Dérivation

Mathématiques – Première spécialité

I. Nombre dérivé

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite passant par $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

II. Tangente

Le nombre dérivé de f en a est donc par définition le coefficient directeur de la tangente à C_f en a.

f admet une tangente T au point $A(a\,;f(a))$, et cette tangente a pour équation réduire :

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

III. Fonction dérivée

Si f admet un nombre dérivé pour tout réel a d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I.

Une autre situation de non dérivabilité est un point où la courbe est « pointue » : on parle de point anguleux. Cela correspond à une situation où le taux d'accroissement admet des limites différentes selon que l'on se rapproche du point par la droite ou par la gauche (exemple : la fonction valeur absolue $f : x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0).

Fonction	Définie sur	Dérivée	Dérivable sur
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;\ +\infty[$

IV. Opération sur les dérivées

$$(k \times f)' = k \times f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$(u^2)' = 2u'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\text{Si } g(x) = f(ax + b) \text{ alors } g'(x) = a \cdot f'(ax + b)$$

V. Applications

a. Sens de variation

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$;
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$;
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

b. Recherche d'extrema

Si $f(x_0)$ est un extremum de f sur I, alors $f'(x_0) = 0$

Cependant, l'inverse n'est pas forcément vrai. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I.