

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,  
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,  
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,  
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,  
IMT Atlantique, ENSAE PARIS  
CHIMIE PARISTECH .

Concours Centrale-Supélec (Cycle international),  
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS D'ADMISSION 2022

**CORRIGÉ DE LA SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE**

Filière PC

(Durée de l'épreuve: 4 heures)

PHYSIQUE II — PC.

## A propos des araignées

### I Des araignées volantes

- – 1. On assimile une araignée à une sphère d'eau : leur masse est donc  $m_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{eau}}$  avec  $r \in [r_{\min} = 1 \text{ mm}, r_{\max} = 3,5 \text{ mm}]$  avec  $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  on a donc

$$m_{\min} = 2 \text{ mg} < m_g < m_{\max} = 180 \text{ mg}$$

- – 2. On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon  $r > R_t$  centrée sur la terre, il vient  $4\pi r^2 E(r) = Q/\varepsilon_0 = 4\pi R_t^2 \sigma/\varepsilon_0$  ainsi  $E(r) = (R_t/r)^2 \sigma/\varepsilon_0$  pour  $r = R_t$  on obtient  $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$  soit  $\sigma = E_0 \varepsilon_0$  et numériquement  $\sigma = 1 \text{ nC}$ .

Si ce modèle est correct, le champ dérive du potentiel  $V(r) = R_t^2 E_0 \left( \frac{1}{R_t} - \frac{1}{r} \right)$  ainsi

$$\begin{aligned} V(R_t + z_0) &= R_t^2 E_0 \left( \frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t + z_0} \right) = R_t^2 E_0 \left( \frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t} \left( 1 - \frac{z_0}{R_t} \right) + o\left(\frac{z_0}{R_t}\right) \right) \\ &= E_0 z_0 + o\left(\frac{z_0}{R_t}\right) \end{aligned}$$

avec  $z_0 = 60 \text{ km}$ , le d.l. est correct mais la valeur numérique  $V(R_t + z_0) = 120 \times 6.10^4 = 7\,260 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$  ne correspond pas à la mesure effectuée qui est de  $360 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ , le modèle surestime la valeur du potentiel d'un facteur 20. Il y a des pertes dans l'atmosphère...

Le modèle n'est pas correct.

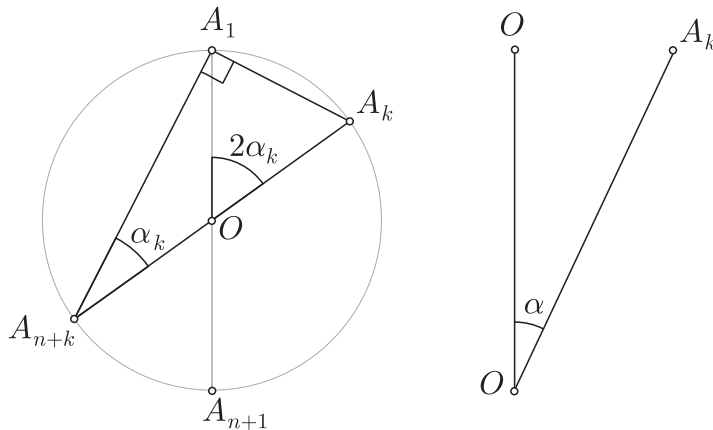
- – 3. Le nombre de Reynolds compare les termes convectifs et les termes diffusifs dans l'équation de Navier-Stokes  $\mathcal{R}_e = \frac{\rho V \ell}{\eta}$ . Pour déterminer le régime dans le problème du décolage des araignées c'est le rayon qu'il convient de prendre en compte car c'est celui-ci qui est face au vent de vitesse  $V = U$ . On a donc  $\ell = r$  et

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho_{\text{air}} U r}{\eta} \text{ soit } \mathcal{R}_e \simeq \frac{1 \times 0,1 \times 10^{-6}}{1,9 \cdot 10^{-5}} \simeq 5 \times 10^{-3} \ll 1$$

On est en présence d'un écoulement laminaire.

