



## BÀI GIẢNG VỀ KỸ THUẬT LẬP TRÌNH VỚI C++

### 08 KỸ THUẬT CO MẢNG NHIỀU CHIỀU VỀ MẢNG MỘT CHIỀU

(Reduce Multidimensional Arrays to One Dimensional Array - Technique)

#### A. Một số vấn đề về lý thuyết

Ta có thể thấy rằng, nhiều yêu cầu, bài toán có thể giải rất thuận lợi, bên cạnh đó, cũng vẫn đề đó nếu làm trực tiếp trên mảng nhiều chiều thì trở thành vấn đề phức tạp. Thế nhưng, nếu ta biết cách chuyển các bài toán trên mảng nhiều chiều về bài toán trên mảng 1 chiều thì ta có một lời giải đẹp đẽ.

#### Ví dụ 1: Dãy con liên tiếp ngắn nhất có tổng bằng $K$

Cho dãy số nguyên không âm  $A_1, A_2, \dots, A_N$  ( $N \leq 10^6$ ) và số nguyên  $K$ . Tìm dãy con gồm các số hạng liên tiếp  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$  sao cho:

- $A_i + A_{i+1} + \dots + A_j = K$ ;
- $j - i + 1$  nhỏ nhất, tức là dãy gồm ít số hạng nhất.

#### Lời giải:

Bài toán được giải quyết đơn giản khi sử dụng kĩ thuật hai điểm (two points) như sau:

