# Dérivation

Mathématiques – Première/Terminale spécialité

## I. Nombre dérivé

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite passant par $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$.

On dit que $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a+h$ admet comme limite un nombre réel quand $h$ tend vers 0.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

## II. Tangente

Le nombre dérivé de $f$ en $a$ est donc par définition le coefficient directeur de la tangente à $C_f$ en $a$.

$f$ admet une tangente $T$ au point $A(a\,;f(a))$, et cette tangente a pour équation réduire :

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

## III. Fonction dérivée

Si $f$ admet un nombre dérivé pour tout réel $a$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, on dit que $f$ est dérivable sur $I$.

Une autre situation de non dérivabilité est un point où la courbe est « pointue » : on parle de point anguleux. Cela correspond à une situation où le taux d'accroissement admet des limites différentes selon que l'on se rapproche du point par la droite ou par la gauche (exemple : la fonction valeur absolue $f : x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0).

| Fonction | Définie sur | Dérivée | Dérivable sur |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n-1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0;\ +\infty[$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;\ +\infty[$ |

## IV. Opération sur les dérivées

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $k \times f$ | $k \times f'$ |
| $f + g$ | $f' + g'$ |
| $u \times v$ | $u'v + uv'$ |
| $u^2$ | $2u'u$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| $u \circ v$ | $u' \times (v' \circ u)$ |
| $f(ax + b)$ | $a \cdot f'(ax + b)$ |
| $u^n$ | $nu^{n-1} \times u'$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

## V. Applications

### a. Sens de variation

- $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ ;
- $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ ;
- $f$ est constante sur $I$ si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

### b. Recherche d'extrema

Si $f(x_0)$ est un extremum de $f$ sur $I$, alors $f'(x_0) = 0$

Cependant, l'inverse n'est pas forcément vrai. Si $f'$ s'annule en $x_0$ **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local de $f$ sur $I$.