro troviamo:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = \sum_{i=1}^3 (v_i \cdot u_i).$$

Capiamo ora l'importanza delle basi canoniche: infatti, esse sono **basi ortonormali** in quanto ogni vettore è di norma unitaria e perpendicolare con tutti gli altri.

⁵Ortogonal e perpendicolare sono sinonimi.

Matrice Una tabella ordinata di oggetti matematici, chiamati *elementi della matrice*. La matrice A di m righe e n colonne (detta di *tipo* $m \times n$) si scrive con la notazione

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

dove a_{ij} indica l'elemento di A posizionato alla riga $1 \leq i \leq m$ e colonna $1 \leq j \leq n$.

I vettori possono (fino ad un certo punto) anche essere visti come *matrici colonna*, ossia matrici di tipo $m \times 1$, dove m indica la dimensione dello spazio vettoriale a cui essi appartengono.

È possibile definire diverse operazioni con le matrici. Ad esempio, la **somma tra matrici** si calcola

$$A + B = C \quad \text{dove } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

e la **moltiplicazione tra scalari e matrici** si calcola

$$\lambda A = C \quad \text{dove } c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Ovviamente la somma tra matrici è possibile solo se entrambe sono del medesimo tipo, mentre la moltiplicazione per scalare non impone tale restrizione.

Matrice trasposta La matrice indicata con A^T ottenuta scambiando le righe e le colonne di A . Ponendo $C = A^T$, algebricamente si ha:

$$c_{ij} = a_{ji}.$$

Segue che se la matrice A è di tipo $m \times n$ allora la matrice A^T sarà di tipo $n \times m$.

Prodotto tra matrici L'operazione binaria che, prese due matrici A e B di tipo $m \times n$ e $n \times p$, restituisce una matrice C di tipo $m \times p$ avente come elementi:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kj}).$$

Tale operazione risulta possibile se e solo se il numero di colonne di A equivale al numero di righe di B . Infatti, l'espressione qui sopra viene chiamata *prodotto riga per colonna* poiché implica la somma dei prodotti tra gli n elementi in riga nella matrice A con gli n elementi in colonna nella matrice B .

Determinante di una matrice La funzione $y = \det(X)$ che associa ad ogni matrice *quadrata* (di tipo $n \times n$) X un numero reale y . È possibile definire in molti modi questa funzione *esterna*: in questo LAM impiegherò una definizione *ricorsiva*, ossia che chiama sé stessa. Sia $A_{n \times n}$ una matrice quadrata e sia scelta liberamente una sua riga i , allora:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \left((-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \right).$$

La matrice A_{ij} è la matrice ottenuta sopprimendo da A la sua i -esima riga e la sua j -esima colonna. La ricorsione termina quando A è di tipo 2×2 : allora, il determinante è definito

$$\det(A_{2 \times 2}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Trasformazione lineare Siano V e W due spazi vettoriali che, per semplicità di calcolo e di comprensione, hanno la medesima base ortonormale. Si dice che la trasformazione (anche detta *applicazione*) $f : V \rightarrow W$ è *lineare* se sono soddisfatte le proprietà:

$$\begin{cases} f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \end{cases}$$

Una trasformazione lineare può *sempre* essere espressa in forma matriciale. La **matrice associata** alla funzione f è quella matrice M tale per cui

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow Y = MX,$$

dove X e Y rappresentano i vettori \vec{x} e \vec{y} scritti però in forma matriciale.

1.1.3 Concetti fisici indispensabili

Si prega di notare che le seguenti definizioni sono riferite alla *meccanica classica*: nella meccanica relativistica alcune di esse subiranno ingenti modifiche, mentre altre saranno completamente riviste.

Sistema di riferimento Se assumiamo che l'Universo sia uno spazio vettoriale, più precisamente uno spazio euclideo⁶, allora con sistema di riferimento (anche detto **referenziale**, sistema di coordinate, *SR* o *SC*) intendiamo una particolare base di questo spazio. Nella meccanica classica si considera l'Universo come uno spazio tridimensionale V_3 e quindi le vari basi sono composte da 3 vettori e generalmente sono ortonormali. Il sistema di riferimento fisico differisce dal concetto matematico astratto di base poiché esso può *muoversi* relativamente ad altri referenziali, anche se entrambi sono composti da basi matematicamente identiche. Tutte le nostre misurazioni saranno quindi *relative* ad un particolare sistema di riferimento, ma non necessariamente relative ad una particolare base matematica. I sistemi di riferimento possono essere **inerziali** o **non inerziali**: spiegherò più tardi la differenza tra i due.

Informazione Si tratta di un **dato**, un concetto, un oggetto matematico. Ad esempio, un messaggio in lingua italiana trasporta informazione. L'informazione non può mai essere conosciuta *a priori* rispetto alla sua trasmissione. Questa constatazione è di fondamentale importanza per la formulazione di uno dei principi più fondamentali della scienza:

Principio di causalità

Ex nihilo nihil fit. Dal nulla non viene nulla. (René Descartes)

In altre parole, un fenomeno fisico può avvenire **solo ed esclusivamente dopo essere stato causato**, ad esempio dalla ricezione di un'informazione. L'avverarsi di un evento implica **necessariamente** l'esistenza di una causa.

⁶Vale a dire uno spazio nel quale la geometria soddisfa i 5 postulati di Euclide.

Evento Impiegando la definizione operativa di spazio e di tempo, la coppia (t, \vec{r}) indica un evento nella posizione \vec{r} al tempo t in un particolare sistema di coordinate. Esempi di eventi possono essere *il corpo in moto è qui*, *il campo magnetico ha questa intensità* oppure *la lampadina si accende*: si vede chiaramente che tutti questi esempi sono caratterizzati da 4 valori numerici (t, x, y, z) , ossia da una componente temporale e tre spaziali. Si prega di fare attenzione al fatto che gli eventi *non appartengano* ad un particolare referenziale: gli eventi succedono nell'Universo e l'appartenenza, se così vogliamo chiamarla, ad un *SC* specifico è unicamente frutto della nostra scelta arbitraria di quest'ultimo.

Osservatore Spesso ci si immagina l'osservatore come un individuo (possibilmente umano) solidale ad un referenziale che, munito di righello ed orologio, rileva i fenomeni che appunto osserva (probabilmente con la vista). In realtà, in fisica, l'osservatore non è una persona ma, invece, un'*astrazione* che supera diverse complicazioni che comporterebbe l'osservazione degli eventi con i soli occhi umani. Infatti, se noi (ora intesi come umani) sappiamo che un certo evento E si verificherà alle coordinate (x, y, z) al tempo t (si immagini ad esempio la detonazione pianificata di una bomba in lontananza), nei fatti noi lo osserveremo sempre nelle coordinate (x, y, z) ma al tempo $t + t' \neq t$ poiché l'informazione che l'evento si è verificato, trasmessa per mezzo della luce (percepita dai nostri occhi), impiegherà un certo tempo t' a raggiungere l'osservatore umano. Pertanto per trovare il vero tempo, indipendente dalla trasmissione dell'informazione, si dovrebbe calcolare ogni volta $(t + t') - t'$ ed alla lunga ciò può stancare. Per ovviare al problema, si definisce osservatore il **reticolo immaginario** di infinita estensione, solidale al suo rispettivo referenziale, che permette la misurazione **locale** di qualsiasi evento. Bisogna immaginarsi una struttura immensa (infinita!) composta da righelli intricati perpendicolarmente tra di loro esattamente come le armature in ferro dei palazzi, in cui è disposto un orologio sincronizzato con tutti gli altri a qualsiasi intersezione tra i detti righelli. Nel caso ideale i righelli sono infiniti e quindi le intersezioni corrispondono ai punti dello spazio, pertanto ad ogni punto dello spazio è associato un orologio che segna lo stesso tempo di tutti gli altri.

Esperimento mentale Quando i mezzi tecnologici attuali non sono sufficienti o in un esperimento fisico sono richieste situazioni difficilmente realizzabili o riscontrabili (ad esempio i casi ideali) si ricorre agli esperimenti mentali, ossia ad esperimenti fisici eseguiti nella mente. Non si tratta di speculazione a carattere filosofico: l'intelletto procede fredamente e rigorosamente mimando perfettamente il comportamento della Natura che fino a quel punto conosce. Più in là in questo capitolo vedremo un esempio di esperimento mentale proposto dal fisico italiano Galileo Galilei.

1.1.4 Lo spazio e il tempo

Secondo la visione di Newton, che sarà ritenuta vera per più di due secoli, lo spazio e il tempo sono due entità fisiche del tutto distinte non influenzabili a vicenda ed accomunate dal fatto che entrambe sono *contenitori di eventi* [3].

Lo spazio è **assoluto** ossia qualsiasi osservatore in qualsiasi referenziale concorda con tutti gli altri sulle distanze spaziali $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ misurate dallo stesso tra due eventi E_1 e E_2 qualsiasi. È interessante osservare come non si è soltanto concordi sulla distanza

$\|\vec{\Delta r}\|$ ma *anche* proprio sul vettore $\vec{\Delta r}$ stesso, vale a dire che ogni osservatore stabilisce la medesima *direzione e verso* di $\vec{\Delta r}$!

Allo spazio assoluto segue il concetto di **moto assoluto** e quello di **moto relativo**. Il secondo indica un moto che è, per definizione, relativo ad un particolare sistema di riferimento, che a sua volta è sicuramente in moto rispetto ad un altro sistema di riferimento, che a sua volta ... fino ad arrivare⁷ ad un sistema di riferimento *privilegiato*, che è lo *spazio stesso*: allora, in quel caso, il moto relativo allo spazio è assoluto [3].

Anche il tempo è **assoluto** ossia qualsiasi osservatore in qualsiasi referenziale concorda con tutti gli altri sulle distanze temporali $\Delta t = t_2 - t_1$ misurate dallo stesso tra due eventi E_1 e E_2 qualsiasi.

1.1.5 Le grandezze fisiche basilari

Si prega di notare che le seguenti grandezze fisiche sono rappresentate da *lettere minuscole*. Le grandezze che definirò nella meccanica relativistica saranno rappresentate per la maggioranza da *lettere maiuscole*. Tale scelta è giustificata dal fatto che le seconde sono sostanzialmente *generalizzazioni* delle prime, che diventano quindi *subordinate*.

La posizione Scelto un particolare referenziale (definito dalla base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$), allora la posizione è la componente spaziale di un evento:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Le traiettorie dei corpi sono espresse matematicamente dalla funzione $\vec{r}(t)$ ossia il tempo è considerato un parametro⁸ $t \in \mathfrak{R}$.

La distanza La distanza/lunghezza tra due posizioni è la norma della differenza tra i due vettori presi in considerazione:

$$\|\vec{\Delta r}\| = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|.$$

La velocità La velocità è definita come la derivata prima della posizione rispetto al tempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Poiché non abbiamo imposto particolari limiti all'espressione algebrica (la *forma*) di $\vec{r}(t)$, ciò sarà vero anche per $\vec{v}(t)$, che può quindi assumere valori *grandi a piacere*.

L'accelerazione La derivata seconda della posizione rispetto al tempo, ossia la derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t).$$

⁷Questa conseguenza si avvera se, come Newton, si rifiuta una regressione infinita.

⁸Si tratta dell'argomentazione principale a sostegno della naturale distinzione tra spazio e tempo nella meccanica classica [3]. Ricapitolando: lo spazio è di natura vettoriale, il tempo è di natura numerica.

La quantità di moto Consideriamo un corpo di massa m in moto a velocità variabile $\vec{v}(t)$. Si definisce quantità di moto la grandezza fisica:

$$\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t).$$

Si osserva *sperimentalmente* che la quantità di moto è una grandezza *conservativa* ossia in un sistema isolato non varia nel tempo. Vale quindi il principio:

Principio di conservazione della quantità di moto

In un sistema isolato la quantità di moto totale è costante nel tempo.

La forza L'agente che muta la quantità di moto dei corpi è la forza, descritta da:

$$\vec{f}(t) = \frac{d}{dt} \vec{p}(t) = m \cdot \vec{a}(t).$$

L'energia cinetica Esistono diverse forme di energia: in questo LAM ci interesserà prevalentemente quella cinetica, cioè quella legata allo *stato di moto* di un corpo. Consideriamo una forza di intensità variabile $f(t)$ ma di direzione e verso costanti applicata ad un corpo posto inizialmente a velocità v di direzione e verso uguali a quella della forza. Poiché per il **teorema dell'energia cinetica** (anche chiamato **teorema delle forze vive**) l'energia cinetica acquisita da un corpo è equivalente al *lavoro* svolto dalla forza su di esso lungo la traiettoria del moto, calcoliamo ora il lavoro W eseguito lungo una certa distanza $\Delta x = (x_2 - x_1)$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \dot{x}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} ma(t)v(t) dt = \left[\frac{1}{2}mv(t)^2 \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Qui abbiamo impiegato il metodo di integrazione per sostituzione. Si noti che, rigorosamente parlando, la *forma interna* di $f(x)$ è palesemente diversa da quella di $f(t) = ma(t)$ anche se entrambe indicano la forza esercitata sul corpo in un certo luogo o tempo. Pertanto, valutando, l'energia cinetica di un corpo è data da:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2 = \frac{1}{2}m\Delta v^2.$$

E quindi, assumendo il caso in cui il corpo inizialmente era fermo (ossia $v(t_1) = 0$), definiamo **energia cinetica** di un corpo di massa m e velocità istantanea $v(t)$ la quantità:

$$K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2.$$

Sistema di riferimento inerziale Si dice che un sistema di riferimento S è inerziale se, secondo lo stesso, l'accelerazione di un punto materiale P isolato è nulla. Con il termine *isolato* si intende che nessuna forza agisce su P , oppure che la somma di tutte le forze agenti su P è equivalente a $\vec{0}$, ossia ci si riconduce al caso precedente. In altri termini, un referenziale inerziale è tale se in esso è valido il **primo principio della dinamica** mentre si dice **non inerziale** se il detto principio non è verificato.

1.1.6 I principi della dinamica

L'ultima definizione appena vista allude a dei principi ossia ad assunzioni del tutto indimostrabili ma date per vere in virtù del fatto che ad oggi tutte le osservazioni le verificano e quindi sembrerebbero avere validità universale.

Di seguito ecco presentati i tre principi della dinamica, esposti per la prima volta da Newton nel suo capolavoro (da molti ritenuto come il saggio più importante della scienza moderna) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* pubblicato nel 1687.

Primo principio della dinamica

Un corpo mantiene il suo stato di moto se non è sottoposto ad una forza.

Qui lo *stato di moto* indica il moto rettilineo uniforme oppure la quiete⁹. La *forza* è invece da intendersi sia come *singola* che come *somma* di forze. Questo principio possiede anche il nome di **principio di inerzia**, poiché la tendenza di un corpo a mantenere il suo stato di moto è effettivamente la manifestazione della difficoltà di mutare quest'ultimo: tale caratteristica è appunto chiamata *inerzia*.

Secondo principio della dinamica

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Qui la forza è rappresentata con \vec{F} per ragioni storiche: in questo LAM dovrebbe essere indicata con \vec{f} .

⁹Che in realtà si potrebbe anch'essa vedere come un moto rettilineo uniforme di velocità nulla.

Terzo principio della dinamica

Quando un corpo A esercita una forza \vec{F}_{AB} su un corpo B , quest'ultimo esercita simultaneamente su A una forza \vec{F}_{BA} della stessa intensità e direzione ma di verso opposto.

Secondo la meccanica classica, l'informazione si trasmette con una **velocità infinita**, poiché la forza \vec{F}_{BA} viene esercitata istantaneamente all'applicazione di \vec{F}_{AB} .

1.1.7 Il principio di relatività galileiana

Galileo, nel suo *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*¹⁰ pubblicato nel 1632, presenta un esperimento mentale di capitale importanza sia per la meccanica classica sia, in forma più generale, per quella relativistica. Poiché Galileo era un fisico italiano, sarebbe un vero peccato ignorare l'opportunità di leggere i suoi scritti (che sono anche un tesoro letterario), pertanto gli lascio direttamente la parola, o meglio, la lascio a *Salviati*, uno dei tre personaggi del dialogo (vi sono infatti presenti anche *Simplicio* e *Sagredo*¹¹). L'episodio che ci apprestiamo a leggere, spesso intitolato *Il Gran Navilio*, si svolge durante la seconda delle quattro giornate del dialogo [23]:

“SALV. [...] Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coperta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadìa versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: ...”

Siamo quindi invitati a recarci in una grande barca con qualche amico, animaletti e oggetti, con i quali eseguiremo alcuni basilari esperimenti fisici.

“SALV. ... e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niancun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ...”

¹⁰I due sistemi sono il modello cosmologico *tolemaico* e *copernicano*. Malgrado Galileo sostenne la sua imparzialità riguardo ai due modelli, in realtà nell'opera egli esporrà decisive argomentazioni a favore di quello copernicano [8].

¹¹Salviati fu un nobile fiorentino amico di Galileo, Sagredo fu un nobile veneziano anch'esso amico di Galileo mentre Simplicio è un personaggio inventato. I due primi fanno ampio ricorso a ragionamenti e dimostrazioni, mentre Simplicio argomenta citando Aristotele e facendo capo al *senso comune* [8].

Se la barca è ferma rispetto alla Terra, non vi è nessun motivo per cui le farfalle, i pesci o gli oggetti lanciati in aria non dovrebbero comportarsi esattamente come sulla Terra ferma. Ma ecco che arriva il nocciolo della questione:

“SALV. ... ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: ...”

Ci è dunque impossibile, se questa volta la nave è in moto rispetto alla Terra ed assumendo che tale moto sia perfettamente uniforme (passiamo quindi ad un caso ideale e pertanto l'esperimento diventa mentale) ad esempio avendo un mare completamente calmo, determinare per solo mezzo degli esperimenti fisici precedenti (quindi senza guardare all'esterno della stanza) se la barca è in moto rispetto alla Terra oppure no.

“SALV. ... voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi foste situati per l'opposito; [...]”

D'altronde tutto questo non dovrebbe affatto sorprenderci: possiamo verificare la veridicità di tutte le affermazioni di Galileo semplicemente comperando un biglietto del treno o di aereo, che rappresenterebbero le versioni moderne della barca seicentesca. Noteremo, infatti, che durante un nostro ipotetico viaggio in aereo ci sarà impossibile, ad eccezione del decollo ed atterraggio (che rendono il *referenziale aereo* non inerziale), constatare **alcuna differenza** con le leggi della meccanica a cui siamo familiari sulla Terra. Arriviamo dunque, empiricamente, a formulare il seguente principio fisico:

Principio di relatività galileiana

Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Ora siamo in grado di capire perché i referenziali inerziali giocano un ruolo capitale in fisica. Infatti tali sistemi di riferimento possiedono due interessanti caratteristiche:

- È valido il **principio di inerzia**.
- È valido il **principio di relatività galileiana**.

Chiarisco sin da ora che l'intera teoria della relatività ristretta è fondata prendendo come base l'esistenza di questi particolari referenziali e quindi essa si applicherà soltanto in tali ambiti¹². I *SC* inerziali rappresentano quindi una scelta *privilegiata* per lo studio di un

¹²In realtà vedremo che potremo spingerci ancora un po' più in là ossia dire qualcosa anche sui sistemi di riferimento non inerziali.

fenomeno naturale: nella teoria della relatività *generale*, invece, la scelta del referenziale sarà del tutto arbitraria e si potrà constatare che i sistemi di riferimento inerziali sono semplicemente dei casi specifici di quelli non inerziali, quindi più generali.

1.1.8 Trasformazioni di Galileo

Sia S un referenziale inerziale in cui si osserva un evento E nella posizione \vec{r} al tempo t : vogliamo determinare un metodo analitico che ci permetta di calcolare posizione e tempo di E secondo un altro referenziale inerziale S' in moto uniforme rispetto ad S . Al tempo convenzionale¹³ $t = t' = 0$ i due referenziali partono con le loro origini poste nello stesso punto. Sia \vec{v} la velocità con la quale S vedrà S' allontanarsi da esso.

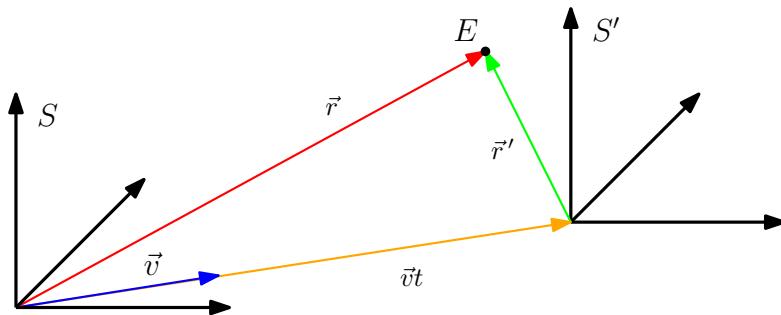


Figura 1.2. L'evento E visto da S e S' .

Dato che dall'esperienza quotidiana ricaviamo che il tempo t' misurato da S' è uguale a t misurato da S (ricordiamo che questa è la principale ragione che ha portato i fisici a considerare il tempo degli eventi come un parametro assoluto) e non avendo nessun motivo per dubitare altrimenti, il nostro solo compito sarà quello di determinare \vec{r}' . Dallo schema si vede chiaramente che $\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}'$ e quindi possiamo scrivere il sistema lineare che permette il passaggio $S \rightarrow S'$: tale sistema viene chiamato **trasformazione di Galileo**.

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \end{cases} \quad (1.1)$$

Pertanto, dato l'evento E osservato in S , per ricavare le coordinate¹⁴ spaziali e temporali dello stesso in S' impiegheremo il sistema esplicito:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_x t \\ y' = y - v_y t \\ z' = z - v_z t \end{cases}$$

¹³Da ora in poi, salvo dove espressamente citato, questa convenzione sarà data per scontata.

¹⁴Vedremo che nella teoria della relatività la parola *coordinate* assumerà un significato decisamente più profondo che quello inteso in questo momento.

Dal momento che quest'ultimo rappresenta una trasformazione lineare, esso può essere scritto in forma matriciale, ossia è possibile determinare una matrice Γ tale per cui:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Gamma(\vec{v}) \cdot \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Osservando il sistema esplicito gli elementi della matrice risultano chiari:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

1.1.9 Invarianza sotto trasformazioni galileiane

In fisica, con il termine *invariante*, si intende una grandezza fisica che non dipende dal referenziale in cui essa è misurata. Pertanto, se tra due referenziali¹⁵ S e S' è necessario applicare una trasformazione alle grandezze osservate in S per ottenere quelle viste in S' , allora le grandezze fisiche invarianti non cambiano valore sotto tali trasformazioni.

Vogliamo ora determinare quali delle grandezze della meccanica classica definite in precedenza sono invarianti sotto le trasformazioni di Galileo.

La posizione Ovviamente non è invariante dal momento che la matrice Γ è stata costruita proprio per calcolare \vec{r}' partendo da \vec{r} .

L'intervallo spaziale e la distanza È facile dimostrare che sono invarianti. Siano infatti \vec{r}_1 e \vec{r}_2 due posizioni viste da S . Calcoliamo $\Delta\vec{r}'$ visto da S' :

$$\Delta\vec{r}' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = (\vec{r}_2 - \vec{v}t) - (\vec{r}_1 - \vec{v}t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}.$$

Inoltre, essendo $\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r}$, è chiaro che anche $||\Delta\vec{r}'|| = ||\Delta\vec{r}||$ e pertanto anche la distanza è invariante.

Il tempo Se si calibra a priori tutti gli orologi di tutti i referenziali ad un tempo arbitrario (ad esempio 0), visto che il tempo è un parametro assoluto, ovvero un parametro sul quale tutti concordano, allora esso è invariante.

L'intervallo di tempo Nel caso in cui gli orologi non siano stati calibrati in precedenza alle misurazioni il tempo diventa variante, mentre l'intervallo di tempo continua a rimanere invariante, essendo $(t_2 + k) - (t_1 + k) = t_2 - t_1 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, dove k rappresenta il ritardo tra due orologi di due referenziali qualsiasi.

¹⁵In questo capitolo, come praticamente ovunque in questo LAM, S e S' sono due referenziali *inerziali*.

La velocità Grandezza assai interessante in fisica, non è invariante. Sia infatti \vec{u} la velocità costante di un punto materiale P visto in S e sia \vec{v} la velocità (anch'essa costante) con cui S' si allontana da S . Allora, applicando la definizione di velocità:

$$\vec{u}' = \frac{d}{dt} \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) - \vec{v}t) = \vec{u}(t) - \vec{v}.$$

Questo risultato prende il nome di **legge di composizione delle velocità** e molto spesso, nella vita di tutti i giorni, viene applicata quasi inconsciamente, talmente la riteniamo ovvia e scontata:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (1.3)$$

La legge non impone limiti alla scelta di \vec{u} e \vec{v} , pertanto questi vettori possono assumere intensità del tutto arbitrarie come ad esempio $\|\vec{v}\| = 10c$. D'altronde ciò non dovrebbe sorprenderci più di quel tanto, visto che nella meccanica classica l'informazione può essere trasmessa istantaneamente e quindi non vi è una ragione particolare per imporre un limite alle velocità dei corpi.

La quantità di moto Se la velocità non è invariante sotto trasformazioni di Galileo lo stesso sarà vero per la quantità di moto, visto che essa non è nient'altro che la velocità moltiplicata per uno scalare (la massa m).

L'energia cinetica Anche l'energia cinetica, essendo funzione del modulo della velocità, sarà anch'essa variante.

L'accelerazione È invariante e la dimostrazione richiede la precedente legge di composizione delle velocità:

$$\vec{a}' = \frac{d}{dt}(\vec{u}'(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{u}(t) - \vec{v}) = \vec{a}.$$

La forza Poiché la forza è equivalente all'accelerazione (variante) moltiplicata per uno scalare (la massa m), concludiamo che la forza è invariante.

La massa e la carica Essendo proprietà *intrinseche* dei corpi, non abbiamo nessuna ragione per dubitare che esse siano invarianti.

1.1.10 L'etere

Benché la meccanica classica non contempli i fenomeni ottici, che comprendono lo studio della luce, è di fondamentale importanza per lo sviluppo della teoria della relatività ristretta avere ben in chiaro come veniva vista la luce agli albori della fisica, ossia proprio nel periodo storico contemporaneo alla fondazione della meccanica classica. Infatti, in **tutte** le formule e leggi della teoria della relatività ristretta troveremo c ossia la velocità della luce nel vuoto.

Non è mia intenzione quella di presentare accuratamente e dettagliatamente la storia dell'evoluzione dei modelli impiegati per interpretare la luce e tutti i fenomeni ad essa collegati, pertanto mi limiterò a descrivere molto sommariamente gli aspetti che più ci interessano per comprendere al meglio la relatività speciale.

Possiamo dire che all'epoca dello sviluppo della meccanica classica (XVII e XVIII secolo) vi erano due modelli in competizione tra loro [3]:

- Il modello *corpuscolare*, che prevedeva *corpuscoli* (oggi diremmo *quanti*) di luce, aventi una certa massa e pertanto un comportamento totalmente spiegabile dalle leggi della meccanica. Spesso si considera come massimo esponente di tale interpretazione lo stesso Newton, ma in realtà egli ha sempre ribadito il suo scetticismo nei confronti di questo modello.
- Il modello *ondulatorio*, che appariva più adatto alla spiegazione di fenomeni altrimenti difficilmente interpretabili con il modello precedente, come ad esempio la rifrazione o la diffrazione della luce. Benché la paternità dell'idea della luce come onda può essere attribuita a René Descartes, possiamo senza dubbio identificare come massimo esponente di questo modello il fisico olandese Christiaan Huygens, che sviluppò una teoria ondulatoria ancora oggi impiegata ed insegnata nei corsi di fisica liceali.

Nel primo modello, quindi, la luce è identificata come una **particella**, mentre nel secondo essa è identificata come un'**onda** che si propaga in un qualche **mezzo di propagazione**. Entrambi assumono una certa velocità con la quale la luce si sposta (nel vuoto o nel mezzo). Essendo quest'ultima elevatissima all'epoca si era addirittura arrivati ad ipotizzare in un primo momento che la luce, come le forze, si propagasse istantaneamente [3]. Poi, con il passare del tempo, le misure di c si affinarono sempre di più fino ad arrivare al valore attuale di [7]

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

che generalmente viene approssimato a *trecento milioni* metri al secondo. Si prega di notare che quando si parla di c si intende la velocità della luce **nel vuoto**, poiché all'interno di un mezzo (ad esempio l'aria) entra in gioco l'**indice di rifrazione** n , che altera la velocità di propagazione secondo la nota legge $v \cdot n = c$, dalla quale si può chiaramente osservare che per $n > 1$ si ha $v < c$.

A questo punto i lettori più attenti si saranno sicuramente accorti di un'incongruenza: infatti prima, nel modello ondulatorio, ho parlato di un ipotetico mezzo di propagazione della luce mentre ora lo distinguo dal vuoto. Il compito di spiegare l'evoluzione del modello ondulatorio non rientra nell'ambito di questo LAM, ma quello che posso chiarire è il fatto che prima dell'inizio del novecento i fisici sostenevano che anche nel vuoto la luce si propagasse in un mezzo, che prendeva il nome di **etere**. Non posso purtroppo, per motivi di coerenza e tempo, entrare in dettagli come l'interazione tra etere e materia (l'etere perfora la materia? si addensa attorno ai bordi dei corpi? permette propagazioni di onde trasversali o longitudinali? viene parzialmente trascinato dal moto dei corpi? come dobbiamo immaginarcelo? [4]). Quello che posso dire a proposito dell'etere è che la sua

esistenza era giustificata esclusivamente dal fatto che il modello ondulatorio nella storia della fisica si è rilevato (almeno fino ad Einstein) di maggior successo nell'interpretazione dei fenomeni e quindi vi era la necessità di assumere l'esistenza di qualche cosa avente la funzione di propagare la luce nell'Universo come un'onda [4].

Riassumendo La meccanica classica è fondata partendo da alcuni principi e definizioni che, se dal punto di vista matematico sono del tutto arbitrarie, dal punto di vista fisico le consideriamo come ricche di significato concreto e facilmente riscontrabile nella realtà quotidiana (quella delle *basse velocità*). In questa teoria viene impiegata la trasformazione di Galileo, valida tra referenziali inerziali. Infine viene accennato il concetto di etere poiché i fenomeni ottici appartengono al mondo delle *alte velocità*, di capitale importanza per lo sviluppo della teoria della relatività.

1.2 L'esperimento di Michelson-Morley

“Un eminente fisico suggerì che le future verità della fisica devono essere cercate nella sesta cifra decimale.”

Albert Abraham Michelson

Se davvero questo etere esiste, allora dovremmo essere in grado di determinare un referenziale dove esso sia in quiete ossia dove la velocità della luce sia esattamente c . In tutti gli altri referenziali in moto rispetto a quest'ultimo, la velocità della luce, secondo il principio di relatività galileiana, dovrebbe essere $c \pm v$ ed inoltre si dovrebbe osservare un *vento d'etere* nella direzione opposta al moto rispetto al detto mezzo. Pertanto ci diamo il compito di determinare questo referenziale dove l'etere è appunto in quiete.

Con grande probabilità l'etere si estende per tutto l'Universo, quindi abbiamo bisogno di un referenziale di dimensioni *adatte* per i nostri esperimenti: sceglieremo la Terra. Questo referenziale non è inerziale, ma lo assumeremo tale poiché, per brevi intervalli di tempo, gli effetti che comporta la sua non inerzialità sono del tutto trascurabili. Assumeremo che la Terra sia in moto relativo rispetto all'etere (figura 1.3). Sarebbe infatti un po' presuntuoso rispetto all'intero Universo attribuire alla Terra il merito di essere solidale al referenziale dell'etere, tralasciando il fatto che comunque essa non è nemmeno un referenziale inerziale! Detto ciò, chiameremo v la velocità relativa tra l'etere e la Terra, mentre chiameremo c la velocità della luce nel suo mezzo.

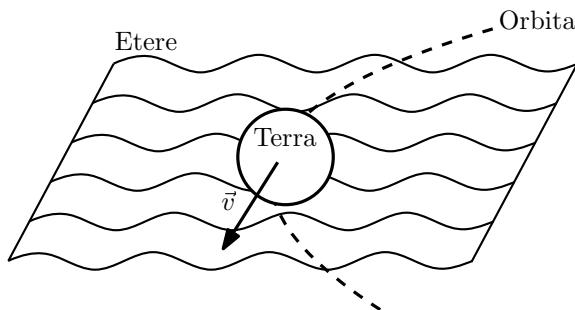


Figura 1.3. Terra in moto rispetto all'etere.

Ma entriamo pure nei dettagli dell'esperimento stesso. Esso fu eseguito dapprima dal solo Albert Abraham Michelson nel 1881: sfortunatamente egli commise dei (a mio avviso) gravi errori di calcolo, che misero in discussione la veridicità di quanto aveva osservato. Così, nel 1887, con questa volta l'aiuto di Edward Morley (che tra l'altro mise a disposizione la sua cantina per ospitare l'apparato sperimentale), l'esperimento fu ripetuto ed allo stesso tempo migliorato sia sul piano teorico che sperimentale [3].

L'apparato sperimentale consiste in uno strumento chiamato **interferometro** (in questo caso **di Michelson**) che sostanzialmente separa da un'unica sorgente luminosa due fasci di luce, che percorrono separatamente tratti di uguale o meno lunghezza, per poi ricongiungerli su una lastra ed osservare l'interferenza prodotta. In questo LAM analizzeremo un interferometro *ideale*, poiché nella realtà bisognerebbe tenere conto di molti altri fattori sperimentali, quali ad esempio la lunghezza dei bracci sicuramente non uguali per ragioni di fabbricazione oppure di dilatazione termica.

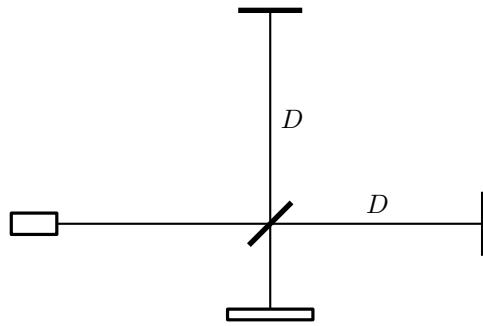


Figura 1.4. Schema dell'interferometro di Michelson. Una sorgente di luce è posta a sinistra, a destra e in alto vi sono due specchi totalmente riflettenti, in basso vi è una lastra opaca e al centro è posizionato uno specchio semi riflettente. Chiameremo *primo braccio* il percorso sorgente/specchio semi riflettente mentre chiameremo *quarto braccio* il percorso specchio semi riflettente/lastra opaca.

L'interferometro è solidale alla Terra. Supponiamo dunque che la Terra si muova di moto rettilineo con velocità v rispetto all'etere ed analizziamo il percorso della luce sui vari bracci dell'interferometro.

Nel primo braccio la luce non è ancora separata e quindi, benché la sorgente sia in realtà posta in un altro luogo, possiamo senza errare ipotizzare lo specchio semi-riflettente come sorgente puntiforme.

La luce è ora separata da uno specchio semi riflettente e i due fasci sono in fase. Guardiamo il fascio che si dirige verso la direzione del moto della Terra (quello orizzontale), ossia verso destra in figura 1.4. Esso impiegherà un certo tempo T_1 per andare e tornare: prima di essere riflesso dallo specchio avrà una velocità $c - v$ rispetto alla Terra, mentre al ritorno $c + v$. In conclusione, questo fascio avrà un tempo di percorrenza:

$$T_1 = \frac{D}{c - v} + \frac{D}{c + v} = \frac{D(c - v) + D(c + v)}{(c - v)(c + v)} = \frac{2Dc}{c^2 - v^2} = \frac{2D}{c \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}.$$

Osserviamo ora il secondo fascio (quello perpendicolare alla direzione del moto della Terra): esso si dirigerà verso lo specchietto superiore con velocità c rispetto all'etere ma seguirà

un percorso obliquo (si veda nel prossimo capitolo la figura 2.4), di lunghezza complessiva $2L$, tale per cui $L^2 = \left(v\frac{T_2}{2}\right)^2 + D^2$ (che non è nient'altro che il teorema di Pitagora) in un certo tempo T_2 . Essendo $L = c\frac{T_2}{2}$ possiamo immediatamente sostituire L per ottenere:

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(v\frac{T_2}{2}\right)^2 + D^2 \\ \left(c\frac{T_2}{2}\right)^2 &= \left(v\frac{T_2}{2}\right)^2 + D^2 \\ T_2 &= \frac{2D}{\sqrt{(c^2 - v^2)}} = \frac{2D}{c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Una volta ricongiunti nel quarto braccio, i due fasci saranno sfasati avendo un ritardo temporale $\Delta T = T_1 - T_2$ pari a:

$$\Delta T = \frac{2D}{c} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right).$$

È facilmente verificabile che $\sqrt{x} \geq x \quad \forall x \in [0; 1]$ e quindi, potendo il termine posto sotto la radice variare solo tra 0 (non compreso) e 1 se $v < c$, deduciamo che $\Delta T > 0$. Possiamo ulteriormente semplificare l'espressione ipotizzando velocità v piccole rispetto a c . Se infatti $v \rightarrow 0$ possiamo ragionevolmente approssimare le seguenti espressioni con la loro retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 0$ [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\simeq \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-x} \right] (0) \cdot x + \left[\frac{x}{1-x} \right] (0) = \frac{x}{(1-0)^2} + 1 = 1+x \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} &\simeq \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right] (0) \cdot x + \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right] (0) = \frac{x}{2\sqrt{1-0}^3} + \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\Delta T = \frac{2D}{c} \left\{ \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] - \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] \right\} = \frac{Dv^2}{c^3}.$$

Nel quarto braccio i fasci seguono il medesimo percorso quindi possiamo calcolare lo sfasamento semplicemente come $\Delta x = c\Delta T = Dv^2/c^2$.

Arriva ora il punto cardine dell'esperimento: la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ radianti dell'apparato [3]. Infatti noi non disponiamo, dovendo per l'appunto determinare il referenziale dell'etere, di dati presi in tale referenziale da comparare con quelli rilevati sulla Terra. Se avessimo queste informazioni, ad esempio il numero di spostamenti delle frange d'interferenza (che sarebbero, in riferimento alla figura 1.5, le frange illuminate ossia le regioni di piano dove le onde luminose *interferiscono costruttivamente*) passando da un referenziale in quiete con l'etere a uno in moto, ci risulterebbe banale calcolare con che velocità la Terra si muove nell'etere. Ma sfortunatamente noi *siamo già* in moto, quindi dobbiamo trovare un altro modo per riprodurre questo spostamento di frange: la soluzione più facile è pertanto quella di roteare l'interferometro di $\frac{\pi}{2}$ radianti così da invertire nei calcoli T_1 e T_2 e pertanto osservare uno spostamento di frange doppio rispetto a quello che avremmo

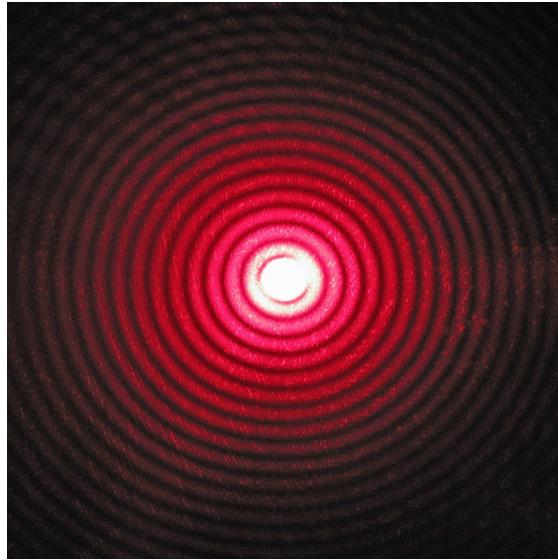


Figura 1.5. Frange d'interferenza circolari prodotte da una luce monocromatica rossa diffratta in un foro circolare. Le circonferenze illuminate indicano *interferenza costruttiva* mentre quelle oscure indicano *interferenza distruttiva*: la figura, ignorando le *intensità* decrescenti, segue uno schema periodico. Fonte: *Wikimedia Commons*.

osservato nella situazione ideale descritta prima. Quantitativamente parlando, chiamando A l'orientamento dell'interferometro per le prime misurazioni mentre B l'orientamento delle seconde (dopo la famosa rotazione di $\frac{\pi}{2}$ radianti), osserveremmo un numero n di spostamenti (siano N e M numeri interi positivi e sia $\Delta T_A = -\Delta T_B$ in virtù del fatto che ΔT_A è positivo come dimostrato in precedenza):

$$n = N - M = \frac{N\lambda - M\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta x_A - \Delta x_B}{\lambda} = \frac{c(\Delta T_A - \Delta T_B)}{\lambda} = \frac{2c\Delta T_A}{\lambda} = \frac{2Dv^2}{\lambda c^2}.$$

Michelson e Morley cercarono di misurare sull'arco di mesi, il mattino e la sera, questi spostamenti di frange: alla fine, le evidenze sperimentali mostrarono molto chiaramente che n si aggirava attorno allo 0 [3]. L'esperimento di Michelson-Morley, sempre ritenendo vero il fatto che la Terra non è solidale all'etere, portò quindi delle solide argomentazioni a favore dell'inesistenza di un referenziale per l'etere in quiete poiché, dalle evidenze sperimentali, non sembrava esserci una qualsiasi direzione privilegiata nel moto della Terra [4]. Pertanto, come conseguenza logica, appariva sempre più chiara l'inesistenza dell'etere e l'invarianza della velocità della luce, assunta come costante di valore c .

