پروژه کامپیوتری 7

سیگنال ها و سیستم ها

دکتر اخوان

سامان دوچی طوسی 810101420

پریسا محمدی 810101509

تمرین اول

در این بخش با یک مدار الکتریکی روبرو هستیم که دارای المان های مقاومت الکتریکی و خازن و سلف و منبع تغذیه ولتاژ می باشد و این المان ها با یکدیگر در مدار سری شده اند. ما می توانیم بر اساس قانون KVL بین ولتاژ های این المان ها رابطه ای خطی برقرار کنیم که به صورت زیر خواهد بود :

$$V_R(t) \ + \ V_L(t) \ + \ V_C(t) \ = \ V_{in}(t)$$

که می توانیم روابط ولتاژ هر یک از المان ها را جایگذاری کرده و به رابطه ای برحسب i(t) در سمت چپ معادله می رسیم و در سمت راست نیز منبع ولتاژ را داریم. در بخش های بعدی یک بار از ما خواسته شده است که تابع تبدیل جریان را بر حسب منبع ولتاژ به دست آوریم و بار دیگر خواسته شده که ولتاژ سلف و مقاومت را نیز بر حسب ولتاژ خازن به دست آورده تا بتوانیم در سمت چپ رابطه ی KVL رابطه ای بر حسب ولتاژ خازن داشته باشیم و آن را به عنوان خروجی در نظر بگیریم در حالی که در سمت راست منبع ولتاژ به عنوان ورودی می باشد.

الف)

تمرین اول

رابطه kvl : $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$

شرایط initial rest برقرار است

$$R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = v_{in}(t)$$

الف)

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{d\,v_{in}(t)}{dt}$$

خاصیت تبدیل لاپلاس در مشتق : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s)$, $s \in ROC_x$ or larger ☆

$$\xrightarrow[\star]{\mathcal{L}} L s^2 I(s) + R s I(s) + \frac{1}{C} I(s) = s V_{in}(s)$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{s^2 . L}} I(s) = \frac{1}{s^2}\left[\frac{-1}{CL} I(s)\right] + \frac{1}{s}\left[\frac{V_{in}(s)}{L} - \frac{R}{L} I(s)\right]$$

تصویر 1 - حل دستی بدست آوردن معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دومی

ب)

ب)

$$H(s) = \frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{c}}$$

تصویر 2 - بدست آوردن تابع تبدیل در حوزه لاپلاس

ج)

ج)

$$V_R(t) = Rc\,\frac{d}{dt}v_c(t) \xrightarrow{\text{رابطه}} KVL:\ Rc\,\frac{d}{dt}v_c(t) + LC\,\frac{d^2}{dt^2}v_c(t) + v_c(t) = v_{in}(t)$$

$$V_L(t) = LC\,\frac{d^2}{dt^2}v_c(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} LC\,s^2 V_c(s) + Rc\,s V_c(s) + V_c(s) = V_{in}(s) \xrightarrow[v_c(t) = y(t)]{v_{in}(t) = x(t)}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{Lc\,s^2 + Rc\,s + 1}$$

$$V_c(s) = \frac{1}{s^2}\left[\frac{V_{in}(s)}{LC} - \frac{V_c(s)}{LC}\right] + \frac{1}{s}\left[-R\frac{V_c(s)}{L}\right]$$

تصویر 3 - بدست آوردن معادله دیفرانسیل در حوزه لاپلاس

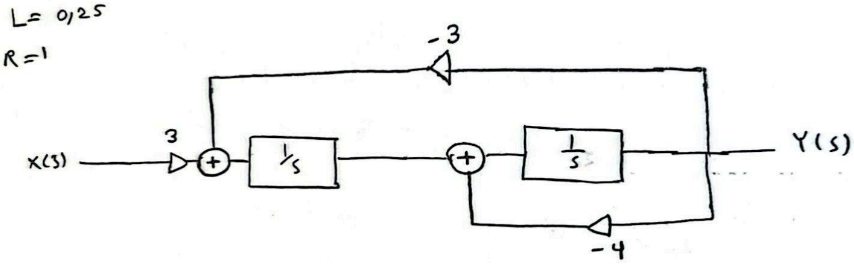
د)

د)

$$c = \frac{4}{3} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}\left[3\,X(s) - 3\,Y(s)\right] + \frac{1}{s}\left[-4\,Y(s)\right]$$

