



BÀI GIẢNG VỀ KỸ THUẬT LẬP TRÌNH VỚI C++

09 SỬ DỤNG MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG LẬP TRÌNH**A. Một số vấn đề về lý thuyết**

Ta thấy rằng, trong nhiều bài toán lập trình tối ưu, ta cần tìm giá trị tối ưu ở dạng lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Trong bất đẳng thức, ta cũng gặp dạng $A \geq B$ ($A \leq B$), B là hằng số. Như vậy A có thể đạt “Tối ưu” là B và phương án lựa chọn là điều kiện để dấu bằng xảy ra.

Sau đây ta xét một ví dụ:

☞ Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối:

Với mọi số thực x_1, x_2, \dots, x_N , thì luôn có: $|x_1 + x_2 + \dots + x_N| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$.

Dấu “=” xảy ra khi x_1, x_2, \dots, x_N cùng dấu.

☞ Bài toán lập trình: “Cung ứng lương thực”

Có N siêu thị của một tập đoàn nằm trên một đoạn đường dài và thẳng. Các siêu thị được đánh chỉ số từ $1, 2, \dots, N$ theo hàng dọc. Siêu thị thứ i có tọa độ là x_i ($0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq 10^9$).

Ban giám đốc muốn tìm một siêu thị T để đặt một nhà máy cung ứng sản phẩm tại vị trí x_T .

Khi đó thời gian để vận chuyển hàng hóa siêu thị i đến siêu thị T là $|x_i - x_T|$.

Yêu cầu: Tìm vị trí x_T để tổng thời gian vận chuyển của N siêu thị đến siêu thị T là nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử ta đặt nhà máy cung ứng tại vị trí X . Khi đó tổng thời gian để vận chuyển hàng hóa từ N siêu thị đến vị trí X bằng: $S = |x_1 - X| + |x_2 - X| + \dots + |x_N - X|$.

Nếu N là số lẻ, chọn $X = x_{(N+1)/2}$ (tức là $T = \frac{N+1}{2}$) thì

$$\begin{aligned} |x_1 - X| + |x_2 - X| + \dots + |x_N - X| &= |X - x_1| + |X - x_2| + \dots + |X - x_{T-1}| + |X - x_T| + \\ &|x_{T+1} - X| + \dots + |x_N - X| \geq |X - x_1 + X - x_2 + \dots + X - x_{T-1} + X - x_T + x_{T+1} - X + x_{T+2} - X + \dots \\ &+ x_N - X| = |-x_1 - x_2 - \dots - x_{T-1} + X - x_T + x_{T+1} + \dots + x_N| \end{aligned}$$

Nếu chọn $X = x_T$ thì S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $|-x_1 - x_2 - \dots - x_{T-1} + x_{T+1} + \dots + x_N|$.

Ví dụ $N = 5$.

$$\begin{aligned} S &= |x_1 - X| + |x_2 - X| + |x_3 - X| + |x_4 - X| + |x_5 - X|. \\ &= |X - x_1| + |X - x_2| + |x_3 - X| + |x_4 - X| + |x_5 - X| \\ &= |X - x_1| + |X - x_2| + |x_4 - X| + |x_5 - X| + |x_3 - X| \\ &\geq |X - x_1 + X - x_2 + x_4 - X + x_5 - X| + |x_3 - X| = |-x_1 - x_2 + x_4 + x_5| + |x_3 - X| \\ &\geq |-x_1 - x_2 + x_4 + x_5| \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $X = x_3$

Trường hợp N là số chẵn, ta chọn $T = (N+1)/2$ đều cho kết quả đúng.

**B. Bài tập****1. Một trung tâm**

Đọc con đường thẳng tấp của đất nước XYZ có N cửa hàng của tập đoàn YZX. Các cửa hàng có vị trí tại các tọa độ x_1, x_2, \dots, x_N . Tập đoàn muốn xây dựng 1 trung tâm tại vị trí x_i để cung ứng sản phẩm cho các cửa hàng. Mỗi cửa hàng x_h chi phí đi lại là $|x_i - x_h|$. Tổng chi phí đi lại của N cửa hàng đến trung tâm là: $S = \sum_{h=1}^N |x_i - x_h|$.

Yêu cầu: Tìm giá trị nhỏ nhất của S có thể đạt được.

