Trabajo Practico N° 1 - PLP

Enzo Stabile, Nicolas Rechinni, Baltazar Berberian, Theo Vilardo

Septiembre 2024

Demostración del Ejercicio 9

Consigna

Debemos demostrar que.

$$\forall t :: AT\, a. \forall x :: a. (elem\, x\, (preorder\, t) = elem\, x\, (postorder\, t))$$

Demostración

Procedemos por inducción estructural sobre la estructura del árbol ternario t.

Caso base:

Para el caso de un árbol vacío $t = \text{Nil}$:
Queremos ver que:

$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder Nil}) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder Nil})$$

Entonces, por definicion de postorder y preorder:

$$\text{elem}\, x\, (\text{foldAT f1 [ ] Nil}) = \text{elem}\, x\, (\text{foldAT f2 [ ] Nil})$$

Y por definicion de $foldAT$:

$$\text{elem}\, x\, [\,] = \text{elem}\, x\, [\,]$$

$$false = false$$

En conclusión por la definicion de $elem$, para cualquier x:

$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder Nil}) = \text{False}$$
$$\text{elem}\, x\, (\text{postorder Nil}) = \text{False}$$

Por lo tanto vale:

$$\mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\, Nil}) = \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{postorder\, Nil})$$

Paso recursivo:

Supongamos que la propiedad se cumple para los subárboles i, m y d. Es decir:

- HI: Valen $P(i)$, $P(m)$, $P(d)$, $P(Tern\ \ \mathrm{r\ i\ m\ d})$

$$\mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\, i}) = \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{postorder\, i})$$
$$\mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\, m}) = \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{postorder\, m})$$
$$\mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\, d}) = \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{postorder\, d})$$
$$\mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder}\, (Tern\ \ \mathrm{r\ i\ m\ d})) = \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{postorder}\, (Tern\ \ \mathrm{r\ i\ m\ d}))$$

I) - Probamos el lado del *preorder*:

$$= \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{foldAT\ f1\ [\,]\ (Tern\ \ \ r\ i\ m\ d)})$$

Por def de $foldAT$

$$= \mathrm{elem}\, x\, f1\, r\, (\mathrm{foldAT\ f1\ [\,]\ i})\ (\mathrm{foldAT\ f1\ [\,]\ m})\ (\mathrm{foldAT\ f1\ [\,]\ d})$$

Por def de $preorder$

$$= \mathrm{elem}\, x\, (f1\, r\, (\mathrm{preorder\ i})\ (\mathrm{preorder\ m})\ (\mathrm{preorder\ d}))$$

Luego, aplicando $f1$

$$= \mathrm{elem}\, x\, ([\mathrm{r}] \mathrel{++} (\mathrm{preorder\ i}) \mathrel{++} (\mathrm{preorder\ m}) \mathrel{++} (\mathrm{preorder\ d}))$$

Entonces,

$$\mathrm{x} == \mathrm{r} \,|\, \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\ i}) \,|\, \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\ m}) \,|\, \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{preorder\ d})$$

II) - Probamos el lado del *postorder*:

$$= \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{postorder}\, (Tern\ \ \mathrm{r\ i\ m\ d}))$$

Analogamente a $I)$ y por definición de $postorder$ y $foldAT$:

$$= \mathrm{elem}\, x\, (\mathrm{foldAT\ f2\ [\,]}\, (Tern\ \ \mathrm{r\ i\ m\ d}))$$

$$= \mathrm{elem}\, x\, f1\, r\, (\mathrm{foldAT\ f2\ [\,]\ i})\ (\mathrm{foldAT\ f2\ [\,]\ m})\ (\mathrm{foldAT\ f2\ [\,]\ d})$$

Por definición de $postorder$:

$$= \text{elem}\, x\, (f2\, r\, (\text{postorder i})\ (\text{postorder m})\ (\text{postorder d}))$$

Y aplicando $f2$:

$$= \text{elem}\, x\, (\text{preorder i}) \ ++\ (\text{preorder m}) \ ++\ (\text{preorder d}) \ ++\ [\text{r}])$$

Luego por el *Lema* :

$$\text{x} == \text{r} \,|\, \text{elem}\, x\, (\text{postorder i}) \,|\, \text{elem}\, x\, (\text{postorder m}) \,|\, \text{elem}\, x\, (\text{postorder d})$$

Demostracion del Lema:

$$\text{elem}\, x\, xs\ ++\ ys = \text{elem}\, x\, xs\ ||\ \text{elem}\, x\, ys$$

I) - Caso Base:

$$\text{elem}\, x\ [\ ]\ ++\ ys = \text{elem}\, x\ [\ ]\ ||\ \text{elem}\, x\, ys$$

$$\text{elem}\, x\ ys = \text{false}\ ||\ \text{elem}\, x\, ys$$

$$\text{elem}\, x\ ys\ =\ \text{elem}\, x\, ys, \text{ y vale el caso base}$$

II) - Caso Recursivo:

- HI:

$$\text{elem}\, x\, zs\ ++\ ys = \text{elem}\, x\, zs\ ||\ \text{elem}\, x\, ys$$

$$\text{elem}\, x\, (z : zs)\ ++\ ys = \text{elem}\, x\, (z : zs)\ ||\ \text{elem}\, x\, ys$$

$$(\text{x} == \text{z} \,||\, \text{elem}\, x\, zs\ ++\ ys\,) = (\text{x} == \text{z}\ ||\ \text{elem}\, x\, (z : zs)\ ||\ \text{elem}\, x\, ys\ ||\ \text{elem}\, x\, zs)$$

Si $x == z =$ True :

$$\text{True} \,||\, \text{elem}\, x\, zs\ ++\ ys = \text{True}\ ||\ \text{elem}\, x\, (z : zs)\ ||\ \text{elem}\, x\, ys\ ||\ \text{elem}\, x\, zs$$

$$True\ =\ True$$

Si $x == z =$ False :

$$\text{False} \,||\, \text{elem}\, x\, zs\ ++\ ys = \text{False}\ ||\ \text{elem}\, x\, (z : zs)\ ||\ \text{elem}\, x\, ys\ ||\ \text{elem}\, x\, zs$$

$$\text{elem}\, x\, zs\ ++\ ys = \text{elem}\, x\, zs\ ||\ \text{elem}\, x\, ys$$

Que vale por HI

$\square$