Dérivation

Mathématiques – Première/Terminale Spécialité

I. Nombre dérivé

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite passant par $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

II. Tangente

Le nombre dérivé de f en a est donc par définition le coefficient directeur de la tangente à C_f en a.

f admet une tangente T au point $A(a\,;f(a))$, et cette tangente a pour équation réduire :

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

III. Fonction dérivée

Si f admet un nombre dérivé pour tout réel a d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I.

Une autre situation de non dérivabilité est un point où la courbe est « pointue » : on parle de point anguleux. Cela correspond à une situation où le taux d'accroissement admet des limites différentes selon que l'on se rapproche du point par la droite ou par la gauche (exemple : la fonction valeur absolue $f : x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0).

Fonction	Définie sur	Dérivée	Dérivable sur
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;\ +\infty[$

IV. Opération sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$k \times f$	$k \times f'$
$f + g$	$f' + g'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
u^2	$2u'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$u \circ v$	$u' \times (v' \circ u)$
$f(ax + b)$	$a \cdot f'(ax + b)$
u^n	$nu^{n-1} \times u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

V. Applications

a. Sens de variation

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$;
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$;
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

b. Recherche d'extrema

Si $f(x_0)$ est un extremum de f sur I, alors $f'(x_0) = 0$

Cependant, l'inverse n'est pas forcément vrai. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I.

c. Convexité

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

$$\begin{aligned} & f \textit{ est convexe sur } I \\ \Leftrightarrow\ & C_f \textit{ est entièrement située au-dessus de ses tangentes sur } I \\ \Leftrightarrow\ & f' \textit{ est croissante sur } I \\ \Leftrightarrow\ & f'' \textit{ est positive sur } I \end{aligned}$$

d. Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur I, C_f sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$. Le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion de C_f** si cette dernière **traverse sa tangente au point A**. La courbe **change de convexité**.

Le point A est un point d'inflexion de C_f si, et seulement si, **f'' s'annule en a en changeant de signe**.