Riassumendo L'impossibilità di rilevare con quale velocità la Terra si sposta rispetto all'etere, tralasciando ogni possibile discorso filosofico sulla sua natura, mette in discussione la sua stessa esistenza. Pertanto non abbiamo più nessun motivo di privilegiare un particolare sistema di riferimento nello studio della natura, quindi il **concetto di spazio assoluto viene a cadere**. Inoltre, fatto ancora più grave, la **relatività galileiana è violata** in quanto la velocità della luce c appare come una costante fisica, non verificando con l'interferometro spostamenti delle frange di interferenza. Di fronte a queste difficoltà urge una *radicale* riformulazione della meccanica.

Capitolo 2

Un primo sguardo

2.1 Introduzione alla teoria della relatività ristretta

“Una teoria è tanto più convincente quanto più semplici sono le sue premesse, quanto più varie sono le cose che essa collega, quanto più esteso è il suo campo di applicazione.”

Albert Einstein

2.1.1 Lo schema epistemologico

Qualsiasi teoria fisica si fonda su una serie di **postulati**, vale a dire su concetti ed idee che si assumono veri, fino a prova contraria, benché privi di dimostrazione. Anzi, essi stessi sono i punti di partenza deduttivi delle dimostrazioni! Capirete dunque quanto siano importanti in una teoria scientifica: se anche un solo postulato si rivela falso, è l'*intera* teoria che viene messa in discussione. È quindi di tutto nostro interesse scegliere accuratamente i postulati su cui fondare la nuova meccanica, essendo ora chiaro che quella classica riscontra insormontabili problemi.

Vediamo ora la visione di Einstein sullo sviluppo delle teorie fisiche [3]: ciò ci sarà utile per meglio comprendere lo schema logico da lui seguito durante la formulazione della teoria della relatività ristretta.

Prendendo figura 2.1 come riferimento, abbiamo dapprima le *esperienze* E , che sarebbero le misurazioni e le constatazioni quantitative dei fenomeni. Abbiamo poi gli *assiomi* A , ossia i postulati citati prima, collegati alle E per mezzo di una freccia curva verso l'alto. Vero il basso abbiamo collegati ad A degli enunciati particolari S_1, S_2, S_3, \dots per mezzo di frecce perfettamente rettilinee. Tali enunciati sono conseguenze logiche degli assiomi. Infine, sempre verso il basso, troviamo i vari S collegati alle E per mezzo di frecce tratteggiate. Si tratta delle verifiche sperimentali delle proposizioni S .

La scelta della posizione delle lettere, dello stile delle frecce così come la loro direzione e curvatura non è casuale.

Il primo passaggio, quello da E ad A è verso l'alto poiché i postulati detengono un'universalità e verità assolutamente incomparabile alle semplici esperienze. Da un punto di vista metafisico gli assiomi A sono il massimo che la conoscenza umana può permettersi di

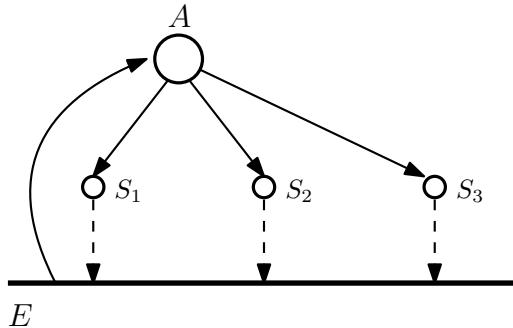


Figura 2.1. Riproduzione dello schema disegnato da Albert Einstein in una lettera al suo amico Maurice Solovine nel 1952.

concepire. In realtà, però, bisogna intendere questo tipo di conoscenza come formulazione arbitraria a partire dalle esperienze. Essa viene considerata ragionevolmente veritiera e quindi non rispecchia necessariamente la realtà dei fatti. Nulla ci garantisce infatti che A sia effettivamente vera e pertanto il delicato passaggio da E ad A è curvo, proprio per simboleggiare l'arbitrarietà ed incertezza dell'azione.

Il secondo passaggio, quello da A alle varie S è rigidamente logico e razionale, pertanto le frecce sono rette. Si trovano tra A ed E poiché derivano da A e quindi mantengono quel grado di superiorità rispetto ad E . Poiché sono dirette conseguenze da A , anch'esse non sono necessariamente vere.

L'ultimo passaggio, da S a E , è proprio quello che determina la veridicità delle S tramite il confronto con la realtà stessa. Non possiamo verificare tutte le infinite S e quindi non potremo mai dimostrare che A è vera: comunque, maggiore sarà il numero di S verificate sperimentalmente e maggiore sarà la fiducia data ad A . Le frecce sono tratteggiate visto che questo passaggio è ancor più delicato del primo, poiché gli errori sperimentali e di interpretazione possono influenzare significativamente la procedura, producendo per medesimi esperimenti risultati diversi tra loro.

In questo LAM mi propongo di seguire alla lettera questo schema concettuale: in prima istanza enuncerò i due postulati sui quali si basa la teoria della relatività ristretta, in seconda istanza passerò alla rigorosa dimostrazione di numerose conseguenze della teoria per poi infine verificarle (nel limite del possibile) sperimentalmente.

2.1.2 I due postulati della relatività ristretta

Abbiamo visto, con l'esperimento di Michelson-Morley, che la relatività galileiana è violata, dal momento che c sembrerebbe essere una costante fisica indipendente dal referenziale scelto: se la luce assume una velocità c per qualsiasi osservatore, ci viene spontaneo chiederci se effettivamente sia possibile superare in un qualche modo tale limite di velocità. A questa domanda segue immediatamente un sentimento di orrore e disagio poiché la meccanica classica appare come del tutto falsa, dato che permetteva a un corpo di assumere *qualsiasi* velocità. Per secoli l'abbiamo ritenuta vera, ma questo soltanto perché **le evidenze sperimentali si sono sempre limitate alle basse velocità!** Visto che non possiamo negare le dette evidenze, dobbiamo necessariamente concludere che la meccanica classica è semplicemente **un'approssimazione valevole per basse velocità** di

una meccanica più generale [3] e sicuramente più complicata, dal momento che essa deve *limitare* esplicitamente le velocità sotto a c . Questa meccanica è, appunto, la meccanica relativistica.

Innanzitutto, seguendo le orme di Albert Einstein, dobbiamo chiederci se in questa nuova meccanica il cambio di sistema di riferimento¹ influenza le leggi della fisica: per Einstein, tale assunzione sembrava priva di fondamento e senso², quindi postulò quanto segue:

Primo postulato della relatività ristretta

Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Notare, a differenza del principio di relatività galileiana, che in questo momento stiamo postulando l'invarianza di **tutte le leggi della fisica** ovvero non ci limitiamo a quelle della meccanica. Infatti, non abbiamo ragioni per pensare altrimenti.

Ritengo che la teoria della relatività abbia soltanto bisogno di questo unico postulato, ma Einstein decise di enunciarne un secondo:

Secondo postulato della relatività ristretta

La velocità c della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Essa non dipende né dal moto della sorgente né da quello dell'osservatore.

Dal mio punto di vista l'invarianza della velocità della luce è **una legge fisica** e pertanto sarebbe implicita nel primo postulato. Possiamo ipotizzare che Einstein abbia deciso di formulare questo secondo postulato per sottolineare questa *straordinaria* evidenza sperimentale, oppure semplicemente perché non la vedeva come una legge fisica.

Ad ogni modo, osservando questi due postulati con gli occhi della meccanica classica, notiamo una certa incongruenza: come è possibile che la luce abbia valore invariante c in qualsiasi referenziale se abbiamo la legge (1.3) che ci illustra chiaramente che ciò non è affatto possibile? L'errore sta, oltre che a persistere con questa visione classicistica ormai superata dell'Universo, nel fatto di assumere per vera una legge ricavata dalle trasformazioni di Galileo: ora, tali trasformazioni soddisfano il principio di relatività galileiana **ma non i due postulati della relatività ristretta!** Per questa nuova meccanica, basata sui due postulati citati prima, varranno quindi *altre* trasformazioni che dovranno imperativamente semplificarsi a quelle galileiane per basse velocità.

¹In questo LAM, salvo dove espressamente citato, si intende sempre *inerziale*.

²Trattandosi di assiomi, non è possibile giustificare ulteriormente la scelta di renderli tali.

2.1.3 Fattore di Lorentz

Alla luce di questi due nuovi postulati, cerchiamo ora di rivalutare l'esperienza di Michelson-Morley e di trarre qualche conclusione.

Prima di addentrarci in ciò, però, vorrei invitare i lettori a prestare **il massimo grado di diffidenza possibile** verso qualsiasi idea acquisita a priori, sulla meccanica e sulla fisica in generale: questo perché, con grande probabilità, si tratterà di concetti derivati dalla meccanica classica. Quindi, prima di dare per scontato idee quali un tempo assoluto matematizzato come parametro reale, bisognerà accertarsi che esse non violino gli *enunciati particolari* tratti logicamente dai due postulati.

Uno di questi concetti che consideriamo ovvi è l'invarianza delle distanze spaziali. Una possibile interpretazione dei risultati ottenuti dall'esperimento di Michelson-Morley consiste nel rifiutare tale supposizione [3]. Infatti, se non osserviamo alcuno spostamento delle frange d'interferenza, allora ciò vuol dire che $\Delta T = 0$ e quindi $T_1 = T_2$:

$$\frac{2D'c}{c^2 - v^2} = \frac{2D}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}.$$

Giunti a quest'equazione, poiché c è una costante, notiamo che l'unica cosa che può eventualmente variare nelle espressioni dei due tempi è D . Supponiamo per un breve istante che le **distanze misurate nella direzione del moto di un referenziale subiscono una dilatazione/contrazione**³ secondo un fattore ϕ . T_1 è il tempo che la luce impiega per percorrere D orizzontale e quindi dovremmo sostituirlo con $\phi D = D'$, mentre T_2 è misurato perpendicolarmente alla direzione del moto e quindi non subirebbe nessuna contrazione/dilatazione:

$$\begin{aligned} \frac{2\phi D c}{c^2 - v^2} &= \frac{2D}{\sqrt{(c^2 - v^2)}} \\ \phi &= \sqrt{\frac{(c^2 - v^2)^2}{c^2(c^2 - v^2)}} \\ \phi &= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \end{aligned}$$

Poiché $v/c < 1$, se $v < c$, risulta $\phi < 1$ e quindi il fattore in questione rappresenta una **contrazione delle lunghezze**.

I padri di questa congettura furono l'irlandese George Francis FitzGerald (nel 1889) e, successivamente ma indipendentemente, l'olandese Hendrik Lorentz (nel 1892) [3]. In particolare, al secondo dobbiamo il nome del parametro di contrazione ossia il **fattore di Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.1)$$

³Non possiamo ancora sapere con certezza quale dei due è corretta.

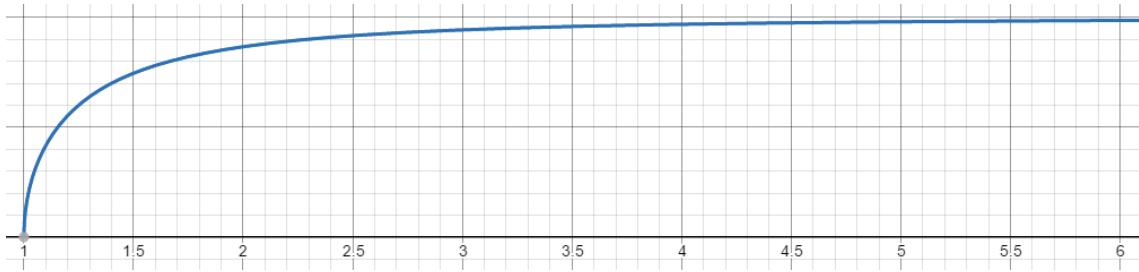


Figura 2.2. Grafico della funzione inversa di $\gamma(\beta)$: le velocità si trovano sulle ordinate Oy mentre i valori di γ sulle ascisse Ox . Ho deciso di raffigurare la funzione $\gamma^{-1}(\beta)$ per ragioni grafiche: infatti, raffigurare $\gamma(\beta)$ avrebbe comportato l’impiego di un’intera pagina poiché avrei dovuto specchiare e roteare di un angolo retto l’intera figura.

Dove β equivale al rapporto tra v e c . In realtà $\gamma = \phi^{-1}$: questo perché inizialmente ϕ appariva come un fattore a sé, privo di particolari legami con altri leggi della natura. In questo LAM scopriremo invece che γ è presente praticamente ovunque⁴, allo stesso titolo della costante c , ragione per cui ho deciso di introdurlo proprio ora.

Prendiamoci il tempo di studiare dal punto di vista strettamente matematico la funzione $\gamma(v)$: essa è dipendente dalla variabile v ed è definita in modo tale che $D_\gamma =] -c; c[$ con $Im_\gamma = [1; +\infty[$, pertanto v assume valori positivi (anche nulli) e minori (ma non uguali) di c . Abbiamo un asintoto verticale di equazione $x = c$ e la funzione $\gamma(v)$ è monotona crescente. In particolare, notare come per basse velocità il fattore si aggira attorno all’unità mentre per velocità prossime a quelle della luce γ tende a diventare indefinitamente grande.

A questo punto ci si potrebbe chiedere *perché* γ tende a $+\infty$ all’avvicinarsi di v a c : possiamo forse *scoprire* esclusivamente matematicamente che c è il limite delle velocità nel nostro Universo? La risposta è un chiaro **no**: infatti, la forma di γ deriva da un’assunzione implicita data per vera quando abbiamo calcolato T_2 . Il percorso della luce era obliquo e avevamo impiegato il teorema di Pitagora: ora, in *qualsiasi* triangolo rettangolo l’ipotenusa è il lato più lungo. Se assumiamo che il percorso ct della luce è proprio l’ipotenusa e se assumiamo che il cateto orizzontale è dato da vt , considerando una $D > 0$, è ovvio che deve essere *per forza* $v < c \quad \forall t > 0$. Tale conclusione è frutto della costruzione geometrica del triangolo rettangolo: non *esiste* alcun triangolo rettangolo se $v > c$.

2.1.4 Contrazioni perpendicolari

Per il successivo sviluppo della teoria, dobbiamo ora convincerci che la congettura della contrazione spaziale nel verso del moto si verifica esclusivamente nel detto verso di spostamento. Cosa ci vieta di ipotizzare una contrazione perpendicolare al movimento? La risposta si trova nel primo postulato. Infatti, se tutte le leggi fisiche sono uguali in tutti i referenziali, allora ciò significa che **nessun referenziale è privilegiato** in un qualche modo [2]. Ad esempio, nessun referenziale ha il diritto di stabilire *chi* è in moto rispetto a *chi*, poiché il moto rettilineo uniforme è *relativo*. Ogni osservatore concorderà di essere in

⁴In questa nuova meccanica, dove le velocità sono limitate a c , è anche lecito trovarsi fattori che aggirano tali limiti di valori numerici tendendo a $+\infty$ all’avvicinarsi di c .

quieta rispetto a tutti gli altri ed ognuno di questi avrà simultaneamente ragione benché siano tutti contemporaneamente in disaccordo.

Se ciò è vero, cerchiamo (con l'aiuto di un esperimento mentale illustrato in figura 2.3) di immaginarcia una situazione in cui si verificherebbe questa ipotetica contrazione spaziale perpendicolare. Immaginiamoci due referenziali rigidamente collegati a due tubi cavi A e B posti sullo stesso asse di simmetria: tali referenziali si stanno muovendo con una certa velocità uno verso l'altro (con l'intento di scontrarsi) e quindi, nell'ipotesi di una contrazione radiale causata dal moto, uno dei due tubi si vedrà aumentare o diminuire il proprio raggio *rispetto* all'altro⁵ (evitando quindi lo scontro poiché uno di essi passerà dentro l'altro).

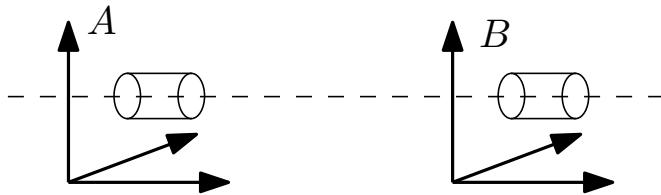


Figura 2.3. Il paradosso dei due tubi.

Ora, se la contrazione/dilatazione si verificasse per A osservandola da B , per il principio di relatività ciò sarebbe vero anche per B stesso osservato da A : **ci risulta impossibile stabilire quale dei due tubi passerà dentro l'altro** [2]! I lettori più accaniti ribatteranno che è possibile determinare una contrazione o dilatazione osservando il verso della velocità con cui i referenziali si spostano, stabilendo quindi con certezza che tubo passa dentro l'altro: a ciò ribatto istantaneamente invitando i detti lettori, nel più grande rispetto del principio di relatività, a ruotare, invertire o specchiare le basi dei referenziali ed osservare i risultati: **nessun sistema di riferimento deve essere privilegiato!** Concludiamo che questa contrazione spaziale nel verso perpendicolare al moto **non può esistere** [2].

2.1.5 Dilatazione del tempo

Si sarà capito che, nella teoria della relatività ristretta, alcune concezioni che abbiamo sempre dato per certe cadono letteralmente a pezzi. Se accettare uno spazio capace di contrarsi può risultare ancora facile, probabilmente non lo sarà altrettanto con il concetto di tempo. Più in là nel LAM capiremo lo stretto ed intimo legame tra spazio e tempo, pertanto ci risulterà quasi naturale trattare il tempo *quasi* allo stesso titolo dello spazio. Ma ogni cosa deve venire a suo tempo e per arrivare a quanto detto dobbiamo imperativamente passare per il fenomeno della dilatazione del tempo.

Consideriamo la porzione di tragitto percorso dalla luce nell'esperienza di Michelson-Morley che non subisce una contrazione spaziale: prendiamo quindi il braccio perpendicolare al moto dell'interferometro (i referenziali solidali con gli apparati sperimentali sono spesso chiamati *laboratori*) di lunghezza D . Isoliamo questo braccio dall'apparecchio ed analizziamolo per bene: solitamente, infatti, nei libri di divulgazione della teoria (vedi

⁵Stiamo osservando la scena rigidamente attaccati ad uno dei due referenziali, vale a dire che uno dei due tubi è fermo con noi.

[1]) viene impiegato il così detto **orologio a luce** che non è nient'altro che, appunto, questa porzione di interferometro semplicemente isolata e presa a sé. Inoltre, a differenza dell'interferometro originale, le pareti superiori ed inferiori di questo orologio a luce sono composte di vetro e pertanto permettono alla luce di *rimbalzare* tra gli estremi indefiniteamente se non vi è perdita di energia: ai fini dei nostri calcoli, però, ci serve soltanto una riflessione nell'estremo superiore e pertanto la situazione non di distacca praticamente per nulla dall'interferometro di Michelson visto prima.

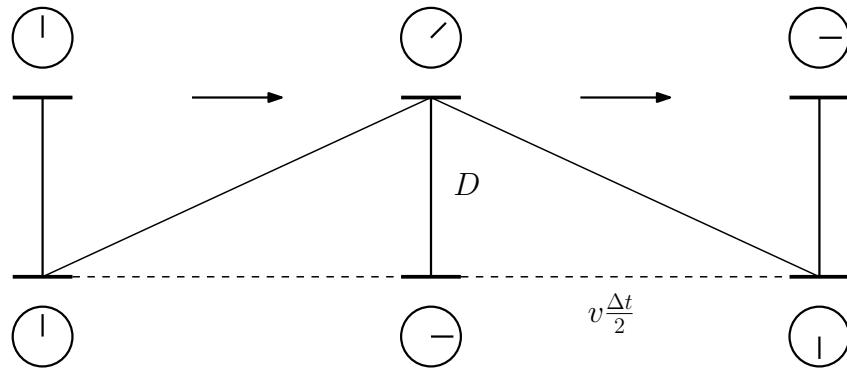


Figura 2.4. Orologio a luce. L'orologio superiore è solidale col braccio in moto e si muove assieme ad esso, mentre inferiormente abbiamo una serie di orologi sincronizzati tra loro che in figura risultano sfasati poiché si vuole dare l'idea del progredire del tempo. La differenza di tempo tra orologi situati sulla stessa verticale vuole sottolineare l'effetto della dilatazione.

Abbiamo già svolto i calcoli per ricavare il tempo di percorrenza della luce osservando la scena rispetto all'etere: ora, per il secondo postulato, non dobbiamo più preoccuparci di *quale* referenziale specifico scegliere dal momento che ovunque la velocità della luce è c . Pertanto immaginiamoci di guardare l'orologio a luce spostarsi in una certa direzione da un referenziale qualsiasi S , che considereremo *immobile*: per noi, il tempo Δt impiegato dalla luce per partire dal basso del braccio, rimbalzare e tornare indietro è equivalente alla già calcolata relazione di T_2 ossia:

$$\Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{2D}{c}\gamma.$$

Il sistema del laboratorio, invece, benché la luce abbia sempre e comunque velocità c , vede il percorso intrapreso dalla stessa semplicemente come $2D$ e pertanto calcola un tempo $\Delta t_0 = 2D/c$. L'orologio a luce è, come lo dice il suo nome, un *orologio* e pertanto l'unico strumento in grado di darci informazioni sul tempo: essendo $\Delta t \neq \Delta t_0$ ed essendo questi intervalli temporali misurati da orologi⁶, dobbiamo necessariamente concludere che nel sistema del laboratorio il tempo progredisce diversamente che nel referenziale S . In particolare, il tempo di S si vede *dilatato* rispetto a quello del laboratorio, e questa relazione appare dipendente dalla velocità di traslazione dei due referenziali! Combinando le due espressioni troviamo la **formula della dilatazione dei tempi**:

⁶Che cosa è un orologio, se non un apparecchio che funziona secondo la periodicità di un fenomeno?

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (2.2)$$

All'intervallo Δt_0 , spesso simboleggiato con t_0, t', τ oppure λ (che userò abbondantemente in seguito), viene dato il nome di **tempo proprio**. Alcuni libri (vedi [2]) si riferiscono ad esso come il tempo misurato dall'**orologio da polso** per dare l'idea della solidarietà con il laboratorio e soprattutto l'assenza di intervalli spaziali tra le misurazioni.

Infatti, si prega di notare che, mentre Δt è misurato in *due luoghi differenti* (la posizione iniziale e finale dell'interferometro), Δt_0 è misurato **sempre allo stesso punto**, ossia nell'estremo inferiore dell'orologio a luce. Questa distinzione ci permette di risolvere immediatamente un piccolo paradosso, ossia che, dato il principio di relatività, entrambi gli osservatori vedono il proprio tempo dilatarsi reciprocamente: il laboratorio non può impiegare la (2.2) allo stesso titolo di S dato che nel primo la distanza spaziale tra gli eventi *la luce parte* e *la luce torna* è nulla, cosa non vera nel secondo. In realtà vedremo che la faccenda è *nettamente* più complicata, ma ogni cosa deve venire a suo tempo.

2.1.6 Contrazione delle lunghezze

Si è già congetturato in precedenza una contrazione spaziale nella direzione del moto e si è già visto che essa spiega coerentemente i risultati negativi dell'esperimento di Michelson-Morley. Ma Einstein, quando formulò la teoria della relatività ristretta, non era nemmeno a conoscenza di tale esperienza e risultati [3]: pertanto vogliamo ora arrivare al risultato di ϕ esclusivamente nell'ottica della teoria della relatività ristretta.

Dapprima dobbiamo chiederci: che cosa significa *misurare una distanza*? In termini pratici, diremmo che tale azione consiste nel prendere un righello, porre il suo 0 all'estremità della distanza ed andare ad osservare il valore numerico della tacchetta di taratura che tocca l'altra estremità: tale numero rappresenta la distanza [1]. Ora, c'è un problema: come procediamo se vogliamo misurare le dimensioni di un corpo *in moto*? Evidentemente non possiamo agire come descritto prima: il corpo si sposterebbe ancor prima di aver posizionato correttamente il righello! Potremmo invece, ad esempio, stabilire 2 punti in un particolare istante di tempo tali da trovarsi alle 2 estremità del corpo: basterebbe poi ricondursi al caso precedente in un secondo tempo.

Siano S ed S_0 due referenziali in moto uniforme di velocità v . Sia L_0 la lunghezza del nostro corpo misurata da un osservatore solidale ad esso nel referenziale S_0 : tale distanza viene chiamata **lunghezza propria**. Questo osservatore non deve preoccuparsi della simultaneità discussa prima e per misurare L_0 procede come consuetudine. S_0 vede S muoversi contro sé a velocità v e quindi determina che impiega un certo tempo Δt a percorrere l'intera lunghezza L_0 . Allo stesso modo S vede S_0 muoversi verso sé e determina (ed è proprio qui la chiave del ragionamento) un **tempo proprio** Δt_0 : il tempo è proprio essendo l'osservatore in S perfettamente immobile, ovvero è L_0 , assieme a S_0 , a *veniregli contro* [1]. Ovviamente, data la contrazione delle lunghezze, la lunghezza che S vede non sarà L_0 ma invece una certa L . Mettiamo tutte queste considerazioni in equazione:

$$v = \frac{L_0}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t_0} = \frac{\gamma L}{\Delta t}.$$

Qui ho impiegato la (2.2) dato che i tempi misurati rispettano i criteri stabiliti per la validità della formula. A questo punto semplifichiamo ed otteniamo la formula della **contrazione delle lunghezze**:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (2.3)$$

Si prega di fare attenzione al fatto che L è frutto di due misurazioni (con la terminologia corretta due *eventi*) aventi *intervallo temporale nullo*, ma per quanto ci riguarda dobbiamo esclusivamente preoccuparci che ciò è vero *solo*⁷ per S .

Per ultimo, sottolineo il fatto che L_0 e L non sono lunghezze vincolate in un qualche modo ai corpi: infatti non sono *soltanto i corpi* a contrarsi, ma anche *tutto lo spazio* ad essi circostante. Questa considerazione è ovviamente reciproca: S vedrà lo spazio di S_0 contrarsi e **viceversa!**

2.1.7 Evidenza sperimentale: i raggi cosmici

L'Universo è, per definizione, *tutto* lo spazio che contiene *qualsiasi* cosa. Nell'Universo possono accadere molte, *moltissime* cose, tra cui la produzione di particelle a velocità relativistiche (da parte di stelle, ad esempio il Sole stesso, oppure fenomeni energetici di varia natura come le *novae*, le *supernovae* o i *quasar* [20]). A volte capita che queste particelle vedono la propria traiettoria intersecarsi con quella della Terra e, con un po' di fortuna, può accadere che il momento in cui esse transitano in quel punto è lo stesso in cui la Terra vi è presente: tali particelle collidono quindi con la nostra atmosfera e la loro presenza può essere verificata con una banale *camera a nebbia* [3]. Chiameremo le particelle provenienti dalla radiazione cosmica rilevate sul nostro pianeta **raggi cosmici**. Esse hanno un certo *periodo di decadimento* o *emivita* T misurato in laboratorio, ossia in un referenziale in cui esse risultano praticamente immobili. Si ricorda che l'emivita è il tempo in cui metà di una quantità N_0 di particelle decade ossia è valevole *nel laboratorio* la legge

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T},$$

che sarebbe la soluzione dell'equazione differenziale $dN = -\mu N dt$ imponendo $N(0) = N_0$ e $N(T) = N_0/2$ (μ è chiamata *costante di decadimento*).

Supponiamo di posizionare due rilevatori di particolari raggi cosmici, che chiameremo A e B , a diverse altezze relativamente al livello del mare, ossia uno a L_A e uno a L_B , e definiamo la differenza tra le due altezze come $L = L_A - L_B$. Sia $v < c$ la velocità di questi raggi e sia N_0 il numero di particelle rilevate da A in un (suo) secondo: applicando la meccanica classica, supponendo che la distanza tra i rivelatori sia esattamente $L = vT$, A dovrebbe segnalare il passaggio di un numero *doppio* di particelle rispetto a B poiché nel tempo T impiegato da queste ultime per percorrere L , essendo appunto l'emivita, metà delle particelle saranno decadute.

⁷Più tardi scopriremo infatti che la simultaneità tra eventi è relativa.

Impieghiamo ora la relatività ristretta e gli effetti precedentemente ipotizzati: secondo la (2.2) il tempo T visto dai rivelatori sarà posto in relazione con quello proprio dei raggi T' come $T = \gamma T'$, ossia $T' = T/\gamma$, che è *minore* di T . Pertanto, essendo diverso il tempo del *laboratorio*, la quantità di particelle rilevate in B non sarà più $N(T) = N_0/2$ bensì:

$$N(T') = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\gamma} \rightarrow N(T') > N(T) \quad \forall |v| < c.$$

Tenendo conto degli effetti relativistici, il rivelatore B dovrebbe segnalare la presenza di un flusso *maggior*e dei particolari raggi cosmici presi in esame rispetto a quanto previsto dalla fisica classica!

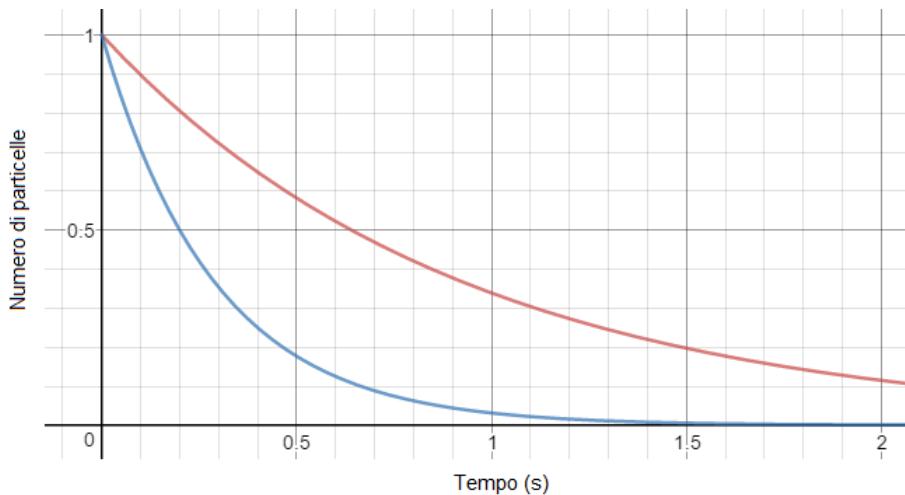


Figura 2.5. Andamento di $N(t)$ secondo la meccanica classica (blu) e relativistica (rosso). In questo esempio è stato posto $\beta = 0.95$, $T = 0.2s$ e $N_0 = 1$.

Nel 1941 i fisici B. Rossi e D. B. Hall verificarono sperimentalmente che effettivamente, in alcuni raggi cosmici in cui vi erano presenti, la quantità di muoni μ in moto, decadenti secondo la reazione $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, seguiva le previsioni relativistiche e non classiche, confermando quindi la veridicità della dilatazione temporale⁸ [3].

2.1.8 Conseguenze delle dilatazioni e contrazioni

Analizziamo ora da più vicino la (2.2) e la (2.3). Come osservato in precedenza, tutte le leggi della teoria della relatività devono ricondursi a quelle della meccanica classica nel limite delle basse velocità. Per $v \rightarrow 0$ abbiamo $\gamma \rightarrow 1$ e pertanto torniamo alle buone e vecchie idee date per scontate per tutta la nostra esistenza:

$$\Delta t = \Delta t_0 \quad , \quad L = L_0.$$

Per $v \rightarrow c$, invece, si ha $\gamma \rightarrow +\infty$. Nella (2.2) possiamo dire che, fissato Δt , Δt_0 diventa sempre più piccolo e pertanto il tempo proprio scorre sempre **più lentamente**. Fissato

⁸Segue logicamente la conferma della contrazione delle lunghezze: basterà infatti ripetere i calcoli dal punto di vista dei muoni stessi.

Δt_0 , il tempo Δt scorre sempre **più velocemente**. Considerazioni simili valgono per la (2.3): fissato L_0 , L diventa sempre **più piccolo** e pertanto le lunghezze si contraggono sempre di più. In generale, scrivendo la (2.2) e la (2.3) rispetto a γ , notiamo che tra intervalli spaziali e temporali vi è una relazione inversa⁹ [21]

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{L_0}{L}.$$

Entriamo ora nel merito della questione *scottante*: cosa potrebbe mai succedere se $v = c$? A questo punto, però, dobbiamo essere *estremamente cauti* con le interpretazioni fisiche. Infatti, se rifiutassimo di seguire il consiglio appena dato, potremmo facilmente cadere in affermazioni simili:

“At the speed of light length would become 0, destroying three-dimensional space.”

Robert Jansen, Barron’s SAT Subject Test Physics, p.427

Ora, tralasciando la non specificata modalità secondo la quale lo spazio si potrebbe di-struggere, una domanda sorge spontanea: *ha senso* considerare velocità pari o addirittura superiori a c ? Ritengo che la risposta a questa domanda sia un chiaro **no**: il fattore di Lorentz è stato costruito assumendo che il referenziale dell’interferometro si muova a velocità *sempre* minore di c e *mai* uguale o superiore. Infatti, se ciò fosse il caso, non avremmo più un triangolo rettangolo (si ricordi figura 2.4) e quindi non avremmo nemmeno le relazioni (2.2) e (2.3)! Viste queste considerazioni, reputo che affermazioni quali *il tempo si ferma*, *il tempo cambia verso* oppure *lo spazio collassa* siano del tutto prive di senso in virtù del fatto che anche le domande stesse che le hanno scatenate sono prive di fondamento logico¹⁰.

Riassumendo Sono stati esposti i due postulati fondamentali, formulati da Albert Einstein, su cui costruire la teoria della relatività ristretta. Essi sembrano incoerenti, ma soltanto se osservati con gli antichi occhi della meccanica classica. Come conseguenza dei due postulati si è scoperto che le distanze spaziali non sono invarianti ma si contraggono, qualora vengano misurate parallelamente alla direzione di marcia del referenziale scelto. Anche gli intervalli spaziali si vedono dilatati se sono misurati secondo le regole scelte in precedenza. Per basse velocità, come ce lo aspetteremmo visto che la meccanica classica risulta *sempre e comunque* verificata sperimentalmente per le basse velocità, le formule relativistiche convergono a quelle della meccanica classica. La ragione di tale convergenza può essere attribuita al fattore di Lorentz che si riduce a 1 per $v \rightarrow 0$.

⁹Laddove i tempi si accorciano gli spazi si allungano, mentre laddove i tempi si allungano gli spazi si accorciano.

¹⁰Ovviamente si intende la logica di questo LAM e quindi della teoria della relatività ristretta. Potrebbero tuttavia esistere altre teorie fisiche in cui queste domande avrebbero una base giustificabile.

Capitolo 3

Uno sguardo più approfondito

3.1 Trasformazioni di Lorentz

“La gente non si rende conto di quale grande influenza abbia avuto Lorentz sullo sviluppo della fisica. Non possiamo immaginare come sarebbe andata se egli non avesse dato tanti contributi impareggiabili.”

Albert Einstein

3.1.1 Caso standard

La meccanica classica dispone delle trasformazioni di Galileo: esse si fondono sul principio di relatività galileiana. Tali trasformazioni, però, si vedono violate nella teoria della relatività ristretta. Abbiamo quindi bisogno di nuove trasformazioni che rispettino i due postulati e che si riducano, per il limite $v \rightarrow 0$, alle usuali trasformazioni galileiane.

Per giungere a questa nuova trasformazione dobbiamo tenere conto degli effetti della dilatazione del tempo e della contrazione delle lunghezze: questi fenomeni costituiscono i punti di partenza della dimostrazione seguente, di mia invenzione.

Immaginiamoci, come illustrato in figura 3.1, due referenziali, S e S' , al tempo arbitrario $t = t' = 0$ aventi origine coincidente e supponiamo che essi si allontanino tra loro con una velocità v (che consideriamo **un numero positivo per qualsiasi osservatore**) lungo i loro assi Ox (le loro basi, ortonormali, sono identiche): tale scenario, che riprenderemo più volte in questo LAM e che pertanto daremo (salvo dove specificamente segnato) per scontato, viene chiamato **configurazione standard**.

Immaginiamoci ora di dover esprimere un evento E visto da S' disponendo soltanto dei dati misurati da S : visto che per S lo spazio di S' si contrae e visto che per S , dopo un certo tempo t , S' si sposta positivamente di uno certo spazio vt (per S la velocità v ha infatti verso positivo), possiamo scrivere:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt$$

$$x' = \gamma(x - vt).$$

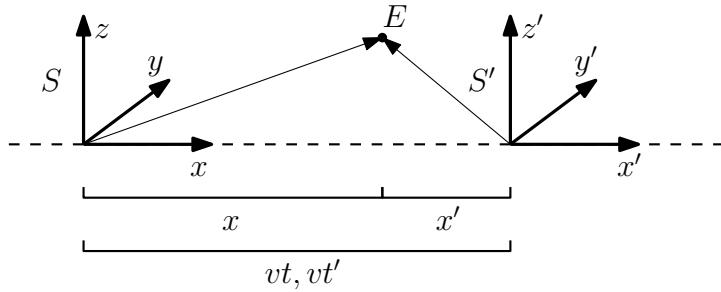


Figura 3.1. Configurazione standard.

Ora, ed è qui il punto *cruciale* di questa dimostrazione, per il primo postulato la precedente relazione deve valere anche per S avendo questa volta i dati di S' . Infatti, in un tempo t' , S si vedrà spostarsi negativamente di uno spazio vt' e lo spazio di S risulterà contratto esattamente come prima. Unica differenza dal primo calcolo sarà il segno che poniamo di fronte a v dato che S si allontanerà appunto nel verso negativo dell'asse Ox . La velocità v , per il principio di relatività, risulterà invariante.

$$x' = \frac{x}{\gamma} - vt'$$

$$x = \gamma(x' + vt').$$

Disponiamo ora delle trasformazioni spaziali degli eventi dipendenti dalle variabili x , x' , t e t' : ci manca solo la trasformazione temporale! Immaginiamo, di tutti questi quattro numeri, di ignorare il valore di t' e x' : se vogliamo determinare quello di t' (x' si trova immediatamente impiegando la trasformazione spaziale), essendo le due trasformazioni necessariamente contemporaneamente sempre vere, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

Esplicitiamo rispetto a x' il secondo ramo:

$$\gamma(x - vt) = \frac{x}{\gamma} - vt'.$$

Ricaviamo t' :

$$t' = \frac{x}{v\gamma} - \frac{\gamma x}{v} + \frac{v\gamma t}{v} = \gamma \left(\frac{x}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{x}{v} + t \right) = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right).$$

Abbiamo forse dimenticato le coordinate y e z in tutto questo? Visto che la contrazione delle lunghezze si verifica soltanto nella direzione del moto ed essendo la base ortonormale (implicando quindi la perpendicolarità di Oy e Oz rispetto a Ox) concludiamo che:

$$y' = y \quad , \quad z' = z.$$

Disponiamo ora di tutti gli elementi per formulare la **trasformazione di Lorentz**:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.1)$$

Si noti il segno negativo posto davanti a v : se dovessimo ricavare t , x , y e z da t' , x' , y' e z' , per il principio di relatività la struttura della trasformazione rimarrebbe la stessa se non per quel segno, che in tal caso diventerebbe positivo, poiché abbiamo supposto v sempre positivo per qualsiasi osservatore. Infatti un allontanamento di S visto da S' risulterebbe in una velocità negativa, ossia una v positiva dotata di segno negativo, in accordo con la convenzione $v > 0$.