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #include<direct.h>
3
4  using namespace std;
5  int n, k, x, ans = 1e9;
6  int a[1000001];
7
8  int main() {
9      cin>>n>>k;
10     for(int i = 1; i <= n; ++i)
11         cin>>a[i];
12     int L;
13     long long S = 0;
14     L = 1;
15     for(int R = 1; R <= n; ++R) {
16         S += a[R];
17         while(S >= k)
18         {
19             if(S == k) ans = min(ans, R - L + 1);
20             S -= a[L];
21             L++;
22         }
23     }
24     if(ans == 1e9)
25         cout<<"0";
26     else cout<<ans;
27
28 }
29
```

**Ví dụ 2: Hình chữ nhật con nhỏ nhất có diện tích bằng K**

Cho lưới ô vuông gồm  $m$  dòng và  $n$  cột. Các dòng được đánh số từ 1 đến  $m$  (từ trên xuống dưới), các cột đánh số từ 1 đến  $n$  (từ trái sang phải). Trên mỗi ô vuông nhỏ có ghi một số nguyên dương.

**Yêu cầu:** Tìm một hình chữ nhật có các cạnh song song (hoặc trùng) với các cạnh của lưới sao cho:

- Tổng các số trong hình chữ nhật bằng đúng  $k$  ( $k$  là số nguyên dương cho trước).
- Diện tích hình chữ nhật là nhỏ nhất có thể (*diện tích* = số hàng  $\times$  số cột).

**Dữ liệu** ghi trong file RECMIN.INP như sau:

- Dòng đầu ghi ba số nguyên dương  $m, n, k$  ( $1 \leq m \leq 200$ ,  $1 \leq n \leq 1000$ ;  $1 \leq k \leq 10^9$ ).
- $m$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên dương (không quá  $10^9$ ) là các số trên các ô vuông nhỏ của lưới ô vuông ban đầu.

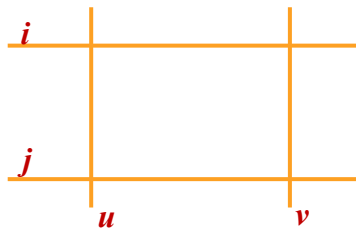
**Kết quả** ghi ra file RECMIN.OUT gồm một số duy nhất là diện tích nhỏ nhất của hình chữ nhật tìm được, nếu không có hình chữ nhật nào thỏa mãn thì ghi -1.

Ví dụ:

RECMIN.INP	RECMIN.OUT
3 4 6 1 2 3 4 1 2 3 2 1 1 2 2	2

**Lời giải:**

Ta nhận thấy rằng, bài toán này có yêu cầu tương tự như ở ví dụ 1, và khi  $m = 1$  thì chính là bài toán trong ví dụ 1.

**Thuật toán 1: Duyệt**

Duyệt hai chỉ số dòng  $i$  và  $j$  ( $1 \leq i \leq j \leq m$ ) và hai chỉ số cột  $u, v$  ( $1 \leq u \leq v \leq n$ ). Ứng với mỗi hình chữ nhật, ta tính tổng và kiểm tra, nếu tổng bằng  $k$  thì cập nhật kết quả. Độ phức tạp thuật toán trong trường hợp này là  $O(m^2 n^2)$ .

**Thuật toán 2: Co mảng**

Ta duyệt theo lớp: Với  $i = 1$ :

$$j = 1, 2, 3, \dots, m;$$

Với  $i = 2$ :

$$j = 2, 3, \dots, m;$$

.....

Với mỗi giá trị của  $i$ , khi  $j$  thay đổi, ta sẽ dồn về một mảng (1 chiều để) để xử lý như ví dụ 1.



1	2	3	4
1	2	3	2
1	1	2	3

$i=1$   
 $j=1$

$i=1$   
 $j=2$

$i=1$   
 $j=3$

**Độ phức tạp thuật toán là:  $O(m^2n)$ .**

**B. Bài tập****1☀. Dãy con liên tiếp ngắn nhất có tổng bằng  $K$** 

Cho dãy số nguyên không âm  $A_1, A_2, \dots, A_N$  ( $N \leq 10^6$ ) và số nguyên  $K$ . Tìm dãy con gồm các số hạng liên tiếp  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$  sao cho:

- $A_i + A_{i+1} + \dots + A_j = K$ ;
- $s = j - i + 1$  nhỏ nhất, tức là dãy gồm ít số hạng nhất.

**Dữ liệu** cho trong file **SHORTSEQ.INP** gồm:

- Dòng đầu ghi hai số nguyên dương  $N$  và  $K$  ( $N \leq 10^6, K \leq 10^{10}$ );
- Dòng thứ 2 ghi  $N$  số nguyên không âm  $A_1, A_2, \dots, A_N$  ( $A_i \leq 10^5$ ).

**Kết quả** ghi ra file **SHORTSEQ.OUT** là độ dài (số số hạng) của dãy con gồm các số hạng liên tiếp ngắn nhất có tổng bằng  $K$  (nếu không có thì ghi 0).

*Ví dụ:*

