

Feuille d'exercices n°2 — Limites

On rappelle les règles de croissance comparées en $+\infty$:

Avec tous les coefficients > 0 ,

$$(\exp(\varepsilon x))^\alpha \gg x^\beta \gg (\ln(x)^\gamma) \gg (\ln(x)^{-\gamma'}) \gg x^{-\beta'} \gg (\exp(\epsilon' x))^{-\alpha'}$$

On ordonne les termes et c'est celui qui croît le plus vite vers l'infini qui l'emporte.

Exercice 1 - Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3+1}{x^2-1} \right).$$

Exercice 2 - On rappelle (ou l'on suppose connu) que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Exercice 3 -

Déterminer les limites des fonctions données ci-dessous aux points indiqués.

1. $\sin(\arctan x)$ en $+\infty$.
2. $\cos(x^3)$ en $+\infty$.
3. $\frac{\sin(e^x)}{1+x^2}$ en $+\infty$.
4. $\frac{1}{x}$ en 0.
5. $x \sin x$ en $+\infty$.
6. $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ en $+\infty$.
7. $e^{\frac{1}{x}}$ en 0, à droite et à gauche.
8. $\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}$ en $+\infty$ puis en 1.
9. $(3x^4 - 2x^2)e^{-x}$ en $+\infty$.
10. $(3x^2 - 2x)e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
11. $(3x^2 - 2x)e^{-2 \ln x}$ en $+\infty$.
12. $\frac{2x+3}{3x^4+2} e^x$ en $+\infty$.
13. $\sqrt{x} \ln(x^2 + 2x)$ en 0 puis en $+\infty$.

Exercice 4 - Déterminer les limites des fonctions données en $+\infty$.

1. $f(x) = e^x - 3x$?

2. $f(x) = 2xe^{3x} - e^x$

3. $f(x) = e^{2x} - 2xe^x$

4. $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x+325}$

5. $f(x) = 4e^{2x} + \frac{1}{e^x(x+1)}$

6. $f(x) = \frac{3x}{2e^x+17}$

Exercice 5 - Soit f une fonction bornée définie sur \mathbb{R} . Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ lorsque cela est possible.

1. $f(x) + x$

2. $xf(x)$

3. $\frac{f(x)}{x}$

4. $\frac{f(x)+x}{x^2 f(x)}$