Esattamente come le trasformazioni di Galileo anche le trasformazioni di Lorentz risultano lineari (la dimostrazione, essendo banale, è lasciata al lettore), pertanto ci diamo ora il compito di determinare la matrice di trasformazione Λ_x associata alle stesse (ho posto l'indice x per sottolineare la validità di questa trasformazione esclusivamente nelle modalità della configurazione standard). Al fine di semplificare la formulazione della matrice decidiamo d'ora in avanti di *codificare* l'informazione del tempo degli eventi non più semplicemente come t ma come ct . Infatti, attuando questa *piccola* modifica¹, le trasformazioni diventano

$$\begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma \beta x \\ x' = -\gamma \beta ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

e pertanto diventa facilissimo determinare la forma matriciale della trasformazione:

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Quindi le trasformazioni degli eventi si svolgeranno secondo il prodotto fra matrici:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Lambda_x(v) \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

¹Ma ricchissima di significato fisico come vedremo più tardi.

3.1.2 Caso generale

La precedente trasformazione di Lorentz è stata ricavata basandosi sulla configurazione standard: se *praticamente tutte* le situazioni che possiamo incontrare in natura seguono tale disposizione, è innegabile la sensazione di incompletezza del nostro lavoro dal momento che Λ_x , in virtù dell'indice x , non rappresenta il *caso generale*. Notare infatti come $\Lambda_x(v)$ è funzione di v : non vi è necessità di impiegare \vec{v} dal momento che il moto è unidimensionale lungo Ox ovvero *limitato nella sua libertà!*

Ipotizziamo dunque una configurazione più generale di quella standard: manteniamo a $t = t' = 0$ le origini comuni dei due referenziali e ovviamente la medesima base ortonormale per S e S' . Vorrei attirare l'attenzione del lettore sulla constatazione seguente: **le contrazioni delle lunghezze si svolgono sempre e comunque nel verso del moto** [22].

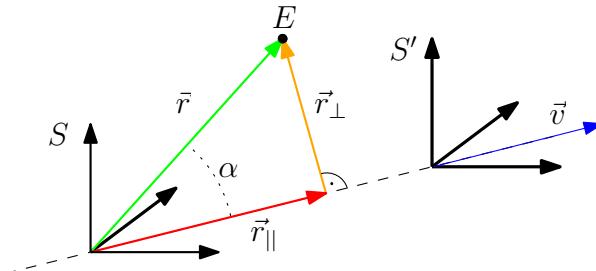


Figura 3.2. Configurazione generale.

Sia E un evento osservato alla posizione \vec{r} nel tempo t secondo l'osservatore solidale con S . Riscriviamo il vettore posizione nel seguente modo:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}.$$

Il parallelismo e la perpendicolarità sono riferite rispetto al vettore \vec{v} osservato sempre da S . Le usuali trasformazioni di Lorentz valgono soltanto per \vec{r}_{\parallel} , parallelo al moto del referenziale [22]:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{r}_{\parallel}\|}{c^2} \right) \\ \vec{r}' = \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t) + \vec{r}_{\perp} \end{cases}$$

Nell'ultimo ramo, infatti, \vec{r}' si vede sommato \vec{r}_{\perp} senza ulteriori trasformazioni di quest'ultimo dal momento che esso è perpendicolare a \vec{v} . Qui γ è funzione di $\|\vec{v}\|$. Ma avere nelle nostre formule \vec{r}_{\parallel} e \vec{r}_{\perp} non ci aiuta affatto dal punto di vista matematico dal momento che alla fine dovremo comunque ricavarli in un qualche modo. Vale quindi la pena di esprimere questi ultimi due in funzione di altri vettori noti, ad esempio \vec{v} e \vec{r} stesso. Se \vec{r}_{\parallel} è parallelo a \vec{v} allora è possibile esprimere in funzione di \vec{v} normalizzando quest'ultimo e moltiplicandolo per il modulo di \vec{r}_{\parallel} :

$$\vec{r}_{\parallel} = \|\vec{r}_{\parallel}\| \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\vec{v}^2}.$$

Infatti, per la definizione di prodotto scalare in V_3 , si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\|\vec{r}_\parallel\| = \|\vec{r}\| \cdot \cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\|\vec{v}\|}.$$

Sviluppiamo ora le due equazioni del sistema in modo da poter sostituire eventuali $\|\vec{r}_\parallel\|$ con il risultato appena trovato:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \gamma \vec{r}_\parallel - \gamma t \vec{v} + (\vec{r} - \vec{r}_\parallel) = \vec{v} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\vec{v}^2} (\gamma - 1) - \gamma t \vec{v} + \vec{r} = \vec{r} + \vec{v} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\vec{v}^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\|\vec{v}\|}{c^2} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\|\vec{v}\|} \right) = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Pertanto, si ottengono le **trasformazioni di Lorentz generali** [22]:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \\ \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\vec{v}^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Vogliamo ora, esattamente come prima, determinare la matrice di trasformazione associata a questo sistema. Espandiamo il primo ramo e, all'occasione, moltiplichiamo sia a destra che a sinistra per c in modo da codificare il tempo dentro ct :

$$ct' = \gamma \left(ct - \left(\frac{xv_x}{c} + \frac{yv_y}{c} + \frac{zv_z}{c} \right) \right),$$

da cui risulta chiarissimo che la prima riga della matrice sarà:

$$\{\gamma \quad -\gamma\beta_x \quad -\gamma\beta_y \quad -\gamma\beta_z\}.$$

Analizziamo ora la trasformazione della componente x del vettore \vec{r} : per le componenti y e z basterà ripetere il ragionamento attuando le dovute modifiche. Si ha:

$$\begin{aligned} x' &= x + v_x \left(\frac{xv_x + yv_y + zv_z}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{ct}{c} \right) \\ &= x + \left(\left(x \frac{v_x^2}{v^2} + y \frac{v_x v_y}{v^2} + z \frac{v_x v_z}{v^2} \right) (\gamma - 1) - \gamma v_x \frac{ct}{c} \right) \cdot \frac{c^2}{c^2} \\ &= x + \left(x \frac{\beta_x^2}{\beta^2} + y \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} + z \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} \right) (\gamma - 1) - \gamma \beta_x ct. \end{aligned}$$

La moltiplicazione per $c^2/c^2 = 1$ ha per solo scopo di introdurre i vari fattori β che alleggeriscono la scrittura. Da ciò risulta che la seconda riga della matrice sarà:

$$\left\{ -\gamma\beta_x \quad 1 + \frac{\beta_x^2}{\beta^2}(\gamma - 1) \quad \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2}(\gamma - 1) \quad \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2}(\gamma - 1) \right\}.$$

E quindi, dopo aver ripetuto la procedura anche per le componenti y e z , si arriva alla forma matriciale:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{\beta_x^2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma\beta_y & \frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{\beta_y^2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma\beta_z & \frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta^2}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La formulazione matriciale è quindi la seguente:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Lambda(\vec{v}) \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3.1.3 Conseguenze della trasformazione di Lorentz

Risulta *estremamente* interessante la presenza di valori spaziali e temporali nel calcolo di x' e, contrariamente alle trasformazioni galileiane, *anche* nel calcolo di t' : **spazi e tempi si influenzano a vicenda** [3] e pertanto le posizioni sia spaziali sia temporali degli eventi sono influenzate con la medesima forza sia dagli spazi sia dai tempi misurati. Questo fatto è *straordinario*: il tempo non è più un parametro universale su cui tutti gli osservatori concordano, ma diventa **una coordinata relativa influenzata dal moto del referenziale in cui essa è misurata**. Nella trasformazione di Lorentz gli spazi x' e tempi t' appaiono *intrinsecamente* determinati dai rispettivi x e t [1]: tra spazio e tempo esiste un *intimo legame* in precedenza completamente ignorato! Per questo motivo, dalla teoria della relatività ristretta in poi, i fisici non parleranno più di spazio e tempo separatamente ma inizieranno ad adottare una *nuova concezione* del nostro Universo ossia lo **spaziotempo** [3].

Di fronte a tutte queste considerazioni urgono alcune *pesanti* modifiche alle definizioni date nella meccanica classica.

Spaziotempo di Minkowski Modello dell'Universo proposto nel 1907 dal matematico lituano Hermann Minkowski. Si tratta di uno spazio vettoriale quadridimensionale M_4 che, contrariamente al precedente modello in V_3 , considera il tempo come una **coordinata spaziotemporale** e non come parametro reale. Questa dimensione temporale, sebbene molto simile alle altre 3 spaziali, risulterà privilegiata nel senso e nei modi che vedremo in seguito. I vettori di questo spazio vettoriale sono chiamati **quadrivettori** o **tetravettori** poiché formati da 4 componenti (1 temporale e 3 spaziali) se si considera lo spaziotempo quadridimensionale². Si faccia attenzione a non considerare V_3 come obsoleto rispetto a M_4 : il nostro Universo visto *in un particolare istante di tempo* rimane V_3 ! Possiamo immaginarci M_4 come una sorta di *collezione* di infiniti V_3 ordinati secondo il loro specifico

²In questo LAM capiterà di chiamare quadrivettori anche vettori composti da due o tre componenti: questo perché si vuole precisare che appartengono ad uno spaziotempo di Minkowski M_2 o M_3 .

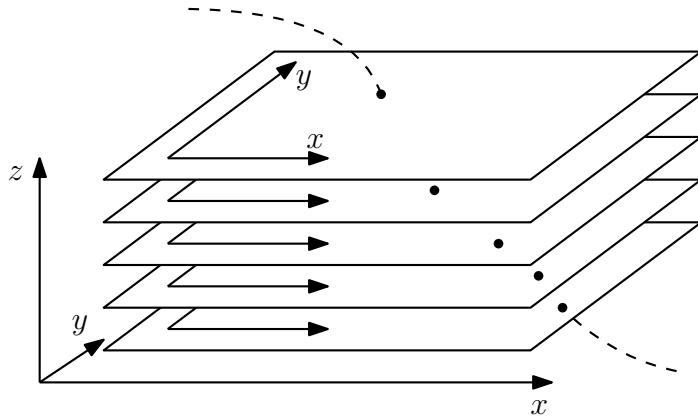


Figura 3.3. Una possibile interpretazione di uno spaziotempo tridimensionale M_3 : per semplicità di visualizzazione trascuriamo la terza coordinata spaziale di M_4 . Perciò qui x e y rappresentano le coordinate spaziali mentre z rappresenta la coordinata temporale.

istante di tempo lungo il quarto asse di questo spazio quadridimensionale. Forse risulta più facile la comprensione del concetto con l'analogia illustrata in figura 3.3: immaginiamoci una serie di fotografie (ossia di punti (x, y) in V_2) poste una sopra l'altra secondo l'ordine (quindi il tempo) di scatto z . Questo plico di fotografie formerà un solido i cui punti (x, y, z) appartengono ad un certo spazio V_3 . Per ipotetici abitanti di V_2 risulterà estremamente difficile concepire l'idea di uno spazio V_3 dal momento che per loro il mutare di z si manifesta soltanto sui loro orologi e non certo allo stesso modo di x o y : noi stiamo vivendo questa identica situazione con la coordinata spaziotemporale t .

Evento Un punto dello spaziotempo, matematizzato dal quadrivettore

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

dove x_0 è detta **componente temporale**, mentre x_1, x_2 e x_3 **componenti spaziali**. La coordinata temporale $x_0 = ct$ contiene t arbitrariamente moltiplicato per c , dato che si vuole semplificare i futuri calcoli e permettere una migliore rappresentazione grafica dello spaziotempo, qualora questo fosse di dimensione inferiore a 4 (rinunciando nel processo ad una coordinata spaziale).

Linea d'universo Curva composta da un insieme di punti dello spaziotempo. Qualsiasi moto (anche quello stazionario) di un corpo può essere rappresentato mediante una linea d'universo. Generalmente i punti di questa curva (che può anche essere una linea) sono espressi dalla funzione $\vec{R}(k)$ dove k è, contrariamente alla situazione della traiettoria in meccanica classica, un parametro arbitrario **privo di significato fisico** (un esempio è illustrato in figura 3.4). In fisica è comunque consuetudine scegliere k in modo che coincida con il λ del corpo di cui vogliamo matematizzare il moto. In tal caso quest'ultimo risulta **parametrizzato rispetto al tempo proprio del corpo in movimento**. Questa scelta,

inoltre, permette di stabilire univocamente le posizioni spaziotemporali visto che λ è un **invariante relativistico**.

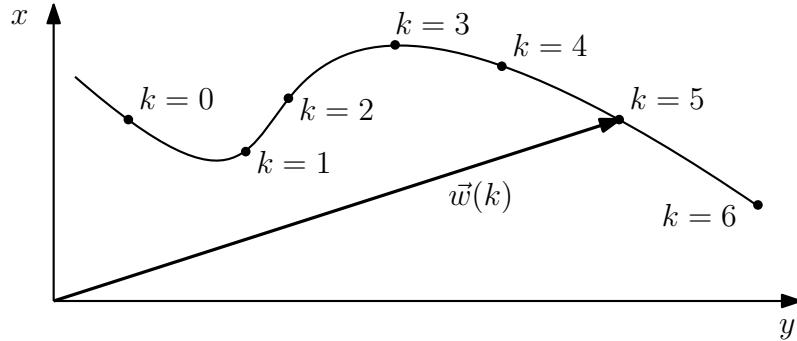


Figura 3.4. Il concetto di parametrizzazione. Non si tratta di una linea d'universo bensì di una curva matematica priva di significato fisico, così come il parametro reale k . Ad ogni punto $\vec{w}(k)$ della curva è assegnato un valore k esattamente come ad ogni punto della linea d'universo è assegnato un λ : mentre il primo è totalmente arbitrario il secondo è limitato ad appunto seguire il tempo proprio dell'eventuale corpo in movimento lungo la detta linea d'universo.

Intervallo spaziotemporale La *pseudo norma* di un quadrivettore $\Delta\vec{R}$ definita da:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{x_0^2 - \sum_{i=1}^3 x_i^2} = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Infatti l'intervallo spaziotemporale

$$\|\Delta\vec{R}\| = s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

non può essere rigorosamente chiamato *norma* dal momento che non soddisfa gli assiomi scelti durante la sua definizione. Notare come la componente temporale risulta *privilegiata* nel segno positivo. In questo LAM ho operato due scelte importanti degne di essere notate:

- La pseudo norma segue la **convenzione della fisica delle particelle** ossia la sua *segnatura* è $(+, -, -, -)$. Risulta comunque possibile costruire una teoria della relatività ristretta anche con la segnatura $(-, +, +, +)$ ma ho deciso di impiegare la prima poiché permette in genere di ottenere risultati positivi (nel senso matematico).
- La pseudo norma è elevata al quadrato. Infatti ho deciso di non porla sotto radice per evitare, dal momento che essa **può assumere valori negativi**, di dover trattare *numeri complessi* privi di significato fisico immediato.

La pseudo norma di un quadrivettore è un **invariante relativistico** e possiamo dimostrarlo molto facilmente nella configurazione standard. Sia

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{R}' = \Lambda_x \cdot \vec{R} = \begin{bmatrix} \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

allora si ha

$$\begin{aligned}\|\vec{R}'\| &= \gamma^2(x_0 - \beta x_1)^2 - \gamma^2(x_1 - \beta x_0)^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ &= \gamma^2(x_0^2 + \beta^2 x_1^2 - 2x_0 x_1 \beta - x_1^2 - \beta^2 x_0^2 + 2x_1 x_0 \beta) - x_2^2 - x_3^2 \\ &= \gamma^2(x_0^2 - x_1^2)(1 - \beta^2) - x_2^2 - x_3^2 \\ &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \|\vec{R}\|.\end{aligned}$$

D'altronde questo fatto non dovrebbe troppo sorprenderci. Il secondo postulato afferma che c è una costante fisica e se dovessimo calcolarla a partire dalle posizioni finali ed iniziali di un fascio di luce avremmo

$$c = \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t},$$

che non è nient'altro che l'intervallo spaziotemporale $s^2 = 0$ scritto in modo diverso [2].

Prodotto scalare spaziotemporale Il *pseudo prodotto scalare* definito da:

$$\langle \vec{U}; \vec{V} \rangle = U_0 V_0 - \sum_{i=1}^3 (U_i V_i).$$

In base a questa definizione il concetto geometrico di *ortogonalità* tra due quadrievettori in M_4 risulta pertanto *completamente* diverso da quello in V_3 , a patto di continuare ad impiegare il prodotto scalare nullo come fattore determinante dell'ortogonalità.

Anche il pseudo prodotto scalare risulta in un **invariante relativistico**. Siano definiti

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo il loro pseudo prodotto scalare:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_0 u_0 - v_1 u_1 - v_2 u_2 - v_3 u_3.$$

Trasformiamoli separatamente secondo la configurazione standard:

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} \gamma(v_0 - v_1 \beta) \\ \gamma(v_1 - v_0 \beta) \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}' = \begin{bmatrix} \gamma(u_0 - u_1 \beta) \\ \gamma(u_1 - u_0 \beta) \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo infine il loro pseudo prodotto scalare:

$$\begin{aligned}\vec{v}' \cdot \vec{u}' &= \gamma^2 ((v_0 - v_1 \beta)(u_0 - u_1 \beta) - (v_1 - v_0 \beta)(u_1 - u_0 \beta)) - v_2 u_2 - v_3 u_3 \\ &= \gamma^2 (v_0 u_0 + v_1 u_1 \beta^2 - v_1 u_1 - v_0 v_0 \beta^2) - v_2 u_2 - v_3 u_3 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (v_0 u_0 - v_1 u_1) - v_2 u_2 - v_3 u_3 \\ &= v_0 u_0 - v_1 u_1 - v_2 u_2 - v_3 u_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}.\end{aligned}$$

3.1.4 Relatività della simultaneità

Molti libri di testo, tra cui quelli che ho impiegato per documentarmi (vedi [1, 2, 3]), introducono questo argomento *il più presto possibile*, addirittura prima ancora di aver approfondito concetti indispensabili come l'osservatore solidale ad un referenziale inerziale. In questo LAM ho deciso di trattare la simultaneità degli eventi dopo la trasformazione di Lorentz, dal momento che quest'ultima permette di meglio comprendere *perché e sotto quali condizioni se per un osservatore due eventi risultano temporalmente simultanei ciò non implica necessariamente che lo siano anche per tutti gli altri* [3], come invece avveniva in meccanica classica (essendo il tempo assoluto), rendendo quindi di fatto la simultaneità *relativa*. Inoltre, operando questa scelta, vorrei rendere chiaro il fatto che la rottura della simultaneità assoluta è *una conseguenza* delle trasformazioni di Lorentz e quindi della teoria della relatività ristretta, non *un punto di partenza* come si potrebbe (a mio avviso) erroneamente interpretare. Impiegheremo l'usuale configurazione standard per mettere in evidenza quanto appena enunciato.

Siano E_1 e E_2 due eventi visti da S accadere simultaneamente entrambi alle stesse coordinate spaziali: anche senza scomodare la matrice Λ_x concludiamo che, essendo sostanzialmente $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$, allora qualsiasi siano le loro componenti, $\vec{E}'_1 = \vec{E}'_2$ e pertanto, essendo sia le componenti temporali che quelle spaziali dei quadrivettori identiche, anche per S' i due eventi E_1 e E_2 risultano simultanei. In questo caso calcoliamo che l'intervallo spaziotemporale³ $\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|$ è nullo ossia $s^2 = 0$: i quadrivettori $\Delta\vec{R}$ aventi pseudo norma nulla sono detti **di tipo luce** (o **light-like**).

Siano ora E_1 e E_2 visti da S simultaneamente ma questa volta in posizioni spaziali diverse $x_1 < x_2$ (per semplicità di calcolo manteniamo $\Delta y = \Delta z = 0$) [3]. Proviamo a calcolare le coordinate spaziotemporali osservate da S' di questi stessi eventi:

$$\begin{bmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} = \Lambda_x \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(ct - \beta x_1) \\ \gamma(x_1 - \beta ct) \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \Lambda_x \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x_2 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(ct - \beta x_2) \\ \gamma(x_2 - \beta ct) \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Se confrontiamo t'_1 e t'_2 notiamo che effettivamente, essendo $x_1 \neq x_2$, allora anche $t_1 \neq t_2$, confermando la **rottura della simultaneità temporale** in S' rispetto a S . Si noti come la *sequenza temporale* (chi accade *prima* e chi *dopo*) degli eventi E_1 e E_2 dipende da β mentre quella spaziale (chi è a *destra* e chi a *sinistra* lungo Ox) non è dipendente da β : se tra due eventi sussiste questa relazione di ordine spaziotemporale allora si dice che $\Delta\vec{R}$ è un quadrivettore **di tipo spazio** (o **space-like**) poiché gli ordini spaziali sono mantenuti in qualsiasi caso (qualsiasi β). Questi quadrivettori sono matematicamente distinti dal fatto che la loro pseudo norma risulta sempre $s^2 < 0$.

Infine siano E_1 e E_2 visti da S alla stessa posizione ma in tempi diversi $t_1 < t_2$. Ripetendo in modo analogo calcoli precedenti otteniamo:

$$\begin{bmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} = \Lambda_x \cdot \begin{bmatrix} ct_1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(ct_1 - \beta x) \\ \gamma(x - \beta ct_1) \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \Lambda_x \cdot \begin{bmatrix} ct_2 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(ct_2 - \beta x) \\ \gamma(x - \beta ct_2) \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

³Ricordo che si tratta di una grandezza invariante e pertanto non dobbiamo specificare *rispetto a che osservatore* è calcolata.

In questo caso notiamo che l'ordine spaziale dipende da β diversamente da quello temporale che rimane fisso. I quadrivettori $\Delta \vec{R}$ che rispettano queste condizioni sono detti **di tipo tempo** (o **time-like**) e si ha sempre $s^2 > 0$.

3.1.5 Cono di luce

Le tre categorie di quadrivettori appena enunciate, ossia

- **time-like** avente pseudo norma $s^2 > 0$,
- **space-like** avente pseudo norma $s^2 < 0$,
- **light-like** avente pseudo norma $s^2 = 0$,

possono essere visualizzate molto chiaramente nell'ambito dei così detti *diagrammi spazio-temporali* ed assumono un significato fisico estremamente interessante per quanto riguarda le *relazioni di causalità* tra eventi. Più in avanti in questo LAM impareremo a disegnare i diagrammi di *Minkowski* e di *Loedel*, capaci di rappresentare graficamente in modo assai elegante la trasformazione di Lorentz: per i fini che vogliamo raggiungere ora, però, tali strumenti non sono richiesti.

Per le nostre considerazioni limitiamoci pure ad uno spaziotempo bidimensionale ossia a quadrivettori composti da una coordinata temporale e una spaziale. In un riferimento cartesiano poniamo arbitrariamente⁴ l'asse dei tempi Oy e quello degli spazi Ox : ogni punto del piano, che rappresenta l'intero spaziotempo, diventa un particolare evento di coordinate (ct, x) o se preferiamo di quadriposizione \vec{R} .

Domandiamoci ora quali relazioni di causa-effetto sussistano tra gli eventi dello spaziotempo. Dal capitolo 1.1 sappiamo che in fisica vale un principio di *fondamentale* importanza ossia il **principio di causalità**: se ora lo combiniamo con il secondo postulato della relatività ristretta deduciamo immediatamente che l'**informazione della causa non può viaggiare a velocità superiori di quella della luce nel vuoto**. Pertanto, tra due eventi distinti dello spaziotempo può⁵ sussistere una relazione di causa-effetto *se e solo se* la linea d'universo rettilinea che congiunge l'evento *effetto* da quello *causa* ha una pendenza in valore assoluto maggiore o uguale a 1 ossia l'informazione della causa rispetta il secondo postulato della relatività ristretta⁶. Tutte le infinite linee d'universo aventi coefficiente angolare $m \geq 1$ e passanti per l'evento causa descrivono una *regione di spaziotempo* che chiameremo **cono di luce** poiché nel caso in cui facessimo roteare l'intero piano attorno all'asse dei tempi otterremmo un cono nello spazio tridimensionale⁷ esattamente come otterremo un **piano del presente** laddove abbiamo l'asse degli spazi [2].

Con l'aiuto di figura 3.5 analizziamo ora da più vicino il cono di luce relativo all'evento *origine* O ossia l'unico evento avente coordinate spaziotemporali $(0, 0)$ nel referenziale scelto. Il lettore è pregato di notare che da un punto di vista fisico non vi è *assolutamente nulla* di speciale in O ed infatti tutte le considerazioni che ci apprestiamo a fare su di esso

⁴Nel capitolo 3.3 le ragioni di tale scelta appariranno più chiare.

⁵Non deve esistere necessariamente.

⁶Infatti, essendo l'asse dei tempi scalato di un fattore c , le linee d'universo dei fasci luminosi sono rette di pendenza 1: in un tempo t la luce percorre uno spazio ct cioè esattamente la coordinata temporale ct .

⁷Cosa che non farò ora essendomi limitato ad uno spaziotempo bidimensionale.

sono (e *devono*) essere applicabili a tutti gli eventi dello spaziotempo. O può influenzare tutti gli eventi compresi nella porzione superiore del suo cono di luce chiamato **futuro dell'evento** O , mentre O potrebbe essere stato influenzato da tutti gli eventi compresi nella porzione inferiore chiamata **passato dell'evento** O [2]. Tutte le linee d'universo (anche curve) passanti per O devono mantenere per ogni retta tangente ad ogni loro punto un coefficiente angolare superiore (se rappresentano il moto di un corpo massivo) o al massimo equivalente (se rappresentano la propagazione di un fascio luminoso) a 1 e pertanto ne consegue che **devono essere comprese nel cono di luce**. Tutti gli altri eventi, presenti nell'**altrove**, non possono né venir influenzati da O né influenzarlo.

Così, ad esempio, l'evento A (di cui è illustrato il rispettivo cono di luce) potrà causalmente influenzare nel suo futuro O , D e C ma non B , che si trova nel suo altrove. D'altro canto D potrà essere influenzato da B ma non da C : comprendiamo perfettamente l'*incredibile* potenza di questo strumento grafico!

E i quadrivettori in tutto questo? Forse dalla loro nomenclatura il lettore avrà già intuito dove vogliamo arrivare. L'intervallo spaziotemporale s^2 tra due eventi in questo caso si calcola sottraendo il quadrato di ct a quello di x , pertanto il segno di s^2 sarà determinato dal valore di ct e x : qualora $ct > x$ avremo $s^2 > 0$, se $ct < x$ avremo $s^2 < 0$ mentre nel caso speciale $ct = x$ si avrà $s^2 = 0$. Pertanto, dati due eventi E_1 e E_2 descritti da \vec{R}_1 e \vec{R}_2 , calcolando il quadrivettore $\Delta\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ deduciamo che:

- E_1 e E_2 possono essere legati causalmente se e solo se $\Delta\vec{R}$ è un quadrivettore di tipo **tempo** o di tipo **luce**;
- Ne consegue logicamente che E_1 e E_2 non possono essere in alcun modo legati causalmente se $\Delta\vec{R}$ è di tipo **spazio**;
- E_1 e E_2 possono appartenere ad una medesima linea d'universo di un corpo massivo se e solo se $\Delta\vec{R}$ è di tipo **tempo**;
- E_1 e E_2 possono appartenere ad una medesima linea d'universo di un fotone se e solo se $\Delta\vec{R}$ è di tipo **luce**;
- E_1 e E_2 possono essere simultanei se e solo se $\Delta\vec{R}$ è di tipo **spazio**.

Come ultima considerazione è interessante notare come il *tipo* di quadrivettore sia un invariante relativistico essendo associato a s^2 appunto invariante sotto trasformazione di Lorentz. In particolare, la simultaneità di E_1 e E_2 è *garantita* in un (ed *uno solo*) referenziale qualora essi sono separati da un $s^2 < 0$.

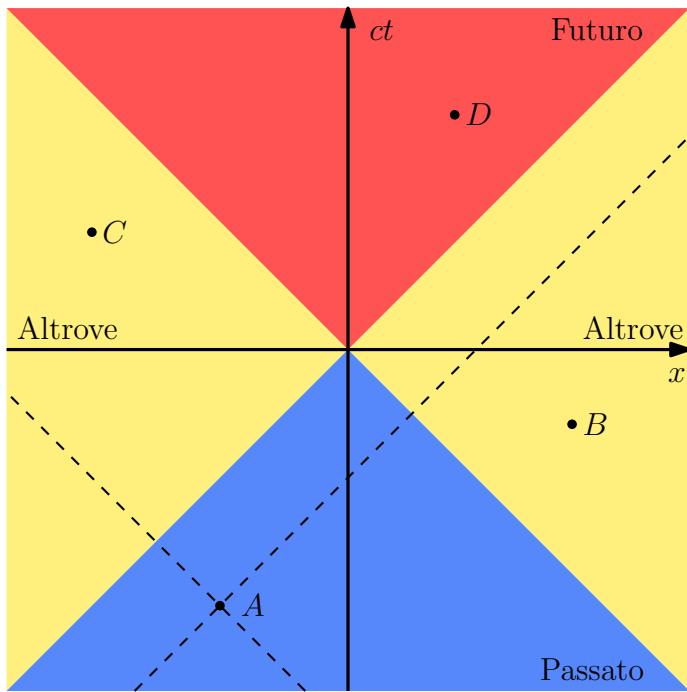


Figura 3.5. Cono di luce dell'evento O e regioni relative a quest'ultimo dello spaziotempo.

3.1.6 Evidenza sperimentale: effetto Doppler relativistico

La luce può essere interpretata come fenomeno ondulatorio e pertanto essa mostra similitudini con altri fenomeni ondulatori, quali ad esempio la propagazione del suono nell'aria. La propagazione delle onde sonore (che sono *sferiche e longitudinali*) avviene all'interno di un mezzo, ovvero l'atmosfera terrestre: l'**effetto Doppler** classico si verifica qualora un osservatore o la sorgente sonora si mette in moto uniforme relativamente al detto mezzo. L'osservatore constaterà l'*apparente* mutare della frequenza oppure della lunghezza d'onda delle onde sonore emesse dalla sorgente. Per le onde luminose abbiamo l'**effetto Doppler relativistico** che, a differenza di quello classico, non si basa sul moto relativo ad un mezzo (il candidato ideale sarebbe l'*etere* ma abbiamo già visto in precedenza che esso sembra non *esistere*) bensì sull'effetto della dilatazione del tempo tra il referenziale solidale con la sorgente e quello solidale con l'osservatore. Per entrambi i fenomeni impiegheremo la configurazione standard, vale a dire che il moto tra la sorgente e l'osservatore si svolge lungo una retta, così come la propagazione delle onde sonore e luminose.

Effetto Doppler classico

Prima di iniziare rammentiamo la legge fondamentale $f \cdot \lambda = v$ dove v indica la *velocità di propagazione* delle onde nel mezzo considerato, f la loro *frequenza* e λ la loro *lunghezza d'onda*. Sia O il referenziale dell'osservatore, S quello della sorgente, M quello del mezzo. Esistono in totale tre possibili casi fisicamente verificabili:

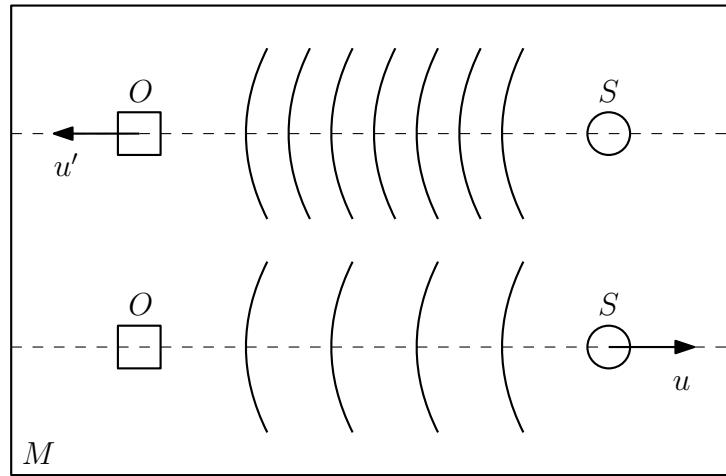


Figura 3.6. Le prime due situazioni. Nel primo caso O si muove con velocità u' relativamente a M ed a S , immobile rispetto a M . Nel secondo caso S si muove con velocità u relativamente a M ed a O , immobile rispetto a M . Sono illustrati alcuni fronti d'onda.

- O si muove rispetto a M e S è in quiete secondo M ;
- S si muove rispetto a M e O è in quiete secondo M ;
- S si muove rispetto a M e O si muove rispetto a M .

Possiamo andare ad analizzare i primi due casi, rappresentati in figura 3.6, per poi unificarli in modo da ottenere il terzo. Contrariamente alla prassi comune in questo LAM, per questioni di coerenza logica, come vedremo meglio in seguito, il significato del segno positivo della velocità rispetto a M di O (cioè u') e S (ossia u) è da intendersi come *allontanamento* e non come *avvicinamento*. Impiegherò gli indici s e o per indicare grandezze misurate rispetto alla sorgente S e all'osservatore O .

Primo caso La sorgente è ferma nel mezzo, pertanto è chiarissimo che $\lambda_s = \lambda_o$. Dato il principio di relatività O vedrà S allontanarsi con una velocità u' . Applicando la legge di composizione delle velocità classica ricaviamo che, sempre per O , la velocità delle onde sonore risulterà $v_o = v - u'$. Allora, la legge fondamentale delle onde risulterà:

$$f_o = \frac{v_o}{\lambda_o} = \frac{v_o}{\lambda_s} = f_s \frac{v - u'}{v}.$$

Secondo caso Per O , essendo in quiete secondo M , la propagazione delle onde avviene alla normale velocità v . La sorgente S emette le onde con una frequenza $f_s = 1/t_s$ dove t_s indica il *periodo*. In un intervallo t_s la sorgente S si allontanerà da O di una distanza ut_s , pertanto sempre per quest'ultimo si avrà $\lambda_o = \lambda_s + ut_s = t_s(v + u)$. Sostituendo nella legge fondamentale si ottiene:

$$f_o = \frac{v}{t_s(v + u)} = f_s \frac{v}{v + u}.$$

Caso generale Le due situazioni precedenti, a ben guardare, risultano casi speciali di una legge più generale in cui sia l'osservatore O sia la sorgente S si muovono rispetto al mezzo M . Se correttamente combinate si ottiene [7]:

$$f_o = f_s \frac{v - u'}{v + u} \quad (3.5)$$

Le velocità v , u e u' sono la velocità di propagazione delle onde nel mezzo M , la velocità di S rispetto a M e la velocità di O sempre rispetto a M .

Una manifestazione nella vita quotidiana dell'effetto Doppler classico è l'apparente cambiamento di frequenza della sirena di un'ambulanza. Infatti, quando questa si avvicina verso di noi (che siamo immobili rispetto all'aria), il suono che udiamo risulta nettamente più *acuto* (di frequenza maggiore) di quando questa si allontana da noi una volta che ci ha superato. Il lettore potrà chiaramente osservare l'aumento o la diminuzione di f_o nella (3.5) ponendo $u' = 0$ e facendo variare u tra $-n$, 0 e n (dove n indica un numero positivo qualsiasi).

Effetto Doppler relativistico

Passiamo ora all'analisi delle onde elettromagnetiche, vale a dire della luce. A differenza dell'effetto Doppler classico qui, per il secondo principio, tutti gli osservatori concordano con la velocità di propagazione delle dette onde ossia c . Ho ricavato due differenti dimostrazioni per questa conseguenza della relatività ristretta: sebbene la prima (adattata da [29]) risulti più corta e facile da capire, la seconda (oltre ad essere di mia invenzione) presenta maggiore rigore ed eleganza matematica, pertanto ho deciso di inserirle entrambe in questo LAM. Il lettore è gentilmente pregato di non confondere questo effetto con lo **spostamento verso il rosso cosmologico** (anche chiamato **redshift cosmologico**) poiché quest'ultimo è una conseguenza dell'espansione dell'Universo e non del moto relativo tra sorgenti ed osservatori.

Dimostrazione per dilatazione temporale Immaginiamoci di osservare la scena assieme a S . Vediamo O allontanarsi da noi con una certa velocità v e pertanto calcoliamo, malgrado anch'esso veda in realtà la luce propagarsi a velocità c , che *per noi* il tempo t trascorso tra la sua ricezione di due *fronti d'onda* risulta:

$$ct_s = t(c - v) \quad \rightarrow \quad t = \frac{ct_s}{c - v} = \frac{t_s}{1 - \beta}.$$

Possiamo scrivere $(c - v)$ solo ed esclusivamente perché i calcoli che stiamo eseguendo sono *interni* a S ossia sono basati su quanto può constatare l'osservatore posto in S . A questo punto, però, per la (2.2), sappiamo che tra t e t_o sussiste una relazione regolata da un certo fattore γ : infatti la misura di t comporta un Δx non nullo, cosa non vera per l'effettiva misura di t_o da parte di O . Allora, si ha:

$$t_o = \frac{t}{\gamma} = t_s \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = t_s \sqrt{\frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{(1 - \beta)^2}} = t_s \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Per ottenere la frequenza basta esprimere il reciproco:

$$f_o = \frac{1}{t_o} = f_s \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Dimostrazione per trasformazione di Lorentz Prima di iniziare vorrei gentilmente richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che, sfortunatamente, in questo LAM la lettera λ è già stata impiegata per parametrizzare con il tempo proprio le linee d'universo. Pertanto, in questa specifica dimostrazione, la lunghezza d'onda sarà espressa con Δx (non vi è alcun legame con la dimostrazione precedente!). Siano dunque x_1 e x_2 le posizioni di due fronti d'onda separati da un certo periodo T secondo S . Esprimendo il tutto nella notazione quadrivettoriale, considerando solo la componente spaziale x , abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{R}_1(\lambda) &= \begin{bmatrix} c\lambda \\ c\lambda \end{bmatrix} \\ \vec{R}_2(\lambda) &= \begin{bmatrix} c\lambda \\ c(\lambda - T) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Questa è la situazione vista da S . Ci interessa ora vedere cosa O misurerà, pertanto trasformiamo i quadrivettori con l'aiuto della matrice di trasformazione:

$$\begin{aligned}\vec{R}'_1(\lambda) &= \Lambda_x \cdot \vec{R}_1(\lambda) = \gamma c \lambda \begin{bmatrix} 1-\beta \\ 1-\beta \end{bmatrix} \\ \vec{R}'_2(\lambda) &= \Lambda_x \cdot \vec{R}_2(\lambda) = \gamma c \begin{bmatrix} \lambda - \beta\lambda + \beta T \\ \lambda - T - \beta\lambda \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Come si può chiaramente vedere, al contrario della situazione precedente, per uno stesso λ l'osservatore O constaterà due coordinate temporali differenti dei fronti d'onda. Dobbiamo rimediare a ciò dal momento che la lunghezza d'onda Δx , essendo una lunghezza, deve essere misurata istantaneamente, ossia l'intervallo Δt tra le posizioni dei due fronti d'onda deve essere nullo. Il nostro prossimo compito sarà quindi quello di determinare un n e m tali per cui $ct'_1(n) = ct'_2(m)$. Sia scelto n liberamente, il nostro obiettivo è ricavare $m(n)$:

$$\begin{aligned}ct'_1(n) &= ct'_2(m) \\ \gamma cn(1-\beta) &= \gamma c(m - \beta m + \beta T) \\ n(1-\beta) &= m(1-\beta) + \beta T \\ m(n) &= n - \frac{\beta T}{1-\beta}.\end{aligned}$$

A questo punto, conoscendo $m(n)$, calcoliamo le rispettive posizioni:

$$\begin{aligned}x'_1(n) &= \gamma cn(1-\beta) = \gamma n(c-v) \\ x'_2(m(n)) &= \gamma \left(c \left(n - \frac{\beta T}{1-\beta} \right) - cT - v \left(n - \frac{\beta T}{1-\beta} \right) \right).\end{aligned}$$

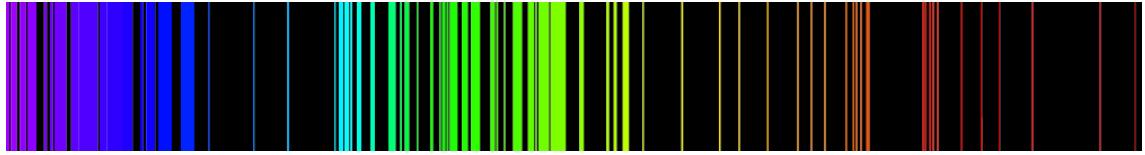


Figura 3.7. Spettro di emissione (nell'intervallo del *visibile*) dell'elemento ferro *Fe*. Fonte: *Wikimedia Commons*.