Dữ liệu cho trong file **OneC.Inp** gồm:

- Dòng đầu ghi số nguyên dương N là số cửa hàng.
- Dòng thứ 2 ghi N số nguyên x_1, x_2, \dots, x_N ($0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq 10^7$).

Kết quả ghi ra file **OneC.Out** là tổng chi phí đi lại nhỏ nhất của N cửa hàng.

Ví dụ:

OneC.Inp	OneC.Out
4	7
1 2 3 7	

Giới hạn:

- Sub1: $N \leq 1000$;
- Sub2: $N \leq 200000$;

**2. Hai trung tâm**

Đọc con đường thẳng tấp của đất nước XYZ có N cửa hàng của tập đoàn YZX. Các cửa hàng có vị trí tại các tọa độ x_1, x_2, \dots, x_N . Tập đoàn muốn xây dựng 2 trung tâm tại hai vị trí x_i và x_j để cung ứng sản phẩm cho các cửa hàng. Mỗi cửa hàng x_h chỉ chọn một trung tâm x_t ($t = i$ hoặc $t = j$) để lấy sản phẩm, khi đó chi phí đi lại là $|x_t - x_h|$.

Yêu cầu: tìm hai vị trí i và j để tổng chi phí đi lại của N cửa hàng là nhỏ nhất.

Dữ liệu cho trong file **TwoC.Inp** gồm:

- Dòng đầu ghi số nguyên dương N là số cửa hàng.
- Dòng thứ 2 ghi N số nguyên x_1, x_2, \dots, x_N ($0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq 10^7$).

Kết quả ghi ra file **TwoC.Out** là tổng chi phí đi lại nhỏ nhất của N cửa hàng.

Ví dụ:

TwoC.Inp	TwoC.Out
4	2
1 2 3 7	

Giới hạn:

- Sub1: $N \leq 1000$;
- Sub2: $N \leq 200000$;

**3. Hàm Delta**

Cho dãy số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_n . Ứng với ba chỉ số i, j, k ($1 \leq i \leq j < k \leq n$), ta xây dựng hàm Delta trên dãy như sau: $F(i, j, k) = |a_1 - a_i| + |a_2 - a_i| + \dots + |a_j - a_i| + |a_{j+1} - a_k| + \dots +$

$$|a_n - a_k| = \sum_{t=1}^j |a_t - a_i| + \sum_{t=j+1}^n |a_t - a_k|$$

Ví dụ: Dãy gồm 5 số nguyên dương: 1, 2, 5, 7, 4.

$$F(1, 3, 4) = |a_1 - a_1| + |a_2 - a_1| + |a_3 - a_1| + |a_4 - a_4| + |a_5 - a_4| = |1 - 1| + |2 - 1| + |5 - 1| + |7 - 7| + |4 - 7| = 8$$

Yêu cầu: Hãy tìm giá trị nhỏ nhất có thể đạt được của $F(i, j, k)$.

Dữ liệu cho trong file văn bản DELTA.INP như sau:

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên T ($1 \leq T \leq 20$) là số bộ dữ liệu.
- Mỗi bộ dữ liệu được mô tả bởi hai dòng:
 - Dòng thứ nhất ghi số n ($3 \leq n \leq 500$) là số số hạng của dãy.
 - Dòng thứ hai ghi n số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_n ($a_i \leq 10^5$), các số được ghi cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả ghi ra file văn bản DELTA.OUT gồm T dòng, dòng thứ i là giá trị nhỏ nhất của hàm F tương ứng với bộ dữ liệu thứ i được cho trong file dữ liệu vào.

Ví dụ:

DELTA.INP	DELTA.OUT
2	9
5	8
1 2 10 8 2	
4	
22 3 10 2	

Giải thích: Bộ dữ liệu:

5

1 2 10 8 2

$F(1, 2, 4)$ đạt giá trị bằng 9 và đây là giá trị nhỏ nhất.

Bộ dữ liệu:

4

22 3 10 2

$F(1, 1, 2)$ đạt giá trị bằng 8 và đây là giá trị nhỏ nhất.

