Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

КТиУ, кафедра Информатики и Прикладной Математики

Лабораторная работа №3

по дисциплине

«Вычислительная математика»

«Аппроксимация методом наименьших квадратов»

Выполнил:

Студент группы P3217

Григорьев Георгий

Санкт-Петербург

2018 г.

Для **аппроксимации**:

По пунктам так же как для интерполяции можно написать

1. Задается произвольный набор значений пар (x,y)
2. Задается аппроксимирующая функция
3. Рассчитываются программой коэффициенты аппроксимирующей функции
4. Производится вычисление точки с наибольшим отклонением
5. Найденная точка исключается. Производится перерасчет коэффициентов аппроксимирующего многочлена (см. п.3).
6. Строится график, содержащий в себе две функции (1 - до исключения, 2 - после исключения и пересчёта) и набор заданных изначально точек (пар значений (x,y))
7. Помимо этого, отдельно на экран выводятся полученные значения аппроксимирующих коэффициентов

Рассчитанные два раза коэффициенты аппроксимирующей функции также должны быть выведены на экран.

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных *a* и *b* $F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$ принимает наименьшее значение. То есть, при данных *a* и *b* сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом вся суть метода наименьших квадратов.

Таким образом, решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Вывод формул для нахождения коэффициентов.

Составляется и решается система из двух уравнений с двумя неизвестными. Находим частные производные функции $F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$ по переменным *a* и *b*, приравниваем эти производные к нулю.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))x_i=0\\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}b=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений любым методом (например *методом подстановки* или методом Крамера) и получаем формулы для нахождения коэффициентов по методу наименьших квадратов (МНК).

$$\begin{cases}a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\\ b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\end{cases}$$

При данных a и b функция $F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$ принимает наименьшее значение.

Результаты:

X = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

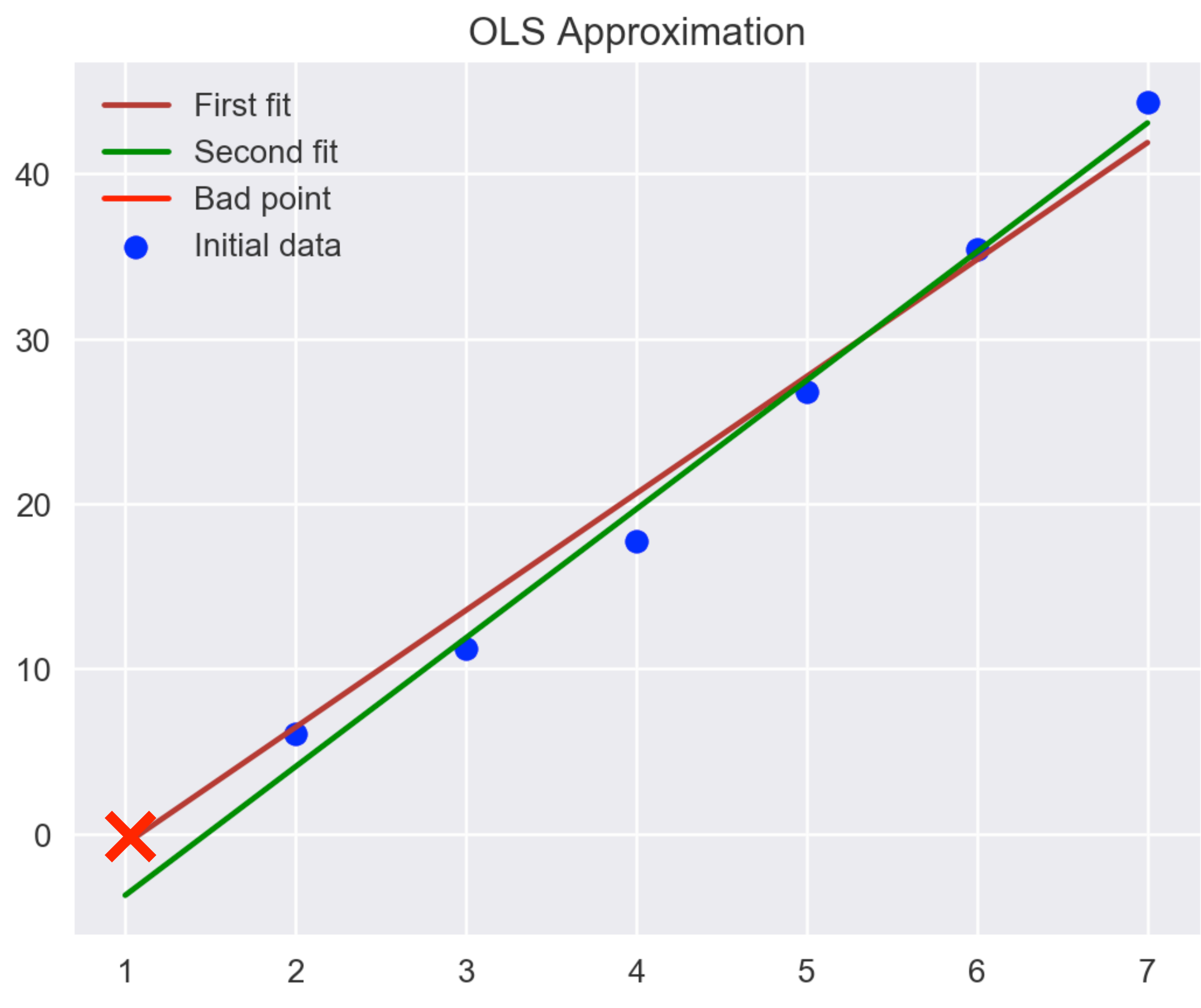
Y = [2.95, 6.03, 11.2, 17.7, 26.8, 35.4, 44.3]

Results 1: 7.085357142857139 * x + -7.715714285714268

Residuals: [12.81895727 0.180625   5.47727156 8.55980408 0.83005115
0.36429847
  5.84776033]

Point with max error: (1.0, 2.95)

Results 2: 7.801428571428564 * x + -11.53476190476187



First fit – Начальное приближение

Second fit – Приближение при удалении точки с наибольшей ошибкой

Bad point – Неудачная точка

Initial data – Данные (x, y) для аппроксимации

Вывод: Была получена аппроксимация функции x**2 на 7 значениях (x, y) и получена оценка отклонения в квадрате. Данный метод не способен подстраиваться под сильно выпуклые функции в силу природы линейных функций.
Аппроксимирующие прямые сильно отличаются при удалении неудачной точки.