Quale sarà, dunque, il periodo T' secondo O ? Essendo sempre e comunque c la velocità della luce, basterà impiegare la definizione di velocità:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{|x'_2 - x'_1|}{c} = \gamma \left| n - \frac{\beta T}{1 - \beta} - T - \frac{vn}{c} + \frac{v\beta T}{(1 - \beta)c} - n + \frac{vn}{c} \right| \\ &= \gamma \left| \frac{-\beta T - T(1 - \beta) + \beta^2 T}{1 - \beta} \right| = \gamma \left| \frac{-T(1 - \beta^2)}{1 - \beta} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta)(1 + \beta)}} \cdot \frac{T(1 - \beta)(1 + \beta)}{1 - \beta} \\ &= T \sqrt{\frac{(1 + \beta)^2}{(1 - \beta)(1 + \beta)}} = T \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \end{aligned}$$

Qui T assume lo stesso ruolo del t_s visto in precedenza, pertanto basta ricondursi al caso precedente per ottenere l'**effetto Doppler relativistico**:

$$f_o = f_s \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (3.6)$$

I primi esperimenti atti alla verifica della (3.6) furono eseguiti dai fisici H. E. Ives e G. R. Stilwell nel 1938 [29]. Effettivamente sperimentalmente si osserva uno **spostamento verso il rosso**, ossia un aumento della lunghezza d'onda (dovuto al diminuire della frequenza) quando una sorgente luminosa si allontana dall'osservatore, mentre si osserva uno **spostamento verso il blu** ossia una diminuzione della lunghezza d'onda (dovuta all'aumentare della frequenza) quando la sorgente si avvicina all'osservatore. Si può concretamente visualizzare quanto detto nello *spostamento*, o *shift*, a destra o a sinistra delle *linee spettrali* nello *spettro di emissione* (figura 3.7) di un corpo, ad esempio di una stella in un sistemastellare binario [29]. Analizzando i dati ottenuti attraverso una spettroscopia con la (3.6) è possibile stimare la velocità orbitale di quest'ultima come in figura 3.8.

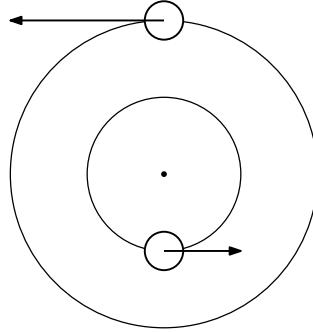


Figura 3.8. Ipotetico sistema stellare binario: in figura vi sono due stelle in orbita circolare attorno al loro *centro di massa*. Immaginando un osservatore posto in estrema lontananza verso sinistra, la stella più esterna appare all'osservatore *in avvicinamento*, mentre quella più interna *in allontanamento*.

3.1.7 Casi speciali e casi limite

Le trasformazioni di Lorentz rappresentano una generalizzazione di quelle di Galileo: se ciò è vero dovremmo essere in grado di ricavare queste ultime dalle prime facendo tendere $\beta \rightarrow 0$, ossia andando ad indagare il caso limite inferiore delle trasformazioni di Lorentz. Infatti vorrei ricordare che, per le basse velocità, le trasformazioni galileiane rappresentano un'ottima approssimazione della realtà, approssimazione talmente accurata che fu ritenuta vera per più di due secoli!

Indaghiamo dunque il caso in cui $\vec{\beta} \rightarrow \vec{0}$ dei rami di (3.3). Nella sezione riguardante l'esperimento di Michelson-Morley avevamo giustificato ed applicato l'approssimazione

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x.$$

Se ora sostituiamo x con $\beta^2 = \|\vec{\beta}\|^2$ otteniamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2.$$

Non ci resta che sostituire in (3.3) e calcolare i limiti per $\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0$: tale azione è giustificata dal fatto che $\|\vec{v}\|$ piccole rispetto a c equivalgono alle piccole x contenute in un piccolo intorno di 0, ossia laddove l'approssimazione alla prima derivata risulta accurata. Si avrà⁸:

$$\begin{aligned} t' &= \lim_{\vec{\beta} \rightarrow \vec{0}} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) \cdot \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \right] = t \\ \vec{r}' &= \lim_{\vec{\beta} \rightarrow \vec{0}} \left[\vec{r} + \vec{v} \left(\frac{\beta^2}{2} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\vec{v}^2} - t \right) - t \right) \right] = \vec{r} - \vec{v}t. \end{aligned}$$

⁸Il lettore è pregato di notare che in questo momento non sto utilizzando la definizione *rigorosa* di limite matematico: il suo impiego qui è unicamente giustificato dalla volontà di dare l'idea di un *avvicinamento indefinito* $\beta \rightarrow 0$. Resta comunque possibile utilizzare la definizione rigorosa di limite matematico e giungere ai medesimi risultati ponendo $c \rightarrow +\infty$.

Come era ragionevole ipotizzare, abbiamo confermato che **le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo per velocità prossime a zero.**

Infine, risulta interessante andare a ricavare la (2.2) e la (2.3) imponendo alle trasformazioni di Lorentz le condizioni/regole sulle quali abbiamo precedentemente ottenuto le dette leggi fisiche, che risulteranno quindi dei *casi speciali* delle trasformazioni di Lorentz. A questo scopo risulta estremamente utile riscriverle in questa forma:

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma \left(\Delta t_0 - \frac{v \Delta x_0}{c^2} \right) \\ \Delta x = \gamma (\Delta x_0 - v \Delta t_0) \end{cases}$$

Infatti, come abbiamo già potuto constatare, le trasformazioni di Lorentz sono lineari e pertanto è possibile scriverle nella forma $L(a) - L(b) = L(a - b)$.

Partiamo dalla (2.2): tale legge risultava valevole soltanto se l'orologio proprio, misurante Δt_0 , era rigidamente attaccato al suo referenziale, ossia soltanto se le due misure temporali atte a calcolare Δt_0 venivano eseguite nello stesso punto secondo l'osservatore di tale referenziale, implicando quindi un Δx_0 nullo. Inoltre si era imposto che Δt fosse determinato da orologi sincronizzati e fissi rispetto al secondo osservatore, implicando quindi una Δx non nulla. Se ora applichiamo tali osservazioni al primo ramo del sistema qui sopra ecco che otteniamo (2.2)!

Per quanto riguarda la (2.3), le regole erano le seguenti: per l'osservatore solidale al righello $L_0 = \Delta x_0$ può essere misurata anche con Δt_0 non nulli, mentre per l'altro osservatore $L = \Delta x$ doveva essere misurata simultaneamente ossia avere un Δt nullo. Sostituiamo nel sistema e *giochiamo un po' con la matematica*:

$$\begin{cases} 0 = \gamma \left(\Delta t_0 - \frac{v L_0}{c^2} \right) \\ L = \gamma (L_0 - v \Delta t_0) \end{cases}$$

$$L = \gamma \left(L_0 - v \frac{v L_0}{c^2} \right) = \gamma L_0 (1 - \beta^2) = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Riassumendo È stata ricavata la trasformazione di Lorentz sia per la configurazione standard che per il caso generale. Si è dimostrato che tale trasformazione, per velocità molto piccole, può essere approssimata da quella di Galileo così come esigono le evidenze sperimentali. Con la trasformazione di Lorentz è inoltre possibile ricavare le leggi di dilatazione temporale e contrazione spaziale precedentemente enunciate. Infine queste trasformazioni hanno imposto alcune modifiche a concetti appartenenti alla vecchia meccanica classica e hanno completamente ribaltato la modellizzazione matematica dell'Universo.

3.2 Quadrivelocità

3.2.1 Derivazione

Sia $\vec{R}(\lambda)$ la quadriposizione di un corpo al tempo proprio λ oppure al tempo $t(\lambda)$ secondo un osservatore posto in un referenziale S . Vogliamo ottenere un quadrvettore che contenga in un qualche modo l'informazione dell'ordinaria velocità \vec{v} e allo stesso tempo rendere la

sua pseudo norma invariante, come è stato il caso per \vec{R} . La prima idea che ci passa per la mente è, esattamente come nella definizione di \vec{v} , *derivare rispetto al tempo di S* [3]: ma siamo costretti ad immediatamente scartarla visto che, è noto, $t(\lambda)$ non è un'invariante relativistico, essendo appunto relativo. Se questa frase risulta difficile da capire ecco qui un semplice esempio di un corpo supposto in moto rettilineo uniforme:

$$\vec{U} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \|\vec{U}\| = \frac{1}{(\Delta t)^2} \|\Delta \vec{R}\|.$$

Noi sappiamo che $\|\Delta \vec{R}\|$ è un invariante relativistico, ma Δt non lo è affatto e pertanto una grandezza invariante moltiplicata per un'altra grandezza variante ci restituisce una grandezza complessivamente variante!

Dobbiamo quindi determinare un altro modo per ottenere le informazioni di \vec{v} in \vec{U} . A questo proposito propongo il seguente quesito: secondo che relazione $t(\lambda)$ e λ sono legate? Se il lettore è stato attento ed ha buona memoria, si ricorderà sicuramente della (2.2). Riscriviamola in una forma utile per l'immediato ragionamento:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \lambda} = \gamma.$$

Il nostro *spirito matematico* (se ne abbiamo uno) si attiverà immediatamente e ci segnalerà che si tratta di un *rappporto incrementale* e quindi, essendo $\Delta t = t(\lambda_0 + \Delta \lambda) - t(\Delta \lambda)$, è possibile scrivere:

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{t(\lambda_0 + \Delta \lambda) - t(\Delta \lambda)}{\Delta \lambda}.$$

Pertanto il fattore di Lorentz può anche essere visto come **la derivata del tempo osservato rispetto al tempo proprio**:

$$\gamma = \frac{dt}{d\lambda} \tag{3.7}$$

Si ricordi che dentro γ vi è il modulo di una \vec{v} sotto radice: anch'essa sarà funzione di λ ! Inoltre, vorrei far notare che derivare la (3.7) in questo modo

$$\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} (\gamma \lambda) = \gamma$$

è, benché si arrivi al medesimo risultato, fondamentalmente scorretto dal momento che si assume $t(\lambda) = \gamma \lambda$, cosa *in generale* non vera.

Ora, disponendo di un legame tra t e λ , procediamo con una sostituzione di funzioni ovvero definiamo una \vec{R}' tale per cui $\vec{R}'(t(\lambda)) = \vec{R}(\lambda)$. Infine non ci resta che derivare tale vettore posizione rispetto al tempo proprio λ , dal momento che esso è un invariante relativistico: così facendo la pseudo norma di \vec{U} sarà anch'essa invariante alla trasformazione di Lorentz. Procediamo con i calcoli⁹:

$$\frac{d}{d\lambda} \vec{R}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \vec{R}'(t(\lambda)) = \frac{d}{dt(\lambda)} \left[\begin{bmatrix} ct(\lambda) \\ \vec{r}'(t(\lambda)) \end{bmatrix} \right] \cdot \frac{dt(\lambda)}{d\lambda} = \begin{bmatrix} c \\ \vec{v}(\lambda) \end{bmatrix} \gamma(\lambda).$$

⁹Si noti come, mediante la sostituzione di \vec{R} , ho espressamente richiesto la *generazione* di γ per il solo mezzo della **regola della catena**, modificando pertanto significativamente la dimostrazione originale di [3]

Si noti come siamo passati da $\vec{v}'(t(\lambda))$ a $\vec{v}(\lambda)$: in generale non ha molta importanza se le grandezze fisiche sono funzioni di λ o t , l'importante è che esse siano *coerenti nei tempi*, ossia che assumano lo stesso valore qualora si scelga λ per una o $t(\lambda)$ per l'altra. Possiamo quindi definire la **quadrivelocità** come:

$$\vec{U} = \gamma \begin{bmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La sua pseudo norma risulta invariante? Verifichiamolo! Sia $\|\vec{v}\| = v$:

$$\|\vec{U}\| = \gamma^2 (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1 - \beta^2} c^2 (1 - \beta^2) = c^2.$$

D'altronde ciò non dovrebbe troppo sorprenderci visto che \vec{U} è stata ottenuta derivando \vec{R} rispetto ad una grandezza invariante. Rinunciando alla notazione di Leibniz (e quindi al caso in cui \vec{U} non risulta costante rispetto a λ) è possibile vedere questo fatto molto facilmente:

$$\|\vec{U}\| = \|\Delta \vec{R} (\Delta \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{(\Delta \lambda)^2} \|\Delta \vec{R}\|.$$

3.2.2 Composizione delle velocità

Nella meccanica classica la trasformazione che un vettore velocità in un sistema S doveva subire per passare al sistema S' era espressa dalla (1.3). Dato che tale trasformazione permetteva l'impiego di *qualsiasi* vettore velocità, ci diamo ora il compito di determinare, a partire dalle trasformazioni di Lorentz, la **legge di composizione delle velocità** della meccanica relativistica. Essendo i calcoli per la configurazione generale abbastanza pesanti, in questo LAM tratterò soltanto la configurazione standard che, come già detto in passato, risulta sufficiente alla risoluzione di almeno 90% dei problemi e delle situazioni che la Natura ci pone.

I lettori estremamente scettici riguardo ai nuovi risultati della teoria della relatività ristretta si rallegreranno poiché per questa trasformazione proporrò *ben 3 diverse dimostrazioni*: una di carattere euristico (di mia invenzione), quella classica dei libri di testo (vedi [1]) e una che sfrutta l'elegante formalismo quadrvettoriale (vedi [12]).

Dimostrazione euristica

Premessa: tutte le velocità sono parallele al moto dei referenziali ossia all'asse Ox . Ciò significa che sono matematizzate in un numero e non in un vettore.

(che prevedeva l'impiego della quantità $dt/dt = 1$) e, come conseguenza logica, tutte le future dimostrazioni di [3] di tutti i prossimi quadrvettori presenti in questo LAM. Tale scelta, che mi ha forzato ad inventare la sostituzione di \vec{R} con \vec{R}' , scaturisce dalla volontà di mantenere un certo **rigore matematico**, in questo caso rinunciando all'impiego degli *infinitesimi*.

Visto che sperimentalmente per basse velocità la (1.3) risulta verificata, ciò significa che la *vera* legge di composizione deve, esattamente come la trasformazione di Lorentz rispetto a quella di Galileo, ridursi alla (1.3) per piccole velocità. E, ispirati dal fattore di Lorentz γ , ipotizziamo che la *vera* legge di composizione sia identica alla (1.3) se non per un *fattore di correzione* che la moltiplica. Tale fattore, che chiameremo A , è sicuramente funzione della velocità u osservata in S e della velocità v con cui, secondo S , S' si allontana da quest'ultimo: basta infatti immaginarsi situazioni limite in cui u oppure v risultano di norma prossima a c ! Per il secondo postulato una composizione di qualsiasi velocità ammesse nel nostro Universo deve risultare a sua volta *sempre e comunque* inferiore a c . Mettiamo in tabella tutte le ipotetiche situazioni limite ed il loro rispettivo fattore di correzione che permetterebbe di appunto mantenere velocità inferiori a quella della luce:

u	v	A	B	C
0	0	1	1	0
0	c	1	1	0
c	0	1	1	0
0	$-c$	1	1	0
$-c$	0	1	1	0
c	$-c$	$1/2$	2	-1
$-c$	c	$1/2$	2	-1

I fattori B e C sono arbitrariamente definiti come:

$$B = \frac{1}{A} \quad C = 1 - B = 1 - \frac{1}{A} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{1 - C}.$$

Esistono infinite possibili funzioni $C(u, v)$ che concordano con i dati ipotizzati in tabella e pertanto ci risulta assolutamente impossibile determinare *con certezza* quale di tutte queste è quella che la Natura ha deciso di seguire. Siamo forse arrivati ad un punto morto? Probabilmente no, infatti:

“La verità si ritrova sempre nella semplicità, e non nella complessità e confusione delle cose.”

Isaac Newton

Quale sarà mai la funzione $C(u, v)$ più semplice in assoluto tale da confermare i dati tabulati? Gli 0 ci possono aiutare: ogni volta che u o v sono nulli C diventa anch'esso nullo. Si tratterà quindi, con molta probabilità, di una moltiplicazione:

$$C = \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c} = \frac{uv}{c^2}.$$

Pertanto la legge di composizione delle velocità risulterebbe:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Quanto ricavato è coerente con il secondo postulato della teoria della relatività ristretta. Infatti, è facilmente dimostrabile che $|u'| \leq c$ per ogni $|v| \leq c$ e $|u| \leq c$.

Dimostrazione dalla trasformazione di Lorentz

I vincoli posti in precedenza cadono: consideriamo velocità espresse per mezzo di vettori ossia con componenti perpendicolari al moto dei referenziali.

Impiegando la definizione di velocità costante, abbiamo lungo Ox :

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})} = \frac{\Delta t \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v \right)}{\Delta t \left(1 - \frac{v\Delta x}{c^2\Delta t} \right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Lungo Oy e Oz , invece, non abbiamo trasformazioni per le componenti spaziali, pertanto:

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})} = \frac{\Delta y}{\gamma \Delta t \left(1 - \frac{v\Delta x}{c^2\Delta t} \right)} = \frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}.$$

u'_z ha la stessa forma di u'_y essendo anch'esso perpendicolare alla direzione del moto.

Dimostrazione dalla quadrivelocità

Sia data in S la quadrivelocità \vec{U} . Allora, essendo un quadrivettore derivato direttamente dalla quadriposizione, per ottenere \vec{U}' dobbiamo semplicemente trasformarlo secondo la trasformazione di Lorentz (in questo caso quella della configurazione standard):

$$\vec{U}' = \Lambda_x \cdot \vec{U} = \begin{bmatrix} \gamma(v) (\gamma(u)c - u_x \frac{v}{c} \gamma(u)) \\ \gamma(v) (\gamma(u)u_x - c \frac{v}{c} \gamma(u)) \\ \gamma(u)u_y \\ \gamma(u)u_z \end{bmatrix} = \gamma(u) \begin{bmatrix} c\gamma(v) (1 - \frac{u_x v}{c^2}) \\ \gamma(v)(u_x - v) \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \gamma(u') \begin{bmatrix} c \\ u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo ora cercare di ottenere le espressioni delle componenti di \vec{u}' : a tal proposito dovremmo risolvere quattro equazioni irrazionali fratte, attività di dubbio divertimento. Pertanto, al fine di semplificare notevolmente i calcoli, impiegheremo la relazione:

$$\frac{U'_n}{U'_0} = \frac{u'_n}{c} \quad \text{dove } n \in \{1, 2, 3\}.$$

Procedendo con i calcoli si ottiene la **legge di composizione delle velocità**:

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \end{cases} \quad (3.9)$$

Questo sistema, come ce lo aspetteremmo, rispetta il secondo postulato della teoria della relatività ristretta: il lettore potrà calcolare qualsiasi $\|\vec{u}'\|$ con qualsiasi $|v| < c$ e $\|\vec{u}\| \leq c$, ma non riuscirà mai a rendere $\|\vec{u}'\| > c$!

3.2.3 Evidenza sperimentale: radiazione di sincrotrone

Negli acceleratori di particelle circolari (ad esempio in un sincrotrone come la *Swiss Light Source* in figura 4.5 costruita a sinistra del fiume), con l'aiuto di immensi campi magnetici, si possono forzare particelle elettricamente cariche a seguire una traiettoria appunto circolare. Essendo queste particelle cariche in moto accelerato (*circolare uniforme*), esse generano onde elettromagnetiche, ossia emettono radiazione sotto forma di fotoni (di simbolo γ , da non confondere con il fattore di Lorentz!): questa è una delle applicazioni pratiche dei sincrotroni [3].

Immaginiamoci un acceleratore di raggio talmente elevato da permettere, in un punto di questo cerchio, l'approssimazione del moto delle particelle con un moto rettilineo uniforme [3]. Con l'aiuto della configurazione standard analizziamo ora le velocità dei fotoni emessi lungo questo tratto approssimatamente rettilineo. Prendiamo in considerazione un particolare fotone γ che forma, secondo S' che è rigidamente collegato alla particella carica e pertanto per lui essa è in quiete, un angolo α' rispetto all'asse Ox (figura 3.9): orientiamo quindi gli assi Oy e Oz dei nostri referenziali in modo tale da misurare sia per S' che per S una velocità lungo Oy nulla [3]. Per S' la traiettoria del fotone forma, rispetto alla direzione di moto della particella, un angolo:

$$\tan(\alpha') = \frac{u'_z}{u'_x}.$$

Vogliamo ora determinare l'angolo α visto da S , che osserva S' allontanarsi da lui con una velocità v . Applicando le trasformazioni delle velocità inverse si ha:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} \quad , \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)}.$$

E pertanto l'angolo osservato sarà:

$$\tan(\alpha) = \frac{u_z}{u_x} = \frac{u'_z}{\gamma(u'_x + v)}.$$

Essendo $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$ $\forall x > 0$ si conclude che $\tan(\alpha') > \tan(\alpha)$ ossia $\alpha' > \alpha$ [3].

Applicando lo stesso ragionamento per tutti i fotoni emessi in tutte le direzioni, ossia ruotando Oz attorno a Ox , osserviamo che la radiazione emessa, vista da S , subisce un *addensamento* nella direzione del moto della particella, formando di fatto una regione a forma di cono densa di fotoni. Invece S' osserva una distribuzione di radiazione perfettamente omogenea (figura 3.10).

Sperimentalmente si osserva effettivamente un *fascio* (la nostra regione conica) di fotoni nella direzione tangente alla traiettoria circolare [3], confermando la validità della legge di composizione delle velocità.

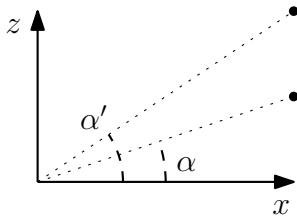


Figura 3.9. Le traiettorie del fotone γ viste da S' (angolo α') e S (angolo α).

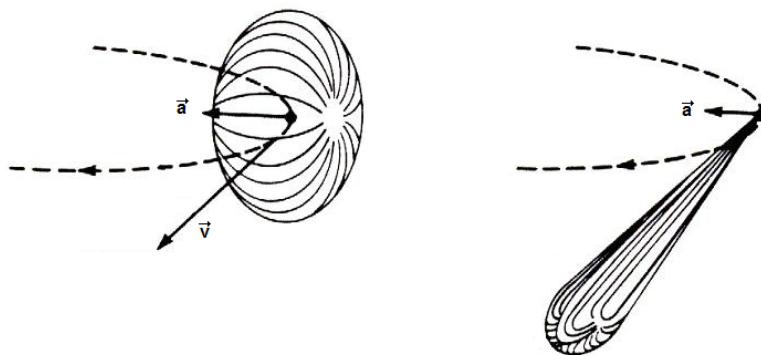


Figura 3.10. Radiazione nel caso non relativistico e nel caso relativistico (che rappresenta la realtà effettiva). Fonte: illustrazione adattata da *Wikimedia Commons*.

Riassumendo Abbiamo definito e derivato la quadri velocità, un quadri vettore interessante poiché detiene contemporaneamente l’informazione dell’usuale velocità (variante) e la proprietà dell’invarianza della sua pseudo norma. Abbiamo poi derivato in tre modi diversi la medesima legge ossia quella di composizione delle velocità nella configurazione standard. Infine abbiamo applicato quanto scoperto al caso concreto della radiazione di sincrotrone, effettivamente osservata e pertanto reale.

3.3 Rappresentazioni grafiche

“Le concezioni di spazio e di tempo che desidero esporvi sono sorte dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò sta la loro forza. Esse sono fondamentali. D’ora in poi lo spazio di per sé stesso o il tempo di per sé stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente.”

Hermann Minkowski

La teoria della relatività ristretta richiede concezioni e strumenti matematici indubbiamente sofisticati e pertanto assai difficili da interpretare fisicamente: ad esempio, possiamo *veramente* affermare di comprendere il significato intrinseco dell’intervallo spaziotemporale? Riusciamo a *vedere* un quadrvettore?

Il punto centrale del discorso è il fatto che M_4 è uno spazio vettoriale di dimensione 4 e pertanto, poiché viviamo in una realtà che fino a poco fa consideravamo come semplice V_3 interpretato come *palcoscenico degli eventi*, ci risulta difficile immaginare spazi aventi una dimensione maggiore di 3. Il problema sembrerebbe insormontabile, eppure non vogliamo rinunciare ad una rappresentazione grafica del nostro Universo!

Le soluzioni¹⁰ dei problemi, molto spesso, sono quelle più semplici. Non possiamo rappresentare né concepire spazi quadridimensionali, pertanto l’unica carta che ci rimane da giocare è quella di **ridurre le dimensioni del nostro spaziotempo** e scendere, a seconda del caso, ad una dimensione 2 oppure 3, vale a dire una oppure due componenti spaziali sempre accompagnate da una ed una sola componente temporale. In questo LAM tratteremo diagrammi bidimensionali, ossia a una componente spaziale e una temporale.

3.3.1 Diagrammi classici

Innanzitutto dobbiamo comprendere l’importanza dei diagrammi in fisica e pertanto, per rendere meglio l’idea che vorrei trasmettere, partiremo dai suoi albori ossia dalla meccanica classica stessa. Immaginiamoci di dover rappresentare su un foglio di carta la posizione $x(t)$ di un punto materiale al tempo t : si tratta di un semplice compito avente semplice soluzione, vale a dire che consideriamo $x(t)$ come una funzione¹¹ di variabile t e ci limitiamo a disegnare in un sistema di riferimento cartesiano il grafico di tale funzione. Ora, essendo questo un LAM di fisica e non di matematica, ci chiediamo *cosa abbia fisicamente più senso* nella scelta degli assi: *Ox* come asse *dei tempi* oppure come asse *delle posizioni*? L’intuito in questo caso darebbe ragione alla matematica, ossia ci verrebbe naturale porre *Ox* come asse dei tempi e *Oy* come asse delle posizioni, essendo t la *variabile indipendente*. Purtroppo tale scelta risulta assai scomoda (ma non errata!) nell’ambito della relatività ristretta e quindi, trattandosi *sempre e comunque* di una scelta totalmente arbitraria, decidiamo di porre lungo *Ox* le posizioni $x(t)$ e su *Oy* i tempi t : d’altronde forse questa scelta risulta addirittura migliore della precedente visto che, se dovessimo passare a diagrammi tridimensionali, *Oy* diventerebbe l’asse delle posizioni $y(t)$ mentre *Oz* sarebbe posto come

¹⁰Se così vogliamo chiamarle dal momento che l’operazione eseguita non risolve assolutamente nulla ma piuttosto contorna ed evita tali complicazioni.

¹¹E possiamo farlo visto che un corpo non può, sia in meccanica classica sia in meccanica relativistica, trovarsi in due posizioni differenti allo stesso tempo. *Qualsiasi* osservatore è concorde su questo fatto!

asse dei tempi t , mantenendo per le componenti spaziali un certo senso di nomenclatura rispetto agli assi impiegati.

Supponiamo ora di voler raffigurare *nello stesso diagramma* la posizione di questo punto materiale vista da due osservatori diversi in due referenziali inerziali S e S' , in moto tra loro a velocità v secondo la configurazione standard. Cercare di rappresentare $x(t)$ e $x'(t)$ nello stesso diagramma ci risparmierebbe il disegno di un secondo grafico e ci permetterebbe di cogliere eventuali osservazioni interessanti a proposito della trasformazione di Galileo, portandoci ad una sua più profonda comprensione. Rammentiamo che tale trasformazione lascia inalterati i tempi ma modifica le posizioni secondo:

$$x'(t) = x(t) - vt.$$

Pertanto, geometricamente parlando, la trasformazione di Galileo è una *traslazione orizzontale* di tutti i punti del piano. Il punto $(x(t), t)$ si vedrà traslato lungo Ox di una certa distanza vt diventando $(x'(t), t') = (x(t) - vt, t)$.

Si rivela utile l'introduzione del concetto di **trasformazione attiva e passiva** [24]:

- una trasformazione **attiva** presuppone un effettivo cambio fisico di posizione di un corpo rispetto alla base;
- una trasformazione **passiva** presuppone il cambio della base senza implicare uno spostamento effettivo fisico del corpo.

Se la matematica è del tutto indifferente alla natura delle trasformazioni, la fisica distingue arbitrari cambi di base da *reali* mutamenti di posizione dei corpi.

Nel nostro caso la trasformazione di Galileo rappresenta un cambio di base, pertanto è di natura passiva. Questo significa che *in realtà* lo spostamento spaziale vt dei punti non è dovuto *al mutare del moto del corpo* bensì *al mutare del referenziale* in cui si osserva quest'ultimo. Allora, nella nostra rappresentazione grafica, non deteniamo *nessuna ragione* per intraprendere il laborioso compito di traslare tutti i punti secondo la trasformazione galileiana: trattandosi di una trasformazione passiva, possiamo semplicemente *modificare la base* mantenendo sul nostro foglio tutti i punti fissi.

Sia f un'applicazione lineare: se \vec{v} è un evento secondo il referenziale S rappresentato dalla base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ allora $f(\vec{v})$ è l'evento visto da S' rappresentato *sempre dalla base* $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Ora, poiché $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ rappresenta S' per tutti gli eventi $f(\vec{v})$, ciò significa che **per S' tutti gli eventi \vec{v} visti da S , a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, saranno combinazione lineare dei vettori della base composta dagli argomenti rispetto a f di \vec{i} e \vec{j}** .

L'idea può apparire in prima istanza assai complicata, pertanto, al fine di facilitarne la comprensione, ci aiuteremo con un esempio, ossia l'*omotetia* con centro nell'origine e rapporto k , vale a dire la moltiplicazione per k di un vettore qualsiasi nel piano. In figura 3.11 sono rappresentate le tre tappe fondamentali del procedimento matematico teorizzato in precedenza. Dapprima si definisce il vettore \vec{v} rispetto alla base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, poi lo si trasforma assieme ai vettori della base \vec{i} e \vec{j} secondo f per poi infine *annullare la trasformazione* applicando a $\{\vec{i}, \vec{j}, f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{v})\}$ l'inversa di f , generando gli argomenti cercati di \vec{i} e \vec{j} rispetto a questa.

A livello di calcolo matriciale eseguire f^{-1} equivale a moltiplicare l'argomento per la *matrice inversa* codificante f . È possibile dimostrare come questa matrice inversa,

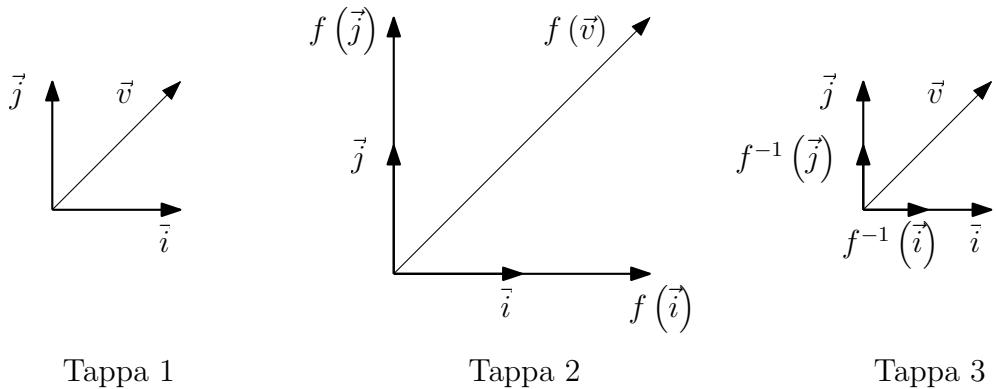


Figura 3.11. Cambio base che mantiene i punti (eventi) *fissi* sul piano (spaziotempo).

denominata F^{-1} , si calcoli in questo modo qualora $\det(F) \neq 0$:

$$F^{-1} = \frac{G^T}{\det(F)} \quad \text{dove} \quad g_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(F_{ij}).$$

Le matrici F^{-1} e G sono dello stesso tipo essendo entrambe quadrate. Nel caso della trasformazione di Galileo (1.2), ridotta alle dimensioni 2×2 avendo vincolato le rappresentazioni grafiche ad uno spaziotempo bidimensionale, la matrice inversa risulta¹²:

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{1 - (-v \cdot 0)} \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix}.$$

I nuovi assi degli spazi e dei tempi¹³ saranno dati da:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \Gamma^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vec{t}' &= \Gamma^{-1} \cdot \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

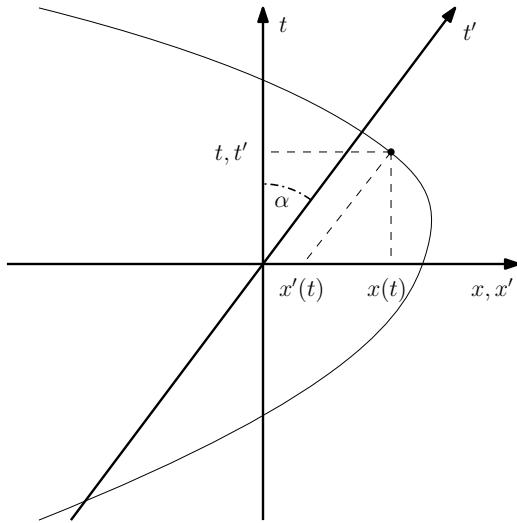
Notiamo come l'asse degli spazi di S' risulti *identico* a quello di S mentre quello dei tempi subisce una *rotazione* verso destra di un angolo $\alpha = \arctan(v)$. È interessante il fatto che la funzione arcotangente è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e ciò è assolutamente concorde con la meccanica classica dato che quest'ultima consente a v di assumere *qualsiasi* valore. Otteniamo il diagramma illustrato in figura 3.12 che, come richiesto, mantiene fisse le linee d'universo.

3.3.2 Diagrammi di Minkowski

I diagrammi di Minkowski, come i suoi *antenati classici*, possono essere disegnati sia bidimensionalmente che tridimensionalmente e incarnano la rappresentazione più chiara,

¹²Possiamo porre $\det(A) = a_{11}$ se A è di tipo 1×1 .

¹³Il lettore è pregato di porre attenzione sull'ordine delle componenti. La prima componente rappresenta la coordinata temporale mentre la seconda quella spaziale: vale sempre il discorso sull'inversione degli assi discusso in precedenza!

Figura 3.12. Tipico diagramma *antenato* a quello di Minkowski.

concisa e minimalista degli effetti relativistici: è per queste ragioni che tali diagrammi sono quelli maggiormente utilizzati nell'ambito delle visualizzazioni grafiche.

La teoria della relatività ristretta impiega la trasformazione di Lorentz e non quella di Galileo: questo significa che dovremo attuare alcune modifiche alla procedura svolta in precedenza per disegnare grafici simili a quello in figura 3.12. In particolare:

- I tempi, come è *tradizione*, verranno moltiplicati per c : lo scopo dell'operazione è quello di rendere la pendenza della linea d'universo di un fascio di luce uguale a 1. Così facendo otteniamo interessanti simmetrie a livello grafico.
- La *graduazione* degli assi spaziali non sarà più la stessa per entrambi i referenziali dal momento che lo spazio non è assoluto.

Esattamente come prima calcoliamo la matrice del cambio base:

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\gamma^2 - \gamma^2\beta^2} \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\gamma^2(1 - \beta^2)} \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Pertanto gli assi si trasformeranno secondo:

$$\vec{x}' = \Lambda^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}' = \Lambda^{-1} \cdot \vec{t} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Quale sarà mai il significato geometrico dei nuovi vettori \vec{x}' e \vec{t}' base del referenziale S' ? Sia β un *parametro* reale, proviamo a calcolare la pseudo norma di entrambi i quadrvettori¹⁴:

$$\begin{cases} \|\vec{x}'\| = x_0^2 - x_1^2 = \gamma^2(\beta^2 - 1) = -1 \\ \|\vec{t}'\| = t_0^2 - t_1^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \end{cases}$$

¹⁴Ho chiamato questi vettori *quadrvettori* per dare senso al calcolo della pseudo norma.

Chiamando le prime componenti y e le seconde x in accordo con quanto detto sull'inversione degli assi notiamo come:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$$

Il nostro *spirito matematico* fiuta una figura geometrica! Si tratta effettivamente di un sistema formato dalle equazioni di due **iperboli** aventi gli assi coincidenti a quelli del piano cartesiano ed il centro nell'origine dello stesso. I loro asintoti sono le rette di equazione $y_{1,2} = \pm x$, esattamente **le linee d'universo di un fascio di luce emesso nell'origine**.

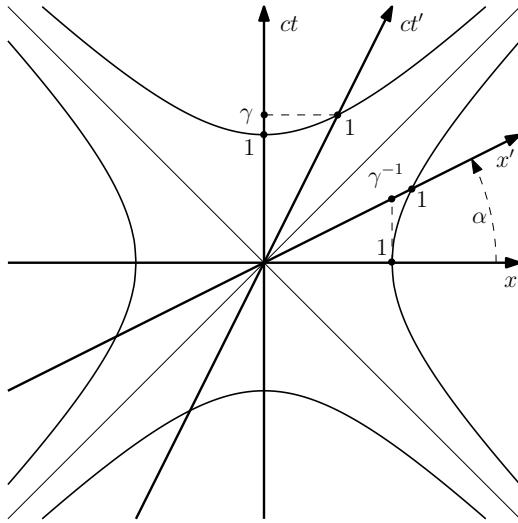


Figura 3.13. Costruzione di un diagramma di Minkowski. Gli assi degli spazi e dei tempi sono roteati di un angolo α rispetto a Ox e Oy mentre la loro graduazione è dettata dal punto di intersezione con le iperboli $x_{1,2}^2 - y_{1,2}^2 = \pm 1$. **Le unità 1 dei due referenziali non possiedono la medesima distanza nel diagramma.**

I vettori \vec{x}' e \vec{t}' sono simmetrici rispetto alla retta identità $y = x$ e le rette collineari a questi sono roteate rispetto agli assi cartesiani verso destra o sinistra (a seconda del caso) di un angolo $\alpha = \arctan(\beta)$: essendo c la velocità massima dell'informazione in questo Universo ne consegue che il valore massimo di β è appena inferiore a 1 per i corpi massivi, pertanto la rotazione α di *entrambi i nuovi assi* può essere al massimo quasi $\pi/4$ radianti.

Se le unità \vec{x}' e \vec{t}' descrivono delle iperboli al variare del parametro β allora ciò significa che **la graduazione degli assi rotanti è sancita dall'intersezione di questi con le dette iperboli** [3], ora considerate come oggetti geometrici indipendenti. In particolare, relativamente all'unità U di S , per S' si ha [28]:

$$\|\vec{x}'\| = \sqrt{\gamma^2 + \gamma^2\beta^2} = \gamma\sqrt{1 + \beta^2}$$

$$U' = U \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}.$$

In figura 3.13 è possibile constatare quanto esplicitato ed è inoltre messa in evidenza con γ la dilatazione delle unità: infatti l'unità di S' appare rispetto a quella di S dilatata sia

temporalmente che spazialmente e pertanto vi è possibile osservare gli effetti di dilatazione temporale (2.2) e contrazione delle lunghezze (2.3).