SHORTSEQ.INP	SHORTSEQ.OUT
5 3 1 2 4 4 5	2

**2☀. Hình chữ nhật con nhỏ nhất có diện tích bằng  $K$** 

Cho lưới ô vuông gồm  $m$  dòng và  $n$  cột. Các dòng được đánh số từ 1 đến  $m$  (từ trên xuống dưới), các cột đánh số từ 1 đến  $n$  (từ trái sang phải). Trên mỗi ô vuông nhỏ có ghi một số nguyên dương.

**Yêu cầu:** Tìm một hình chữ nhật có các cạnh song song (hoặc trùng) với các cạnh của lưới sao cho:

- Tổng các số trong hình chữ nhật bằng đúng  $k$  ( $k$  là số nguyên dương cho trước).
- Diện tích hình chữ nhật là nhỏ nhất có thể (*diện tích* = số hàng  $\times$  số cột).

**Dữ liệu** ghi trong file **RECMIN.INP** như sau:

- Dòng đầu ghi ba số nguyên dương  $m, n, k$  ( $1 \leq m \leq 200, 1 \leq n \leq 1000; 1 \leq k \leq 10^9$ ).
- $m$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên dương (không quá  $10^9$ ) là các số trên các ô vuông nhỏ của lưới ô vuông ban đầu.

**Kết quả** ghi ra file **RECMIN.OUT** gồm một số duy nhất là diện tích nhỏ nhất của hình chữ nhật tìm được, nếu không có hình chữ nhật nào thỏa mãn thì ghi -1.

*Ví dụ:*

RECMIN.INP	RECMIN.OUT
3 4 6 1 2 3 4 1 2 3 2 1 1 2 2	2

**3☀. Dãy con liên tiếp có tổng lớn nhất**

Cho dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Tìm một dãy con gồm các số hạng liên tiếp  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  sao cho  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  đạt giá trị lớn nhất.

**Dữ liệu** cho trong file MAXSEQ.INP gồm:

- Dòng đầu ghi số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^6$ ).
- Dòng sau ghi  $n$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $|a_i| \leq 10^6$ ).

**Kết quả** ghi ra file MAXSEQ.OUT là tổng lớn nhất của đoạn con liên tiếp tìm được.

*Ví dụ:*

MAXSEQ.INP	MAXSEQ.OUT
4 9 -100 2 9	11

**4☀. Hình chữ nhật con có tổng lớn nhất**

Cho lưới ô vuông gồm  $m$  dòng và  $n$  cột. Các dòng được đánh số từ 1 đến  $m$  (từ trên xuống dưới), các cột đánh số từ 1 đến  $n$  (từ trái sang phải). Trên mỗi ô vuông nhỏ có ghi một số nguyên.

**Yêu cầu:** Tìm một hình chữ nhật có các cạnh song song (hoặc trùng) với các cạnh của lưới sao cho:

**Tổng các số trong hình chữ nhật có giá trị lớn nhất.**

**Dữ liệu** ghi trong file SubRectMax.Inp như sau:

- Dòng đầu ghi hai số nguyên dương  $m, n$  ( $1 \leq m, n \leq 500$ ).
- $m$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên (có giá trị thuộc  $[-1000; 1000]$ ) là các số trên các ô vuông nhỏ của lưới.

**Kết quả** ghi ra file SubRectMax.Out là tổng các số trên hình chữ nhật có tổng lớn nhất.

*Ví dụ:*

SubRectMax.Inp	SubRectMax.Out
3 3 1 -10 2 2 2 3 4 4 -2	13

**5☀. Chia bảng**

Cho bảng hình chữ nhật kích thước  $m \times n$  được chia thành lưới ô vuông đơn vị ( $m$  hàng và  $n$  cột). Trên mỗi ô  $(i, j)$  chứa một số nguyên  $a_{ij}$ . Người ta cắt bảng ra thành 4 phần theo cách sau:

- Cắt ngang bảng từ trái qua phải theo khe giữa hai hàng ô liên tiếp chia bảng làm 2 phần.
- Với mỗi phần chia ra tại bước trước, cắt dọc từ trên xuống dưới theo khe giữa hai cột ô liên tiếp.

Sau khi cắt, mỗi phần sẽ gồm ít nhất 1 ô, tổng các số ghi trên các ô thuộc một phần gọi là trọng số của phần đó.

