Dérivation

Mathématiques - Première spécialité

I. Nombre dérivé

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite passant par A(a; f(a)) et M(a + h; f(a + h)).

On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de f entre a et a+h admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

II. Tangente

Le nombre dérivé de f en a est donc par définition le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f en a.

f admet une tangente T au point A(a;f(a)), et cette tangente a pour équation réduire :

$$T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

III. Fonction dérivée

Si f admet un nombre dérivé pour tout réel a d'un intervalle I de \mathbb{R} , on dit que f est dérivable sur I.

Une autre situation de non dérivabilité est un point où la courbe est « pointue » : on parle de point anguleux. Cela correspond à une situation où le taux d'accroissement admet des limites différentes selon que l'on se rapproche du point par la droite ou par la gauche (exemple : la fonction valeur absolue $f: x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0).

Fonction	Définie sur	Dérivée	Dérivable sur
f(x) = k	\mathbb{R}	f'(x)=0	\mathbb{R}
f(x) = x	\mathbb{R}	f'(x)=1	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	R *
$f(x) = \sqrt{x}$	[0; +∞[$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$]0; +∞[

IV. Opération sur les dérivées

$$(k \times f)' = k \times f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$(u^{2})' = 2u'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^{2}}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^{2}}$$

Si
$$g(x) = f(ax + b)$$
 alors $g'(x) = a \cdot f'(ax + b)$

V. Applications

a. Sens de variation

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \ge 0$ pour tout $x \in I$;
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \le 0$ pour tout $x \in I$;
- f est constante sur I si et seulement si f'(x) = 0 pour tout $x \in I$.

b. Recherche d'extrema

Si $f(x_0)$ est un extremum de f sur I, alors $f'(x_0) = 0$

Cependant, l'inverse n'est pas forcément vrai. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I.