$L = 0{,}25$

$R = 1$



تصویر 4 - بدست آوردن بلوک دیاگرام به صورت دستی

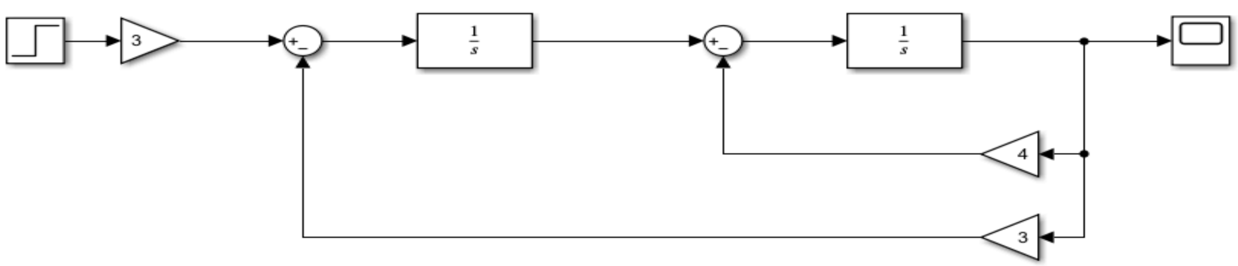
و)

د) پاسخ پله $\rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{3}{s^3+4s^2+3s} = \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$

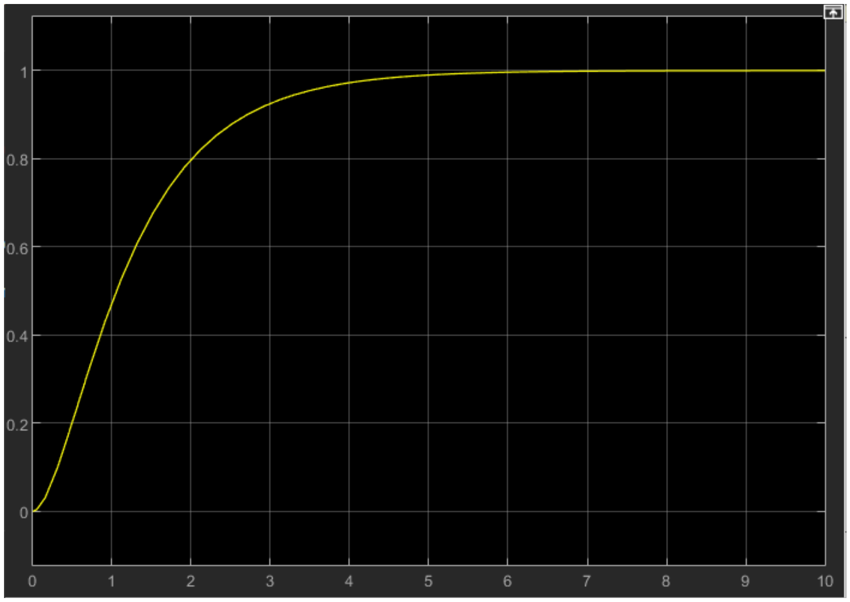
$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = u(t) - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$$

تصویر 5 - بدست آوردن پاسخ پله

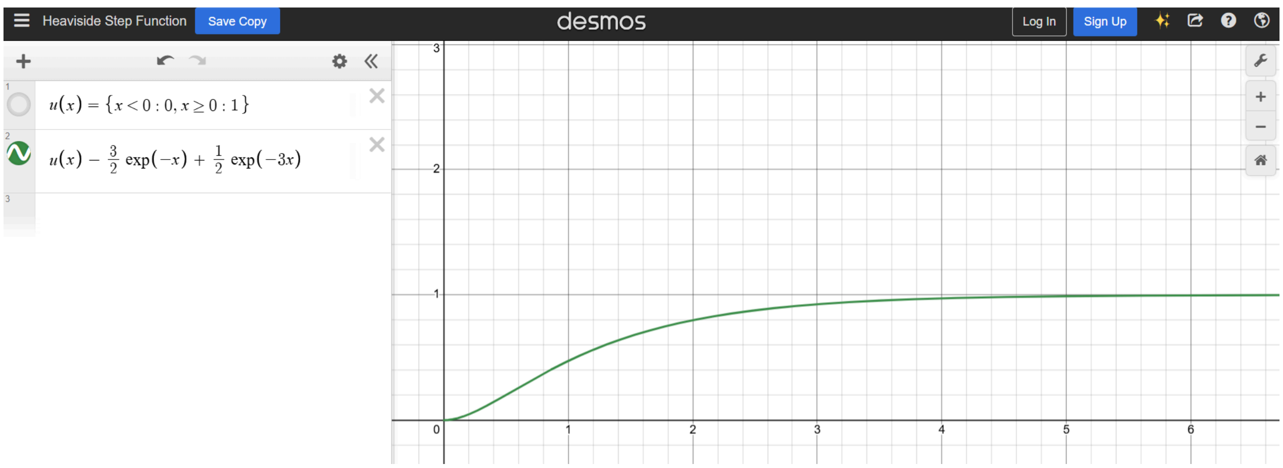
ه) بله وقتی که بر روی خروجی اسکوپ می گذاریم تا پلات اش را ببینیم متوجه می شویم که با رابطه ای که برای ورودی به دست آورده بودیم کاملا تطابق دارد و این بیانگر این موضوع است که بلاک دیاگرامی که در Simulink پیاده سازی کردیم درست است.