**Yêu cầu:** Tìm cách cắt bảng ra làm 4 phần theo quy tắc trên để độ chênh lệch trọng số giữa phần có trọng số lớn nhất và phần có trọng số nhỏ nhất là cực tiểu.

**Dữ liệu:** Vào từ file văn bản DIVBOARD.INP như sau:



- Dòng 1 chứa hai số nguyên dương  $m, n$  ( $2 \leq m, n \leq 1000$ );
- $m$  dòng tiếp theo, dòng thứ  $i$  chứa  $n$  số nguyên không âm, số thứ  $j$  là  $a_{ij} \leq 1000$ .

**Kết quả:** Ghi ra file văn bản **DIVBOARD.OUT** một số nguyên duy nhất là độ chênh lệch trọng số giữa phần có trọng số lớn nhất và phần có trọng số nhỏ nhất theo phương án chia bảng tìm được.

Ví dụ:

DIVBOARD.INP	DIVBOARD.OUT
4 4 1 2 3 4 3 4 1 2 1 1 1 4 2 2 2 5	1

1	2	3	4
3	4	1	2
1	1	1	4
2	2	2	5



## 6. SUBARRAY (Tỉnh 11 - 2014)

Cho một dãy gồm  $N$  số nguyên  $A_1, A_2, \dots, A_N$  và số nguyên dương  $K$ . Dãy con  $A[i..j]$  ( $1 \leq i \leq j \leq N$ ) là dãy được tạo từ các phần tử liên tiếp của dãy  $A$  là  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$  bắt đầu từ phần tử thứ  $i$  và kết thúc ở phần tử thứ  $j$ .

**Yêu cầu:** Tìm số lượng dãy con của  $A$  có ít nhất  $K$  phần tử giống nhau.

**Dữ liệu:** Vào từ file văn bản **SUBARR.INP**:

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên  $N, K$  ( $1 \leq K \leq N \leq 4 \cdot 10^5$ ).
- Dòng thứ hai chứa  $N$  số nguyên  $A_1, A_2, \dots, A_N$  ( $-10^9 \leq A[i] \leq 10^9$ );

**Kết quả:** Ghi ra file văn bản **SUBARR.OUT**: Ghi ra số lượng dãy con tìm được.

Ví dụ:

SUBARR.INP	SUBARR.OUT
4 2 1 2 1 2	3



## 7. Hình chữ nhật có ít nhất K phần tử bằng nhau

Cho lưới ô vuông gồm  $m$  dòng và  $n$  cột. Các dòng được đánh số từ 1 đến  $m$  (từ trên xuống dưới), các cột đánh số từ 1 đến  $n$  (từ trái sang phải). Trên mỗi ô vuông nhỏ có ghi một số nguyên.

**Yêu cầu:** Đếm số hình chữ nhật có các cạnh song song (hoặc trùng) với các cạnh của lưới sao cho:

**Hình chữ nhật có ít nhất K số giống nhau.**

**Dữ liệu** ghi trong file **KARR.INP** như sau:

- Dòng đầu ghi ba số nguyên dương  $m, n, k$  ( $1 \leq m, n \leq 300; 1 \leq k \leq m \times n$ ).
- $m$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên (thuộc  $[0, 9]$ ) là các số trên các ô vuông nhỏ của lưới ô vuông ban đầu.

**Kết quả** ghi ra file **KARR.OUT** gồm một số duy nhất là số hình chữ nhật tìm được, nếu không có hình chữ nhật nào thỏa mãn thì ghi -1.



Ví dụ:

KARR.INP	KARR.OUT
2 2 2	3
1 1	
1 2	



## 8. Tích số

Ta gọi **Digit-Product** của một số là nguyên dương  $n$  là tích các chữ số của  $n$ . Ví dụ, **Digit-Product** của  $n = 123$  là  $1.2.3 = 6$ .

Ta gọi **Self-Product** của một số nguyên dương  $n$  là tích của  $n$  và **Digit-Product**. Ví dụ, **Self-Product** của  $n = 123$  là:  $123.6 = 738$ .

**Yêu cầu:** Cho hai số nguyên dương  $A$  và  $B$ , đếm xem có bao nhiêu số nguyên dương mà **Self-Product** của nó thuộc  $[A, B]$ .

**Dữ liệu** cho trong **SELFPRODUCT.INP** gồm một dòng ghi hai số nguyên dương  $A, B$ .

**Kết quả** ghi ra file **SELFPRODUCT.OUT** là số các số tự nhiên có **Self-Product** của nó thuộc  $[A, B]$ .

Ví dụ:

SELFPRODUCT.INP	SELFPRODUCT.OUT
20 30	2
145 192	4
2224222 2224222	1

### Giới hạn:

- Sub1:  $1 \leq A \leq B \leq 10^8$
- Sub2:  $10^8 \leq A \leq B \leq 10^{12}$
- Sub3:  $10^{12} \leq A \leq B \leq 10^{18}$