UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN041 ECUACIONES DIFERENCIALES PARA INGENIERÍA

Pauta Prueba Parcial N°2 [1]

14 de noviembre de 2013

Problema 1 *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:*

a) $y'' + 2y' + 10y = \sin(3x) + e^{-x}$
Solución:

- ***Solución homogénea***
  La ecuación característica asociadada a la EDO es, $k^2 + 2k + 10 = 0$*, luego sus raíces están dadas por*

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = \begin{cases} k_1 = -1 + 3i \\ k_2 = -1 - 3i \end{cases}$$

  Luego, la solución homogénea es

$$Y_h(x) = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

  . . . . 0.4 *puntos* . . . .

- ***Solución particular***
  Por el método de coeficientes indeterminados, la conjetura de la solución particular está dada por $Y_p(x) = A\cos 3x + B \sin 3x + Ce^{-x}$*. Entonces,*

$$\begin{aligned} Y_p'(x) &= -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - Ce^{-x} \\ Y_p''(x) &= -9A\cos 3x - 9B\sin 3x + Ce^{-x} \end{aligned}$$

  Reemplazando en la EDO original, para determinar los coeficientes A, B y C, se tiene

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 10y &= \sin(3x) + e^{-x} \\ (A\cos 3x + B\sin 3x) + 6(-A\sin 3x + B\cos 3x) + 9Ce^{-x} &= \sin(3x) + e^{-x} \\ \cos 3x[A + 6B] + \sin 3x[B - 6A] + 9Ce^{-x} &= \sin(3x) + e^{-x} \end{aligned}$$

  Igualando coefixientes se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + 6B &= 0 \\ -6A + B &= 1 \\ 9C &= 1 \end{aligned}$$

  La solución del sistema es $A = -\frac{6}{37}$*,* $B = \frac{1}{37}$ *y* $C = \frac{1}{9}$.
  Por tanto, la solución particular está dada por

$$Y_p(x) = -\frac{6}{37}\cos 3x + \frac{1}{37}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{-x}$$

  . . . . 0.4 *puntos* . . . .

- ***Solución general***

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x - \frac{6}{37}\cos 3x + \frac{1}{37}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{-x}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

. . . . 0.2 *puntos* . . . .

---

[1] PAA/SJC/AMR

b) $x^4y'' + x^3y' - 4x^2y = 1$

Solución:

La EDO será multiplicada por $1/x^2$ *con* $x \neq 0$*, para obtener una ecuación diferencial del tipo Cauchy-Euler, es decir*

$$x^2y'' + xy' - 4y = \frac{1}{x^2}$$

- ***Solución homogénea***

  Asumiendo que la solución de la EDO, es de la forma $y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1}$ *e* $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

  Entonces,

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' - 4y &= 0 \\ x^2m(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} - 4x^m &= 0 \\ x^m\left(m(m-1) + m - 4\right) &= 0 \end{aligned}$$

  Luego $x^m = 0$ *que es una contradicción ó* $(m(m-1) + m - 4) = 0$*. Por tanto,*

$$m(m-1) + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -2 \end{cases}$$

  . . . . 0.2 *puntos* . . . .

  Luego la solución homogénea, está dada por:

$$Y_h(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

  . . . . 0.2 *puntos* . . . .

- ***Solución particular***

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-1} - 2x^{-1} = -\frac{4}{x}, x \neq 0$$

$$v_1(x) = \int \frac{\frac{1}{x^4}x^{-2}}{-\frac{4}{x}}dx = -\frac{1}{4}\int x^{-3}dx = -\frac{1}{16x^4}$$

  . . . . 0.1 *puntos* . . . .

$$v_2(x) = \int \frac{\frac{1}{x^4}x^2}{-\frac{4}{x}}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{4}\ln|x|$$

  . . . . 0.1 *puntos* . . . .

$$Y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) = -\frac{1}{16x^2} - \frac{\ln|x|}{4x^2}$$

  . . . . 0.2 *puntos* . . . .

- ***Solución general***

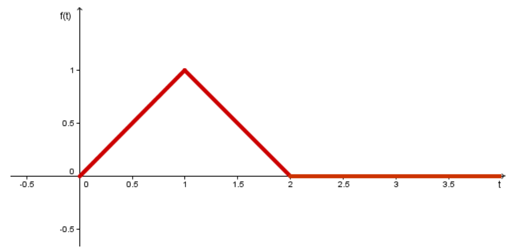
$$\begin{aligned} Y(x) &= Y_h(x) + Y_p(x) \\ &= C_1x^2 + C_2x^{-2} - \frac{1}{16x^2} - \frac{\ln|x|}{4x^2}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  . . . . 0.2 *puntos* . . . .

Problema 2 *Resuelva el siguiente problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $f(t)$ está dada por el siguiente gráfico



Solución:

Algebraicamente, la función esta dad por

$$f(t) = \begin{cases} t & ,0 \leq t < 1 \\ 2-t & ,0 \leq t < 1 \\ 0 & ,t \geq 2 \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(t) &= t + (2-2t)\mu(t-1) + (t-2)\mu(t-2) \\ f(t) &= t - 2(t-1)\mu(t-1) + (t-2)\mu(t-2) \end{aligned}$$

. . . . 0.5 *puntos* . . . .