تصویر 6- بلوک دیاگرام حاصل از متلب



تصویر 7 - خروجی معادله دیفرانسیل در محیط Simulink متلب



تصویر 8 - خروجی سیگنال به دست آمده در بخش تئوری رسم شده در desmos

تمرین دوم

الف)

الف

جایگذاری $\Rightarrow \left(x(t) - y(t)\right) + B\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}\right) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$

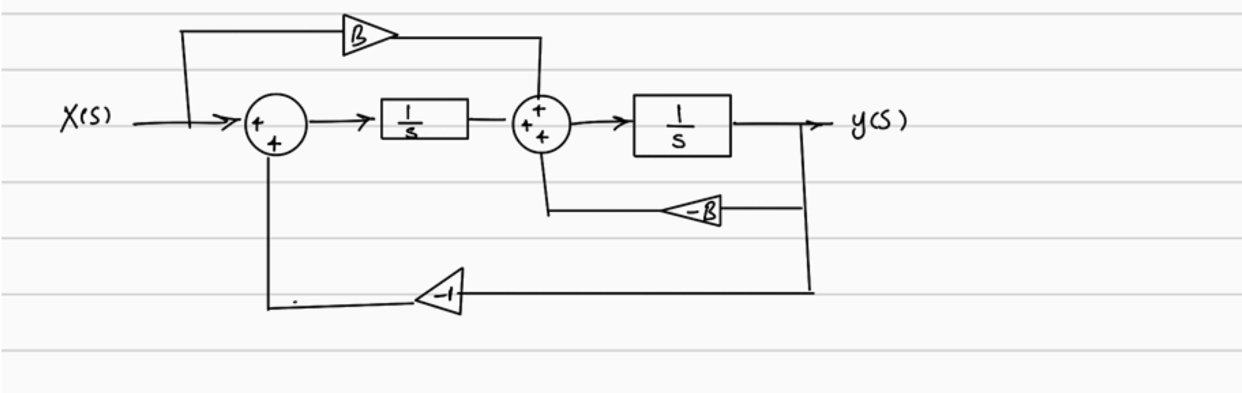
$$\Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = B\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

تصویر 9 - فرم معادله دیفرانسیلی

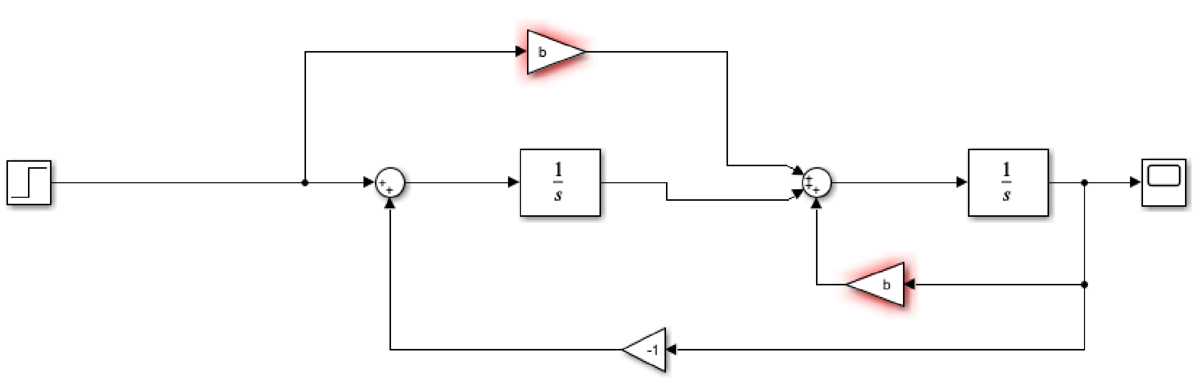
ب)