- – 4. Dans un tel écoulement non turbulent la force hydrodynamique  $F_h$  est proportionnelle à la vitesse relative, à la viscosité de l'air et à la taille caractéristique soumise à l'écoulement d'air. Le coefficient de proportionnalité dépend de facteurs géométriques. En supposant que les forces s'additionnent pour chaque fil,  $n$  fils procurent une force  $nF_h$  qui doit au minimum compenser le poids. On a donc  $mg = nF_h$  soit  $n = mg/F_h$  avec la valeur proposée et la masse estimée pour les araignées on trouve  $n \simeq 12$  fils pour les plus petites et un bon millier pour les plus grosses : la force hydrodynamique ne suffit pas.
- – 5. Il y a de nombreuses méthodes pour faire ce calcul...

L'une d'elle, suggérée..., consiste à se placer dans le triangle  $A_1 A_k A_{n+k}$  avec  $1 < k < n+1$ , rectangle en  $A_1$  car  $A_k A_{n+k}$  est un diamètre du cercle. On mesure les angles utiles sur un schéma



On voit immédiatement que  $\widehat{OA_1, OA_k} = (k-1)\pi/n = 2\alpha_k$  et  $\widehat{A_{n+k}A_1, A_{n+k}Ak} = \alpha_k$  de plus  $A_k A_{n+k} = 2L \sin \alpha$ . On en déduit que  $A_1 A_k = 2L \sin \alpha \sin(\alpha_k)$  et  $A_1 A_{n+k} = 2L \sin \alpha \cos(\alpha_k)$  le potentiel créé en  $A_1$  par les charges  $A_k$  et  $A_{n+k}$  est donc

$$V_k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{A_1 A_k} + \frac{1}{A_1 A_{n+k}} \right) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left( \frac{1}{\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)} \right)$$

le potentiel total en  $A_1$  est la somme sur toutes les valeurs de  $k$  comprises entre 2 et  $n$  de tous ces  $V_k$  ainsi

$$V = \sum_{k=2}^n V_k \text{ soit } V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \right] \Rightarrow \boxed{p=8}$$

L'énergie potentielle d'interaction est donc  $E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \times 2nqV$  le facteur  $\frac{1}{2}$  est là pour ne pas compter deux fois chaque paire. On a donc

$$E_{\text{int}} = \frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \right]$$

La valeur de  $\alpha$  qui maximise cette énergie d'interaction est donc celle qui minimise  $\sin \alpha$ , soit  $\alpha_e = \pi/2$ . L'éventail est alors complètement ouvert : tous les fils sont dans le même plan.

- – 6. En coordonnées cylindriques la masse  $m$  modélisant le fil est située en  $M$  telle que  $\overrightarrow{OM} = \frac{L}{2} \sin \alpha \hat{e}_r + \frac{L}{2} \cos \alpha \hat{e}_z$  son énergie cinétique est donc  $E_{c,1} = \frac{1}{2} m \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{8} m L^2 \dot{\alpha}^2$ , comme il y a  $2n$  fils l'énergie cinétique totale est  $E_{c,n} = \frac{1}{4} n m L^2 \dot{\alpha}^2$ . L'énergie mécanique totale de l'éventail est donc

$$E = \frac{1}{4} n m L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{n q^2 G(n)}{8 \pi \varepsilon_0 L \sin \alpha}$$

Le système est conservatif, son énergie mécanique est conservée, en la dérivant par rapport au temps on obtient l'équation du mouvement

$$\frac{dE}{dt} = 0 \implies \ddot{\alpha} - \frac{q^2 G(n) \cos \alpha}{4 \pi \varepsilon_0 m L^3 \sin^2 \alpha} = 0$$

Au voisinage de l'équilibre  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll 1$ , on a

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{q^2 G(n) \sin \varepsilon}{4 \pi \varepsilon_0 m L^3 \cos^2 \varepsilon} \text{ en linéarisant } \ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{q^2 G(n)}{4 \pi \varepsilon_0 m L^3}}$$

L'équilibre  $\alpha_e$  est donc stable

. La période des oscillations est  $T = 2\pi/\omega$  soit  $T = \sqrt{\frac{16 \pi^3 \varepsilon_0 m L^3}{q^2 G(n)}}$ .