Tenendo a mente le differenti unità degli assi per le coordinate spaziotemporali nei referenziali considerati, i diagrammi di Minkowski assumono l'aspetto di figura 3.14. Risulta ora facile individuare le coordinate spaziotemporali per entrambi i referenziali S e S' : basta infatti tracciare le parallele agli assi imponendo il loro passaggio per l'evento considerato. Le coordinate si individuano nelle intersezioni delle parallele con gli assi stessi: la parallela all'asse del tempo si intersecherà con l'asse degli spazi e viceversa.

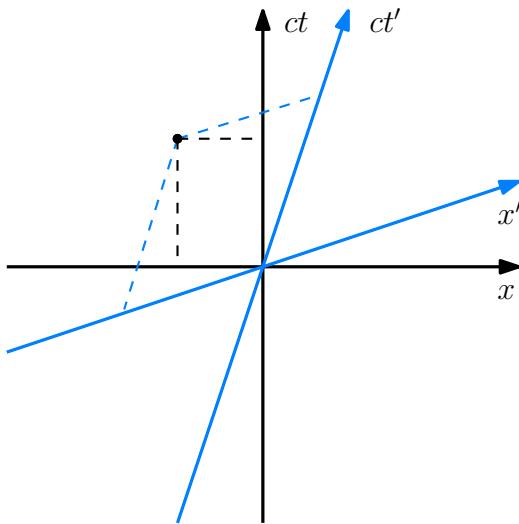


Figura 3.14. Diagramma di Minkowski contenente un evento osservato da S e S' . È messo in evidenza il metodo grafico per determinare le coordinate spaziotemporali.

3.3.3 Diagrammi di Loedel

Senza alcun dubbio i diagrammi di Minkowski sono di grande aiuto per la comprensione dei fenomeni relativistici. Purtroppo però mancano di una qualità quasi *intrinseca* alla teoria stessa: **l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali**. Nei diagrammi di Minkowski appena visti uno dei due referenziali, oltre a *non necessitare di graduazione* rispetto all'altro, dispone degli assi *perpendicolari* tra loro: queste caratteristiche rappresentano un evidente ed ingiusto *privilegio grafico*.

Per rimediare a questo problema dobbiamo trovare il modo di rendere S e S' *equivalenti* nell'ambito del diagramma di Minkowski. La soluzione si situa in un *ulteriore referenziale*: infatti, se S e S' sono in moto relativo a velocità v , nulla ci vieta di immaginarci un ipotetico terzo referenziale posto sempre a metà strada tra i due ossia un referenziale in moto a velocità v_0 rispetto sia a S che a S' . Per tale referenziale, che chiameremo S_0 , S appare muoversi nel verso negativo delle sue coordinate x mentre S' in quello positivo [28].

Attenzione però: affermare che v_0 sia equivalente a $v/2$ comporta la negazione di tutte le considerazioni effettuate nel capitolo precedente riguardo la legge di composizione delle velocità. Abbiamo infatti visto che le velocità tra i referenziali si trasformano secondo le (3.9) perciò, ponendo $\beta_0 = v_0/c$ e $\beta = v/c$, la velocità v di S' vista da S deve trasformarsi

nella velocità v_0 di S' vista da S_0 in moto rispetto a S sempre a velocità v_0 :

$$v_0 = \frac{v - v_0}{1 - \frac{vv_0}{c^2}} \rightarrow \beta_0 = \frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta\beta_0}$$

$$\beta\beta_0^2 - 2\beta_0 + \beta = 0.$$

La radice quadrata del discriminante è $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 - 4\beta^2} = 2/\gamma$, pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$(\beta_0)_{1,2} = \frac{2 \pm 2/\gamma}{2\beta} = \frac{\gamma \pm 1}{\gamma\beta}.$$

Non possiamo accettare la soluzione avente il segno positivo dal momento che

$$\left| \frac{\gamma + 1}{\gamma\beta} \right| > 1 \quad \forall \quad |\beta| < 1$$

e velocità maggiori di c non avrebbero senso poiché violerebbero il secondo postulato della teoria della relatività ristretta.

Prendiamo ora *a due a due* S_0 con S o S' e, tenendo presente che la velocità relativa tra i referenziali è v_0 , applichiamo a questa coppia le medesime considerazioni precedenti effettuate sul moto di S' rispetto a S e disegniamo dunque due diagrammi di Minkowski. La rotazione degli assi sarà data da [28]:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma\beta} \right)$$

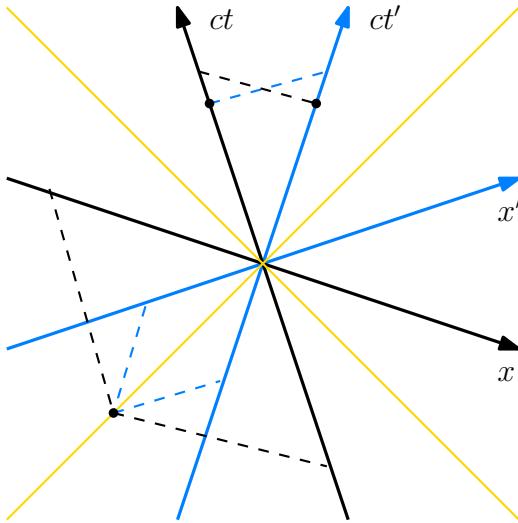


Figura 3.15. Linee d'universo di due fasci luminosi, un evento a coordinata temporale negativa e illustrazione grafica della reciproca dilatazione temporale dovuto al moto dei referenziali.

Poiché sia che per il primo diagramma che per il secondo S_0 è rappresentato dagli assi cartesiani possiamo tranquillamente sovrapporre i due diagrammi di Minkowski e

cancellare dal risultato S_0 , la cui esistenza è esclusivamente giustificata dal raggiungimento di questa stessa azione di sovrapposizione.

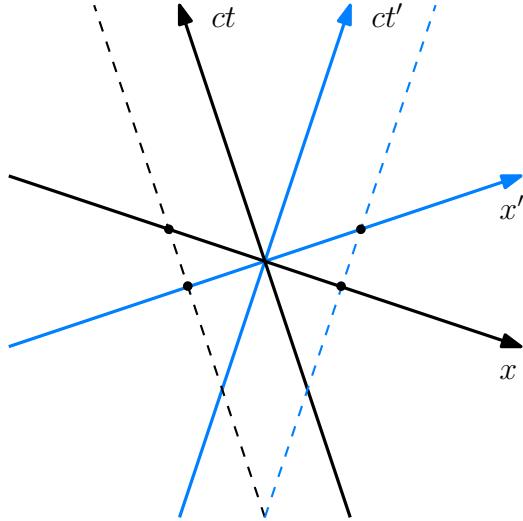


Figura 3.16. Reciproco effetto della contrazione delle lunghezze dovuto al moto dei referenziali. Vi è anche possibile constatare la reciproca rottura della simultaneità.

In questo modo otteniamo un diagramma di Loedel¹⁵, che ha due *enormi* pregi:

- Poiché le iperboli unitarie sono le medesime per entrambi i diagrammi di Minkowski sovrapposti ne consegue che la graduazione degli assi di S e S' rispetto a S_0 è del tutto identica e pertanto, essendo sia equivalente che arbitraria, **non risulta necessaria**. **Gli assi non devono essere scalati di alcun fattore**.
- **Nessun referenziale è privilegiato.** È pertanto possibile constatare la *reciproca* applicazione degli effetti relativistici come in figura 3.15 e 3.16.

3.3.4 Disegno numerico

All'inizio del novecento, ossia ai tempi della teoria trattata in questo LAM, l'informatica non aveva evidentemente ancora raggiunto gli incredibili risultati che oggi influenzano praticamente *ogni* aspetto della nostra vita, pertanto i diagrammi appena trattati costituivano l'unico strumento grafico a disposizione dei fisici qualora essi volessero indagare graficamente gli effetti relativistici predetti da Einstein. Fortunatamente oggi, nel 2016, disponiamo di *molto più* che carta e penna, di conseguenza ci interessiamo ora alla raffigurazione numerica dei diagrammi spaziotemporali.

Uno degli aspetti più incredibili della grafica computerizzata è la sua *interattività* ossia la facoltà di cambiare dinamicamente un parametro e di poter osservare immediatamente i cambiamenti che tale mutamento di valore comporta. Un altro aspetto decisamente degno di nota è la possibilità di procedere a disegni estremamente complessi (vale a dire *golosi* di computazioni) poiché che cosa è un computer se non una calcolatrice incredibilmente performante?

¹⁵In onore del suo ideatore, il fisico uruguiano Enrique Loedel Palumbo (1901 - 1962).

Al fine di disegnare questi diagrammi spaziotemporali ho deciso di impiegare l'**API Canvas** offerta dallo standard **HTML5**, di conseguenza il programma informatico è stato scritto in **JavaScript** e dovrà essere lanciato (sotto forma di **web app**) all'interno di un **web browser** esattamente come in figura 3.17.

L'applicazione è composta da due files: `index.html` (contenente **HTML** e un po' di **CSS**) e `code.js` (contenente tutto il codice **JavaScript**). `index.html` ha la sola funzione di dichiarare gli elementi che il web browser dovrà raffigurare sullo schermo e in che modo dovrà eseguire tale compito: in questo caso un paragrafo `<h1>`, uno `<h3>`, un elemento `<canvas>`, lo slider di β `<input>` e i quattro pulsanti `<button>`. `code.js` invece contiene tutta la *logica* del programma ossia impone al web browser di disegnare in un certo modo il diagramma spaziotemporale all'interno di `<canvas>` tramite appunto l'API Canvas.

Questo è un LAM di fisica e non di informatica, pertanto non mi addentrerò nei dettagli teorici dell'informatica e mi limiterò alla sola spiegazione del funzionamento del programma tramite commenti (sottolineati in verde) nel codice. Il lettore desideroso di apprenderne maggiormente riguardo alla programmazione e al *web development* è invitato a documentarsi in maniera indipendente.

`index.html`

```

1  <!DOCTYPE html>
2  <html>
3  <head>
4  <meta charset="utf-8">
5  <title>Trasformazione di Lorentz</title>
6  <!-- Allinea tutto al centro e definisci i margini da rispettare -->
7  <style>
8  body{
9      margin: 0px;
10     text-align: center;
11 }
12
13 .separator{
14     margin: 0px auto 50px auto;
15     width: 600px;
16 }
17
18 #canvas{
19     margin-bottom: 25px;
20 }
21
22 input{
23     width: 600px;
24     display: block;
25     margin-bottom: 25px;
26 }
27
28 button{
29     width: 20%;
30     padding: 5px;

```

```

31     margin: 5px;
32 }
33 </style>
34 </head>
35 <body>
36     
37     <div class="separator">
38         <h1>Trasformazione di Lorentz</h1>
39         <h3>2016 Theo Saporiti<br>LAM in Fisica 2016-2017, Liceo di Lugano 2</h3>
40     </div>
41
42     <div class="separator">
43         
44         <canvas id="canvas" width="600" height="600"></canvas>
45
46         
47         <input id="beta" type="range" min="-1" max="1" step="0.001" value="0">
48
49         
50         <button onclick="user.random();">Aggiungi eventi</button>
51         <button onclick="user.empty();">Elimina eventi</button>
52         <button onclick="user.refresh();">Lascia traccia</button>
53         <button onclick="user.transformation();">Trasformazione</button>
54     </div>
55
56     
57     <script src="code.js"></script>
58 </body>
59 </html>
```

code.js

```

1  ****
2  /
3  /           (c) 2016 Theo Saporiti
4  /           LAM in Fisica 2016-2017, Liceo di Lugano 2
5  /           Rappresentazione grafica della trasformazione di Lorentz
6  /
7  ****
8
9 //Accedi alla Canvas API presente in HTML5
10 var canvas=document.getElementById("canvas");
11 var ctx=canvas.getContext("2d");
12
13
14 ****      DEFINIZIONI      ****
15 ****      ****
16 ****
17 ****
```

```

18
19 //Definisci alcune variabili importanti
20 var beta=0;           //Rapporto v/c
21 var points=new Array(); //Array degli eventi
22 var update=true;        //Permettere il ridisegno del canvas?
23 var galileo=true;       //Scelta della trasformazione
24
25 //Definisci la trasformazione di Lorentz (tempi in metri)
26 var TL={
27     x: function(x,t){
28         return gamma()*(x-beta*t);
29     },
30
31     t: function(x,t){
32         return gamma()*(t-beta*x);
33     }
34 }
35
36 //Definisci la trasformazione di Galileo (tempi in metri)
37 var TG={
38     x: function(x,t){
39         return x-beta*t;
40     },
41
42     t: function(x,t){
43         return t;
44     }
45 }
46
47 //Definisci la trasformazione delle coordinate: in canvas infatti l'origine
48 //è posta nell'angolo superiore sinistro e tutte le coordinate dei punti
49 //visibili sono intere positive poiché corrispondenti ai pixels su schermo
50 var cartesian={
51     x: function(x){
52         return canvas.width/2+x;
53     },
54
55     y: function(y){
56         return canvas.height/2-y;
57     }
58 }
59
60 //Definisci il fattore di Lorentz
61 function gamma()
62 {
63     return 1/Math.sqrt(1-Math.pow(beta,2));
64 }
65
66 //Definisci la funzione che disegnerà il diagramma
67 function draw()
68 {

```

```

69 //Se è consentito il ridisegno...
70 if(update)
71 {
72     //...elimina quanto disegnato in precedenza...
73     ctx.clearRect(0,0,canvas.width,canvas.height);
74
75     //...poni lo sfondo nero...
76     ctx.fillStyle="black";
77     ctx.fillRect(0,0,canvas.width,canvas.height);
78
79     //...e disegna il cono di luce relativo all'origine
80     ctx.fillStyle="#262626";
81     ctx.strokeStyle="#262626";
82     ctx.beginPath();
83     ctx.moveTo(
84         cartesian.x(-canvas.width/2),
85         cartesian.y(-canvas.height/2)
86     );
87     ctx.lineTo(
88         cartesian.x(canvas.width/2),
89         cartesian.y(canvas.width/2)
90     );
91     ctx.lineTo(
92         cartesian.x(-canvas.width/2),
93         cartesian.y(canvas.width/2)
94     );
95     ctx.lineTo(
96         cartesian.x(canvas.width/2),
97         cartesian.y(-canvas.width/2)
98     );
99     ctx.stroke();
100    ctx.fill();
101 }
102 //...altrimenti continua a disegnare sopra quanto già illustrato
103 //in modo da ottenere un effetto "traccia"
104
105 //Per ogni evento dello spaziotempo...
106 for(var i=0;i<points.length;i++)
107 {
108     //...decidi il suo colore a dipendenza del tipo di vettore
109     //(space-like o time-like)...
110     var x=Math.abs(TR.x(points[i].x,points[i].t));
111     var t=Math.abs(TR.t(points[i].x,points[i].t));
112     if(x>t)
113     {
114         var color="red";
115     }
116     else
117     {
118         var color="orange";
119     }

```

```

120     ctx.strokeStyle=color;
121     ctx.fillStyle=color;
122
123     //... e disegnalo come un piccolo cerchio
124     ctx.beginPath();
125     ctx.arc(
126         cartesian.x(TR.x(points[i].x,points[i].t)),
127         cartesian.y(TR.t(points[i].x,points[i].t)),
128         2,0,2*Math.PI);
129     ctx.stroke();
130     ctx.fill();
131 }
132
133 //Disegna ora gli assi dei due referenziali, dapprima quello bianco S'...
134 ctx.lineWidth=2;
135 ctx.fillStyle="white";
136
137 ctx.fillRect(canvas.width/2,-1,2,canvas.height);
138 ctx.fillRect(-1,canvas.height/2,canvas.width,2);
139
140 //...poi quello verde S...
141 ctx.strokeStyle="#2ECC40";
142 ctx.beginPath();
143
144 //...al quale dobbiamo roteare gli assi in funzione di beta
145 if(Math.abs(beta)>0 && update)
146 {
147     //Rotea l'asse degli spazi se e solo se la trasformazione considerata
148     //è quella di Lorentz
149     if(!galileo)
150     {
151         ctx.moveTo(
152             cartesian.x(0),
153             cartesian.y(0)
154         );
155         ctx.lineTo(
156             cartesian.x(canvas.width/2),
157             cartesian.y(-canvas.width/2*beta)
158         );
159         ctx.lineTo(
160             cartesian.x(-canvas.width/2),
161             cartesian.y(canvas.width/2*beta)
162         );
163         ctx.lineTo(
164             cartesian.x(0),
165             cartesian.y(0)
166         );
167         ctx.stroke();
168     }
169
170     //Rotea l'asse dei tempi qualsiasi sia la trasformazione impiegata

```

```

171     ctx.moveTo(
172         cartesian.x(0),
173         cartesian.y(0)
174     );
175     ctx.lineTo(
176         cartesian.x(canvas.width/2),
177         cartesian.y(-canvas.width/2*1/beta)
178     );
179     ctx.lineTo(
180         cartesian.x(-canvas.width/2),
181         cartesian.y(canvas.width/2*1/beta)
182     );
183     ctx.lineTo(
184         cartesian.x(0),
185         cartesian.y(0)
186     );
187     ctx.stroke();
188
189     //Scrivi in alto a sinistra il valore di beta
190     ctx.fillStyle="white";
191     ctx.font="15px Arial";
192     ctx.textAlign="left";
193     ctx.textBaseline="hanging";
194     ctx.fillText("\u03b2 = "+beta,5,5);
195 }
196 }
197
198
199 ****
200 *****      EVENTI      ****
201 ****
202
203
204 //Definisci le varie azioni che l'utente è in grado di eseguire premendo gli
205 //appositi pulsanti, ovvero:
206 var user={
207     //Eliminare tutti gli eventi dallo spaziotempo
208     empty: function(){
209         points=new Array();
210         draw();
211     },
212
213     //Aggiungere eventi a caso
214     random: function(){
215         for(var i=0;i<50;i++)
216         {
217             points.push({
218                 x: Math.floor(Math.random()*canvas.width-canvas.width/2),
219                 t: Math.floor(Math.random()*canvas.width-canvas.width/2)
220             });
221         }
222 }
```

```

222     draw();
223 },
224
225 //Aggiungere un evento specifico (accessibile soltanto da console!)
226 specific: function(x,t){
227     points.push({
228         x: x,
229         t: t
230     });
231     draw();
232 },
233
234 //Scegliere se permettere il ridisegno
235 refresh: function(){
236     update=!update;
237     draw();
238 },
239
240 //Scegliere quale trasformazione applicare
241 transformation: function(){
242     galileo=!galileo;
243     if(galileo)
244     {
245         TR=TG;
246     }
247     else
248     {
249         TR=TL;
250     }
251     draw();
252 }
253 }

254
255 //Imponi al programma di "ascoltare" qualsiasi cambio dello slider e di
256 //immediatamente modificare beta
257 document.getElementById("beta").oninput=function(){
258     beta=Number(this.value);
259     draw();
260 }
261
262
263 **** LANCIO APPLICAZIONE ****
264 ****
265 ****
266
267
268 //Lancia il programma imponendo come default la trasformazione di Lorentz
269 user.transformation();
270 draw();

```

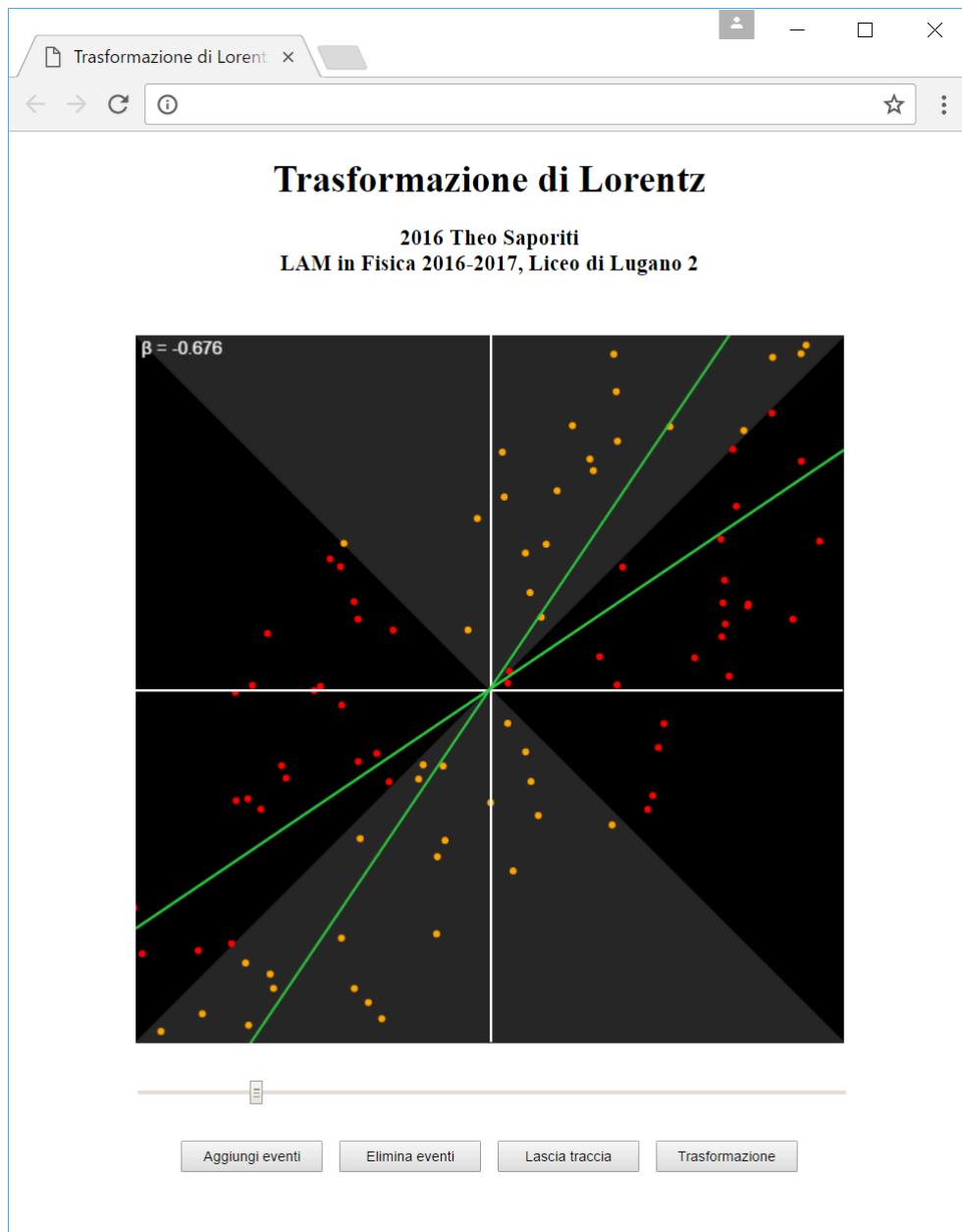


Figura 3.17. L'applicazione eseguita all'interno di *Google Chrome* 55. Sono messi in risalto gli eventi di tipo tempo (arancioni) e di tipo spazio (rossi) nonché il cono di luce dell'origine e gli assi dei due referenziali. È possibile eseguire l'applicazione all'interno del proprio web browser visitando l'indirizzo <http://saporiti.ch/lam/lorentz/>.

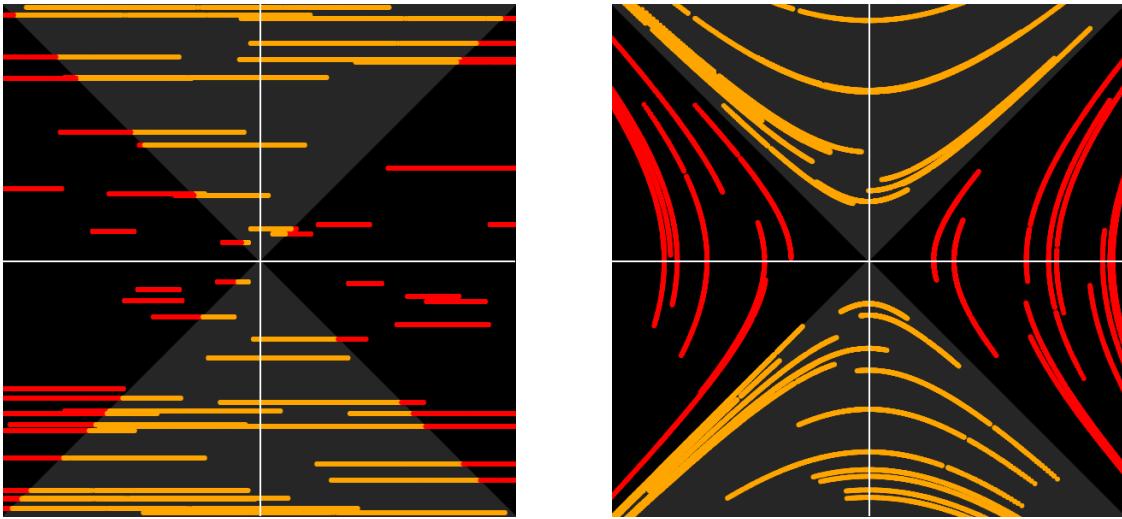


Figura 3.18. Scie degli eventi trasformati con la trasformazione di Galileo (sinistra) e con la trasformazione di Lorentz (destra). Nella prima eventi di tipo tempo possono diventare di tipo spazio e viceversa mentre nella seconda gli eventi di tipo tempo rimangono di tipo tempo così come quelli di tipo spazio e luce. Inoltre, nella prima le linee d'universo possono trovarsi anche all'esterno del cono di luce, cosa impossibile nella seconda.

Premendo il pulsante *Lascia traccia* e facendo variare con lo slider il valore di β è possibile rendersi conto del significato geometrico delle trasformazioni prese in esame in questo LAM.

Per quanto riguarda la trasformazione di Galileo osserviamo come gli eventi siano traslati in linea orizzontale mantenendo inalterate le loro coordinate temporali in accordo con il tempo assoluto della meccanica classica.

D'altro canto nella trasformazione di Lorentz ci accorgiamo come lo spostamento nello spaziotempo subita dagli eventi risulti una **rotazione iperbolica** (esattamente come in una **rotazione circolare**, dove i punti trasformati rimangono sulla loro circonferenza, i punti rimangono sempre e comunque sulla loro iperbole originale).

Riassumendo È stato spiegato il significato geometrico della trasformazione di Galileo e della trasformazione di Lorentz per mezzo di *diagrammi spaziotemporali* bidimensionali. I diagrammi di Minkowski e Loedel sono stati costruiti per mezzo di una procedura matematica di mia invenzione, ossia facendo capo al calcolo matriciale. Infine, è stato trattato il disegno numerico di tali diagrammi. Con l'aiuto dell'*API Canvas* ho scritto un programma informatico capace di raffigurare il significato grafico delle **relazioni di causalità** tra gli eventi dello spaziotempo.

3.4 Enermoto

3.4.1 Quantità di moto

Apparente violazione

In fisica classica la quantità di moto totale di un sistema, come abbiamo già visto, risulta *costante nel tempo* in qualsiasi sistema di riferimento inerziale. Ora, a causa della legge di composizione delle velocità relativistica, sembrerebbe che in relatività ristretta questo principio estremamente importante *risulti violato* [1].

Al fine di illustrare chiaramente questo problema immaginiamoci un urto anelastico tra due particelle di massa m in moto rispetto ad S con velocità di modulo u lungo Ox : la quantità di moto prima e dopo l'impatto secondo le previsioni classiche *deve* risultare la stessa. Sia inoltre S' in moto rispetto a S a velocità v . Senza sorprenderci troppo troviamo con i calcoli che per S si ha $p_i = mu + m(-u) = 0$ e $p_f = (m+m)(0+0) = 0$ ossia $p_i = p_f$ mentre per S' si ha $p'_i = m(u-v) + m(-u-v) = -2mv$ e $p'_f = (m+m)(0-v) = -2mv$ ossia $p'_i = p'_f$. Notare l'applicazione implicita della (1.3) e la somma delle due masse (**principio di conservazione delle masse**) apparentemente talmente logica e in accordo con il senso comune da sembrarci *ovvia*¹⁶. In meccanica relativistica, come ci è ormai noto, non possiamo più impiegare la (1.3) ma dobbiamo rifarcirci alla (3.9). Ciò costituisce un problema nel computo della quantità di moto totale vista da S' . Infatti, applicando la legge di composizione delle velocità nel caso preso in esame, otteniamo:

$$p'_i = m \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} - m \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} , \quad p'_f = -2mv , \quad p'_i \neq p'_f.$$

A questo punto, **non volendo rinunciare al principio di conservazione della quantità di moto**, si aprono innanzi a noi due possibili soluzioni al problema [1]:

- Cambiare la definizione di quantità di moto.
- Cambiare la definizione di massa.

Si tratta di due vie fisicamente *completamente diverse* ma matematicamente *con lo stesso punto di arrivo* ossia la resa di p'_i equivalente a p'_f per S' (per S è già il caso, come il lettore potrà facilmente constatare).

Derivazione

Sceglieremo, per motivi che ci saranno chiari in seguito, di proseguire il nostro viaggio seguendo la prima via. La dimostrazione che segue è stata adattata e resa più chiara da [14].

Supponiamo di osservare in un referenziale S due particelle, una rossa ed una blu, urtarsi *elasticamente* come illustrato in figura 3.19. Sia m la massa delle due particelle (identiche se non per il loro colore), sia \vec{v}_1 il vettore velocità della particella rossa e sia $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ quello della particella blu prima che esse collidano.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} , \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -v \\ -v \end{bmatrix} .$$

¹⁶Come spesso accade in questo LAM tra poco vedremo che in realtà le cose non stanno *veramente* così.

Se eseguiamo i conti con la definizione *classica* della quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ non ci imbattiamo in nessuna irregolarità: come ci si poteva aspettare, sia prima che dopo l'urto, la quantità di moto totale del sistema risulta nulla. Poiché l'urto è perfettamente elastico la componente y della quantità di moto di una delle due particelle **dove**, ancor prima della collisione, **essere di pari intensità ma segno opposto** di quella dell'altra particella. Lungo x non dobbiamo tenere in considerazione questa *condizione iniziale* dal momento che l'urto avviene in una modalità che non influisce sulle componenti orizzontali delle velocità.

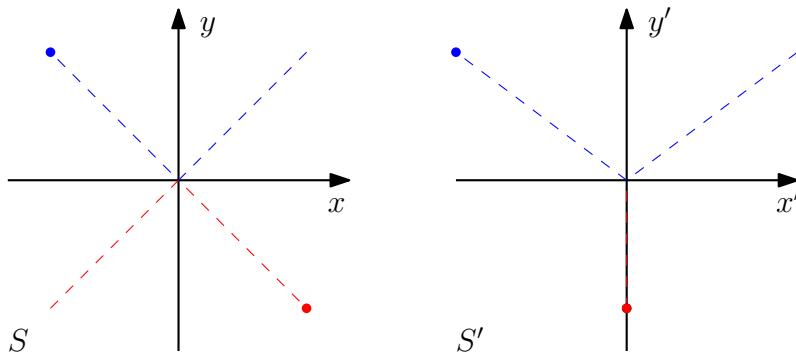


Figura 3.19. La situazione presa in esame raffigurata nei due referenziali scelti. La particella blu si trova nel primo e nel secondo quadrante mentre quella rossa si trova nel terzo e nel quarto quadrante.

Osserviamo ora la situazione secondo il referenziale S' , in moto rispetto a S con una velocità v . Per S' , essendo a quella velocità solidale con la particella rossa, quest'ultima non dispone di alcuna velocità lungo Ox ossia risulta in moto soltanto lungo Oy . In particolare, applicando le equazioni (3.9), calcoliamo che per S' i vettori velocità si trasformano nel seguente modo:

$$\vec{v}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\gamma(1-\frac{v^2}{c^2})} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}'_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{v}{\gamma(1+\frac{v^2}{c^2})} \end{bmatrix}.$$

Notiamo immediatamente che, applicando la definizione *classica* di quantità di moto, i conti non tornano per le componenti verticali:

$$\frac{mv}{\gamma(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{mv}{\gamma(1+\frac{v^2}{c^2})} \neq 0.$$

La condizione iniziale non risulta essere rispettata, pertanto l'urto così come è stato descritto non sarebbe fisicamente possibile! Dobbiamo assumere un atteggiamento estremamente prudente di fronte a questo ostacolo: infatti non dobbiamo precipitarci ad incriminare ingiustamente il cambiamento delle componenti delle velocità, poiché esso *dove* rimanere assolutamente lecito dal momento che deriva da una banale applicazione della trasformazione di Lorentz. Piuttosto il problema risiederà proprio nel computo della componente verticale e cioè nella *definizione stessa* di quantità di moto.

Poiché per rendere fisicamente possibile questa collisione siamo costretti a rendere il calcolo precedente nullo, dobbiamo modificare il valore di una delle variabili presenti. Essendoci soltanto m , v e c , l'unica possibilità che riusciamo ad intravedere senza rimettere

in discussione tutte le riflessioni portate sulle velocità è quella di assumere *masse differenti* per le due particelle identiche se non per il colore. Richiamo immediatamente l'attenzione del lettore: **non si deve immaginare che magicamente le masse delle particelle siano aumentate o diminuite!** Questo *trucco* di sostituzione è da intendersi come *strettamente ed unicamente* matematico. Rimandiamo pertanto a più tardi l'interpretazione fisica di quanto ci apprestiamo a sostituire nell'espressione.

Sia quindi m_1 la massa della particella rossa e sia m_2 quella della particella blu. Sostituendo nell'espressione ricaviamo il seguente rapporto necessariamente vero in modo da rispettare le condizioni iniziali:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Iniziamo la nostra indagine matematica con la ricerca delle condizioni che vincolano la scelta delle due masse. Proviamo a calcolare il quadrato dei moduli dei vettori \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 :

$$V = \|\vec{v}'_1\|^2 = \frac{v^2}{\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = v^2 \gamma^2$$

$$U = \|\vec{v}'_2\|^2 = \frac{4v^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{v^2}{\gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{4v^2 + v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{4v^2 + V \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}.$$

Il lettore potrebbe sentirsi confuso di fronte a questa lunga operazione (secondo lui) inutile. Probabilmente si domanderà: perché abbiamo calcolato tutto ciò? La risposta è *perché possiamo*, allo stesso modo in cui la nostra libertà matematica ci permette di scoprire l'identità

$$\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 = 1 + \frac{v^4}{c^4} + 2\frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{v^4}{c^4} + 2\frac{v^2}{c^2} = 4\frac{v^2}{c^2},$$

che ci risulterà molto utile per una rapida sostituzione nell'espressione di U . Infatti, portando il denominatore del membro di destra come fattore di moltiplicazione al membro di sinistra e dividendo in ambedue le parti per c^2 otteniamo:

$$\frac{U}{c^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(4v^2 + V \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2\right) = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \frac{V}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2.$$

Riordiniamo e mettiamo in evidenza i fattori comuni:

$$\left(\frac{U}{c^2} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{V}{c^2} - 1\right),$$

da cui si osserva chiaramente che

$$\frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{U}{c^2}}}.$$

Quindi il rapporto tra le due masse diventa:

$$m_0 = m_1 \sqrt{1 - \frac{V}{c^2}} = m_2 \sqrt{1 - \frac{U}{c^2}}.$$

Se V fosse uguale a U le due masse sarebbero identiche, mentre se $V \neq U$ avremmo un rapporto diverso dall'unità. Questo significa che, da un punto di vista *strettamente* matematico, le **masse sono funzione della velocità**. La massa m_0 è associata ad una velocità nulla e pertanto è la massa misurata in un sistema di riferimento in cui essa è in quiete: a tale misurazione si attribuisce il nome di **massa a riposo**¹⁷. Pertanto, dato un referenziale in moto rispetto a quest'ultimo, la massa m da inserire nel computo della quantità di moto *classica* risulta $m = m_0\gamma$, che è chiamata **massa relativistica**.

Potremmo pretendere di aver risolto il problema affermando che non solo matematicamente ma *anche fisicamente* le masse sono funzione delle velocità. Introdurre quest'idea nella teoria semplifica notevolmente i calcoli in determinate situazioni e pertanto accettarla sembrerebbe portare solo vantaggi: ma siamo sicuri che si tratti effettivamente di una *buona idea*? La massa è una proprietà *intrinseca* di un corpo direttamente proporzionale alla sua inerzia: come facciamo a distinguere l'aumento di inerzia da quello di massa? In realtà *non possiamo* ed infatti la teoria della relatività funziona ed è coerente qualsiasi delle due assumiamo che vari in funzione della velocità, essendo appunto proporzionali. In questo LAM si è deciso di **rifiutare il concetto di massa a riposo e relativistica sostanzialmente per questi motivi**:

- Assumere un incremento di massa potrebbe indurre a pensare ad una sorta di *mutamento intrinseco* dei corpi dovuto soltanto al loro moto, cosa che dubito accada realmente [2].
- Accettare la massa relativistica implica la validità della vecchia definizione di quantità di moto e di forza anche a velocità fuori da quelle verificate sperimentalmente in meccanica classica. Ritengo che l'uso di $m = m_0\gamma$ rappresenti *l'ultimo disperato tentativo di salvare* queste formule di cui, invece, dovremmo celebrare il funerale (per le alte velocità).
- Infine, ed è questa la ragione più importante di tutte, questa necessità di far variare le masse con le velocità *nasce esclusivamente dalle proprietà dello spaziotempo* [2]: ritengo improbabile che esso sia in grado di esercitare tale influenza sui corpi in movimento.

Per questi motivi in questo LAM con il termine *massa* ed il simbolo m si intende la **massa inerziale** di un corpo. I concetti di massa a riposo e relativistica saranno *dimenticati*.

Come ulteriore e possibilmente definitiva giustificazione dell'abbandono delle dette masse propongo una porzione di lettera scritta nel 1948 da Albert Einstein stesso:

¹⁷In realtà la massa di un corpo, come presto vedremo, è un *invariante relativistico* e pertanto non è necessario introdurre né questo concetto né quello di massa relativistica. La sua presenza in questo LAM ha solo un ruolo storico.

“It is not good to introduce the concept of the mass $M = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ of a moving body for which no clear definition can be given. It is better to introduce no other mass concept than the “rest mass” m . Instead of introducing M it is better to mention the expression for the momentum and energy of a body in motion.”

Albert Einstein a Lincoln Barnett, Lev B. Okun in *Physics Today* 1989

Preso coscienza di queste considerazioni capiamo ora come spesso in meccanica relativistica saremo costretti a modificare le vecchie definizioni delle grandezze fisiche coinvolgenti la massa. In questo caso **la quantità di moto** diventa:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad (3.10)$$

Dove γ risulta funzione del modulo di \vec{v} . Ci accorgiamo che il vettore $\gamma\vec{v}$ non è nient’altro che la raccolta **delle componenti spaziali della quadri velocità**, pertanto definiamo la grandezza che chiameremo **eneremoto** come:

$$\vec{P} = m\vec{U} = m\gamma \begin{bmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Comprendiamo il significato fisico di tutti i termini x_n con $n \in \{1, 2, 3\}$ ma non di $x_0 = m\gamma c$. Benché in realtà lo possiamo dedurre dal nome stesso di \vec{P} , ci diamo il compito di scoprirlo nel prossimo sottocapitolo.