ب

$$\xrightarrow{L} s^2Y(s) + BsY(s) + Y(s) = BsX(s) + X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}\left(X(s) - Y(s)\right) + \frac{1}{s}\left(BX(s) - BY(s)\right)$$



تصویر 10 - تابع تبدیل



تصویر 11 - بلاک دایگرام در محیط simulink

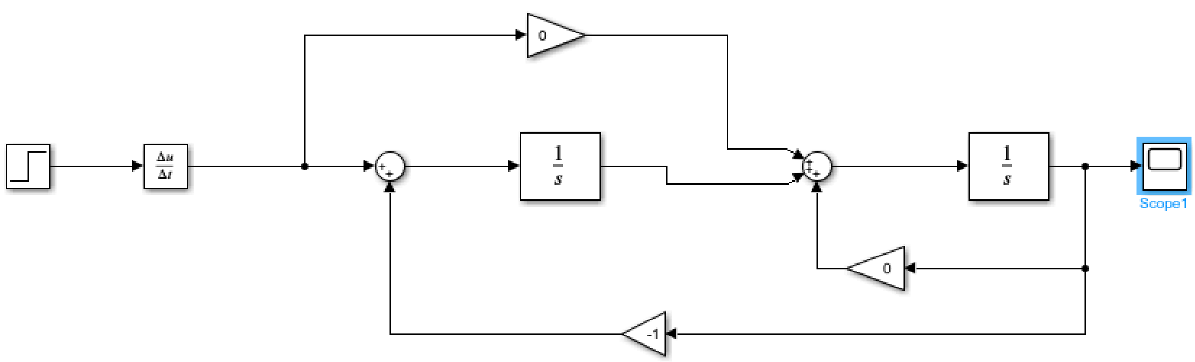
ج)

$$\rightarrow \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{BS+1}{S^2+BS+1} \qquad \boxed{2}$$

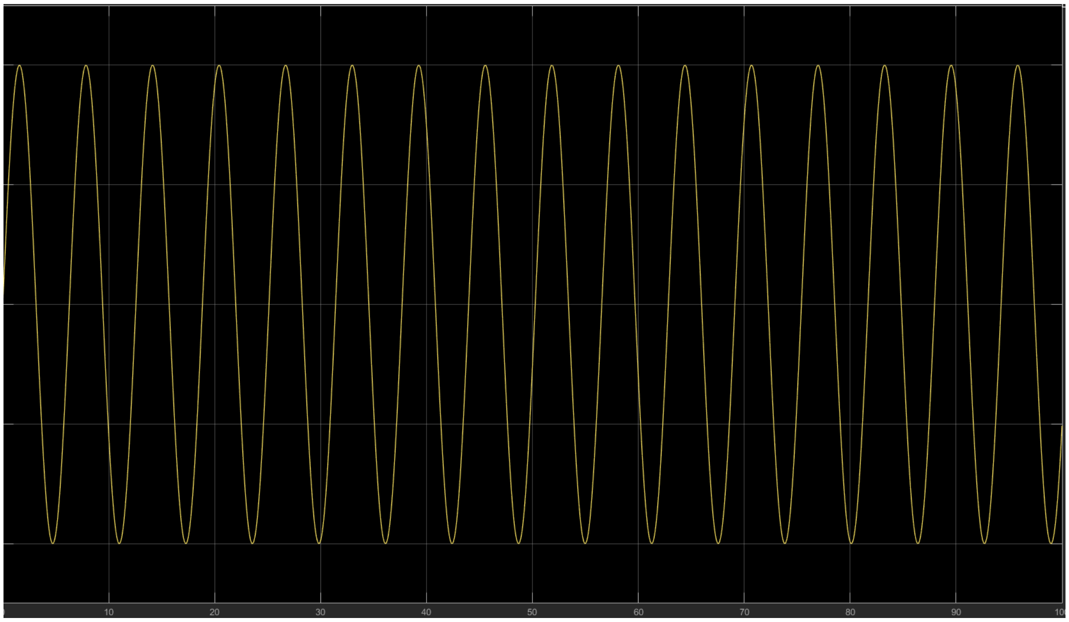
$$\xrightarrow{B=0} \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{S^2+1} \xrightarrow{L^{-1}} \underline{y(t) = \sin(t)}$$