- – 7. Le champ électrostatique extérieur agissant sur les fils de longueur  $L$  et inclinés d'un angle  $\alpha$  rajoute une énergie potentielle  $E_{\text{ext}} = 2nqL \cos \alpha E_0$ . La nouvelle énergie potentielle totale dans notre approximation (élasticité et pesanteur négligées) s'écrit

$$E_p = \frac{n q^2 G(n)}{8 \pi \varepsilon_0 L \sin \alpha} + 2nqL \cos \alpha E_0$$

l'équilibre est donc obtenu pour  $\alpha_e$  tel que

$$\left. \frac{dE_p}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_e} = 0 \implies \frac{\sin^3 \alpha_e}{\cos \alpha_e} = -\frac{q G(n)}{16 \pi \varepsilon_0 L^2 E_0}$$

On voit ainsi que  $q$  doit être négatif pour que l'éventail s'ouvre vers le haut. Par ailleurs  $f : x \mapsto \sin^3(x)/\cos(x)$  est une fonction croissante tout comme  $G(n)$ , en conclusion

:  $\alpha_e \nearrow$  si  $n \nearrow$ ,  $\alpha_e \nearrow$  si  $-q \nearrow$ ,  $\alpha_e \searrow$  si  $L \nearrow$  et  $\alpha_e \searrow$  si  $E_0 \nearrow$ . L'observation d'un angle  $\alpha_e = \pi/6$  pour 6 fils permet de mesurer la charge  $q$  portée par chaque fil :

$$q = -\frac{16 \pi \varepsilon_0 L^2 E_0 \sin^3 \alpha_e}{G(3) \cos \alpha_e} = -\frac{20}{19} 10^{-9} \simeq -1 \text{ nC}$$

- – 8. La force électrostatique due à la présence du champ extérieur  $E_0$  et au fait que les  $2n$  fils possèdent une charge  $q$  est  $F = 2nqE_0$  dirigée vers le haut grâce au signe de  $q$ . Cette force doit compenser le poids donc

$$mg = 2nqE_0 \implies n = \frac{mg}{2qE_0}$$

pour une araignée de masse  $m = 5 \times 10^{-6} \text{ kg}$  on doit donc avoir

$$n > \frac{mg}{2qE_0} \implies n \gtrapprox 250 \text{ fils}$$

Il faut un champ électrique plus fort !

□ – 9. Question ouverte : réponse ouverte !

On peut aller :

- d'une description précise du phénomène (comme dans le sujet MP),
- à l'explication classique avec deux sphères que l'on rapproche (qui n'est pas très convaincante car des sphères ne seront jamais pointues),
- à des commentaires sur le fait que les équipotentielles  $V = \text{cste}$  se resserrent au voisinage d'une pointe créant ainsi un champ  $\vec{E} = -\text{grad } V$  plus important.

## II Produire de la musique avec des fils d'araignée

□ – 10. On écrit tout d'abord que  $ds^2 = dx^2 + dz^2$  soit  $ds = dx \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{1/2}$  on en déduit

alors directement  $\cos(\alpha) = \frac{dx}{ds} = \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{-1/2}$  et  $\sin(\alpha) = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{-1/2}$ .

Il n'y a aucun mouvement horizontal donc  $T_x(x+dx, t) - T_x(x, t) = 0$  ce qui signifie que  $T_x$  est indépendant de  $x$ . On a par ailleurs  $\tan \alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{T_x}{T_z}$  et en écrivant

$T = \sqrt{T_x^2 + T_z^2} = T_x \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{1/2}$ . Au premier ordre en  $\frac{dz}{dx}$  on peut écrire  $ds = dx$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = \tan \alpha = \frac{dz}{dx}$  et  $T = T_x$  et l'on peut en conclure que la norme de la tension  $T$  est homogène dans le fil.