**4☀. Vận chuyển đồ cổ**

Các nhà khảo cổ vừa tìm được N đồ vật quý hiếm. Các đồ vật này được định vị trên một đường thẳng. Đồ vật thứ i định vị tại vị trí X_i ($i = 1, 2, \dots, N$), trong đó $0 \leq X_1 < X_2 < \dots < X_N \leq 10^8$ và có khối lượng là A_i . Do các đồ vật cổ vừa quý hiếm nhưng rất nặng nên các nhà khảo cổ quyết định sẽ xây dựng một ngôi nhà tạm tại vị trí tọa độ U trên đường thẳng để chứa N đồ vật. Để chuyển đồ vật i đến ngôi nhà mất chi phí là $A_i \times |U - X_i|$. Như vậy, tổng chi phí để vận chuyển N đồ cổ đến ngôi nhà là:

$$S = \sum_{i=1}^N A_i \times |U - X_i|$$

Yêu cầu: Tính giá trị nhỏ nhất của S .

Dữ liệu cho trong file **Antique.Inp** gồm:

- Dòng thứ 1 ghi số nguyên dương N là số đồ vật.
- Dòng thứ 2 ghi N số nguyên X_1, X_2, \dots, X_N là tọa độ của N đồ vật.
- Dòng thứ 3 ghi N số nguyên A_1, A_2, \dots, A_N là khối lượng của N đồ vật ($0 < A_i \leq 10^3$).

Kết quả ghi ra file **Antique.Out** là giá trị nhỏ nhất của S đạt được.

Ví dụ:

Antique.Inp	Antique.Out
3	8
1 4 6	
10 1 1	

Giới hạn:

- Sub1: $X_N \leq 10^3; N \leq 10^3$;
- Sub2: $N \leq 10^5$;

**5☀. Tay trái, tay phải**

Có N tham gia một cuộc thi vẽ tranh danh giá. Mỗi người tham gia thi vẽ chỉ có thể sử dụng một tay Trái hoặc một tay Phải để vẽ. Người thứ i ($i = 1, 2, \dots, N$) khi dùng tay trái sẽ vẽ được bức tranh có độ đẹp là T_i , khi dùng tay phải sẽ vẽ được bức tranh có độ đẹp là P_i .

Ban tổ chức cuộc thi sẽ chọn A người tham dự được vẽ bằng tay **Trái**, $N - A$ người còn lại vẽ bằng tay **Phải**. Mức độ thành công của cuộc thi được tính bằng tổng độ đẹp của N bức tranh mà N người tham gia đã vẽ.

Yêu cầu: Hãy giúp ban tổ chức chọn A người vẽ tay trái, $N - A$ người vẽ tay phải để tổng độ đẹp N bức tranh là lớn nhất.

Dữ liệu cho trong file LeftRightHand.Inp gồm:

- Dòng 1 ghi hai số nguyên dương N và A .
- N dòng thứ tiếp theo, dòng thứ i ghi hai số nguyên T_i, P_i là độ đẹp của người thứ i khi vẽ tranh bằng tay trái và tay phải ($0 < T_i, P_i \leq 10^5$).

Kết quả ghi ra file LeftRightHand.Out là tổng độ đẹp lớn nhất có thể nhận được.

Ví dụ:



LeftRightHand.Inp	LeftRightHand.Out
4 2	36
10 3	
6 8	
10 2	
2 8	



Giới hạn:

Sub1: $1 \leq A < N \leq 20$;

Sub2: $1 \leq A < N \leq 200000$;



6. KHO LÚA (IOI - 2011)

Quê tôi có một con đường dài và thẳng gọi là con đường Lúa. Dọc theo con đường này có R cánh đồng được đánh số từ 0 đến $R - 1$. Mỗi cánh đồng được định vị ở tọa độ nguyên trong khoảng từ 1 đến L . Các đồng được đánh số theo thứ tự không giảm của tọa độ. Một cách hình thức chính xác, với $0 \leq i < R$, cánh đồng i ở tại tọa độ $X[i]$ ($1 \leq X[0] \leq X[1] \leq \dots \leq X[R - 1] \leq L$). Chú ý rằng, có thể có nhiều cánh đồng có cùng một tọa độ.

Chúng tôi cần xây dựng một kho lúa chung chứa được nhiều lúa thu hoạch trong vụ mùa thì càng tốt. Giống như các cánh đồng, kho lúa phải được đặt ở tọa độ nguyên trong phạm vi từ 1 tới L . Kho lúa có thể đặt ở vị trí tùy ý, kể cả ở vị trí đã có một hoặc nhiều hơn một cánh đồng.