$$X(S) = 1 \xrightarrow{L^{-1}} x(t) = \delta(t)$$

تصویر 12 - پاسخ ضربه سیستم



تصویر 13 - تصویر بلاک دایگرام در حالت B = 0



تصویر 14 - خروجی حاصل از اجرای بلاک دایگرام

همان طور که در فیلم مشخص بود در صورت عدم وجود سیستم تعلیق با گذشتن ماشین از روی دست انداز که همان ورودی به صورت ضربه هست ماشین به طور تقریبا سینوسی بالا و پایین می‌پرد (به دلیل اصطکاک کاملا این طوری نیست.) همچنین همان طور هم که در تصویر 14 مشخص هست خروجی بلاک دایگرام به صورت سینوسی است و ماشین میرا نمیشود.

د)

$\boxed{د}$

$$\Delta = B^2 - 4 \quad , \quad S = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4}}{2}$$

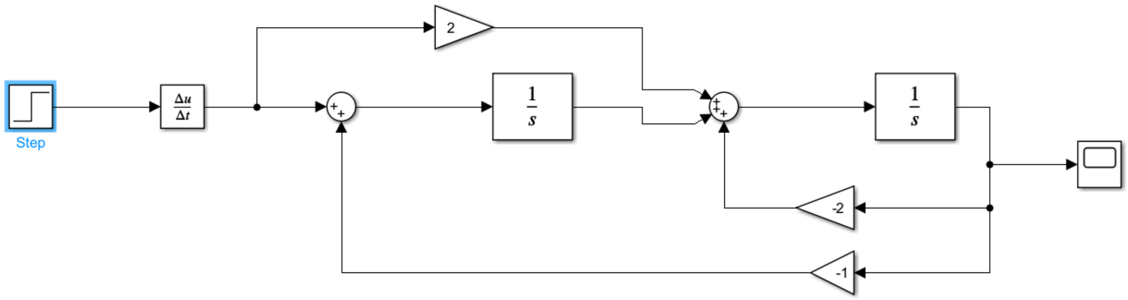
$$\Delta > 0 \Rightarrow \boxed{B > 2}$$

$$B > 0$$

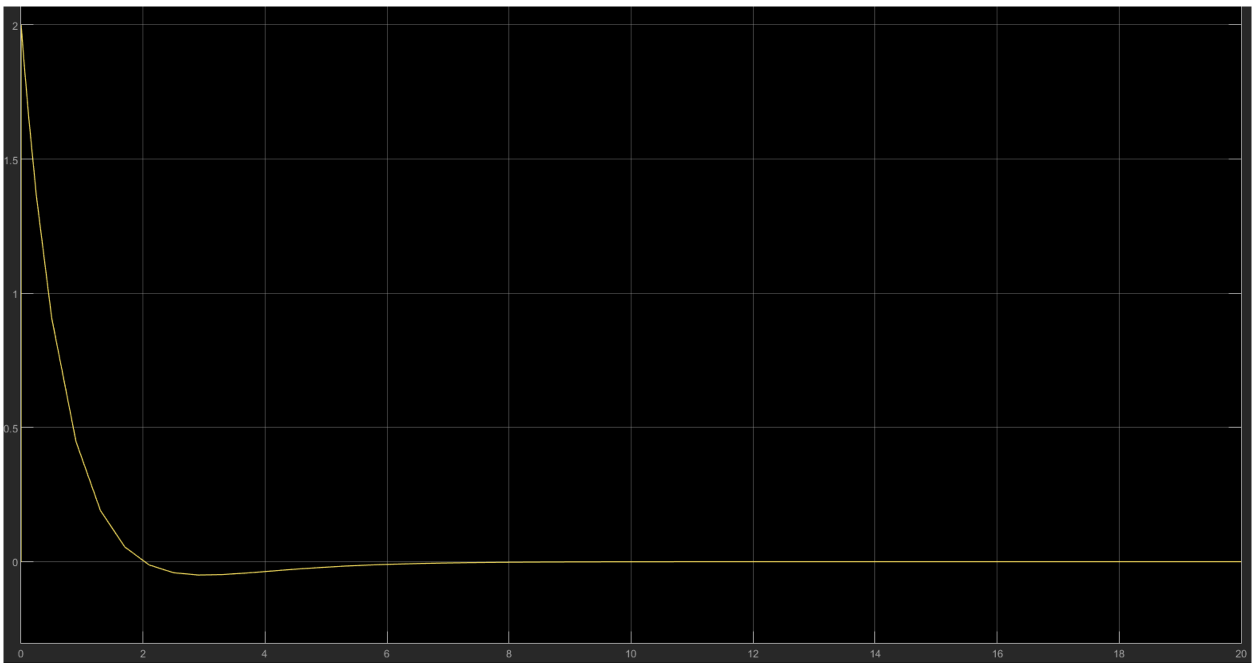
$$\frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{2S+1}{S^2+2S+1} \xrightarrow{X(S)=1} Y(S) = \frac{2S+1}{S^2+2S+1} = \frac{2S}{(S+1)^2} + \frac{1}{(S+1)^2} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$2e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) = e^{-t}u(t)(2-t)$$