□ – 11. La projection du PFD sur  $\hat{e}_z$  donne  $\mu ds \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_z(x+dx) - T_z(x)$  en utilisant le fait qu'à l'ordre où l'on travaille  $ds = dx$  et  $T_z = \frac{\partial z}{\partial x} T_x = T \frac{\partial z}{\partial x}$  il vient

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_x \right] \text{ soit } \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

où  $c = \sqrt{T/\mu}$  est la célérité des ondes transversales qui se propagent dans le fil.

□ – 12. La fonction  $z(x, t) = f(u) + g(v)$  avec  $u = x - ct$  et  $v = x + ct$  est telle que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Elle est donc bien solution de l'équation de propagation. La fonction  $f$  correspond à l'onde plane progressive qui se propage vers les  $x$  croissants à la vitesse  $c$ , et la fonction  $g$  correspond à l'onde plane progressive qui se propage vers les  $x$  décroissants à la vitesse  $c$ .

□ – 13. Les deux extrémités du fil sont ici attachées ce qui impose  $\forall t, z(0, t) = z(\ell, t) = 0$ . Ces conditions aux limites se matérialisent dans le système

$$\begin{cases} \underline{A} + \underline{B} = 0 \\ \underline{A}e^{-jk\ell} + \underline{B}e^{+jk\ell} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \underline{A} = -\underline{B} \\ \underline{A}(e^{-jk\ell} - e^{+jk\ell}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \underline{A} = -\underline{B} \\ \underline{A} \sin k\ell = 0 \end{cases}$$

Si  $\underline{A} = 0$  alors  $\underline{B} = 0$  et aucune onde ne se propage, par contre  $\sin k\ell = 0 \implies k = k_n = n\pi/\ell$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , correspond à des modes de propagation. La relation de dispersion  $\omega = kc$  permet d'obtenir les pulsations de ces modes  $\omega_n = n\pi c/\ell$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Il s'agit d'onde stationnaires pour lesquelles  $\underline{z}(x, t) = \underline{C}e^{j\omega_n t} \sin(k_n x)$  soit  $z(x, t) = C \cos(\omega_n t) \sin(k_n x)$  : ce sont des vibrations en phase.

□ – 14. La fréquence du son est  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2\ell} = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  on a donc  $T = \frac{4\mu\ell^2 f_n^2}{n^2}$  et pour le fondamental ( $n = 1$ ) il vient  $T = 4\mu\ell^2 f_1^2$  soit numériquement  $T = 2.10^{-2} \text{ N}$ . Cette valeur correspond à quelques millièmes de la tension qui la ferai sortir de son régime d'élasticité : le fil de soie peut donc être utilisé pour fabriquer une corde de violon.

□ – 15. On cherche des solutions sous la forme  $\underline{z} = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)}$  il vient  $\frac{E\pi a^4}{4\mu} k^4 + c^2 k^2 - \omega^2 = 0$ . On

cherche les solutions  $k^2 > 0$  de cette équation, il vient

$$k^2 = \frac{2T}{E\pi a^4} \left( \sqrt{1 + \frac{E\pi a^4 \omega^2}{\mu c^4}} - 1 \right)$$

Cette valeur de  $k$  doit être injectée dans les deux modes  $x$  croissant et  $x$  décroissant. Les conditions aux limites étant identiques on trouve toujours  $k = k_n = n\pi/\ell$  ce qui donne

$$\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} = \frac{2T}{E\pi a^4} \left( \sqrt{1 + \frac{E\pi a^4 \omega^2}{\mu c^4}} - 1 \right) \implies \omega_n^2 = \frac{\mu c^4}{E\pi a^4} \left[ \left( 1 + \frac{E a^4 n^2 \pi^3}{2T \ell^2} \right)^2 - 1 \right]$$

en développant le carré on obtient

$$f_n^2 = \frac{\omega_n^2}{4\pi^2} = \frac{c^2 n^2}{4\ell^2} \left[ 1 + \frac{E a^4 \pi^3}{4T \ell^2} n^2 \right] \implies f_n = \frac{cn}{2\ell} \sqrt{1 + B n^2} \text{ avec } B = \frac{E a^4 \pi^3}{4T \ell^2}$$