Aplicando la Transformada de Laplace al PVI, se tiene

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(t)/\mathcal{L} \\ s^2\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \\ \mathcal{L}\{y\}\left(s^2+1\right) &= \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} - 2\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)} + \frac{e^{-2s}}{s^2(s^2+1)} \end{aligned}$$

. . . . 0.5 *puntos* . . . .

Realizando descomposición en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ 1 &= As(s^2+1) + B(s^2+1) + s^2(s^2+1) \end{aligned}$$

Por el método de sustitución se tiene

$$\begin{array}{lllllllll} s = 0 & \Rightarrow & 1 & = & B & \therefore & B & = & 1 \\ s = i & \Rightarrow & 1 & = & -Ci - D & \therefore & D & = & -1 \wedge C = 0 \\ s = 1 & \Rightarrow & 1 & = & 2A+1 & \therefore & A & = & 0 \end{array}$$

Entonces,

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

. . . .

Aplicando la transforma inversa de Laplace, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} - 2\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)} + \frac{e^{-2s}}{s^2(s^2+1)}/\mathcal{L}^{-1} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right\} \end{aligned}$$

. . . . 0.5 *puntos* . . . .

Por tanto

$$Y(t) = t - \sin t - 2(t-1)\mu(t-1) + 2\sin(t-1)\mu(t-1) + (t-2)\mu(t-2) - \sin(t-2)\mu(t-2)$$

. . . . 0.5 *puntos* . . . .

Problema 3 *Un cuerpo de* $1\,kg$ *se sujeta al extremo inferior de un resorte suspendido de un techo. Como consecuencia el resorte se estira* $0.6125\,m$ *para llegar a la posición de equilibrio. Debido a la viscosidad del medio ambiente, al movimiento del cuerpo se opone una fuerza de amortiguamiento cuya magnitud es directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo (constante de proporcionalidad igual a* $8\,Ns/m$*). A partir de* $t=0$*, se aplica una fuerza externa al sistema, igual a* $f(t)=16\sin(4t)$*. Determine la posición del cuerpo en cualquier instante de tiempo* t*. Considere* $g=9.8\,m/s^2$*.*

Solución:

Para plantear la EDO del sistema masa-resorte, es necesario determinar la constante del resorte, para ello aplicaremos la primera Ley de Newton, es decir:

$$F_{resorte}-W=0 \Leftrightarrow k\cdot l=mg \Leftrightarrow k=\frac{1\cdot 9.8}{0.6125} \therefore k=16$$

. . . . 0.2 *puntos* . . . .

- ***Definición de variable***
  $x(t)$: *Posición del cuerpo en el instante de tiempo* t.
  . . . . 0.2 *puntos* . . . .

- ***Plantear PVI***
  aplicando la segunda ley de Newton $mx''+bx'+kx=f(t)$*, entonces:*

$$\begin{cases} x''+8x'+16x=16\sin(4t) \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$$

  . . . . 0.2 *puntos* . . . .

- ***Resolución PVI***

  i) Solución homogénea de la EDO La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea es:

$$\begin{aligned} r^2+8r+16 &= 0 \\ (r+4)^2 &= 0 \\ r &= -4 \end{aligned}$$

  Por tanto, la solución homogénea es:

$$X_h(t)=C_1e^{-4t}+C_2te^{-4t}; \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

  . . . . 0.4 *puntos* . . . .

  ii) Solución particular de la EDO La conjetura de la solución particular, por el método de coeficientes indeterminados y sus respectivas derivadas es:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= A\cos(4t)+B\sin(4t) \\ X_p'(t) &= -4A\sin(4t)+4B\cos(4t) \\ X_p''(t) &= -16\cos(4t)-16B\sin(4t) \end{aligned}$$

  Reemplazando en la EDO, se tiene

$$\begin{aligned} -16\left(A\cos(4t)+B\sin(4t)\right)+32\left(-A\sin(4t)+B\cos(4t)\right)+16\left(A\cos(4t)+B\sin(4t)\right) &= 16\sin(4t) \\ 32\left(-A\sin(4t)+B\cos(4t)\right) &= 16\sin(4t) \end{aligned}$$

  Igualando coeficientes, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -32A &= 16 \\ 32B &= 0 \end{aligned}$$

  La solución del sistema es, $A=-\frac{1}{2}$ *y* $B=0$*. Luego,*

$$X_p(t)=-\frac{1}{2}\cos(4t)$$

  . . . . 0.4 *puntos* . . . .

iii) *Solución general de la EDO*

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} - \frac{1}{2}\cos(4t); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

. . . . 0.2 *puntos* . . . .

iv) *Solución general del PVI*

$$X'(t) = -4C_1e^{-4t} + C_2e^{-4t} - 4C_2te^{-4t} + 2\sin(4t)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} t & = & 0 & \Rightarrow & X(0) & = & C_1 - \frac{1}{2} & \therefore & C_1 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ t & = & 0 & \Rightarrow & X'(0) & = & -4C_1 + C_2 & \therefore & -4C_1 + C_2 & = & 0 \end{array}$$

Luego $C_1 = \frac{1}{2}$ *y* $C_2 = 2$

. . . . 0.2 *puntos* . . . .

Por tanto, la solución general del PVI, es:

$$X(t) = \frac{1}{2}e^{-4t} + 2te^{-4t} - \frac{1}{2}\cos(4t)$$

. . . . 0.2 *puntos* . . . .