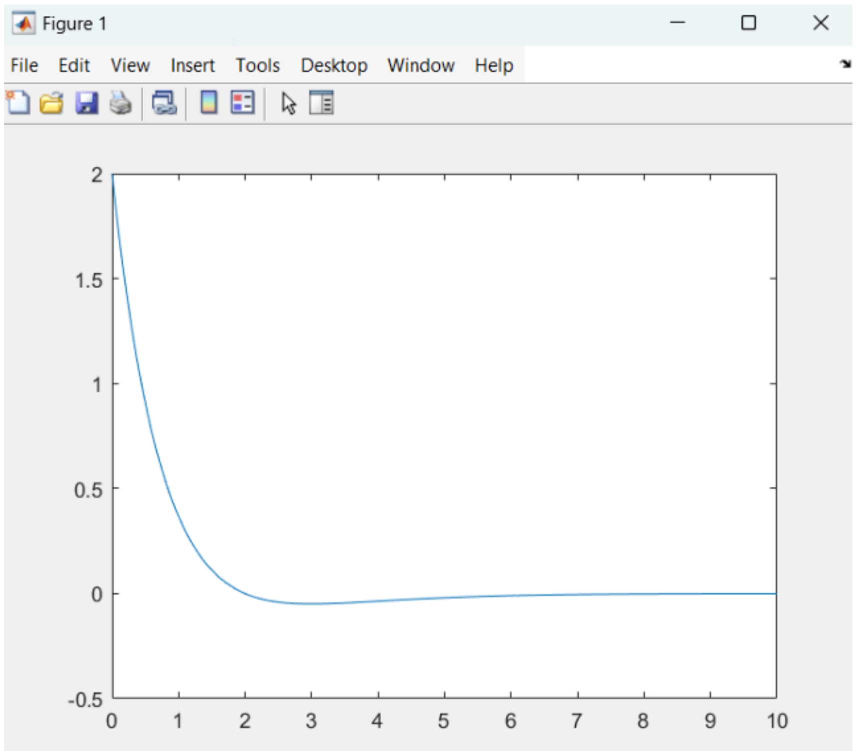
تصویر 15 - محاسبات پیدا کردن برای داشتن کوچکترین قطب



تصویر 16 - بلاک دایگرام خروجی برای قسمت د



تصویر 17 - خروجی حاصل از اجرای بلاک دایگرام



تصویر 18 - نمایش خروجی در متلب

همان طور که در تصاویر مشخص است، نتیجه تئوری با نتیجه به دست آمده یکسان است.
دیگر نوسان کابین به صورت ضربه ای نبوده و مانند سیستم فنر خودرو های امروزی کار میکند.

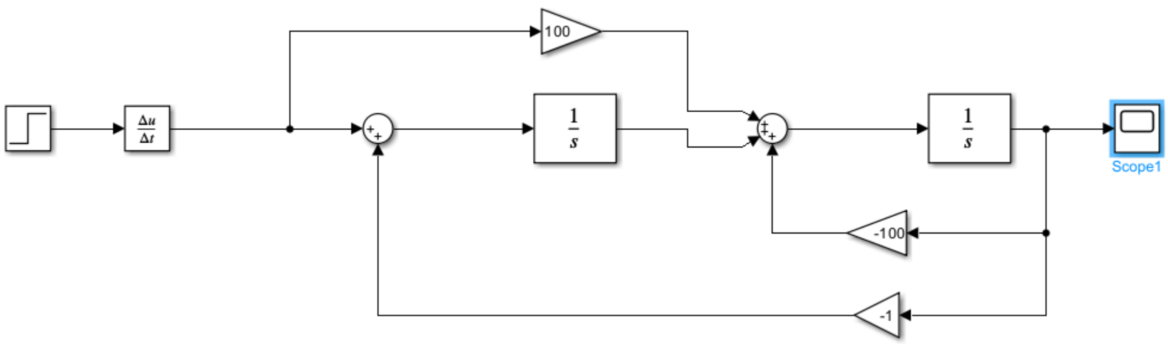
و)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{(s+100)(s+0.01)} = \frac{1.9902}{s+100} + \frac{0.01}{s+0.01} \xrightarrow[X(s)=1]{L^{-1}}$$