Les fréquences ne sont plus des multiples d'une fréquence fondamentale, le son n'est plus harmonique. Pour  $\ell$  et  $T$  fixés, on peut calculer le rapport

$$\begin{aligned} \frac{B_{\text{soie d'araignée}}}{B_{\text{corde classique}}} &= \frac{E_{\text{soie d'araignée}} \times (a_{\text{soie d'araignée}})^4}{E_{\text{corde classique}} \times (a_{\text{corde classique}})^4} \\ &= \frac{60}{25} \left( \frac{35}{40} \right)^4 = \frac{3 \times 7^4}{2 \times 5 \times 8^3} = 1,4 \end{aligned}$$

un violon utilisant des fils d'araignées produit un son moins harmonique et plus aigu...d'une très grande qualité mais ça ils ne peuvent pas le savoir !

### III Chapelet de gouttes d'eau sur une toile d'araignées

#### III.A Approche statique

□ – 16. Le volume initial est celui d'un cylindre évidé

$$V = \pi [(a + h_0)^2 - a^2] \lambda \implies V = \pi [2ah_0 + h_0^2] \lambda = \pi [R_0^2 - a^2] \lambda$$

en présence de la modulation  $h(z) = h_m + \varepsilon \cos(kz)$  on obtient

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\lambda [2ah(z) + h^2(z)] dz \\ &= \pi \int_0^\lambda [2ah_m + \varepsilon a \cos(kz) + h_m^2 + 2\varepsilon h_m \cos(kz) + \varepsilon^2 \cos^2(kz)] dz \end{aligned}$$

La valeur moyenne sur une longueur d'onde se simplifie en  $V = \pi (2ah_m + h_m^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \lambda$  la conservation du volume depuis l'état sans modulation donne enfin

$$h_m^2 + 2ah_m + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - R_0^2 + a^2 = 0 \implies h_m + a = R_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{R_0} \right)^2}$$

si  $\varepsilon \ll R_0$  un développement limité à l'ordre 1 de la racine fournit enfin, avec  $h_0 = R_0 - a$

$$h_m + a = R_0 - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{R_0} \implies h_m = h_0 - \frac{\varepsilon^2}{\chi R_0} \text{ avec } \boxed{\chi = 4} \quad (1)$$

□ – 17. L'énergie de surface sur une portion de longueur  $\lambda$  s'écrit dans l'état initial

$$E_0 = 2\pi(a + h_0)\gamma\lambda$$

et dans l'état modulé  $E = 2\pi\gamma \int_0^\lambda (a + h_0) ds$ . On écrit l'expression de  $ds$  fournie à l'ordre 1, il vient  $ds = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dz}\right)^2\right) dz$  avec  $R(z, t) = a + h_m + \varepsilon(t) \cos(kz)$  et il vient

$$E = 2\pi\gamma \int_0^\lambda [a + h_m + \cos(kz)] \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 k^2 \sin^2(kz)\right] dz$$

tous les facteurs constant de  $\cos(kz)$  disparaissent dans l'intégration qui se simplifie en

$$\begin{aligned} E &= 2\pi\gamma \int_0^\lambda [a + h_m] \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 k^2 \sin^2(kz)\right] dz \\ &= 2\pi\gamma\lambda \left[a + h_m + \frac{1}{4}\varepsilon^2 k^2 (a + h_m)\right] \end{aligned}$$

on peut maintenant calculer

$$\Delta E = E - E_0 = 2\pi\gamma\lambda \left[h_m - h_0 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 k^2 (a + h_m)\right]$$

avec les expressions calculées pour  $h_m$  à la question précédente il vient à l'ordre  $\varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2\pi\gamma\lambda \left[-\frac{\varepsilon^2}{4R_0} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 k^2 \left(\underbrace{a + h_0}_{R_0} - \frac{\varepsilon^2}{\chi R_0}\right)\right] \\ &= \frac{\pi\gamma\lambda\varepsilon^2}{2R_0} [k^2 R_0^2 - 1] \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

□ – 18. La fonction  $\Delta(\varepsilon)$  est une parabole passant par l'origine et dont l'axe de symétrie est  $\varepsilon = 0$ .

