Hedging en marché Black–Scholes et Heston

Rapport mathématique

Guenole Wariol Kopangoye
Étudiant en Mathématiques Appliquées,
Université Sorbonne Paris Nord (ex Paris 13)

21 août 2025

Résumé

Ce rapport présente les principes mathématiques du hedging d'options européennes dans deux cadres de marché : le modèle classique de Black–Scholes (volatilité constante) et le modèle de Heston (volatilité stochastique). Nous rappelons les formules fondamentales, discutons de la réplication et de l'incomplétude de marché, et décrivons les implications pour les procédures numériques et pour l'approche moderne dite *Deep Hedging* qui prend en compte coûts de transaction et risque extrême (CVaR).

Table des matières

1 Notations et conventions

On note :

— $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles.

— S_t le prix du sous-jacent (actif) au temps t.

— r le taux sans risque (constante) et $B_t = \mathrm{e}^{rt}$ le processus d'escompte.

— $C(S_t, t)$ le prix (ou prix théorique) d'une option européenne de type call avec strike K et échéance T.

— Φ et ϕ désignent respectivement la fonction de répartition et la densité de la loi normale standard.

— Les rendements instantanés sont exprimés en temps continu ; pour la simulation numérique on utilisera un pas Δt.

2 Modèle de Black–Scholes

2.1 Dynamique

Dans le modèle de Black–Scholes (BS) sous la probabilité historique $\mathbb{P}$, le sous-jacent suit une équation différentielle stochastique (EDS) géométrique :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le drift, $\sigma > 0$ la volatilité constante et W_t un mouvement brownien standard.

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ (qui sert au pricing), la dynamique devient

$$dS_t = rS_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

2.2 Prix et réplication

Pour une option européenne de payoff $(S_T - K)^+$, le prix sous la mesure risque-neutre est l'espérance actualisée :

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\big].$$

La formule fermée de Black–Scholes donne explicitement :

$$C(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S_t/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t}.$$

La réplique dynamique (hedge) consiste à détenir à chaque instant la position $\Delta_t = \partial_S C(S_t, t) = \Phi(d_1)$ en actions et le reste en numéraire. Cette stratégie satisfait la réplication parfaite (sans coûts de transaction) : le portefeuille auto-financé composé de Δ_t actions reproduit exactement le payoff à l'échéance lorsque les hypothèses du modèle sont vérifiées.

2.3 Interprétation

Le marché BS est *complet* : toute contingent claim mesurable peut être répliquée par une stratégie auto-financée. La volatilité constante est la clé de la disponibilité d'une solution explicite pour la PDE de Black–Scholes et de la réplication parfaite.

3 Modèle de Heston (volatilité stochastique)

3.1 Dynamique

Le modèle de Heston introduit une variance instantanée v_t qui suit un processus de type CIR (Cox–Ingersoll–Ross) :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t\, dt + \sqrt{v_t}\, S_t\, dW_t^{(1)}, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi\sqrt{v_t}\, dW_t^{(2)}, \end{cases}$$

avec $\kappa > 0$ (vitesse de rappel), $\theta > 0$ (niveau de long terme), $\xi > 0$ (vol-of-vol) et deux brownien corrélés :

$$d\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle_t = \rho\, dt, \quad \rho \in [-1, 1].$$

Sous la mesure risque-neutre il faut ajuster le drift de v_t (prime de risque de volatilité), mais la forme reste similaire.

3.2 Incomplétude du marché

Contrairement à Black–Scholes, le marché Heston est *généralement incomplet* : il existe deux sources de hasard (deux browniens) mais un seul actif négociable (action). Il est impossible, en général, de répliquer exactement toutes les contingent claims en ne tradant que le sous-jacent et l'actif sans risque. Intuitivement, la source de risque liée aux fluctuations de la variance ne peut pas être parfaitement couverte par une position en actions seules.

Conséquences pratiques :

- Pas d'unicité du prix d'équilibre (prix dépendant d'une prime de risque pour la volatilité).
- Les stratégies de hedging sont *approximatives* : on peut chercher une stratégie qui minimise un critère de coût ou de risque (ex. variance du shortfall, CVaR, espérance du carré de l'erreur).
- L'utilisation d'instruments supplémentaires (options, variance swaps, produits exotiques) peut rendre le marché plus complet et améliorer le hedging.

3.3 Approches de hedging en Heston

1. **Delta-hedging approximatif** : appliquer la même recette que BS en utilisant une volatilité implicite/effective — méthode heuristique, souvent insuffisante aux queues de distribution.
2. **Minimisation quadratique** : choisir la stratégie auto-financée qui minimise l'espérance du carré du shortfall (payoff minus P&L) — résolution numérique.
3. **Deep Hedging / optimisation statistique** : paramétriser la stratégie (p.ex. par un réseau neuronal) et minimiser un critère empirique (MSE, CVaR, ou coût total incluant coûts de transaction).

