Trabajo Practico N° 1 - PLP

Enzo Stabile, Nicolas Rechinni, Baltazar Berberian, Theo Vilardo

Septiembre 2024

Demostración del Ejercicio 9

Consigna

Debemos demostrar que.

$$\forall t :: AT\, a. \forall x :: a. (elem\, x\, (preorder\, t) = elem\, x\, (postorder\, t))$$

Demostración

Procedemos por inducción estructural sobre la estructura del árbol ternario t.

Caso base:

Para el caso de un árbol ternario vacío $t = \text{Nil}$:
Queremos ver que:

$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder Nil}) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder Nil})$$

Entonces, por definicion de postorder y preorder:

$$\text{elem}\, x\, (\text{foldAT f1 [ ] Nil}) = \text{elem}\, x\, (\text{foldAT f2 [ ] Nil})$$

Y por definicion de $foldAT$:

$$\text{elem}\, x\, [\,] = \text{elem}\, x\, [\,]$$

$$false = false$$

En conclusión por la definicion de $elem$, para cualquier x:

$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder Nil}) = \text{False}$$
$$\text{elem}\, x\, (\text{postorder Nil}) = \text{False}$$

Por lo tanto vale:

$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder}\, \text{Nil}) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, \text{Nil})$$

Paso recursivo:

Supongamos que la propiedad se cumple para los subárboles i, m y d. Es decir:

- HI: Valen $P(i)$, $P(m)$, $P(d)$, $P(Tern\ \ \text{r i m d})$

$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder}\, \text{i}) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, \text{i})$$
$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder}\, \text{m}) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, \text{m})$$
$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder}\, \text{d}) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, \text{d})$$
$$\text{elem}\, x\, (\text{preorder}\, (Tern\ \ \text{r i m d})) = \text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, (Tern\ \ \text{r i m d}))$$

I) - Probamos el lado del *preorder*:

$$= \text{elem}\, x\, (\text{foldAT f1 [ ] (Tern}\ \ \text{r i m d}))$$

Por def de $foldAT$

$$= \text{elem}\, x\, f1\, r\, (\text{foldAT f1 [ ] i})\ (\text{foldAT f1 [ ] m})\ (\text{foldAT f1 [ ] d})$$

Por def de $preorder$

$$= \text{elem}\, x\, (f1\, r\, (\text{preorder i})\ (\text{preorder m})\ (\text{preorder d}))$$

Luego, aplicando $f1$

$$= \text{elem}\, x\, ([\text{r}] \mathbin{++} (\text{preorder i}) \mathbin{++} (\text{preorder m}) \mathbin{++} (\text{preorder d}))$$

Entonces,

$$\text{x} == \text{r} \,|\, \text{elem}\, x\, (\text{preorder i}) \,|\, \text{elem}\, x\, (\text{preorder m}) \,|\, \text{elem}\, x\, (\text{preorder d})$$

II) - Probamos el lado del *postorder*:

$$= \text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, (Tern\ \ \text{r i m d}))$$

Analogamente a I) y por definición de $postorder$ y $foldAT$:

$$= \text{elem}\, x\, (\text{foldAT f2 [ ]}\, (Tern\ \ \text{r i m d}))$$

$$= \text{elem}\, x\, f1\, r\, (\text{foldAT f2 [ ] i})\ (\text{foldAT f2 [ ] m})\ (\text{foldAT f2 [ ] d})$$

Por definición de $postorder$:

$$= \text{elem}\, x\, (f2\, r\, (\text{postorder i})\ (\text{postorder m})\ (\text{postorder d}))$$

Y aplicando $f2$:

$$= \text{elem}\, x\, (\text{preorder i}) \mathbin{++} (\text{preorder m}) \mathbin{++} (\text{preorder d}) \mathbin{++} [\text{r}])$$

Luego por el *Lema* :

$$x == r \quad || \quad \underbrace{\text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, i)}_{\text{HI}} \quad || \quad \underbrace{\text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, m)}_{\text{HI}} \quad || \quad \underbrace{\text{elem}\, x\, (\text{postorder}\, d)}_{\text{HI}}$$

$$\text{x == r} \mid \text{elem}\, x\, (\text{preorder i}) \mid \text{elem}\, x\, (\text{preorder m}) \mid \text{elem}\, x\, (\text{preorder d})$$

Al quedar lo mismo de ambos lados de la igualdad, queda demostrado.

$\square$

Demostracion del Lema:

$$\text{elem}\, x\, xs \mathbin{++} ys = \text{elem}\, x\, xs \ || \ \text{elem}\, x\, ys$$

I) - <u>Caso Base:</u>

$$\text{elem}\, x\ [\,] \mathbin{++} ys = \text{elem}\, x\ [\,] \ || \ \text{elem}\, x\, ys$$

$$\text{elem}\, x\ ys = \text{false} \ || \ \text{elem}\, x\, ys$$

$$\text{elem}\, x\ ys = \text{elem}\, x\, ys, \text{ y vale el caso base}$$

II) - <u>Caso Recursivo:</u>

- HI:

$$\text{elem}\, x\, zs \mathbin{++} ys = \text{elem}\, x\, zs \ || \ \text{elem}\, x\, ys$$

$$\text{elem}\, x\, (z : zs) \mathbin{++} ys = \text{elem}\, x\, (z : zs) \ || \ \text{elem}\, x\, ys$$

$$(\text{x == z} \,||\, \text{elem}\, x\, zs \mathbin{++} ys\,) = (\text{x == z} \ || \ \text{elem}\, x\, (z : zs) \ || \ \text{elem}\, x\, ys \ || \ \text{elem}\, x\, zs)$$

<u>Si $x == z = \text{True}$:</u>

$$\text{True} \,||\, \text{elem}\, x\, zs \mathbin{++} ys = \text{True} \ || \ \text{elem}\, x\, (z : zs) \,||\, \text{elem}\, x\, ys \ || \ \text{elem}\, x\, zs$$

$$True = True$$

<u>Si $x == z$ = False :</u>

$$\text{False} \,||\, \text{elem}\, x\, zs \;\; ++ \;\; ys \; = \text{False} \;\; || \;\; \text{elem}\, x\, (z : zs) \;||\;\; \text{elem}\, x\, ys \;\; || \;\; \text{elem}\, x\, zs$$

$$\text{elem}\, x\, zs \;\; ++ \;\; ys \; = \text{elem}\, x\, zs \;\; || \;\; \text{elem}\, x\, ys$$

Que vale por HI

$\square$