

# Projet VaR & Expected Shortfall (ES)

Guenole Wariol KOPANGOYE

August 20, 2025

## 1 Introduction

L'objectif de ce projet est de mesurer le risque de perte d'un portefeuille sur un horizon donné, en utilisant deux indicateurs financiers : la **Value-at-Risk (VaR)** et l'**Expected Shortfall (ES)**. Ces mesures sont fondamentales pour quantifier les pertes extrêmes potentielles.

## 2 Rendements et portefeuille

On considère un portefeuille composé de  $n$  actifs. Si  $r_{i,t}$  est le rendement de l'actif  $i$  au temps  $t$ , et  $w_i$  son poids dans le portefeuille, le rendement du portefeuille est :

$$r_t^{\text{portefeuille}} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t}.$$

—

## 3 Value-at-Risk (VaR)

La VaR à un niveau de confiance  $\alpha$  est la perte maximale attendue avec une probabilité de  $1 - \alpha$  :

### 3.1 VaR historique

La VaR historique correspond au  $\alpha$ -quantile empirique des rendements :

$$\text{VaR}_\alpha^{\text{hist}} = \text{quantile}_\alpha(r_t^{\text{portefeuille}}).$$

### 3.2 VaR paramétrique

En supposant que les rendements suivent une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , la VaR s'écrit :

$$\text{VaR}_\alpha^{\text{param}} = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha),$$

où  $\Phi^{-1}$  est l'inverse de la fonction de répartition normale.

—

## 4 Expected Shortfall (ES)

L'ES, ou Conditional VaR, représente la perte moyenne au-delà de la VaR.

### 4.1 ES historique

$$\text{ES}_\alpha^{\text{hist}} = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{r_t < \text{VaR}_\alpha} r_t,$$

où  $N_\alpha$  est le nombre de rendements inférieurs à la VaR.

### 4.2 ES paramétrique

$$\text{ES}_\alpha^{\text{param}} = \mu - \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha},$$

avec  $\phi$  la densité normale.

---

## 5 Simulation Monte Carlo (bonus)

On peut générer des rendements simulés selon la loi normale estimée et recalculer VaR et ES pour comparer avec les méthodes historique et paramétrique.

---

## 6 Conclusion

Ce projet montre comment quantifier le risque extrême sur un portefeuille et compare différentes méthodes (historique, paramétrique, Monte Carlo).