- Si  $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} > \frac{1}{R_0}}$ , la parabole est ouverte vers le haut, la fonction  $\Delta E$  présente un minimum en  $\varepsilon = 0$  : l'équilibre constitué par le cylindre non modulé est stable;
- Par contre si  $\boxed{\lambda > 2\pi R_0}$ , la fonction  $\Delta E$  présente un maximum en  $\varepsilon = 0$  : l'équilibre est instable et se rompt en présence d'une perturbation. On s'attend à l'apparition de gouttes écartées de la longueur d'onde...

### III.B Approche dynamique

- – 19. Le problème est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ , donc  $v$  ne dépend pas de  $\theta$ , de plus dans la limite  $L \gg a$  le cylindre peut-être considéré comme infini et donc invariant par translation selon cet axe :  $v$  ne dépend pas non plus de  $z$ . Finalement  $\vec{v} = v(r) \hat{e}_z$ . Si l'on ne considère pas le champ de pesanteur, l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P - \eta \Delta \vec{v}$$

Attendu que  $\vec{v} = v(r) \hat{e}_z$ , la composante selon  $\hat{e}_z$  de  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  est nulle. En régime stationnaire, la composante selon  $\hat{e}_z$  de l'équation de Navier-Stokes est donc

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Etant donné que les variables  $z$  et  $r$  sont indépendantes, les deux termes de cette égalité sont des constantes. On a donc

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{\partial P}{\partial z} = \beta = \text{cste}$$

- – 20. On intègre l'équation précédente pour la variable  $r$ , il vient

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{\beta}{\eta} r \implies \frac{dv}{dr} = \frac{\beta}{2\eta} r + \frac{k}{r}$$

La constante d'intégration  $k$  est fixée par la condition  $v'(R_0) = 0$  qui donne  $k = -\frac{\beta}{2\eta} R_0^2$ . On intègre une nouvelle fois pour avoir

$$v(r) = \frac{\beta}{4\eta} r^2 - \frac{\beta R_0^2}{2\eta} \ln(r) + k$$

la constante est maintenant fixée par la contrainte  $v(a) = 0$  qui donne  $k = \frac{\beta R_0^2}{2\eta} \ln(a) - \frac{\beta}{2\eta} a^2$  on obtient donc finalement

$$v(r) = -\frac{\beta a^2}{2\eta} \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] + \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right\} \text{ et donc } \alpha = \frac{\beta a^2}{2\eta}$$

- – 21. Le débit volumique s'obtient par l'intégrale

$$Q = 2\pi \int_a^{a+h_0} r v(r) dr = -\frac{\beta \pi a^3}{\eta} \int_a^{a+h_0} \frac{r}{a} \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] + \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right\} dr$$

il est clair qu'il faut poser  $y = r/a$  et  $x = h_0/a$  pour avoir

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\pi \beta a^4}{\eta} \int_1^{1+x} \left\{ \frac{1}{2} [y - y^3] + (1+x)^2 y \ln y \right\} dy \\ &= -\frac{\pi \beta a^4}{2\eta} \left[ \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} y^4 + (1+x)^2 y^2 \ln y - \frac{1}{2} (1+x)^2 y^2 \right]_1^{1+x} \\ &= \frac{2\pi \beta a h_0^3}{3\eta} \left[ \frac{1 + 3(1+x)^4 - 4(1+x)^2 - 4(1+x)^4 \ln(1+x)}{16x^3} \right] \end{aligned}$$