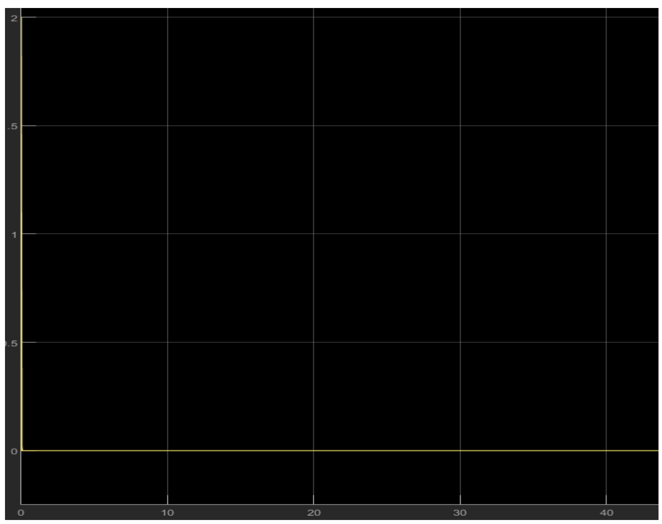
$\boxed{\text{و}}$

$$y(t) = 1.9902\, e^{-100t}\, U(t) + \underline{0.01\, e^{-0.01t}\, U(t)}$$

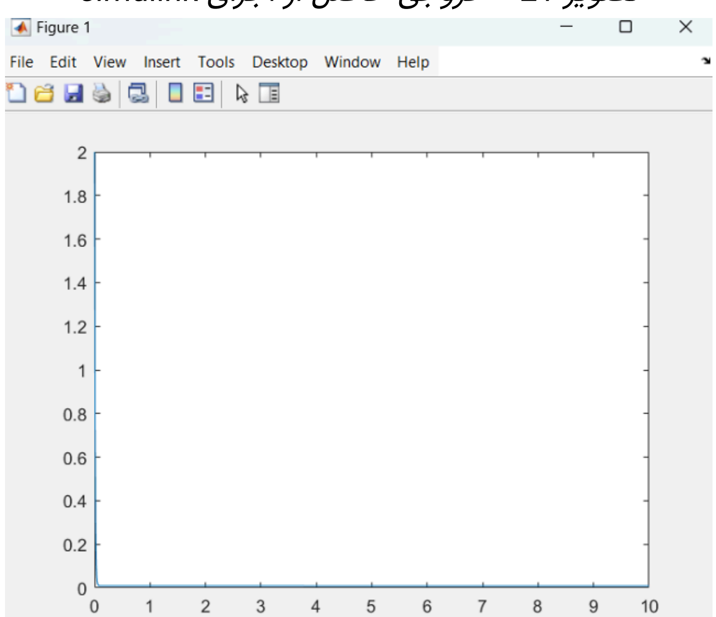
تصویر 19 - پاسخ ضربه سیستم به ازای B = 100



تصویر 20 - بلاک دایگرام حاصل از B = 100



تصویر 21 - خروجی حاصل از اجرای simulink



تصویر 22 - خروجی حاصل از اجرا در متلب

همان طور که در تصاویر بالا مشخص است نتیجه تئوری با نتیجه به دست آمده یکسان است.
در این حالت هم کابین به سرعت میرا میشود و عملا در خروجی ضربه داریم.

۵)

در حالت B = 0 خودرو میرا نمی شود و نوسان می کند و در حالت B = 100 کابین به سرعت میرا می‌شود به طوری که ضربه شدیدی وارد میشود.
با توجه به توضیحات بالا بهترین حالت برای B = 2 یا چیزی که ما بین این 2 قدار است می باشد.

تمرین سوم

در این بخش با معادله دیفرانسیلی روبرو هستیم که در آن شرایط اولیه در حالت Initial Rest نمی باشد و حاصل معادله دارای جواب خصوصی (steady state) و جواب همگن (transient state) می باشد. جواب همگن را با فرض(x(t برابر با صفر حل می کنیم و برای جواب خصوصی نیز (x(t را در نظر میگیریم. حال برای حل این معادله دیفرانسیل از تبدیل لاپلاس استفاده یک طرفه استفاده می کنیم و پاسخ ناشی از ورودی و ناشی از شرایط اولیه را به کمک آن به دست می آوریم.