3.4.2 Energie

Energia cinetica

In meccanica classica abbiamo ricavato l’espressione di K di un corpo sommando tutti i lavori infinitesimi svolti da un’ipotetica forza variabile lungo tutto l’intervallo di spazio nel quale il corpo è sottoposto ad accelerazione a causa della suddetta forza. Ripetiamo ora l’operazione impiegando questa volta la nostra nuova fiammante definizione di quantità di moto! Prima di ciò cambiamo la variabile di integrazione:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt = \int f(t)v(t)dt.$$

Dopodiché determiniamo la forza $f(t)$. Essendo $f(t)$ la derivata prima rispetto al tempo ordinario t della quantità di moto, in questo caso relativistica, non possiamo più scrivere banalmente $f(t) = ma(t)$ essendo appunto la definizione di quantità di moto cambiata

rispetto alla meccanica classica. Immergiamoci dunque nei calcoli:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d}{dt} p(t) = m \left(v \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{dv}{dt} \right) = m \left(a \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} + \gamma a \right) \\ &= m\gamma^3 \left(a \frac{v^2}{c^2} + a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) = m\gamma^3 a. \end{aligned}$$

Notare come in questo caso γ risulti funzione del tempo t e non di λ , implicando quindi l'*invertibilità* di $t(\lambda)$. Come già accennato in passato non è molto rilevante rispetto a *quale* tempo una grandezza è presa in considerazione: basta che vi sia *coerenza nei tempi*. A questo punto applichiamo quanto ricavato nell'integrale:

$$\int f(t)v(t)dt = \int mav \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dt = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + k.$$

E quindi, valutando, si ha:

$$[m\gamma c^2]_{t_1}^{t_2} = mc^2\gamma_2 - mc^2\gamma_1.$$

Se al tempo t_1 il corpo è in quiete, ossia ponendo $\gamma_1 = 1$, riusciamo a ricavare l'espressione dell'**energia cinetica relativistica**:

$$K = mc^2(\gamma - 1) \quad (3.12)$$

Si noti come K è nulla per velocità nulle mentre diverge a $+\infty$ per $v \rightarrow c$, in accordo con il comportamento di \vec{p} .

Energia totale

Vi sono diverse ed *estremamente* interessanti considerazioni e conseguenze deducibili dalla precedente valutazione. Il lettore, molto attento ai particolari, avrà infatti sicuramente notato che l'integrazione definita non è stata egualata a ΔK come avevamo fatto decine di pagine fa nell'energia cinetica classica. Attenzione però: questo *non* significa che tale valutazione *non* equivalga numericamente a ΔK poiché è facilissimo verificarlo impiegando l'appena definita (3.12), ossia $\Delta K = (mc^2(\gamma_2 - 1)) - (mc^2(\gamma_1 - 1)) = mc^2(\gamma_2 - \gamma_1)$. Piuttosto, questa *differenza di termini* scritti come $m\gamma c^2$ dovrà avere un **altro significato fisico** che la banale quantità di energia cinetica in un dato tempo dal momento che per velocità nulle essi *non si annullano* bensì si trasformano in termini mc^2 . Eppure, anche se non rappresentano proprio l'energia cinetica, essi *sono e rimangono energia!*

La soluzione *geniale* a questo problema interpretativo consiste nell'attribuire ad ogni corpo una quantità d'energia E detta **energia totale** [4] equivalente a:

$$E = m\gamma c^2 \quad (3.13)$$

Per il momento non sappiamo che cosa contiene esattamente E ma, dalla valutazione precedente, sappiamo che la sua differenza ΔE in un corpo accelerato equivale a ΔK .

Energia a riposo

Avremo pertanto $K = E - mc^2$ ossia $E = K + mc^2$. Da un punto di vista matematico, E ci appare dunque come la nota energia cinetica K sommata (in termini matematici) ad una *costante* tipica del corpo che è determinata dalla sua massa. Questa costante è associata a m ossia all'*esistenza stessa* del corpo: poiché si somma con l'energia cinetica K per formare l'energia totale E allora mc^2 sarà *anch'essa una forma di energia*, che chiameremo **energia a riposo**:

$$E_0 = mc^2 \quad (3.14)$$

Si impiega il termine *riposo* perché $E = E_0$ qualora $K = 0$ ossia E_0 rappresenta l'energia totale del sistema *in quiete* (è imposto un $\gamma = 1$).

Massa ed energia

Il lettore avrà sicuramente riconosciuto la (3.14) essendo probabilmente la formula scientifica più famosa e nota di tutti i tempi. Vale quindi la pena di intraprendere una discussione critica al riguardo.

Un dubbio che potrebbe sorgere, tipicamente nelle menti più matematiche, riguarda l'attribuzione stessa dell'equivalenza, ossia l'affermazione che energia e massa siano *fisicamente* la stessa cosa. La (3.14) infatti non afferma che l'energia è *uguale* alla massa bensì che *il valore* dell'energia a riposo di un corpo è equivalente *al valore* della sua massa moltiplicata per un fattore c^2 . Da questo punto di vista E_0 apparirebbe come una *misteriosa* forma di energia *nascosta* da qualche parte nel corpo (poiché E_0 è comunque sommata a E anche se $K > 0$, ossia viene *trasportata* nel moto del corpo), intrinsecamente legata alla massa dello stesso. Nulla può garantircelo, ma ci sembra ragionevole pensare che ciò non sia il caso. Infatti, se consideriamo E_0 e m come due entità fisiche separate, ciò significa (oltre al fatto che E_0 non avrebbe più nessun motivo di esistere solo in presenza di m) che esse potrebbero risiedere in due *luoghi* diversi. Ora, sono consapevole che al lettore possa apparire dubbia l'operazione di attribuzione di una posizione all'energia, e il fatto che non si dispone ad oggi di una sua definizione rigorosa non ci aiuta per niente. Però è anche lecito chiedersi *dove* essa si situi a grandi linee: ad esempio penso che nessuno possa seriamente affermare che l'energia cinetica di un corpo non si trovi nel corpo stesso a cui è attribuita, dal momento che la sua eventuale conversione in altre forme di energia si verifica nelle sue prossimità e non certo in regioni remote e casuali dell'Universo. Essendo E_0 esistente soltanto per la presenza di una m ed essendo probabilmente la sua località proprio nel corpo di massa m , allora l'interpretazione fisica più ragionevole che

possiamo dare è che questa energia si manifesta sotto forma di massa ovvero **la massa di un corpo e la sua energia a riposo sono la stessa faccia di un'unica medaglia cioè l'esistenza del corpo** [15].

Ma allora, se ciò è vero, ci chiediamo se ha effettivamente senso continuare ad impiegare il concetto di massa a scapito di convertire tutto in energia. In fisica delle particelle d'altronde questa operazione si svolge in parte da tempo: la massa di una particella viene spesso espressa nelle unità¹⁸ eV/c^2 . La ragione per cui continuiamo ad impiegare il kg è sostanzialmente il valore di c^2 , che aumenterebbe di circa *17 ordini di grandezza* il valore di m , cosa decisamente poco pratica nei calcoli solitamente presenti in fisica classica, che impieghiamo decisamente più spesso di quella relativistica dal momento che la prima è un'ottima approssimazione dell'Universo per basse velocità.

3.4.3 Conservazione dell'enermoto

Finalmente possiamo capire il significato della componente temporale $x_0 = m\gamma c$ dell'**enermoto** (parola inventata che combina *quantità di moto* ed *energia*) dal momento che $x_0 = E/c$.

Ne consegue che **l'enermoto si conserva nel tempo in un sistema isolato**. Questo perché abbiamo modificato la definizione di \vec{p} tale da renderlo conservato mentre la conservazione dell'energia del sistema ci appare *assolutamente indiscutibile* essendo probabilmente il principio più importante di tutta la fisica. Possiamo anche vedere quanto detto osservando cosa accade durante la somma degli enermoti:

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{E_i}{c} \vec{p}_i \right] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{c} \\ \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \end{bmatrix}.$$

Le componenti temporali si sommano esattamente come sommeremmo tutte le energie del sistema a meno di un fattore c^{-1} mentre le componenti spaziali si sommano esattamente come sommeremmo tutti i vettori quantità di moto che, è garantito da un principio fisico, sommati danno un vettore costante nel tempo.

Si prega di notare che **la somma delle energie non implica la somma delle masse**, anche se il sistema fisico non è composto da porzioni singolarmente in moto ossia nel caso in cui tutte le energie siano a riposo. Questo perché tra le varie componenti del sistema vi possono essere delle *interazioni*, ad esempio di legame, richiedenti o liberanti energia alla loro formazione o distruzione [2]. Si pensi al caso del nucleo atomico: la somma delle singole masse dei suoi nucleoni è *maggior*e della massa totale del nucleo stesso [1]. Infatti il legame tra protoni e neutroni libera una certa *energia di legame* alla sua formazione ovvero ne richiede per il suo scioglimento: poiché l'energia a riposo di un corpo si manifesta attraverso la sua massa ne consegue che, se forniamo ad un nucleo atomico una quantità di energia sufficiente alla rottura di tutti i legami mantenendo alla fine i nucleoni comunque in quiete, la massa di ognuno di questi si vede aumentare essendo l'energia di un sistema fisico isolato appunto conservata.

¹⁸Si ricorda che $1eV$, *un elettronvolt*, equivale all'energia richiesta da un elettrone per superare una differenza di potenziale di esattamente $1V$.

3.4.4 Il triangolo dell'enermoto

Pitagora delle energie

Proviamo ora a calcolare la pseudo norma dell'enermoto, che dovrebbe essere invariante:

$$\|\vec{P}\| = \frac{E^2}{c^2} - \sum_{i=1}^3 p_i^2 = (m\gamma c)^2 - \|\vec{p}\|^2 = (m\gamma c)^2 - m^2\gamma^2\|\vec{v}\|^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = (mc)^2.$$

Se impieghiamo il primo sviluppo con l'ultimo, riordinando, otteniamo l'*utilissima* [1]:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \quad (3.15)$$

È anche possibile arrivarci seguendo un percorso (anch'esso di mia invenzione) decisamente più lungo ma probabilmente più chiaro ed intuitivo essendo assai difficile per noi, abitanti dello spazio tridimensionale, *vedere* una pseudo norma derivante da un vettore avente base quadridimensionale. Sappiamo che $p = \|\vec{p}\|$ è funzione di $v = \|\vec{v}\|$ e m esattamente come K , pertanto combinando le espressioni di p e K dovremmo riuscire ad eliminare una delle due variabili: in questo caso sceglieremo v . Riordinando p si ha¹⁹:

$$\begin{aligned} p &= \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)p^2 &= m^2v^2 \\ p^2 &= v^2 \left(m^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2\right) \\ v &= \frac{p}{\sqrt{m^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Riordinando K , invece, si ottiene:

$$\begin{aligned} K &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \\ \frac{(mc^2)^2}{(K + mc^2)^2} &= 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \frac{(K + mc^2)^2 - (mc^2)^2}{(K + mc^2)^2} \end{aligned}$$

¹⁹È stata volutamente trascurata la discussione del segno durante l'elevamento a potenza di 1/2 poiché non è utile alla dimostrazione.

$$v = \frac{c\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}{(K + mc^2)}.$$

A questo punto non ci resta che eguagliare le due espressioni di v :

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{m^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}} &= \frac{c\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}{(K + mc^2)} \\ p^2(K + mc^2)^2 &= c^2(K^2 + 2Kmc^2) \left(m^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2\right) \\ (pK)^2 + (pmc^2)^2 + 2Km(pc)^2 &= (cKm)^2 + (pK)^2 + 2Km^3c^4 + 2Km(pc)^2 \\ p^2m^2c^4 &= m^2c^2K^2 + 2Km^3c^4. \end{aligned}$$

Pertanto [1]:

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2 \quad (3.16)$$

A noi però non interessa avere K bensì E , pertanto sostituendo con $K = E - mc^2$ finalmente otteniamo:

$$(pc)^2 = E^2 + m^2c^4 - 2Emc^2 + 2Emc^2 - 2m^2c^4 = E^2 - m^2c^4.$$

A ben osservare la (3.15) vi possiamo vedere il teorema di Pitagora dove E rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa e mc^2 con pc la lunghezza dei due cateti del triangolo rettangolo, come in figura 3.20 [1].

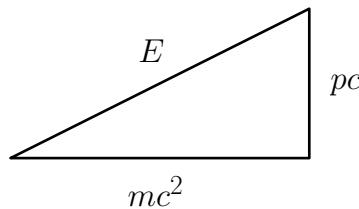


Figura 3.20. Il triangolo dell'enermoto.

Possiamo geometricamente dedurre alcune interessanti considerazioni:

- Qualsiasi $E > 0$ sia scelta, essa non sarà mai composta soltanto da energia cinetica per un corpo dotato di una massa m non nulla.
- Se $p = 0$, ossia per un corpo massivo in quiete, $E = mc^2$ ossia $E = E_0$.
- Se $m = 0$, ossia per un corpo dotato di massa nulla, $E = pc$ [3].
- Il caso in cui $E = 0$ è possibile soltanto per un corpo di massa e quantità di moto nulli, ossia esclusivamente per *il niente*.

La terza considerazione merita sicuramente una discussione più approfondita.

La massa della luce

Possiamo definire in molti modi il concetto di *massa*, sia operativamente che algebricamente. Una possibile definizione potrebbe essere:

$$m = \frac{\sqrt{\|\vec{P}\|}}{c}$$

Ed infatti vediamo molto bene come m risulta invariante dal momento che c è una costante mentre la pseudo norma dell'enermoto, sempre strettamente positiva per un corpo massivo, risulta anch'essa invariante. Il fatto che possiamo porre la pseudo norma dell'enermoto sotto radice senza temere l'apparizione di unità immaginarie è garantito, sempre assumendo $m \neq 0$, dalla disequazione seguente:

$$\frac{E}{c} \geq p \quad \rightarrow \quad m\gamma c \geq m\gamma v \quad \rightarrow \quad c > v.$$

Essa è sempre verificata per un corpo massivo essendo, come ci è ormai noto, c il limite universale di velocità del nostro Universo.

La luce si propaga nello spazio a velocità c , pertanto ne consegue che essa *non può essere massiva* poiché, se ciò fosse il caso, la sua velocità sarebbe limitata inferiormente a c ovvero tale assunzione invaliderebbe l'ipotesi iniziale. È ora importante che il lettore presti il più grande grado di scetticismo possibile riguardo all'interpretazione di questo ragionamento. Infatti, si potrebbe essere portati a pensare che la luce *non ha massa* essendo non massiva: d'altronde ciò appare logico se assumiamo la luce come un fenomeno ondulatorio. Affermare *l'inesistenza* di tale massa equivale ad affermare l'inesistenza della massa del campo elettromagnetico, e ciò pare assolutamente coerente. Ma proviamo ora, per un breve istante, ad immaginarci la luce come fenomeno quantico ossia supponiamo l'esistenza di minuscoli quanti di luce chiamati *fotoni*: poiché esistono essi devono essere in un qualche modo *rilevabili*, ad esempio attraverso scambi di energia durante l'interazione con particelle massive. Deduciamo dunque che questi fotoni dispongono di un'energia totale E . Se essi possono interagire con particelle massive aventi enermoti allora possiamo ragionevolmente ipotizzare che anche i fotoni dispongono di un certo enermoto poiché, se non fosse il caso, non saremmo in grado di valutare l'interazione tra fotoni e materia prima e dopo l'urto tra queste due particelle mediante l'enermoto del sistema. In linea del tutto speculativa pertanto siamo giunti a congetturare l'esistenza dell'enermoto del fotone: non ci resta ora che determinare la sua *forma*. L'enermoto deriva dalla quadri velocità che deriva a sua volta dalla quadri posizione: abbiamo già incontrato i vari tipi di quadri vettori dello spaziotempo ossia *time-like*, *space-like* e *light-like*. La quadri posizione di un fotone è per qualsiasi referenziale un quadri vettore *light-like* pertanto, mantenendo sempre il medesimo verso e direzione di $\Delta\vec{R}$, anche il suo enermoto è di tipo luce. Abbiamo dunque una pseudo norma nulla ossia **una massa pari a zero, non inesistente**. Ponendo $m = 0$ nella (3.15) oppure, per i lettori *più matematici*, richiedendo $\|\vec{P}\| = 0$ troviamo:

$$p = \frac{E}{c} \quad (3.17)$$

La luce, benché di massa nulla, possiede una quantità di moto! I lettori *giustamente* più scettici potrebbero obiettare contro quest'ultima affermazione mostrando come (3.10) e (3.13) divergano a $+\infty$ per $v \rightarrow c$. Il punto è che (3.10) e (3.13) sono state ricavate con l'esplicita assunzione $m \neq 0$ ossia $v < c$ e pertanto esse non possono essere applicate al caso preso in esame del fotone. Come ultima cosa ricordo, senza dimostrarlo, che l'energia di un fotone assegnato ad una frequenza f è $E = hf$ dove h , detta **costante di Planck**, vale approssimativamente $6.626 \cdot 10^{-32} Js$ [3].

3.4.5 Evidenza sperimentale: effetto Compton

Nel 1922 il fisico statunitense Arthur Holly Compton fu il primo a rendersi conto di come una descrizione *quantistica* della luce potesse perfettamente spiegare un effetto di *scattering* da lui osservato. Bombardando un pezzo di grafite con raggi X ed osservando con un rivelatore angolarmente mobile la radiazione diffusa a seguito della collisione dei raggi con gli elettroni degli atomi di C , Compton constatò che la radiazione diffusa radialmente non era costituita prevalentemente dalla medesima frequenza e lunghezza d'onda dei raggi incidenti, come avrebbe previsto la teoria classica elettromagnetica. Piuttosto osservò, a seconda dell'angolo α in cui veniva posto il rivelatore, che si rilevava **un secondo picco di intensità per una lunghezza d'onda maggiore rispetto a quella originale** prima dello scattering. Una spiegazione coerente di questo fenomeno poteva essere fornita esclusivamente assumendo i raggi X come composti da quanti, i *fotoni* appunto: per questo motivo l'effetto Compton è considerato come un'evidenza sperimentale storicamente decisiva nell'accettazione della teoria quantistica della luce [2].

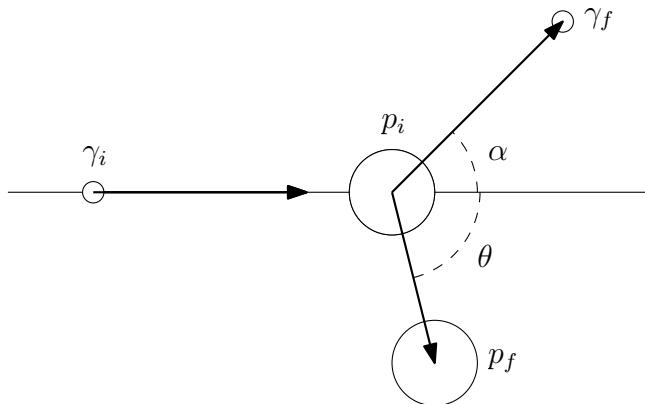


Figura 3.21. Un fotone γ collide con una particella massiva p . A seconda del caso le due particelle formano angoli α e θ rispetto alla direzione incidente iniziale del fotone.

La seguente dimostrazione è stata tratta da [3] ed è stata modificata soltanto negli ultimi tre passaggi. Immaginiamoci dunque il sistema fisico schematizzato in figura 3.21

ossia consideriamo la collisione di un fotone con una particella qualsiasi²⁰ di massa m . Essendo l'enermoto una grandezza fisica conservata deve valere:

$$\vec{P}_{p,i} + \vec{P}_{\gamma,i} = \vec{P}_{p,f} + \vec{P}_{\gamma,f}.$$

Poiché non vogliamo trattare direttamente le singole componenti essendo matematicamente abbastanza noioso decidiamo di procedere in modo tale da evitare il maggior numero di calcoli possibili. A tal scopo cercheremo di eliminare $\vec{P}_{p,f}$ dalla precedente somma di quadriavettori poiché in essa è contenuto l'angolo θ e la velocità finale \vec{v} della particella, dati difficilmente misurabili ma soprattutto inutili come vederemo in seguito.

Una relazione di uguaglianza rimane vera anche dopo l'elevamento al quadrato di entrambi i membri presenti:

$$(\vec{P}_{p,i} + \vec{P}_{\gamma,i})^2 = (\vec{P}_{p,f} + \vec{P}_{\gamma,f})^2$$

$$\vec{P}_{p,i}^2 + 2\vec{P}_{p,i}\vec{P}_{\gamma,i} + \vec{P}_{\gamma,i}^2 = \vec{P}_{p,f}^2 + 2\vec{P}_{p,f}\vec{P}_{\gamma,f} + \vec{P}_{\gamma,f}^2.$$

Ora, elevare al quadrato un quadriavettore equivale a calcolarne la sua pseudo norma. Per i fotoni essa è nulla mentre per la particella essa è equivalente sia nelle condizioni iniziali che finali trattandosi di $(mc)^2$, pertanto si elide:

$$\vec{P}_{p,i}\vec{P}_{\gamma,i} = \vec{P}_{p,f}\vec{P}_{\gamma,f}.$$

Mettiamo da parte questa uguaglianza e torniamo alla somma totale di enermoti. Moltiplichiamo sia a destra che a sinistra per il quadriavettore $\vec{P}_{\gamma,f}$ in modo tale da avere:

$$\vec{P}_{\gamma,f}(\vec{P}_{p,i} + \vec{P}_{\gamma,i}) = \vec{P}_{\gamma,f}(\vec{P}_{p,f} + \vec{P}_{\gamma,f})$$

$$\vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{p,i} + \vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{\gamma,i} = \vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{p,f} + \vec{P}_{\gamma,f}^2.$$

Per le stesse considerazioni di prima:

$$\vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{p,f} = \vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{p,i} + \vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{\gamma,i}.$$

Riprendiamo l'uguaglianza messa da parte e combiniamola con questa:

$$\vec{P}_{p,i}\vec{P}_{\gamma,i} = \vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{p,i} + \vec{P}_{\gamma,f}\vec{P}_{\gamma,i}.$$

Molto bene, siamo riusciti ad eliminare algebricamente $\vec{P}_{p,f}$! Essendo arrivati al massimo grado di semplificazione possibile, finalmente poniamo per iscritto le componenti dei

²⁰Si vuole generalizzare matematicamente il fenomeno che nella pratica coinvolge soltanto un elettrone supposto, benché orbitante nelle prossimità del nucleo atomico, approssimativamente in quiete rispetto alla velocità di γ .

quadrivettori. Ricordando che per il fotone p deve essere scelta tale per cui $E = pc$ si ha:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{\gamma,f} \vec{P}_{\gamma,i} &= \begin{bmatrix} \frac{hf'}{c} \\ \frac{hf'}{c} \cos(\alpha) \\ \frac{hf'}{c} \sin(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{hf}{c} \\ \frac{hf}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{h^2 f f'}{c^2} (1 - \cos(\alpha)), \\ \vec{P}_{\gamma,f} \vec{P}_{p,i} &= \begin{bmatrix} \frac{hf'}{c} \\ \frac{hf'}{c} \cos(\alpha) \\ \frac{hf'}{c} \sin(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = mh f', \\ \vec{P}_{p,i} \vec{P}_{\gamma,i} &= \begin{bmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{hf}{c} \\ \frac{hf}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = mh f.\end{aligned}$$

Notare le componenti di $\vec{P}_{\gamma,f}$: α è l'angolo di emissione del fotone ad energia ridotta avendone ceduta in parte all'elettrone, ora in moto, a seguito dell'urto elastico. Curiosa la presenza dell'identità $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ all'interno della pseudo norma di $\vec{P}_{\gamma,f}$. Inseriamo i risultati nella somma precedente per ottenere:

$$\begin{aligned}\frac{h^2 f f'}{c^2} (1 - \cos(\alpha)) &= mh (f - f') \\ \frac{h}{m \lambda \lambda'} (1 - \cos(\alpha)) &= \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \\ \frac{h}{mc} (1 - \cos(\alpha)) &= \lambda' - \lambda.\end{aligned}$$

Chiameremo **lunghezza d'onda di Compton** relativa alla particella p la quantità [3]:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad (3.18)$$

Pertanto, sostituendo, la precedente relazione, nel caso in cui la particella coinvolta nell'urto fosse un elettrone, diventerebbe:

$$\Delta\lambda = \lambda_e (1 - \cos(\alpha)).$$

Come si può notare $\Delta\lambda$, detto *spostamento di Compton*, dipende esclusivamente da α e non da altri fattori quali *la frequenza dell'onda incidente o dal materiale impiegato come bersaglio*²¹, in accordo con i risultati ottenuti da Compton stesso. Il massimo $\Delta\lambda$ raggiungibile risulta $2\lambda_e$ qualora $\alpha = \pi$ ossia nel caso in cui γ collida frontalmente con e^- e inverta immediatamente il verso di marcia senza alterare la sua direzione: si capisce chiaramente che in questo caso l'energia K ceduta all' e^- è appunto massima.

Infine, è interessante osservare come la (3.18) può essere riscritta impiegando $\lambda f = c$:

$$\frac{c}{f_c} = \frac{h}{mc} \quad \rightarrow \quad mc^2 = h f_c.$$

²¹Essendo gli elettroni presenti attorno praticamente qualsiasi nucleo atomico.

L'onda di Compton equivale pertanto, in energia trasportata $E = hf_c$, all'energia a riposo della particella incidente $E_0 = mc^2$.

Riassumendo Se vogliamo mantenere valido il principio di conservazione della quantità di moto anche in meccanica relativistica, dobbiamo modificare *la definizione stessa* di quantità di moto oppure accettare il concetto di *massa relativistica*. Sono state avanzate diverse argomentazioni a favore della prima opzione ed è stata introdotta una nuova grandezza fisica, l'**enermoto**, capace di contenere al suo interno l'informazione della quantità di moto e dell'energia totale. Parlando di energie, si è parlato del significato fisico dell'**equivalenza massa/energia** e si è proceduto alla derivazione di interessanti relazioni matematiche. Infine, dopo aver discusso la natura dell'enermoto del fotone, è stato descritto l'effetto Compton, interamente spiegabile con la valutazione della variazione dell'enermoto di sistema.

3.5 Quadriaccelerazione

Seguendo gli stessi obiettivi imposti per la derivazione di \vec{U} , ossia la presenza dell'ordinaria velocità variante e contemporaneamente il mantenimento di una pseudo norma invariante, tenendo conto delle considerazioni già effettuate sul tempo proprio λ vogliamo ora ricavare l'espressione matematica della quadriaccelerazione \vec{A} . *Nulla di più facile* probabilmente esclamerà il lettore visto che, come abbiamo già fatto per \vec{U} , ci basterà derivare rispetto a λ . Proviamo quindi ad applicare quanto appena detto ricordandoci il solito vecchio trucco di definire $\vec{U}(\lambda) = \vec{U}'(t(\lambda))$:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \vec{U}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \vec{U}'(t(\lambda)) = \frac{d}{dt(\lambda)} \left[\begin{matrix} \gamma'(t(\lambda)) c \\ \gamma'(t(\lambda)) \vec{v}'(t(\lambda)) \end{matrix} \right] \cdot \frac{dt(\lambda)}{d\lambda} \\ &= \left[\begin{matrix} c\dot{\gamma}'(t(\lambda)) \gamma(\lambda) \\ \dot{\gamma}'(t(\lambda)) \gamma(\lambda) \vec{v}(\lambda) + \vec{a}(\lambda) \gamma(\lambda)^2 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} c\dot{\gamma}(\lambda) \\ \dot{\gamma}(\lambda) \vec{v}(\lambda) + \vec{a}(\lambda) \gamma(\lambda)^2 \end{matrix} \right].\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio implica la sostituzione di $\dot{\gamma}'(t(\lambda)) \gamma(\lambda)$ con $\dot{\gamma}(\lambda)$. Essa è giustificata studiando la derivazione della prima componente della quadrivelocità:

$$U_0 = U'_0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} U_0 = \dot{\gamma}(\lambda) c \quad \frac{d}{d\lambda} U'_0 = \dot{\gamma}'(t(\lambda)) \gamma(\lambda).$$

Non ci resta ora che derivare il fattore di Lorentz! Poniamo $\|\vec{v}\| = v(\lambda)$ che sarebbe equivalente a $\sqrt{v_x(\lambda)^2 + v_y(\lambda)^2 + v_z(\lambda)^2}$ e lanciamoci nei calcoli:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\lambda) &= \frac{-1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{v(\lambda)}{c} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-1}{c^2} \cdot 2v(\lambda) \cdot \frac{dv'(t(\lambda))}{dt(\lambda)} \cdot \frac{dt(\lambda)}{d\lambda} \\ &= \frac{\gamma^3 v(\lambda)}{c^2} \cdot \frac{1}{2v(\lambda)} \cdot 2\gamma(\lambda) (v_x(\lambda)a_x(\lambda) + v_y(\lambda)a_y(\lambda) + v_z(\lambda)a_z(\lambda)) \\ &= \gamma(t)^4 \frac{\vec{v}(\lambda) \cdot \vec{a}(\lambda)}{c^2}.\end{aligned}$$

Infatti il prodotto scalare tra \vec{v} e \vec{a} dà proprio il risultato della derivazione! Infine, applicando quanto ricavato al quadrivettore precedente, otteniamo

$$\vec{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \gamma(\lambda)^4 \cdot \frac{\vec{v}(\lambda) \cdot \vec{a}(\lambda)}{c} \\ \gamma(\lambda)^4 \cdot \frac{\vec{v}(\lambda) \cdot \vec{a}(\lambda)}{c^2} \vec{v}(\lambda) + \vec{a}(\lambda) \gamma(\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

e quindi, pulendo un po' la relazione (sappiamo infatti che tutte le grandezze sono funzioni di λ e che γ si riferisce a $\|\vec{v}\|$), otteniamo la **quadriaccelerazione**:

$$\vec{A} = \gamma^2 \begin{bmatrix} \gamma^2 \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{a} \\ \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v_x + a_x \\ \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v_y + a_y \\ \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v_z + a_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.6 Quadriforza

3.6.1 Derivazione

Analogamente alla meccanica classica, definiamo la quadriforza come la derivata prima rispetto a λ dell'enermoto (la versione quadrivettoriale della quantità di moto) moltiplicata per la massa del corpo [3]:

$$\vec{F}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \vec{P}(\lambda) = m \frac{d}{d\lambda} \vec{U}(\lambda) = m \vec{A}(\lambda),$$

ovvero basta rifarsi alla definizione di quadriaccelerazione e moltiplicare il tutto per m . Purtroppo, come abbiamo appena visto, l'espressione algebrica di \vec{A} è assai pesante: sarebbe magnifico se riuscissimo a semplificare l'espressione di \vec{F} ossia staccarci completamente da \vec{A} . Con un *saggio* impiego della matematica questo desiderio può diventare realtà [3].

Immaginiamoci un corpo sottoposto ad una quadriforza \vec{F} : tra gli infiniti referenziali scegliamone uno solidale per un breve istante di tempo al corpo in accelerazione. Per l'osservatore di tale sistema di riferimento il corpo pare in quiete benché in accelerazione essendo sottoposto, anche in quel breve istante, ad una forza. Si avranno dunque due quadrivettori \vec{U} e \vec{A} non nulli ma assai particolari. Infatti, calcolando il pseudo prodotto scalare tra di loro, si ha:

$$\vec{U}' \cdot \vec{A}' = \begin{bmatrix} c \\ \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}(\lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{U}' \cdot \vec{F}' = 0.$$

Essendo nullo possiamo scalare \vec{A} come vogliamo, quindi anche con m , ottenendo di fatto \vec{F} . Il pseudo prodotto scalare è un invariante relativistico: ne consegue che per *qualsiasi osservatore* $\vec{U}' \cdot \vec{F}'$ risulta nullo, in qualsiasi istante di tempo preso in considerazione. A

questo punto cerchiamo il momento opportuno, durante la derivazione di \vec{P} , per impiegare quanto appena scoperto:

$$\vec{F}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \vec{P}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \vec{P}'(t(\lambda)) = \frac{d}{dt(\lambda)} \begin{bmatrix} m\gamma'(t(\lambda))c \\ m\gamma'(t(\lambda))\vec{v}'(t(\lambda)) \end{bmatrix} \cdot \frac{dt(\lambda)}{d\lambda} = \begin{bmatrix} mc\dot{\gamma}(\lambda) \\ \gamma(\lambda)\vec{f}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Notare la sostituzione con \vec{f} di cui conosciamo l'espressione avendola già derivata per l'enermoto. Quindi:

$$\vec{U} \cdot \vec{F} = \begin{bmatrix} \gamma(\lambda)c \\ \gamma(\lambda)\vec{v}(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} mc\dot{\gamma}(\lambda) \\ \gamma(\lambda)\vec{f}(\lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad mc\dot{\gamma}(\lambda) = \gamma(\lambda) \frac{\vec{v}(\lambda) \cdot \vec{f}(\lambda)}{c}.$$

Sostituendo nella prima componente di \vec{F} per ottenere la **quadriforza** [3]:

$$\vec{F} = \gamma \begin{bmatrix} \vec{f} \cdot \vec{\beta} \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

3.6.2 I principi della dinamica

La formulazione della quadriforza e, più in generale, le conseguenze dei due postulati (vale a dire l'intera teoria della relatività ristretta) ci costringono a dover rivedere i tre principi fondamentali della dinamica [13].

I principio

Resta invariato poiché non dipende in alcun modo dall'osservatore. L'inerzia è e resta una proprietà *intrinseca* dei corpi.

II principio

Deve essere modificato in uno dei seguenti modi:

$$\vec{F} = m\vec{A} \quad \text{o} \quad \vec{f} = \frac{d}{dt}\vec{p}.$$

Infatti il principio originale non teneva conto della *velocità limite* dell'Universo.

III principio

Deve essere modificato specificando chiaramente che la forza di reazione (scatenata da quella di azione) non agisce *istantaneamente* dato che l'informazione non viaggia a velocità infinite.

Riassumendo Partendo dalla definizione di quadri velocità ed enermoto abbiamo derivato l'espressione della quadriaccelerazione e quella della quadriforza. In particolare, quest'ultima impone la modifica del secondo principio della dinamica in modo da renderlo compatibile con la teoria della relatività ristretta. La stessa operazione è stata eseguita per il terzo principio della dinamica poiché esso violava chiaramente la velocità limite universale della propagazione dell'informazione.

3.7 Paradossi

“Ebbi molta difficoltà a capire quale fosse la natura del contrasto.”

Albert Einstein

La teoria della relatività ristretta, come abbiamo avuto modo di capire lungo le ultime ottanta pagine, distrugge completamente alcune nostre concezioni della realtà, ossia ci obbliga a cambiare radicalmente la nostra visione dell'Universo. Se da un lato questa operazione è evidentemente vantaggiosa, perché fornisce spiegazioni di determinati fenomeni altrimenti inspiegabili con le teorie classiche e concede all'uomo una più profonda consapevolezza del comportamento dell'Universo in cui vive, dall'altro infrange sogni (come l'esistenza di un mezzo di comunicazione istantaneo) e distrugge convinzioni personali sui cui abbiamo costruito la nostra intera esistenza.

Per questi motivi, agli albori della fisica moderna, ossia all'inizio del XX secolo, non risultò così facile accettare le conseguenze *benché corrette* della teoria proposta nel 1905 da Albert Einstein [21]. Si cercò a più riprese di demolire in un qualche modo l'intera teoria andando a cercare contraddizioni logiche: in realtà quelle che apparivano come tali erano semplicemente *paradossi* nel senso di *para doxa* (contro l'opinione comune) ossia contro l'intuito, che è esattamente il problema principale dell'accettazione della teoria.

In questo capitolo andremo a vedere alcuni di questi paradossi e mostrerò come in realtà essi seguano *perfettamente* la relatività ristretta senza alcuna violazione della stessa. Il paradosso del bastone e del puntatore laser sono di mia invenzione, mentre quello della scala e dei due gemelli appartengono alla cultura popolare [2].

3.7.1 Il paradosso del bastone

Paradosso Immaginiamoci un bastone di legno lungo esattamente 1 anno luce posto in un universo completamente vuoto. Isacco ed il suo amico Boiler decidono di andare a porsi ad una delle due estremità del lunghissimo bastone: Isacco, prima di partire, comunica a Boiler che una volta giunto alla sua estremità applicherà una forza sul bastone, spostandolo, in modo tale da comunicare a Boiler la sua presenza alla detta estremità. In questo modo Isacco trasmette a Boiler un informazione *istantaneamente*.

Soluzione La velocità massima di qualsiasi cosa nell'Universo è c così come quella dell'informazione. Questo significa che la situazione descritta è impossibile. Quando Isacco applicherà una forza alla sua estremità del bastone, essa *si propagherà* lungo lo stesso ad una velocità sicuramente inferiore a c (probabilmente molto vicina a quella del suono),

pertanto Boiler riceverà l'informazione dell'applicazione della forza dopo più di un anno dal suo invio effettivo.

3.7.2 Il paradosso del puntatore laser

Paradosso Alice, una ragazzina aspirante astronomo, ama molto osservare il cielo stellato. Recentemente ha acquistato un nuovo puntatore laser per meglio spiegare ai suoi genitori le figure delle costellazioni. Una sera Alice decide di puntare il suo laser contro la Luna piena e, con una rapida rotazione del polso, sposta il puntino rosso del suo laser lungo tutta la superficie lunare nel giro di qualche centesimo di secondo, facendo viaggiare questo puntino a velocità maggiori di quelle della luce.

Soluzione In tutto il fenomeno descritto nessun fotone viaggia a velocità superiori a c . Il moto del puntino rosso propriamente parlando non ne è uno poiché è fondamentalmente costituito dal susseguirsi delle differenziate posizioni (possiamo anche dire *eventi*) in cui i fotoni emessi dal puntatore vanno a riflettere sulla superficie lunare. Ma questi fotoni impiegheranno sempre e comunque un certo tempo per recarsi dal puntatore alla Luna ed infatti lo spostamento apparente del puntino risulta ritardato dall'inizio della rotazione del polso di Alice così come risulta prolungato quando questa smette tale rotazione, esattamente come quando il padre di Alice varia rapidamente la direzione di irrigazione della canna dell'acqua quando innaffia il suo giardino ed osserva interessanti *curve d'acqua*.

3.7.3 Il paradosso della scala

Paradosso Boiler ha appena letto la parte teorica di questo LAM ma non sembra del tutto convinto di quanto ha appreso. In particolare Boiler è molto scettico riguardo la contrazione delle lunghezze. Decide quindi di verificare sperimentalmente tale fenomeno con l'aiuto di una vecchia scala e del garage del suo amico Isacco. Essi si mettono d'accordo sull'esperimento che si apprestano ad eseguire: Boiler correrà come mai ha fatto prima (ovvero ad una velocità prossima a c) assieme alla scala che, secondo le previsioni relativistiche, dovrebbe contrarsi per Isacco, in quiete rispetto al suo garage di cui ha aperto la porta frontale e posteriore in modo tale da permettere il transito di Boiler. La scala, misurata in quiete assieme al garage, è più lunga di quest'ultimo di un fattore γ ed Isacco ha ricevuto l'ordine da Boiler di chiudere *contemporaneamente* entrambe le porte non appena questo sarà, assieme alla scala, interamente al suo interno. Essendo secondo Isacco la scala contratta di un fattore γ^{-1} l'operazione dovrebbe risultare alquanto semplice: chiuderà le due porte esattamente quando le due estremità della scala (contratta) si situeranno all'inizio ed alla fine del garage. Per Boiler invece l'esperimento sembra fisicamente impossibile dal momento che nel suo referenziale è il garage a contrarsi, impedendo pertanto la chiusura contemporanea delle porte.

Soluzione Una delle conseguenze più controtuitive di tutta la teoria della relatività ristretta è la *caduta del concetto di simultaneità assoluta*, come si può chiaramente osservare nel diagramma 3.22. I due eventi E_1 e E_2 simultanei per Isacco, ossia la chiusura delle due porte del suo garage, *non lo saranno per Boiler* dal momento che essi, spazialmente separati, vengono trasformati secondo la trasformazione di Lorentz che, come abbiamo visto,

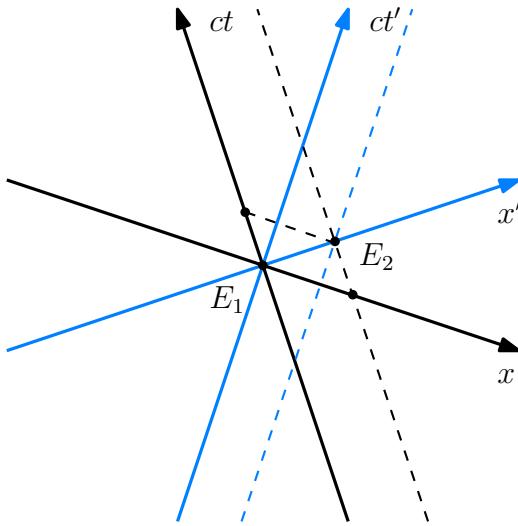


Figura 3.22. Il referenziale del garage (azzurro) e quello della scala (nero). Si può chiaramente vedere le contrazioni sia della scala che del garage come pure la rottura della simultaneità degli eventi E_1 e E_2 nel referenziale nero.

tiene conto di *tutte* le coordinate spaziotemporali nelle trasformazioni di *ogni* coordinata spaziotemporale²².