- – 22. On repart de  $h(z, t) = h_m + \varepsilon \cos(kz)$ , il vient  $\frac{\partial h}{\partial z} = -\varepsilon k \sin(kz)$  puis  $\frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = \varepsilon k^3 \sin(kz)$ , avec l'expression proposée on a donc

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right) = \frac{\gamma \varepsilon k}{a^2} \sin(kz) [1 - (ak)^2]$$

en remplaçant  $\beta$  par cette nouvelle expression non stationnaire dans le débit on obtient

$$Q(z, t) = \frac{2\pi\gamma k h_0^3}{3\eta a} \varepsilon(t) \xi(x) \sin(kz) [1 - (ak)^2] \quad (2)$$

- – 23. Considérons un élément de volume  $V$  de fluide compris entre les abscisses  $z$  et  $z + dz$ .

Pendant une durée  $dt$  un volume  $Q(z, t) dt$  entre dans  $V$  et un volume  $Q(z + dz, t) dt$  en sort. L'eau étant incompressible la variation de volume est donc

$$dV = [Q(z, t) - Q(z + dz, t)] dt \simeq -\frac{\partial Q}{\partial z} dz dt$$

Par ailleurs le volume du cylindre considéré s'écrit  $V = \pi(R^2 - a^2) dz$  avec  $R = a + h(z, t)$  ainsi  $dV = 2\pi R dR dz = 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} dt dz$  en évrivant l'égalité des deux variations de volume obtenues nous avons

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} dz dt = 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} dt dz \implies \boxed{-\frac{\partial Q}{\partial z} = 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t}} \quad (3)$$

- – 24. En utilisant l'expression (2) on trouve

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{2\pi\gamma k^2 h_0^3}{3\eta a} \varepsilon(t) \xi(x) \cos(kz) [1 - (ak)^2]$$

Comme  $R = a + h(z, t) = a + h_m(t) + \varepsilon \cos(kz)$ , l'expression (1) permet d'écrire  $R = R_0 + \varepsilon \cos(kz) - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{R_0}$  ainsi à l'ordre  $\varepsilon$  nous avons

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{d\varepsilon}{dt} \cos(kz) \text{ et } 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} = 2\pi R_0 \frac{d\varepsilon}{dt} \cos(kz)$$

Toujours à l'ordre  $\varepsilon$ , et en se rappelant que  $R_0 = a + h_0 = a(1 + x)$ , la relation (3) s'écrit donc

$$-\frac{\gamma k^2 h_0^3}{3\eta a^2 (1 + x)} \varepsilon(t) \xi(x) [1 - (ak)^2] = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

en prenant la limite  $x \rightarrow 0$  il vient (grâce au fait que  $\xi(x) \rightarrow -1$  quand  $x \rightarrow 0$ )

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\gamma k^2 h_0^3}{3\eta a^2} (a^2 k^2 - 1) \varepsilon = 0 \text{ ainsi } \boxed{\delta = \frac{\gamma h_0^3}{3\eta a^2}}$$

On retrouve un résultat semblable à celui de la phase statique :

- Si  $(ak)^2 < 1$ , i.e.  $\lambda > 2\pi a$ , les perturbations croissent exponentiellement, le cylindre de longueur  $\lambda$  est instable;
- Si  $(ak)^2 > 1$ , i.e.  $\lambda < 2\pi a$ , les perturbations sont évanescences, le cylindre de longueur  $\lambda$  est stable.



- – 25. Un laser de longueur d'onde  $\lambda = 633 \text{ nm}$  est de couleur rouge. La largeur  $b$  de la tache de diffraction est donnée par  $b \simeq \frac{\lambda D}{a}$  on obtient donc  $a = \lambda D/b$  numériquement  $a = 633 \cdot 10^{-9} \times 2 / 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  soit  $a = 14 \mu\text{m}$ . L'instabilité se produira dès que  $\lambda > 2\pi a$  qui correspond à une longueur de cylindre qui se déstabilise, et donc à l'ordre de grandeur des gouttes les plus petites que l'on observera. Numériquement  $\lambda \simeq 0,1 \text{ mm}$ .