Vào mùa thu hoạch, mỗi cánh đồng sản xuất lượng lúa chất đầy đúng 1 xe tải. Để chuyển lúa về kho, thành phố phải thuê một người lái xe tải. Người lái xe đòi thù lao 1 Baht để lái một xe lúa đi một đơn vị độ dài trên đường đi từ cánh đồng về kho. Nói cách khác, giá vận chuyển lúa từ một cánh đồng về kho có giá trị số đúng bằng chênh lệch giữa hai tọa độ của chúng.

Đáng tiếc do ngân sách dành cho vụ mùa này rất hạn hẹp: Chúng tôi chỉ được chi tối đa B Baht cho việc vận chuyển. Nhiệm vụ của bạn là tìm giúp chúng tôi vị trí đặt kho lúa chứa được nhiều lúa nhất.

Dữ liệu cho trong file RICE.INP như sau:

- Dòng đầu ghi ba số nguyên R, L, B .
- R dòng tiếp theo ghi R số nguyên là tọa độ của các cánh đồng ($X[0], X[1], \dots, X[R-1]$).

Kết quả ghi ra file RICE.OUT là lượng lúa lớn nhất mà xe có thể chuyển tới.

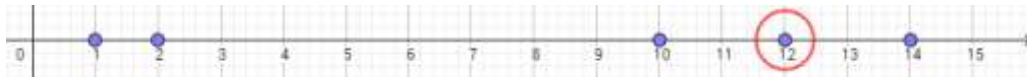
Giới hạn:

- 17% số test ứng với $1 \leq R \leq 100$; $1 \leq L \leq 100$; $0 \leq B \leq 10.000$
- 25% số test ứng với $1 \leq R \leq 500$; $1 \leq L \leq 10.000$; $0 \leq B \leq 10^6$
- 26% số test ứng với $1 \leq R \leq 5.000$, $1 \leq L \leq 10^6$; $0 \leq B \leq 2 \cdot 10^9$
- 32% số test ứng với $1 \leq R \leq 10^5$; $1 \leq L \leq 10^9$, $0 \leq B \leq 2 \cdot 10^{15}$



Ví dụ:

RICE.INP	RICE.OUT
5 20 6 1 2 10 12 14	3



7. Những đồng tiền vàng

Có $A + B + C$ em bé được nhận quà. Các em bé được đánh số thứ tự từ 1 đến $A + B + C$. Em bé thứ i được nhận U_i đồng tiền “Vàng”, V_i đồng tiền “Bạc” và E_i đồng tiền “Đồng”. Sau khi nhận được quà xong, các em chơi trò chơi gộp đội:

Đội thứ nhất gồm A em, điểm của đội bằng tổng số đồng tiền “Vàng” mà các em nhận được.

Đội thứ hai gồm B em, điểm của đội bằng tổng số đồng tiền “Bạc” mà các em nhận được.

Đội thứ ba gồm C em, điểm của đội bằng tổng số đồng tiền “Đồng” mà các em nhận được.

Tổng điểm của trò chơi là tổng điểm của cả ba đội. Chú ý rằng, mỗi em chỉ thuộc duy nhất một đội.

Yêu cầu: Tính xem, tổng điểm lớn nhất của trò chơi có thể đạt được là bao nhiêu.

Dữ liệu cho trong file COINS.INP gồm:

- Dòng đầu ghi 3 số nguyên A, B, C .
- Dòng thứ i trong $A+B+C$ dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi ba số nguyên U_i, V_i, E_i ($0 \leq U_i, V_i, E_i \leq 10^6$)

Kết quả ghi ra file COINS.OUT là tổng điểm lớn nhất có thể đạt được.

Ví dụ:

COINS.INP	COINS.OUT
1 1 1 9 8 1 1 8 2 1 1 7	24

Giải thích: Đội 1 gồm bạn 1: Điểm là 9;

Đội 2 gồm bạn 2: Điểm là 8;

Đội 3 gồm bạn 3: Điểm là 7.

Tổng lớn nhất: $9 + 8 + 7 = 24$.

Giới hạn:

- Có 20% số test $A = B = C = 1$;
- Có 40% số test ứng với $A + B + C \leq 10$;
- Có 20% số test ứng với $A + B + C \leq 10^5$ và $E_1 = E_2 = \dots = E_{A+B+C} = 0$;
- Có 20% số test còn lại ứng với $A + B + C \leq 10^5$.