3.7.4 Il paradosso dei due gemelli

Paradosso Alice e sua sorella Barbara sono gemelle, vale a dire che sono nate lo stesso giorno e quindi hanno la stessa età in qualsiasi momento sulla Terra. Alice ha da tempo terminato i suoi studi di astrofisica e lavora presso l'ESA, che di recente gli ha proposto l'opportunità di partecipare ad una missione spaziale di indefinita durata. La missione consiste nel recupero di un'importante sonda esploratrice andata persa in una remota località del sistema solare: Alice vi si dovrà recare e raccogliere la detta sonda, il tutto seguendo un percorso perfettamente lineare. Si assuma il moto dell'astronave uniformemente accelerato esattamente come illustrato in figura 3.23. Poiché Alice è in moto rispetto a Barbara, rimasta sulla Terra, questa conclude che la prima, in accordo con le previsioni relativistiche, sarà *invecchiata di meno* rispetto a se stessa. Ma anche secondo Alice Barbara è in moto e pertanto conclude, esattamente come prima, che essa sarà invecchiata di meno rispetto a se stessa. Al ritorno di Alice sulla Terra *ci è dunque impossibile stabilire chi è più giovane* tra lei e Barbara e, dal momento che questa situazione è del tutto impossibile, concludiamo che non può in nessun caso verificarsi ossia la dilatazione temporale è falsa e non si verifica mai in natura.

Soluzione È assolutamente vero che Barbara vede Alice muoversi *esattamente* come Alice vede Barbara farlo, in perfetto accordo con il principio di relatività. Tutta la teoria della relatività ristretta è fondata sui *referenziali inerziali*: ora, possiamo correttamente

²²Ciò non risulta vero soltanto nella configurazione standard, dove le coordinate spaziali perpendicolari al moto y e z rimangono inalterate nella trasformazione.

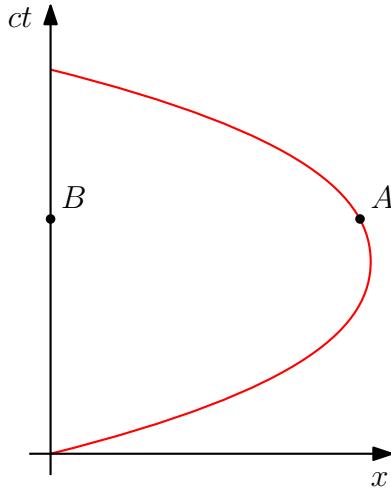


Figura 3.23. Linee d'universo di Alice (A) e di Barbara (B), che giace lungo l'asse dei tempi di questo diagramma.

affermare che *entrambi* i referenziali, quello di Barbara e quello di Alice, siano inerziali? Dal momento che il moto osservato è uniformemente accelerato, assolutamente no! Il referenziale di Barbara è (approssimativamente) inerziale ma non quello di Alice: quando quest'ultima decelera in prossimità della sonda esploratrice potrà perfettamente verificare il principio di inerzia all'interno della sua navicella per mezzo di *forze inerziali*, cosa che non constaterà Barbara sulla Terra. Questo significa che, da un punto di vista dell'applicabilità della teoria, possiamo impiegare la legge di dilatazione temporale soltanto nel referenziale di Barbara essendo l'unico dei due inerziale: con la sola teoria della relatività ristretta non possiamo dire assolutamente nulla per quanto riguarda quello di Alice.

Barbara dalla Terra misura il tempo di viaggio di Alice come Δt . Ora, il tempo trascorso per Alice non sarà $\Delta t/\gamma$ visto che il moto non è uniforme ossia γ non è costante nel tempo (sia di Barbara che di Alice): dobbiamo quindi trovare un altro modo per applicare la (2.2). A questo punto possiamo risolvere il problema in due modi: uno a carattere matematico ed uno a carattere fisico.

Risoluzione fisica

La risoluzione seguente è stata ampliata, giustificata e chiarita partendo dall'originale [11]. Immaginiamoci, contrariamente a quanto abbiamo sempre fatto in questo LAM, che γ sia funzione di t e non λ potendo considerare soltanto il referenziale di Barbara. Abbiamo già dimostrato come $\gamma = dt/d\lambda$ pertanto un intervallo di tempo infinitesimo $d\lambda$ di Alice equivale ad un intervallo di tempo infinitesimo $dt/\gamma(t)$ dove dt è il tempo infinitesimo di Barbara. Il tempo trascorso per Alice equivale dunque alla somma degli infiniti $d\lambda = dt/\gamma(t)$, che possiamo calcolare integrando:

$$\Delta\lambda = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta(t)^2} dt.$$

In realtà questa integrazione, che somma le *contrazioni* temporali infinitesime dovute al moto (quindi alla velocità) di Alice, è esclusivamente giustificata se assumiamo per vera la seguente congettura [25]:

Ipotesi degli orologi

Un orologio solidale ad un sistema di riferimento non inerziale può essere influenzato soltanto dalla sua velocità istantanea ossia non può essere influenzato dalla sua accelerazione.

In pratica, dunque, quello che facciamo con l'integrazione è suddividere il referenziale non inerziale di Alice in *un'infinità di referenziali inerziali* per un istante infinitesimo dt per poi andare ad applicare la versione infinitesimale della (2.2). Dalla definizione di $\beta(t)$ risulta sempre valida²³ $|\beta(t)| < 1$, quindi sarà sempre vera anche $\beta(t)^2 < 1$ così come $0 < \sqrt{1 - \beta(t)^2} \leq 1$. Segue che il *valore massimo* di questo integrale definito è $(1 \cdot \Delta t) = \Delta t$, come si può chiaramente dedurre da figura 3.24. Pertanto, essendo necessariamente $\Delta t \geq \Delta\lambda$, **Barbara invecchierà di più che Alice**.

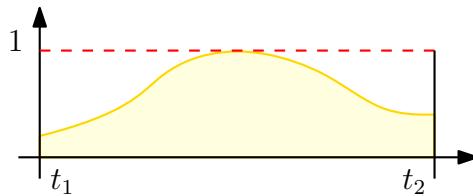


Figura 3.24. Grafico di una funzione $\sqrt{1 - \beta(t)^2}$ con la sua rispettiva area sottesa equivalente in valore numerico a $\Delta\lambda$.

Risoluzione matematica

Essendo $\gamma^{-1}(t)$ la derivata prima di $\lambda(t)$ rispetto alla variabile t , $\lambda(t)$ sarà una primitiva di $\gamma(t)^{-1}$ e pertanto l'insieme delle primitive $\lambda(t)$ è dato da:

$$\lambda(t) = \int \gamma(t)^{-1} dt.$$

Impiegando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\Delta\lambda = \lambda(t_2) - \lambda(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t)^{-1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}(t)}{c}\right)^2} dt.$$

Ripetendo le medesime considerazione illustrate nella risoluzione fisica giungiamo alla stessa conclusione di prima: **al suo ritorno Alice sarà più giovane di Barbara**.

²³Per un corpo massivo come ad esempio la navicella di Alice.

Interessante osservare la similarità a meno di un fattore $-c^{-2}$ dell'integrale precedente con la *formula della lunghezza di un arco* $f(x)$ [7]:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Le due formule non sono identiche dal momento che il tempo proprio di Alice non equivale alla lunghezza della sua linea d'universo.

Riassumendo Sono stati presentati, discussi e risolti quattro paradossi della teoria della relatività ristretta, di cui due famosissimi. Riguardo al più famoso in assoluto, ossia quello dei gemelli, ho proposto due risoluzioni: una a carattere fisico (quindi matematicamente non molto rigorosa) e una a carattere matematico (però priva di interpretazione fisica).

Capitolo 4

Lavori sperimentali

4.1 Esperimento di Thomson

4.1.1 Introduzione

Nel 1897 il fisico britannico Joseph John Thomson determinò per primo in modo accurato il **rappporto carica/massa** dell'elettrone, che oggi sappiamo valere $1.758820 \cdot 10^{11} C/kg$, mostrando anche *en passant* che l'elettrone, in virtù del fatto di possedere tali proprietà (carica e massa), era una particella [27]. La conoscenza del valore di e/m permetterà poi nel 1909 al fisico statunitense Robert Andrews Millikan di calcolare la massa $m = 9.109 \cdot 10^{-31} kg$ dell'elettrone avendo determinato (grazie ad un esperimento che porta il suo nome) il valore della sua carica $e = -1.602 \cdot 10^{-19} C$ [16].

Poiché gli elettroni giocano un ruolo di capitale importanza nella parte pratica di questo LAM e poiché le velocità in gioco di quest'ultimi possono essere considerate relativistiche, verso la fine di maggio 2016 ho deciso di riprodurre l'esperienza nei laboratori del liceo.

4.1.2 Apparato sperimentale

Si tratta di strumentazione abbastanza semplice alla portata di qualsiasi aspirante scienziato. All'intero di un bulbo di vetro a cui è stata aspirata tutta l'aria sono poste a distanza $D = 6cm$ due placche di materiale conduttore su cui è applicata una differenza di potenziale V . Tra le placche vi è una cartina (su cui è stampata una griglia di quadratini di lato $1cm$) fluorescente al passaggio di una corrente elettrica. Attorno al bulbo di vetro vi sono due bobine di Helmholtz in cui può scorrere una corrente continua totale I mentre al capo sinistro (riferimento figura 4.1) abbiamo un resistore posto tra altre due placche metalliche (a cui è applicata una tensione U) in cui però la seconda (quella più vicina alla cartina) è presente un buco per il passaggio degli elettroni.

Il lettore avrà probabilmente intuito il funzionamento dell'apparecchio. Dapprima il resistore, scaldato per effetto Joule, ionizza alcuni atomi liberando dunque elettroni dal materiale. Questi, supposti inizialmente immobili, vengono poi accelerati dal condensatore di tensione U e così essi acquisiscono una certa velocità. Usciti dalle due placche passando attraverso il buco precedentemente menzionato, per effetto dell'inerzia gli elettroni proseguono il loro moto in linea retta verso la cartina.

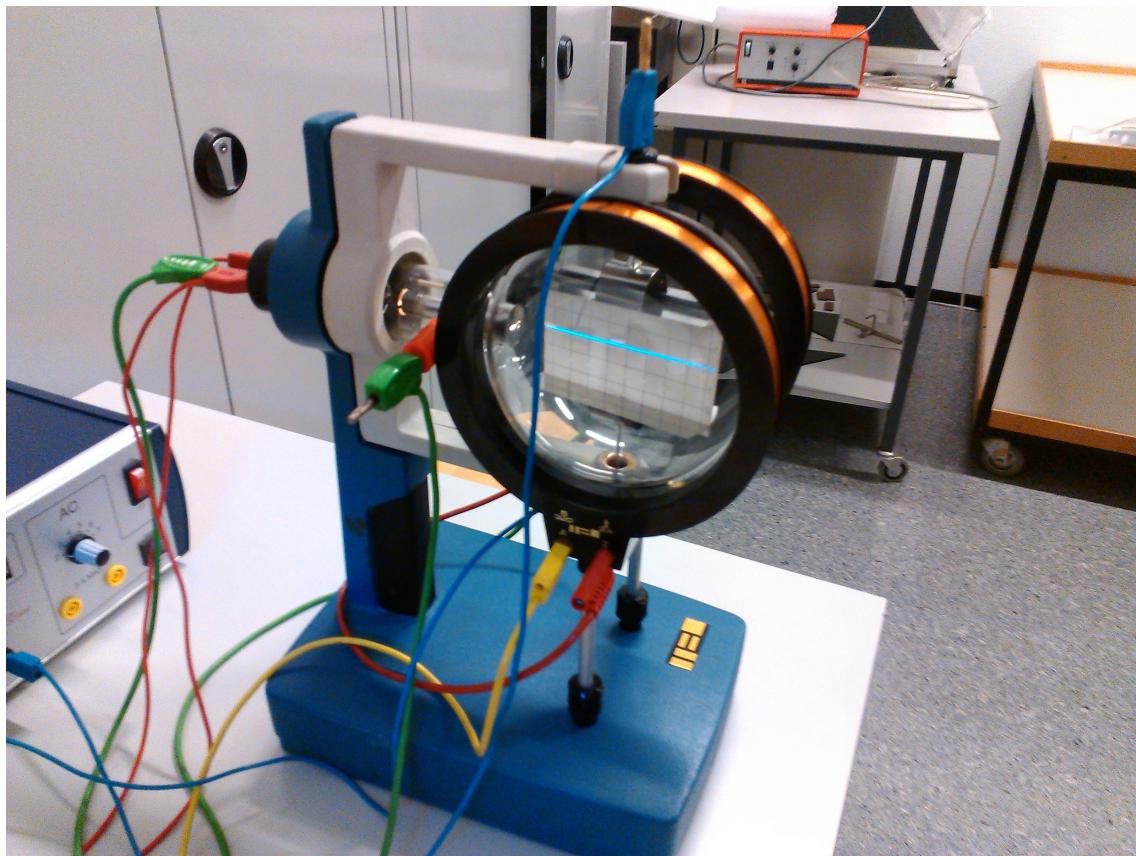


Figura 4.1. Apparato sperimentale impiegato. Nella foto non sono visibili i quattro generatori di differenza di potenziale collegati tramite i cavi colorati. Il fascio (blu) di elettroni risulta rettilineo poiché non vi è alcun campo e quindi alcuna forza.

A questo punto è possibile applicare sia con le due placche che con le due bobine un campo elettrico \vec{E} ed uno magnetico \vec{B} anche simultaneamente, deflettendo pertanto la traiettoria del fascio di elettroni. I campi sono nel limite delle approssimazioni uniformi.

Impiegando saggiamente questi due campi è possibile determinare il valore di e/m .

4.1.3 Calcoli

Innanzitutto ricordo al lettore che ogni corpo di carica q è sempre sottoposto alla **forza di Lorentz**¹:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Analizziamo il moto di un elettrone di carica elementare² e . All'uscita delle placche di accelerazione esso avrà una velocità istantanea di modulo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Solo un campo magnetico

Se nella regione della cartina generiamo soltanto un campo magnetico \vec{B} con il solo aiuto delle due bobine allora $\vec{E} = \vec{0}$ ed essendo $\vec{B} \cdot \vec{v} = 0$ concludiamo che l'unica forza risentita dall'elettrone è di natura magnetica ed è sempre rivolta verso il centro della sua traiettoria ora circolare. Impiegando l'equazione del moto circolare si ottiene:

$$m\frac{v^2}{r} = evB.$$

La velocità v è nota:

$$\left(\frac{2eU}{r}\right)^2 = \frac{2e^3UB^2}{m}.$$

Riordinando si ottiene:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2B^2} = \frac{2U}{r^2I^2k^2}.$$

L'ultima sostituzione implica la validità dell'equazione $B = I \cdot k$, cosa confermata dal produttore delle bobine³ il quale fornisce il valore approssimato di $k = 4.2mT/A$.

Campo magnetico ed elettrico

Se invece nella regione della cartina vengono generati un campo elettrico ed uno magnetico tali da rendere la forza di Lorentz nulla otteniamo la situazione:

$$eE = evB.$$

Inserendo l'espressione di v esattamente come prima si ha:

$$E^2 = \frac{2eU}{m}B^2.$$

Il valore di E è legato dalla relazione $D \cdot E = V$ e pertanto, sostituendo, si ricava:

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2UB^2} = \frac{V^2}{2D^2UI^2k^2}.$$

¹Verranno impiegate lettere maiuscole anche se non rappresentano quadrvettori ma vettori di V_3 .

²Benché in realtà la carica dell'elettrone è negativa, matematicamente parlando la consideriamo come un numero positivo allo stesso modo delle differenze di potenziale.

³Resta comunque possibile dimostrarla con la legge di Biot-Savart.

4.1.4 Analisi dei dati

Nelle precedenti espressioni compaiono diverse grandezze: alcune come D o U (sempre mantenuta a 5000V) sono note a priori, altre come V , I e r devono essere misurate sperimentalmente. V e I sono facilmente rilevabili con un *multimetro* mentre r richiede un po' più di sforzo matematico: interessiamoci ora alla sua determinazione.

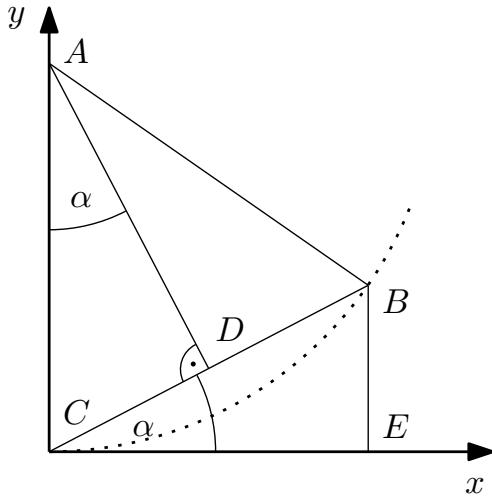


Figura 4.2. Studio della traiettoria circolare degli elettroni sottoposti al campo magnetico generato dalla corrente nelle bobine.

Idealizziamo la figura 4.3 (in quel caso la deflessione non è circolare ma l'idea resta comunque la stessa) nel diagramma 4.2 e domandiamoci in che rapporto stanno le coordinate di ogni singolo punto (x, y) della circonferenza passante per l'origine. I triangoli ACD e CED sono simili e pertanto possiamo scrivere i rapporti:

$$\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|AD|}.$$

Poiché $|CE| = x$, $|BE| = y$ e dal teorema di Pitagora $(2|BD|)^2 = |CE|^2 + |BE|^2$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}{|AD|} \quad \rightarrow \quad |AD| = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{2y}.$$

A questo punto, sapendo che il raggio r della circonferenza è $|AB|$, scriviamo nuovamente il teorema di Pitagora

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2,$$

che diventa

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{2y} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2)}{4y^2} = \left(\frac{x^2 + y^2}{2y} \right)^2, \end{aligned}$$

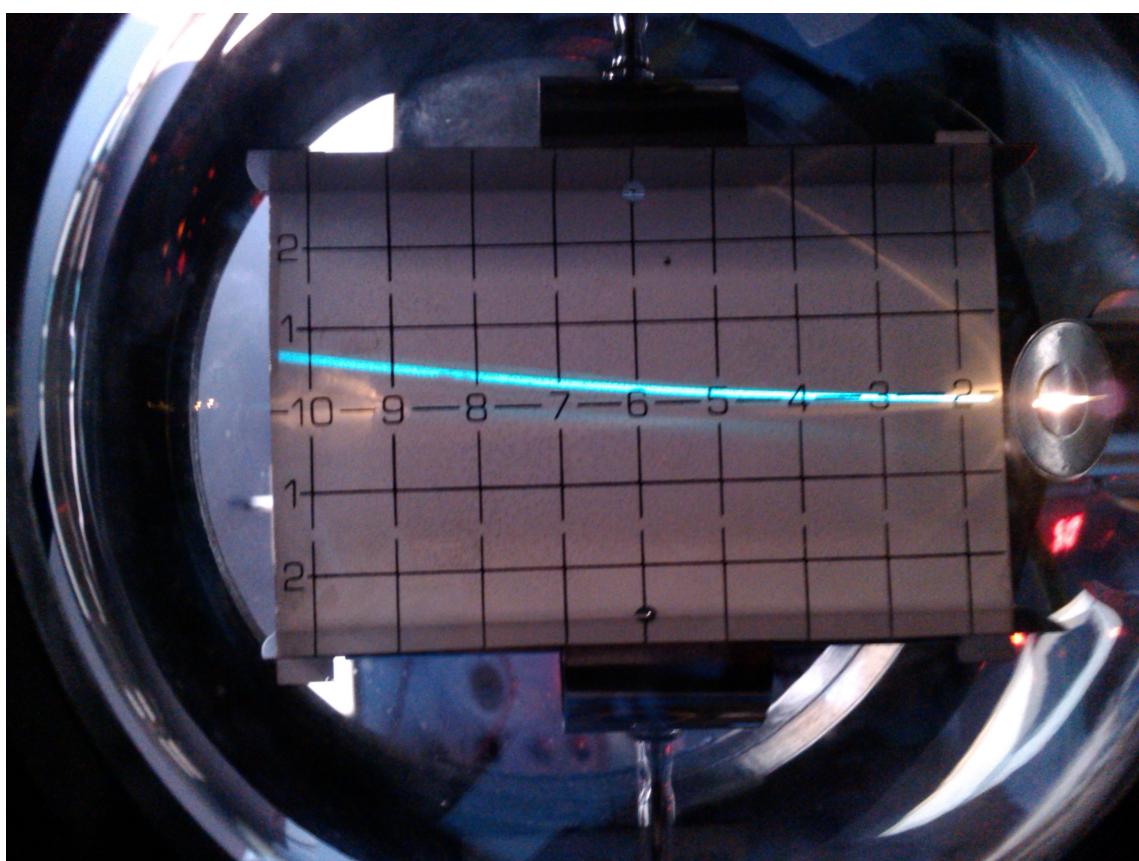


Figura 4.3. Deflessione parabolica del fascio di elettroni grazie ad un campo elettrico localmente uniforme orientato verso il basso.

e pertanto

$$y = \frac{1}{2r} (x^2 + y^2).$$

Siano $X = x^2 + y^2$ e $Y = y$ due *variabili statistiche*: tramite *regressione lineare* determiniamo i valori di $m = (2r)^{-1}$ e b della *retta interpolatrice* di tale fenomeno. In particolare impieghiamo il *metodo dei minimi quadrati* che, nel caso di una retta $y = mx + b$, stabilisce le formule

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{i=1}^n x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^n (x'_i)^2} \\ b = \bar{y} - m\bar{x} \end{cases}$$

dove $x'_i = x_i - \bar{x}$, $y'_i = y_i - \bar{y}$ e \bar{x} e \bar{y} indicano la media dei valori assunti da X e Y [6].

Il caso appena visto (ovvero la sola presenza del campo magnetico) è stato riprodotto due volte e quindi, applicando il metodo dei minimi quadrati, si ottengono le tabelle:

x	y	x'_i	y'_i	$(x'_i)^2$	$x'_i y'_i$	$f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
400.00	0.00	-3876.77	-2.11	15029361.14	8184.30	-0.73	0.53
900.00	0.00	-3376.77	-2.11	11402589.14	7128.74	-0.36	0.13
1600.00	0.00	-2676.77	-2.11	7165108.34	5650.96	0.15	0.02
2500.25	0.50	-1776.52	-1.61	3156030.42	2862.17	0.81	0.10
3601.00	1.00	-675.77	-1.11	456667.80	750.86	1.62	0.38
4906.25	2.50	629.48	0.39	396242.55	244.80	2.57	0.01
6409.00	3.00	2132.23	0.89	4546396.24	1895.31	3.67	0.45
8125.00	5.00	3848.23	2.89	14808858.74	11117.10	4.93	0.00
10049.00	7.00	5772.23	4.89	33318616.08	28219.78	6.34	0.44

x	y	x'_i	y'_i	$(x'_i)^2$	$x'_i y'_i$	$f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
404.00	2.00	-4035.75	-8.94	16287278.06	36097.52	2.13	0.02
906.25	2.50	-3533.50	-8.44	12485622.25	29838.43	3.22	0.53
1625.00	5.00	-2814.75	-5.94	7922817.56	16732.11	4.80	0.04
2556.25	7.50	-1883.50	-3.44	3547572.25	6487.60	6.83	0.45
3690.25	9.50	-749.50	-1.44	561750.25	1082.61	9.31	0.04
5044.00	12.00	604.25	1.06	365118.06	637.82	12.27	0.07
6656.00	16.00	2216.25	5.06	4911764.06	11204.38	15.79	0.04
8500.00	20.00	4060.25	9.06	16485630.06	36767.84	19.82	0.03
10576.00	24.00	6136.25	13.06	37653564.06	80112.18	24.35	0.12

Le ultime due colonne servono per valutare la bontà dell'interpolazione mediante l'*indice di scostamento I'* chiamato *indice quadratico relativo*, definito come [6]:

$$I' = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2}{n}}}{\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}} = \frac{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2}}{\sum_{i=1}^n f(x_i)}.$$

In tabella sono riassunti i dati ottenuti con i metodi statistici appena descritti (i raggi sono dati in *cm*):

	m	b	r	I'
Tabella 1	0.00073	-1.018	683.379	0.226
Tabella 2	0.00218	1.245	228.856	0.035

Come si può valutare dall'indice I' l'interpolazione dei dati della prima tabella è peggiore di quella dei dati della seconda. Notiamo inoltre che tali rette non passano per l'origine: questo significa che la circonferenza non è tangente all'asse Ox stampato sulla cartina.

Ad ogni modo consideriamo validi i raggi appena ricavati e proseguiamo con i calcoli di e/m . Di seguito è presentata una tabella riassuntiva comprendente tutti i dati necessari alla determinazione del rapporto carica/massa dell'elettrone. Le due serie sono state misurate a distanza di 7 giorni durante 2 lezioni regolari del LAM e tutte le unità sono del SI senza prefissi:

V	I	r	v	e/m
0	0.104	0.68379	33500843	$1.122310 \cdot 10^{11}$
0	0.237	0.22886	43897413	$1.926980 \cdot 10^{11}$
425	0.044		38329726	$1.469170 \cdot 10^{11}$
303	0.038		31641604	$1.001190 \cdot 10^{11}$
548	0.048		45304233	$2.052470 \cdot 10^{11}$

Le medie delle velocità e dei rapporti carica/massa sono:

$$\frac{e}{m} = 1.514 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad , \quad v = 38534764 \frac{m}{s}.$$

Il risultato ottenuto sperimentalmente è scostato di circa 14% dal valore reale. Si noti come $\beta = 0.13$ ossia un $\gamma = 1.01$, pertanto gli elettroni in moto subiscono effetti relativistici di mediocre (ma non trascurabile) intensità.

4.2 SwissFEL

4.2.1 Il Paul Scherrer Institut

Il Paul Scherrer Institut (abbreviato in **PSI**), fondato nel 1988 ed appartenente all'**ETH Domain**, è il più grande centro di ricerca svizzero per le scienze naturali ed ingegneristiche. Si situa nel canton Argovia a Villigen (ed ora anche a Würenlingen) accanto al fiume Aar e dispone di un budget annuale di 370 milioni di franchi. Al PSI si esegue ricerca di punta nelle scienze dei materiali, nel settore energetico ed in quello nella sanità. Il PSI mette a disposizione dei ricercatori (circa 2500 da tutto il mondo) vaste installazioni quali acceleratori di particelle: nel 2011 il Consiglio di Stato e il Gran Consiglio del canton Argovia hanno autorizzato la costruzione di un nuovo acceleratore lineare (**LINAC**) di elettroni nella foresta di Würenlingen chiamato **SwissFEL** ossia un **laser ad elettroni liberi** (Free Electron Laser) del costo di 275 milioni di franchi (figura 4.5) [10].

4.2.2 Lo SwissFEL

Come detto prima lo SwissFEL è un tipo di **laser** in cui il **mezzo attivo** è costituito da elettroni velocissimi in moto all'interno di una struttura magnetica. Si tratta pertanto di una **fonte di luce** poiché lo scopo ultimo dello SwissFEL è quello di produrre brevissimi ma intensissimi raggi X di lunghezze d'onda comprese tra 0.1 e 7 *nanometri*: queste onde elettromagnetiche saranno poi utilizzate in vari esperimenti come l'analisi di alcune reazioni chimiche cruciali (della durata di qualche *femtosecondo* $10^{-15}s$). Il fatto che questo laser si basi su un mezzo composto da elettroni risulta di grandissimo vantaggio poiché, a differenza dei laser ordinari (basati su particolari materiali), qui non vi è alcuna dipendenza dalle transizioni quantiche specifiche del mezzo scelto. In figura 4.4 è illustrata schematicamente la composizione del laser, di lunghezza totale di 740 metri, costruito su due piani (di cui uno sottoterra, per diminuire i costi per i materiali atti alla protezione dalle radiazioni, per mantenere temperature stabili di $24^\circ C \pm 0.1^\circ C$ a basso costo e per non avere un impatto eccessivo sul paesaggio boschivo) [9]:

- Pacchetti di elettroni, al massimo di $200pC$, ossia circa 1.25 miliardi di particelle, vengono emessi da un **iniettore**, ossia più specificatamente da un *fotocatodo* stimolato da un brevissimo impulso laser. In realtà il numero di particelle appena trovato andrebbe moltiplicato per 2 in quanto lo SwissFEL è in grado di produrre 2 pacchetti alla volta separati da un intervallo temporale $28ns$: vedremo dopo il perché. La frequenza degli impulsi è $100Hz$ e la loro durata è di inizialmente 5 *picosecondi* $10^{-12}s$, un periodo di tempo troppo lungo che dovrà essere in un qualche modo compresso (vedremo dopo come). Comunque tali pacchetti appena emessi dal catodo vengono pre accelerati a velocità praticamente equivalenti a quella della luce c già nei primi 20 centimetri di acceleratore: questo perché dalla definizione di quantità di moto (3.10) si nota come essa diverga a $+\infty$ se $v \rightarrow c$ e pertanto la **difficoltà tecnica non è tanto arrivare prossimi a c ma è proprio aumentare la velocità in prossimità di c** , ragione per la quale il LINAC che segue l'iniettore è lungo 335 metri.
- L'**acceleratore lineare** si occupa di portare i singoli elettroni ad energie totali di $5.8GeV$. Si tratta di una lunghissima catena di cavità a radiofrequenza (chiamate

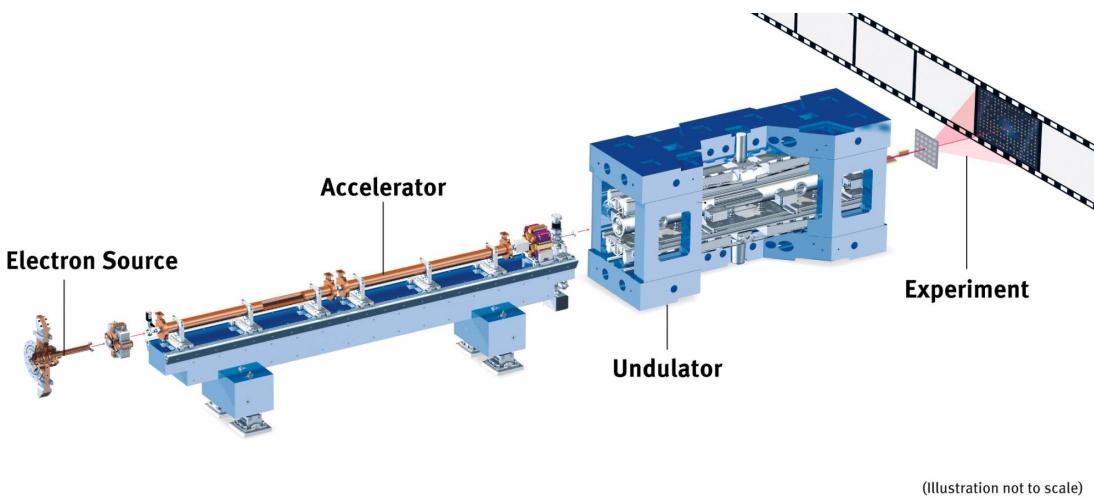


Figura 4.4. Schema non in scala dei componenti principali dell’acceleratore. Fonte: opuscolo informativo *SwissFEL; Brillantes perspectives; Le laser à rayons X suisse à électrons libres.*

RF cavities): un perimetro metallico contenente un campo elettrico oscillante che, si sarà capito, per mezzo della forza elettrica accelererà gli elettroni di passaggio allo stesso modo di un surfer su un’onda d’acqua. Mi spiego meglio: un **klystron** [9, 18] genera onde elettromagnetiche portate nella cavità RF per mezzo di **guide d’onda**. Tali onde vengono fatte interferire nella detta cavità ed esse producono al centro un’**onda stazionaria** in cui la componente magnetica risulta cancellata (poiché opposta in entrambe le onde) mentre quella elettrica si somma coerentemente. L’oscillazione di questa onda stazionaria deve avere una frequenza tale da rivolgere il vettore \vec{E} in direzione opposta alle velocità \vec{v} degli elettroni al momento del loro passaggio, se si vuole aumentare la loro quantità di moto per mezzo della forza elettrica: tale frequenza si aggira attorno a 5.7GHz .

Prima di passare alla prossima porzione di SwissFEL il pacchetto di elettroni deve essere compresso sia temporalmente sia spazialmente, pertanto esso viene fatto passare attraverso compressore (**bunch compressor BC**): una sorta di *chicane* degli elettroni forzata per mezzo di dipoli magnetici. In questo modo si arriva a comprimere l’impulso da 5ps a ben 25fs .

- I 2 pacchetti di elettroni vengono ora divisi nelle loro 2 rispettive linee, una chiamata **Aramis** e l’altra **Athos**. La linea Aramis copre le lunghezze d’onda da 0.1 a 0.7 nanometri (**hard X-ray line**) mentre Athos da 0.7 a 7 nanometri (**soft X-ray line**). Poiché all’inizio sono stati generati 2 pacchetti di elettroni la linea Aramis e Athos possono lavorare simultaneamente alla frequenza 100Hz . Comunque questi pacchetti devono essere ancora sfruttati per produrre raggi X coerenti, perciò vengono fatti passare attraverso un **ondulatore**, ovvero una lunga serie di dipoli con polarità alternata (12 ondulatori composti da 1060 magneti, il tutto lungo 60 metri) generanti un campo magnetico trasversale alternato che, per mezzo della forza di Lorentz, deflette sinusoidalmente la traiettoria precedentemente lineare degli elettroni

[19]. Infine questi elettroni, poiché soggetti ad accelerazione, disturbano il campo elettromagnetico e pertanto emettono la tanto ricercata radiazione elettromagnetica.

- Il fascio luminoso, coerente e collineare al moto degli elettroni, viene portato verso **facilities**, ovvero laboratori messi a disposizione dei ricercatori per i loro esperimenti che necessitano di tali impulsi di raggi X. Gli elettroni a questo punto diventano inutili e pertanto vengono estratti dallo SwissFEL e gettati in un **beam dump** ossia un *enorme* blocco metallico.



Figura 4.5. Fotografia satellitare del PSI. Lo SwissFEL si situa nel bosco in basso a destra: esso è perfettamente allineato con il campo magnetico terrestre. Fonte: *Google Maps*.

4.2.3 Simulazione numerica

Introduzione

Anche l'iniettore dispone di una cavità RF composta da 2.5 celle (figura 4.6) in cui oscilla un campo di ampiezza massima $100MV/m$ ad una frequenza $2998.8MHz$ secondo [9]:

$$E(t, z) = E_0(z) \sin(\omega t).$$

In questo LAM ci diamo il compito di simulare numericamente tale iniettore con lo scopo di determinare la fase ottimale dell'oscillazione in modo tale da avere la miglior accelerazione possibile del pacchetto di elettroni ossia le energie totali più alte alla loro entrata nel LINAC.

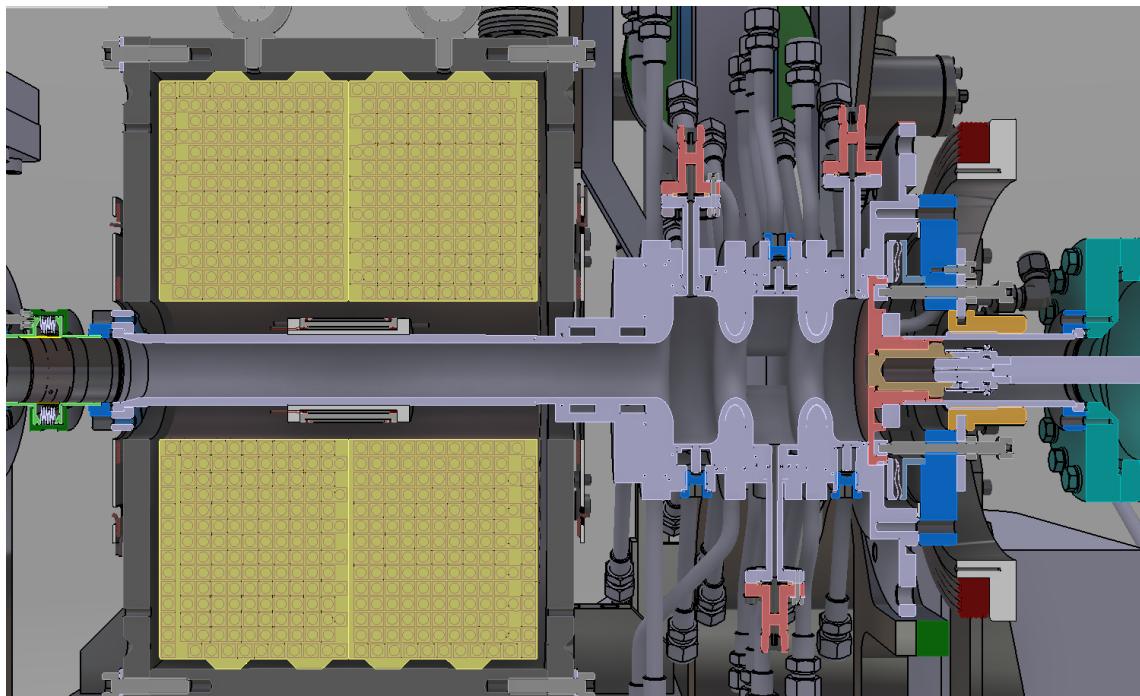


Figura 4.6. Progetto digitale dell'iniettore. Il catodo si trova a destra mentre immediatamente a sinistra è possibile osservare le 2.5 cavità RF che andremo a simulare. Fonte: *Marco Pedrozzi (PSI)*.

Innanzitutto, poiché $E(t, z)$ è funzione sia del tempo t sia della posizione z (rispetto al catodo), abbiamo bisogno dell'espressione di $E_0(z)$. Purtroppo non esiste una forma algebrica per tale funzione in quanto essa stessa è frutto di un algoritmo numerico: mi sono però stati forniti da Marco Pedrozzi (coordinatore dell'iniettore dello SwissFEL) 10000 punti $(z, E_0(z))$ in tabella Excel, di separazione spaziale costante $\Delta z = 17.5\mu m$, illustrati in figura 4.7 che nella simulazione numerica andremo ad interpolare. La funzione del campo sarà chiamata $E(Z, T)$.

Dobbiamo ora determinare la *logica* del programma informatico. Poiché dobbiamo determinare il moto di un elettrone partendo dall'informazione sulla sua accelerazione

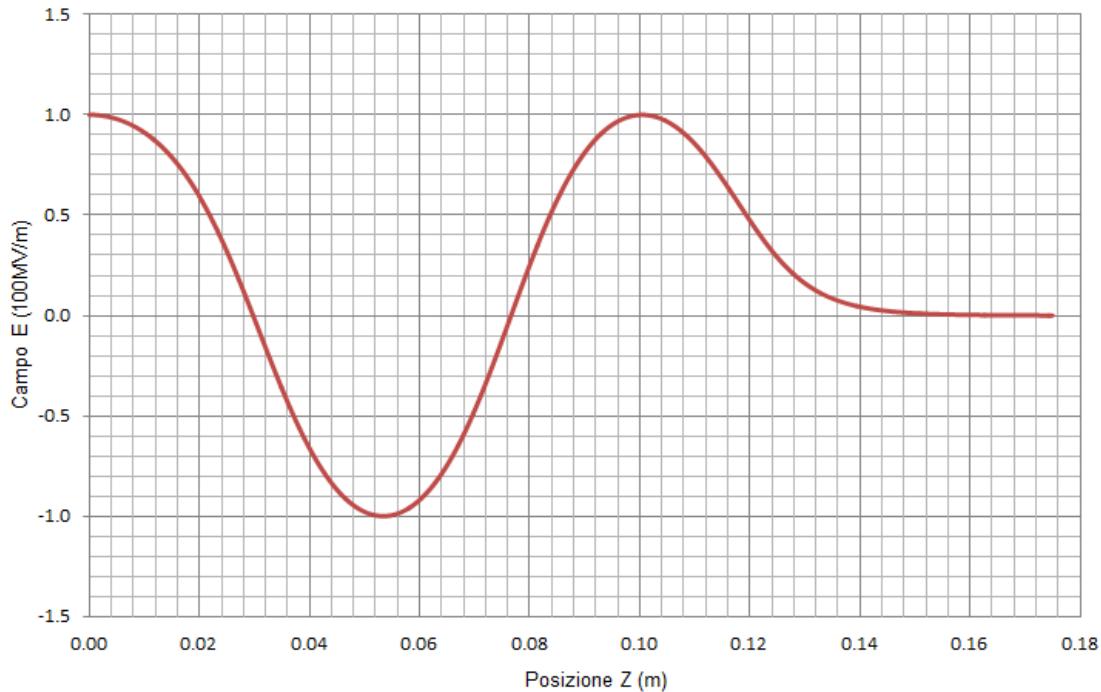


Figura 4.7. Profilo del campo elettrico normalizzato al tempo iniziale posto arbitrariamente a zero. Un'intensità positiva indica un orientamento longitudinale di \vec{E} inverso al moto degli elettroni e pertanto valori positivi implicano *accelerazione* mentre valori negativi *decelerazione*.