الف)

تمرین سوم)

الف)

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 5u(t)$$

حاصل از ورودی : $s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{5}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{5}{s(s^2+3s+2)}$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(\frac{5}{2}e^{-2t} - 5e^{-t} + \frac{5}{2}\right)u(t)$$

حاصل از شرایط اولیه : $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = (-2e^{-2t} + 3e^{-t})u(t)$$

تصویر 23 - حل معادله ی دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس یک طرفه

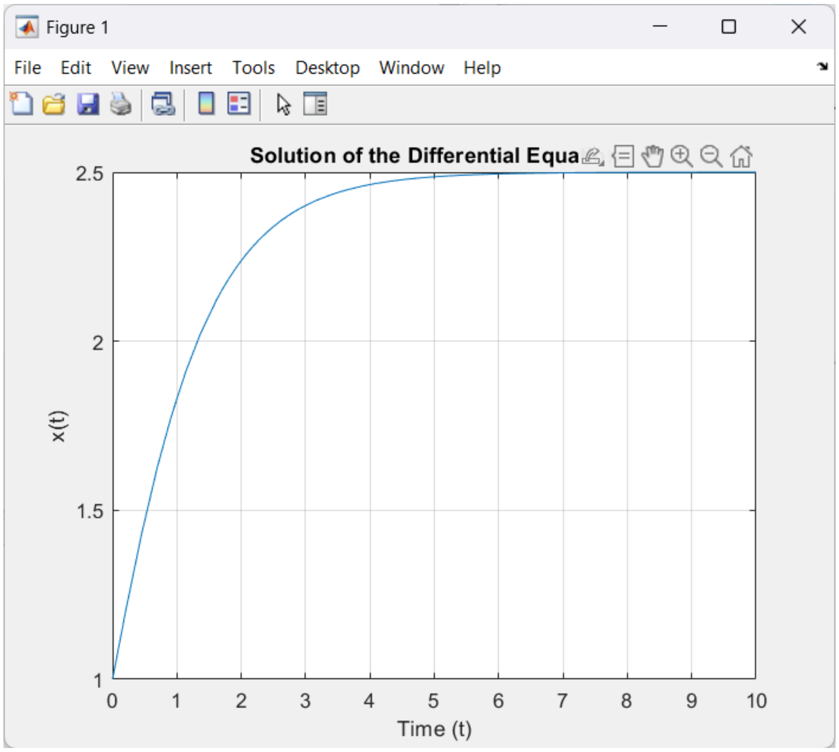
ب) برای حل این معادله دیفرانسیل در متلب ابتدا آن را به کمک diff تعریف می کنیم و سپس شرایط اولیه را در لحظه ی صفر مقدار دهی می کنیم. و در نهایت با دستور dsolve آن را حل کرده و در بازه ی 0 تا 10 جواب را پلات می کنیم. و همچنین مشاهده می کنیم که خروجی برابر است با رابطه ای به صورت تئوری به دست آورده بودیم.

```
syms x(t);
dx = diff(x);

diffEq = diff(x, t, 2) + 3*diff(x, t) + 2*x == 5*heaviside(t);

initCond1 = x(0) == 1;
initCond2 = dx(0) == 1;

initConditions = [initCond1, initCond2];

solution(t) = dsolve(diffEq, initConditions);

simplifiedSolution = simplify(solution);

fprintf("The solution to the given differential equation:\n%s\nis:\nx(t) = %s\n", diffEq, simplifiedSolution);

fplot(simplifiedSolution, [0, 10]);
grid on;
title('Solution of the Differential Equation');
xlabel('Time (t)');
ylabel('x(t)');
```

تصویر 24 - کد تعریف معادله دیفرانسیل در متلب

```
Command Window
The solution to the given differential equation:
2*x(1) + 3*subs(diff(x(t), t), t, 1) + subs(diff(x(t), t, t), t, 1) == 5
is:
x(t) = (exp(-2)*(10*exp(2) - 8*exp(1) + 2))/4
>>
```

تصویر 25 - جواب معادله دیفرانسیل به کمک متلب



تصویر 25 - پلات خروجی معادله دیفرانسیل به کمک متلب