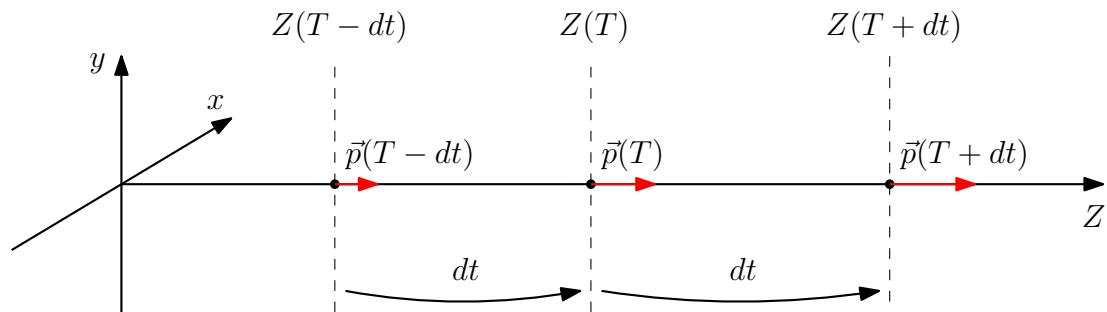


Figura 4.8. Visualizzazione fisica dell'integrazione numerica e dei *passi di integrazione*. Il moto dell'elettrone è suddiviso in un numero finito di tratti della durata dt che vengono sommati di volta in volta al tempo totale T .

(variabile sia nello spazio che nel tempo), il problema a cui andiamo incontro è un **problema di integrazione**, in questo caso **numerica** (figura 4.8). Impiegherò il **metodo dei rettangoli** ossia dividerò la durata T della simulazione (tutti i tempi sono riferiti al laboratorio e *mai* agli elettroni) in piccoli intervalli dt che, essendo $\frac{d}{dt}p(t) = f(t)$, andrò a moltiplicare per la forza $eE(t, z)$ in modo tale da ottenere piccoli rettangoli di area dp che andrò a sommare per ottenere la quantità di moto $p(t)$ in un determinato momento.

Disporre della quantità di moto totale $p(t)$ in ogni momento risulta estremamente utile poiché da essa è possibile ricavare la velocità $v(t)$ da (3.10), la posizione $z(t)$ dal fatto che $\frac{d}{dt}z(t) = v(t)$ e l'energia totale $E(t)$ da (3.15). In particolare la forma di $v(t)$ diventa:

$$p = m\gamma v$$

$$\begin{aligned} p^2 - p^2 \frac{v^2}{c^2} &= m^2 v^2 \\ v(t) &= \frac{p(t)}{\sqrt{m^2 + \left(\frac{p(t)}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Il segno di $v(t)$, che nel programma ho chiamato **velocity(P)**, risulta equivalente a quello di $p(t)$, anche se negativo.

Per il calcolo dell'energia totale finale per il caso relativistico si impiega la (3.15) mentre per il caso classico si ha:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Infatti nella simulazione è presente la variabile **relativistic**, impostata di default come **True**, che permette all'utilizzatore di decidere quale meccanica impiegare. Imponendo **False** la simulazione seguirà le relazioni della meccanica classica e pertanto fornirà risultati necessariamente diversi dalla realtà.

Il programma

```

1  '''
2  |
3  |                               (c) 2016 Theo Saporiti
4  |           LAM in Fisica 2016-2017, Liceo di Lugano 2
5  |           Simulazione numerica di una cavità RF
6  |
7  -----
8
9
10 #Importa le librerie necessarie al programma
11 import numpy as np;
12 import matplotlib.pyplot as plt;
13
14 '''
15 -----          DEFINIZIONI          -----
16 -----
17
18
19
20 #Definisci la funzione del campo elettrico che restituisce la componente
21 #longitudinale nel punto (0,0,Z) al tempo T
22 def E(Z,T):
23     #Verifica dapprima se l'elettrone non è uscito dalla cavità
24     if Z>=0.0 and Z<=swissFEL[-1][0]:
25         #Interpola con una retta passante per i due punti noti più prossimi a
26         #Z i valori del campo compresi tra questi
27         index=np.abs(swissFEL[:,0]-Z).argmin();
28         Zzero=swissFEL[index][0];
29         Ezero=1.0e08*swissFEL[index][1]*np.sin(w*T);
30
31         factor=int(np.sign(Z-Zzero));
32         if factor==0:
33             factor=1;
34         if index==len(swissFEL)-1:
35             factor=-1;
36
37         DeltaZ=swissFEL[index+factor][0]-Zzero;
38         DeltaE=1.0e08*swissFEL[index+factor][1]*np.sin(w*T)-Ezero;
39
40         return (DeltaE/DeltaZ)*(Z-Zzero)+Ezero;
41     else:
42         return 0.0;
43
44 #Definisci la funzione della velocità che restituisce, a seconda di
45 #che meccanica si impiega, la velocità istantanea dell'elettrone in
46 #funzione della quantità di moto istantanea
47 def velocity(P):
48     if relativistic:
49         return P*np.sqrt(1/(m**2+(P/c)**2));

```

```

50     else:
51         return P/m;
52
53 #Scegli se usare la meccanica relativistica oppure quella classica
54 relativistic=True;
55
56 #Importa il profilo del campo
57 swissFEL=np.loadtxt("SFEL.txt");
58
59 #Definisci l'array degli elettroni nel modo seguente:
60 #[array delle Z, array delle P, tempo T di emissione dal catodo]
61 particles=[];
62
63 #Definisci gli arrays che conterranno i dati finali da illustrare graficamente
64 Xaxis=[];
65 Yaxis=[];
66
67 #Posiziona 180 elettroni, tutti nella posizione Z=0 con P=0, assegnandogli
68 #un tempo di emissione diverso 1ps
69 for i in range(0,180):
70     particles.append([[0.0],[0.0],float(i)*1e-12]);
71     #L'asse delle ascisse conterrà la fase in picosecondi
72     Xaxis.append(float(i));
73
74 #Definisci alcune variabili importanti (in secondi)
75 T=0.0;                      #Tempo totale di riferimento
76 dt=1.0e-12;                  #Tempo "infinitesimo" da aggiungere ogni volta a T
77 loop=1.0e-09;                #Durata della simulazione
78
79 #Definisci alcune costanti fisiche nelle unità del SI
80 e=1.602177e-19;             #Carica dell'elettrone in C
81 m=9.109384e-31;             #Massa dell'elettrone in kg
82 f=2998.8e06;                #Frequenza di oscillazione del campo elettrico in Hz
83 w=2*np.pi*f;                #Pulsazione del campo elettrico in rad/s
84 c=299792458.0;              #Velocità della luce nel vuoto in m/s
85 conversion=1/e*1e-06;        #Fattore di conversione dell'energia da J a MeV
86
87
88 ----- CALCOLI -----
89
90
91 #Per ogni "istante" di tempo dt aggiorna le Z e P di tutti gli elettroni
92 for j in range(0,int(loop/dt)):
93     #Fai scorrere il tempo totale
94     T+=dt;
95     #Per ogni elettrone...
96     for i in range(0,len(particles)):
97         #...prendi le precedenti Z e P e...
98         Z=particles[i][0][len(particles[i][0])-1];
99         P=particles[i][1][len(particles[i][1])-1];
100        #...se e solo se il tempo totale T è maggiore di quello della sua

```

```

101      #emissione calcola le nuove Z e P
102      if T >= particles[i][2]:
103          P+=e*E(Z,T)*dt;
104          Z+=velocity(P)*dt;
105          #Aggiungi i nuovi o vecchi valori all'array degli elettroni
106          particles[i][0].append(Z);
107          particles[i][1].append(P);

108
109
110      -----
111      ----- GRAFICO -----
112      -----
113
114
115      #Imposta alcune opzioni di disegno
116      plt.figure(figsize=(10,6),dpi=80);
117      #Per ogni elettrone...
118      for i in range(0,len(particles)):
119          ....calcola l'energia all'uscita della cavità (quella finale) in MeV
120          if relativistic:
121              Yvalue=conversion*np.sqrt((m*c**2)**2+(particles[i][1][-1]*c)**2);
122          else:
123              Yvalue=conversion*(particles[i][1][-1]**2/(2*m));
124          Yaxis.append(Yvalue);
125      #Genera l'immagine del grafico
126      plt.plot(Xaxis,Yaxis,color="red",linewidth=2.0);
127      if relativistic:
128          plt.title("Modello relativistico");
129      else:
130          plt.title("Modello classico");
131      plt.xlabel("Fase (ps)");
132      plt.ylabel("Energia totale (MeV)");
133      plt.grid(True);
134      plt.xticks(np.arange(min(Xaxis),max(Xaxis)+2,10));
135      plt.show();

```

Il programma è stato scritto in **Python 2.7.10** all'interno di **Spyder 2.3.5.2** nell'ambito della distribuzione **Python(x,y) 2.7.10**. Le simulazioni eseguite, una classica ed una relativistica, hanno impiegato un $dt = 10^{-14}s$ lungo un tempo totale di $10^{-9}s$ e ognuna ha richiesto 8 minuti di calcoli circa. Saranno emessi 180 elettroni tutti nel medesimo luogo $z = 0m$ a distanza temporale di $1ps$ poiché il periodo di oscillazione è $T = f^{-1} = 333.5ps$ ossia quasi $360ps$: per convertire la fase in gradi basterà perciò moltiplicare per il fattore $360/333.5 \simeq 1.08$. È importante tenere presente che nelle simulazioni **non tengo conto della mutua repulsione elettrica tra gli elettroni** (*carica di spazio*) ossia essi sono solo soggetti all'unica azione del campo elettrico oscillante. Nella realtà gli elettroni si respingono eccome ma, per via della dilatazione temporale subita dai corpi in movimento (in questo caso a velocità praticamente pari a c), *se accelerati molto in fretta* è possibile praticamente annullare gli effetti di tale repulsione di natura elettrica.

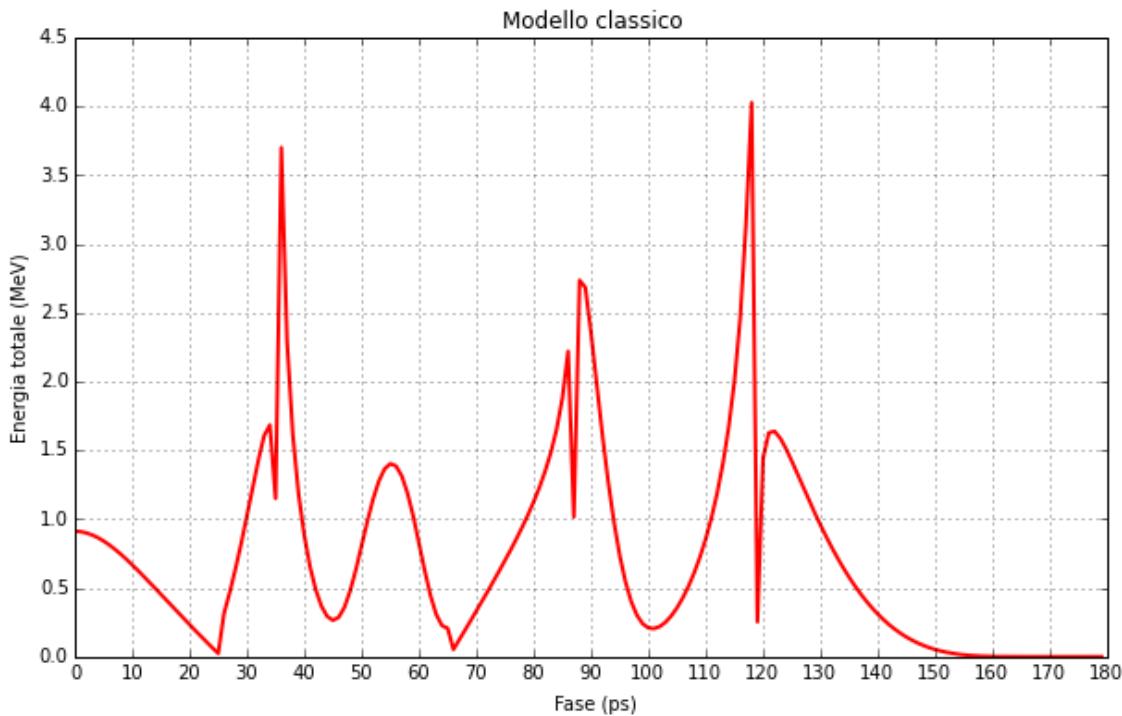


Figura 4.9. Distribuzione delle energie (cinetiche) secondo la fase di oscillazione del campo elettrico nel caso della meccanica classica.

Dinamica classica

Lanciamo il programma ponendo `relativistic=False`; e vediamo cosa succede!

La *distribuzione delle energie* di figura 4.9 risulta abbastanza caotica e stabilisce un picco massimo di 4.028MeV per 118ps ossia una fase di 127° . Inoltre in figura 4.10 è possibile seguire l'andamento della velocità istantanea di ogni elettrone: si vede come non vi è alcun limite di velocità ed infatti abbiamo elettroni che superano il *miliardo* di metri al secondo, sicuramente maggiore di c .

La *distribuzione delle energie* di figura 4.9 risulta abbastanza caotica e stabilisce un picco massimo di 4.028MeV per 118ps ossia una fase di 127° . Inoltre in figura 4.10 è possibile seguire l'andamento della velocità istantanea di ogni elettrone: si vede come non vi è alcun limite di velocità ed infatti abbiamo elettroni che superano il *miliardo* di metri al secondo, sicuramente maggiore di c .

Dinamica relativistica

Poniamo `relativistic=True`; ed osserviamo i risultati della simulazione che tiene ora conto degli effetti relativistici.

Innanzitutto non vi è più un picco massimo isolato bensì un'elegante curva avente come massimo il valore di 7.172MeV alla fase 47ps ossia 51° (figura 4.11). L'analisi delle velocità istantanee di figura 4.12 mostra come tutte siano *sempre* inferiori a c , in accordo con il secondo postulato della teoria della relatività ristretta.

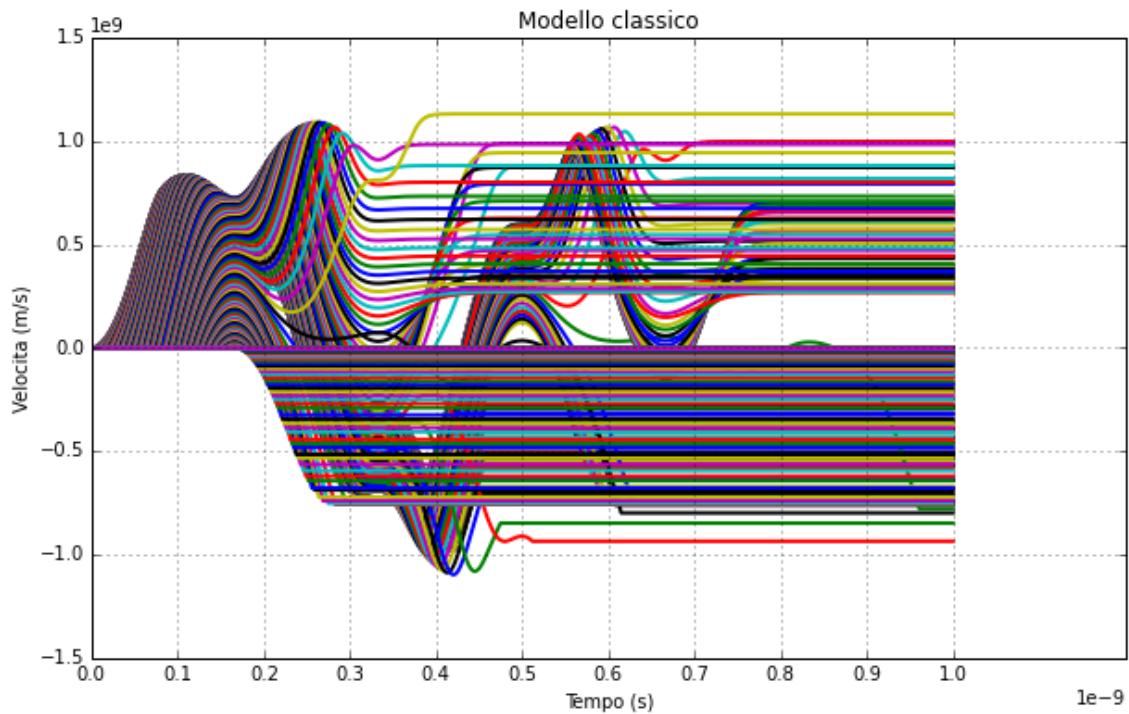


Figura 4.10. Andamento delle velocità in funzione del tempo nel caso della meccanica classica.

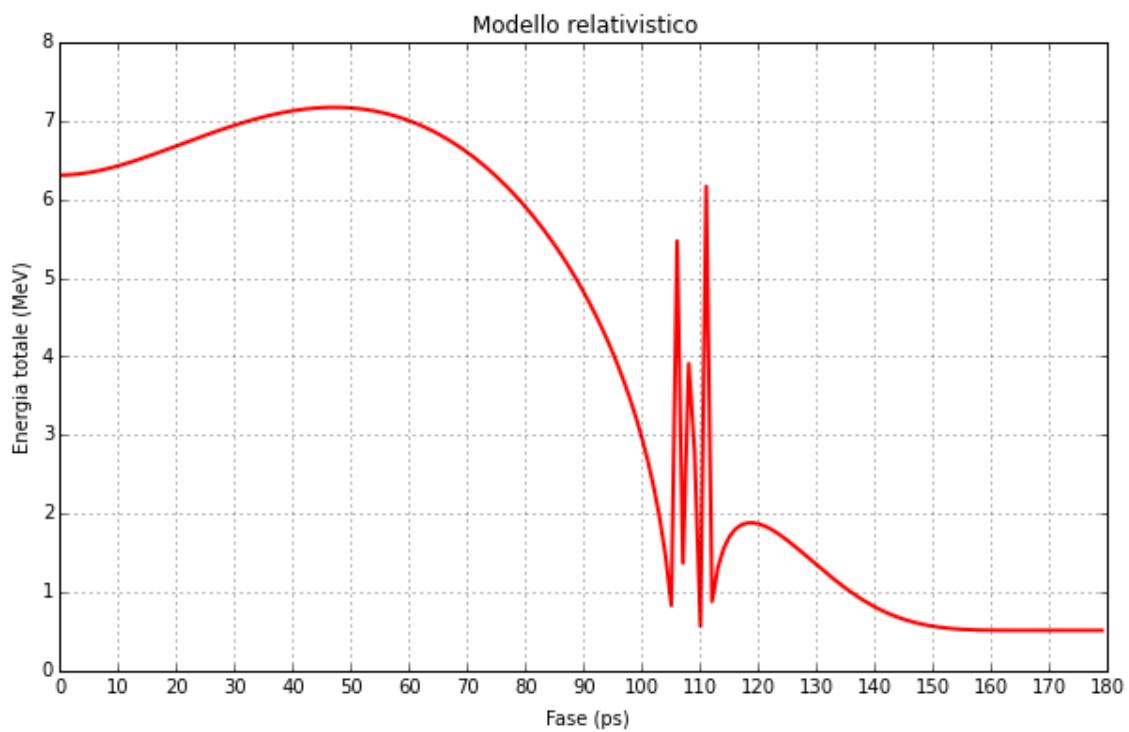


Figura 4.11. Distribuzione delle energie (totali) secondo la fase di oscillazione del campo elettrico nel caso della meccanica relativistica.

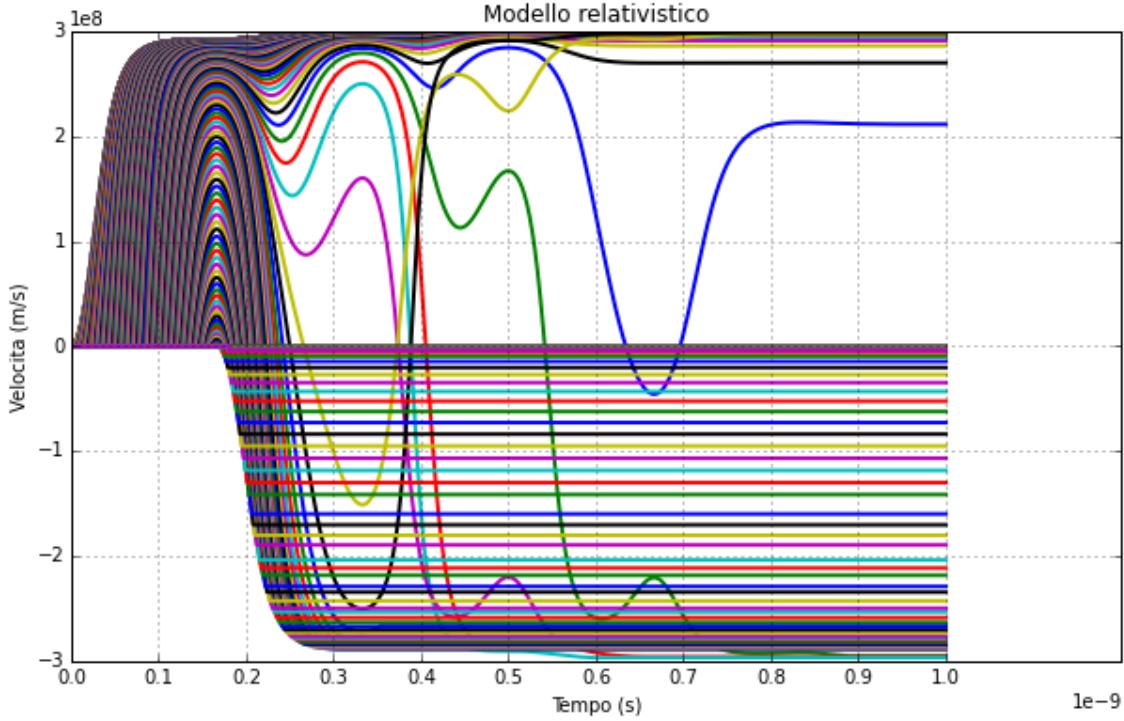


Figura 4.12. Andamento delle velocità in funzione del tempo nel caso della meccanica relativistica.

Confronto con la realtà

Il 22 ottobre 2016 (un sabato) mi sono recato con Marco Pedrozzi al PSI allo SwissFEL per eseguire realmente le misure delle energie dei pacchetti di elettroni in modo tale da poter constatare la fedeltà o meno della mia simulazione numerica all'effettiva realtà.

Dopo un'intera mattinata spesa in calibrazioni e risoluzioni di problemi prevalentemente informatici da parte di Marco Pedrozzi, dalla sala di controllo siamo riusciti ad eseguire due misurazioni: una con un pacchetto di 10pC e l'altra con 50pC , entrambi della durata di 6.5ps .

In figura 4.13 sono illustrati i due grafici delle due misurazioni appena menzionate. Scalando opportunamente la graduazione degli assi e cambiando le unità di misura da *picosecondi* a *gradi*, come in figura 4.14, ci si rende conto che la porzione di curva attorno al massimo energetico in figura 4.11 in realtà ha proprio *la forma* delle parabole 4.13.

Le energie massime, rispettivamente 7.915MeV in -114° e -113° e 8.067MeV in -115° e -114° , risultano abbastanza prossime ai 7.172MeV calcolati nel mio computer con il programma in Python. La differenza di fase si spiega con il fatto che nei programmi informatici dello SwissFEL l'assegnazione della fase avviene arbitrariamente: qui il riferimento per entrambe le misurazioni era -121° .

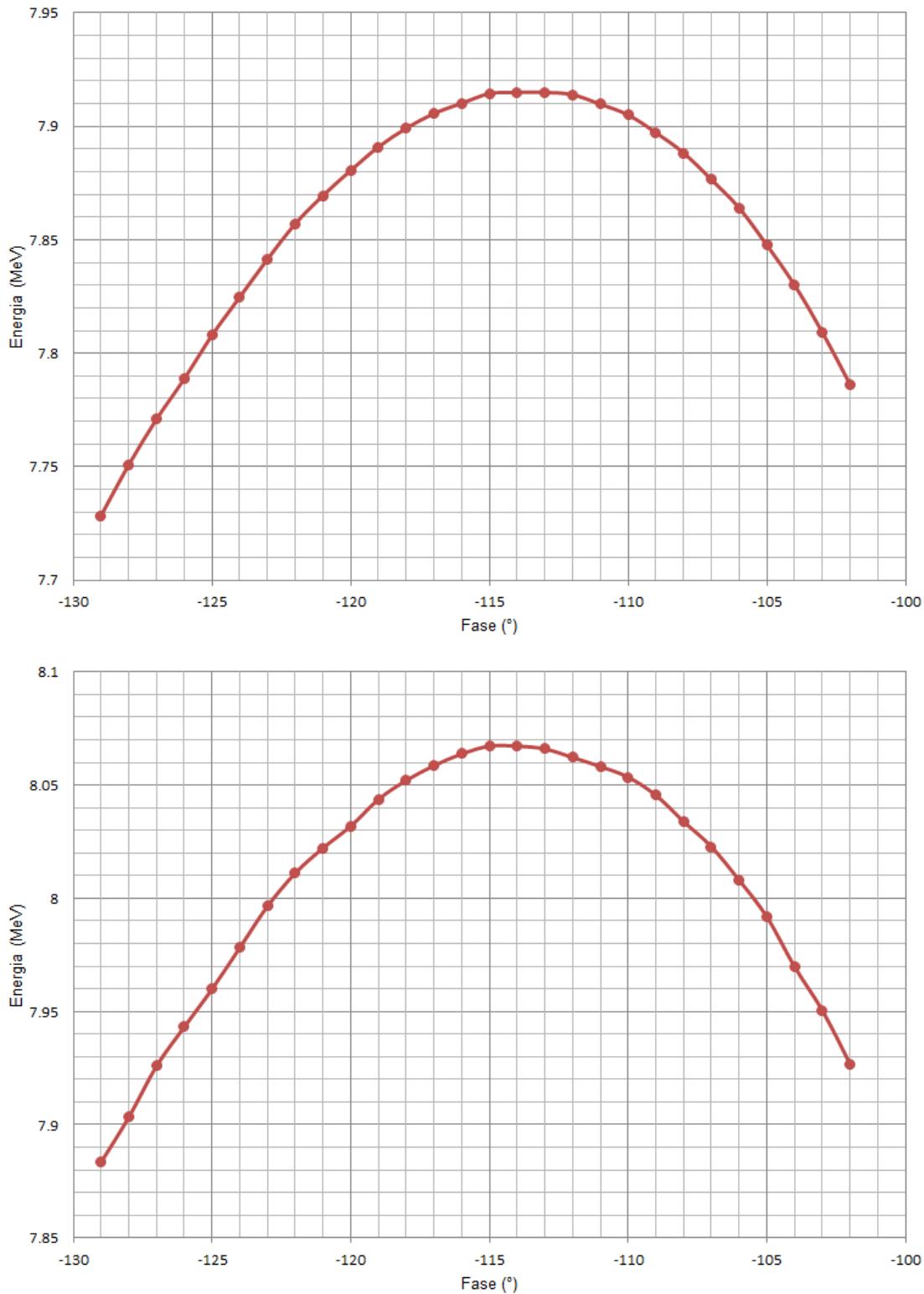


Figura 4.13. Valori delle misurazioni eseguite al PSI sull'acceleratore SwissFEL il 22 ottobre 2016 verso fine mattinata.

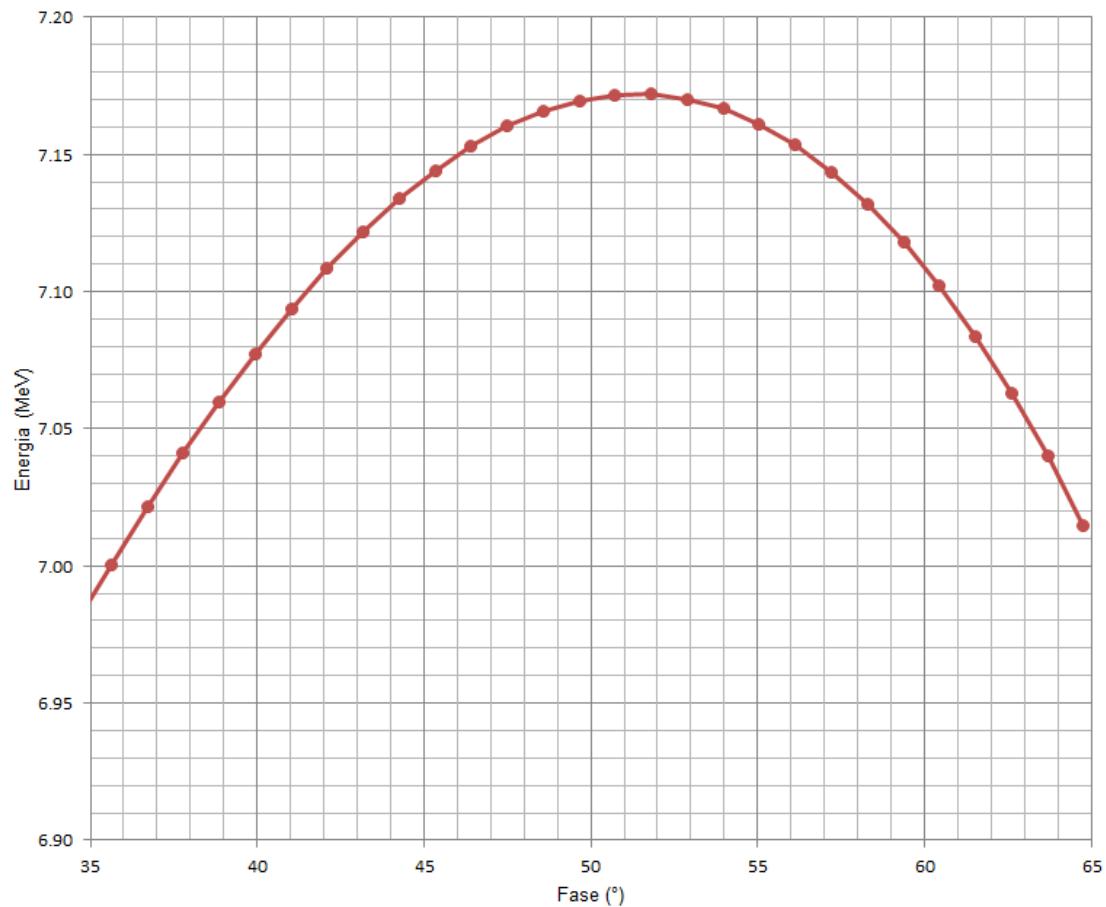


Figura 4.14. Particolare porzione del grafico in figura 4.11. La fase è stata convertita in gradi per facilitare il confronto con i due grafici in figura 4.13.

Capitolo 5

Termine del lavoro

5.1 Conclusioni

In questo LAM ho avuto modo di imparare per la prima volta come la *pianificazione* ed il *rispetto rigoroso di un piano di lavoro* siano elementi del tutto fondamentali per progetti impegnativi svolti durante un lungo periodo di tempo. Infatti, probabilmente mi sarebbe stato impossibile proporre al lettore un lavoro di questo tipo senza un'anticipazione dell'ordine dei mesi su quali elementi della teoria della relatività ristretta andare a indagare, come descriverli e come collegarli a tutti gli altri esposti in questo LAM. Penso che questa sia la più grande lezione *pratica* che ho potuto trarre.

La più grande lezione *teorica*, invece, è probabilmente la teoria della relatività ristretta stessa nelle modalità in cui è stata presentata in questo LAM. Si tratta di un argomento praticamente mai trattato a livello liceale e penso che ciò sia un vero peccato dal momento che, per quanto riguarda *almeno* gli studenti del corso FAM, siamo del tutto attrezzati con i giusti strumenti matematici per comprenderla anche ai suoi livelli più profondi.

Ma non bisognerà di certo fermarsi qui: lungo tutto il XX secolo la fisica fu stravolta a più riprese in più rami fino ad arrivare al suo stato attuale. **C'è ancora molto da imparare, tantissimo da scoprire e un'infinità di cose della cui esistenza non abbiamo nemmeno coscienza.**

5.2 Ringraziamenti

L'esistenza di questo lavoro di maturità è stata senza dubbio in parte possibile soltanto grazie ad alcune persone a cui vorrei offrire i miei più sinceri ringraziamenti:

Marco Pedrozzi per avermi ospitato in canton Argovia e per avermi dato quest'inedita opportunità di lavorare sullo SwissFEL.

Fiorenzo Sainini per avermi fornito due libri fondamentali per la parte teorica di questo LAM e per avermi messo in contatto con Marco Pedrozzi.

Chiara Mastropietro per aver proposto il tema di questo LAM e per i numerosi consigli dati per la scrittura del lavoro.

I docenti di matematica e fisica ossia **Mattias Venzi, Daniele Rusconi, Lucio Calcagno** per avermi insegnato lungo questi quattro anni di liceo alcuni strumenti matematici necessari all'interpretazione di questo Universo e **Tiziano Bernasconi, Chiara Mastropietro, Fiorenzo Sainini** per avermi fatto scoprire la gioia della fisica.

5.3 Appendice

Questa porzione delle definizioni matematiche indispensabili è stata spostata in appendice poiché, a differenza degli altri concetti presentati, essa non risulta particolarmente indispensabile alla comprensione della teoria della relatività ristretta.

Struttura algebrica In matematica si definisce struttura algebrica quell'insieme di oggetti matematici messi in relazione da una o più operazioni, solitamente binarie, che soddisfano assiomaticamente alcune proprietà. Secondo le proprietà assiomatiche che esse soddisfano, le strutture algebriche assumono diverse nomenclature. Prendiamo come esempio la struttura (A, ∇) dove A è un insieme qualsiasi mentre ∇ un'operazione qualsiasi:

- È detta **gruppo** se:

l'operazione ∇ è *ovunque definita* ed è *interna* ad A ;

l'operazione ∇ è *associativa*, ossia $(a\nabla b)\nabla c = a\nabla(b\nabla c)$ dove $a, b, c \in A$;

esiste l'*elemento neutro* $0 \in A$ rispetto a ∇ , ossia $\forall a \in A \quad a\nabla 0 = 0\nabla a = a$;

ogni elemento a di A ha un *simmetrico* a' tale per cui $a\nabla a' = a' \nabla a = 0$.

- È detta **gruppo commutativo o abeliano** se:

tutte le condizioni precedenti sono soddisfatte;

l'operazione ∇ è *commutativa*, ossia $a\nabla b = b\nabla a$.

Aggiungiamo alla struttura un'ulteriore operazione ossia prendiamo in considerazione la struttura definita come (A, ∇, \perp) :

- È detta **anello** se:

tutte le condizioni precedenti sono soddisfatte (da ora in poi implicito) ossia (A, ∇) è un *gruppo abeliano*;

l'operazione \perp è *associativa*, ossia $(a\perp b)\perp c = a\perp(b\perp c)$;

l'operazione \perp è *distributiva* rispetto a ∇ sia a destra che a sinistra, ossia $a\perp(b\nabla c) = (a\perp b)\nabla(a\perp c)$ e $(a\nabla b)\perp c = (a\perp c)\nabla(b\perp c)$.

- È detta **anello unitario** se:

esiste l'*elemento neutro* $\emptyset \in A$ rispetto a \perp .

- È detta **corpo** se:

ogni elemento a di A eccetto il neutro 0 di ∇ ha un *simmetrico* a' tale per cui $a\perp a' = a'\perp a = \emptyset$.

- È detta **corpo commutativo o campo** se:

l'operazione \perp è *commutativa*.

Bibliografia e Sitografia

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica. Induzione e onde elettromagnetiche. Relatività e quanti.* Zanichelli, Bologna, 2015.
- [2] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Fisica dello spazio-tempo. Introduzione alla relatività speciale.* Zanichelli, Bologna, 1996.
- [3] S. Bordoni, *Eleveremo questa congettura... Percorso storico verso la teoria della Relatività Ristretta.* Università degli Studi di Pavia, Pavia, 1995.
- [4] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica. Sviluppo delle idee dai concetti primitivi alla relatività e ai quanti.* Universale scientifica Boringhieri, Torino, 1965.
- [5] R. F. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La Fisica di Feynman. Volume I Parte I.* Masson, Milano, 1992.
- [6] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Matematica.blu 2.0. Statistica descrittiva. Probabilità. Distribuzioni di probabilità.* Zanichelli, Bologna, 2011.
- [7] Commissioni romande di matematica, di fisica e di chimica, *Formulari e tavole. Matematica. Fisica. Chimica.* Éditions G d'Encre, Le Locle, 2013.
- [8] N. Abbagnano, G. Fornero, *La filosofia 2A. Dall'Umanesimo all'empirismo.* Pearson, Milano, 2010.
- [9] Paul Scherrer Institut, *SwissFEL. Conceptual Design Report.* Paul Scherrer Institut, Villigen, 2012.
- [10] Paul Scherrer Institut, *SwissFEL. Brillantes perspectives. Le laser à rayons X suisse à électrons libres.* Paul Scherrer Institut, Villigen, 2016.
- [11] <http://physics.stackexchange.com/questions/242043/what-is-the-proper-way-to-explain-the-twin-paradox> (07/01/2017).
- [12] <http://physics.stackexchange.com/questions/46492/connecting-4-velocity-to-equation-for-adding-velocities> (07/01/2017).
- [13] <http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/lezioni/empoli1-short.pdf> (presentazione PowerPoint in formato PDF, 02/12/2016).
- [14] <http://www.sciences.ch/htmlfr/cosmologie/cosmorelativistes01.php> (07/01/2017).

- [15] <https://it.wikipedia.org/wiki/E%3Dmc%C2%B2> (02/12/2016).
- [16] https://it.wikipedia.org/wiki/Esperimento_di_Millikan (29/12/2016).
- [17] https://it.wikipedia.org/wiki/Etere_luminifero (20/11/2016).
- [18] <https://it.wikipedia.org/wiki/Klystron> (31/12/2016).
- [19] <https://it.wikipedia.org/wiki/Ondulatore> (01/01/2017).
- [20] https://it.wikipedia.org/wiki/Raggi_cosmici (22/11/2016).
- [21] https://it.wikipedia.org/wiki/Relativit%C3%A0_ristretta (29/11/2016).
- [22] https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformazione_di_Lorentz (14/01/2017).
- [23] https://it.wikisource.org/wiki/Dialogo_sopra_i_due_massimi_sistemi_del_mondo_tolemaico_e_copernicano/Giornata_seconda (25/01/2017).
- [24] https://en.wikipedia.org/wiki/Active_and_passive_transformation (18/11/2016).
- [25] https://en.wikipedia.org/wiki/Clock_hypothesis (02/12/2016).
- [26] https://en.wikiquote.org/wiki/John_Dewey (26/01/2017).
- [27] https://en.wikipedia.org/wiki/Mass-to-charge_ratio (29/12/2016).
- [28] https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_diagram (27/11/2016).
- [29] https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_Doppler_effect (19/11/2016).