4 Formulation numérique (simulation et hedging)

4.1 Discrétisation et simulation

Pour simuler le modèle Heston on utilise typiquement un schéma d'Euler adapté à la variance (full-truncation) afin de préserver la positivité de v_t :

$$\begin{aligned} v_{t+\Delta t} &= \max\{\, v_t + \kappa(\theta - v_t)\Delta t + \xi\sqrt{\max(v_t, 0)}\sqrt{\Delta t}\, Z^{(2)},\ 0\,\}, \\ S_{t+\Delta t} &= S_t \exp\Big((r - \tfrac{1}{2}v_t)\Delta t + \sqrt{\max(v_t, 0)}\sqrt{\Delta t}\, Z^{(1)}\Big), \end{aligned}$$

où $(Z^{(1)}, Z^{(2)})$ est une paire normale corrélée (corrélation ρ).

4.2 Pricing par Monte–Carlo

Le prix d'une option est approximé par

$$\widehat{C} = e^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(S_T^{(i)} - K)^+,$$

avec M trajectoires simulées. L'erreur Monte-Carlo décroît en $O(1/\sqrt{M})$.

4.3 Hedging numérique

Soit une stratégie discrète paramétrée par des positions $(\phi_{t_k})_{k=0,\dots,N-1}$ déterminées en fonction de l'information disponible (ex. $\phi_{t_k} = \phi_\theta(\text{features at } t_k)$). Le P&L associé à une trajectoire est

$$\mathrm{PnL} = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{t_k}\,(S_{t_{k+1}} - S_{t_k}).$$

Le *shortfall* (ou *hedging error*) pour la trajectoire est

$$L = \text{payoff} - \mathrm{PnL} = (S_T - K)^+ - \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{t_k}\,\Delta S_{t_k}.$$

On cherche à minimiser un critère empirique sur un ensemble de trajectoires simulées, par exemple l'espérance du carré $\mathbb{E}[L^2]$ (MSE), ou une mesure de risque extrême type CVaR.

5 Deep Hedging : formulation moderne

5.1 Paramétrisation

Paramétriser la stratégie par un réseau neuronal ϕ_θ qui prend en entrée des *features* à chaque instant (ex. $\log S_t$, temps restant $T-t$, estimateur de volatilité, historiques récents). Le réseau produit la position ϕ_{t_k}.

5.2 Objectif d'entraînement

Soit $\mathcal{D} = \{\omega_i\}_{i=1}^M$ l'ensemble des trajectoires simulées. On définit pour chaque trajectoire le shortfall $L_i(\theta)$ (éventuellement augmenté d'un coût de transaction). On considère deux types d'objectifs :

— **MSE (quadratique)** :

$$\min_\theta \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M L_i(\theta)^2.$$

— **CVaR (Rockafellar–Uryasev)** pour un niveau $\alpha \in (0,1)$:

$$\min_{\theta,\eta} \eta + \frac{1}{(1-\alpha)M} \sum_{i=1}^M \big(L_i(\theta) - \eta\big)_+,$$

où η est un paramètre scalaire appris. Cette formulation est convexe en η pour L_i fixés et correspond à la moyenne conditionnelle des pires pertes (ES).

5.3 Coûts de transaction

Pour modéliser les coûts transactionnels proportionnels on ajoute un terme de coût par trajectoire :

$$\mathrm{Cost}_i(\theta) = c \sum_{k=0}^{N-1} |\phi^\theta_{t_k} - \phi^\theta_{t_{k-1}}| \, S^{(i)}_{t_k},$$

avec $\phi^\theta_{t_{-1}} = 0$ conventionnelle et $c > 0$ le coefficient de coût. Le shortfall ajusté est alors

$$\widetilde{L}_i(\theta) = L_i(\theta) + \lambda \, \mathrm{Cost}_i(\theta),$$

et l'objectif devient par exemple la minimisation de la CVaR de $\widetilde{L}$.

6 Aspects pratiques et numériques

6.1 Vectorisation et minibatching

L'entraînement s'effectue numériquement en mode *stochastique* : on simule M trajectoires, on regroupe en minibatchs et on effectue la rétropropagation sur le critère empirique pour mettre à jour θ. La vectorisation (évaluer le réseau sur toutes les dates et trajectoires d'un batch en un seul passage) est cruciale pour l'efficacité.

6.2 Stabilité et design

Points importants :

- **Features** : $\log S$, temps restant, estimateurs de volatilité historique améliorent la capacité d'apprentissage.
- **Regularisation** (weight decay, early stopping) pour éviter le surapprentissage.
- **Apprentissage de CVaR** : le paramètre η doit être initialisé proprement et surveillé (il représente un seuil de pertes extrêmes).
- **Coût de transaction** : introduit un biais vers des stratégies plus lisses (moins de turnover).

6.3 Benchmark : delta-hedging

On compare fréquemment la stratégie apprise à la *delta-hedging* (baseline). Sous Heston, cette baseline n'est pas optimale ; elle peut être calculée en utilisant une volatilité effective (heuristique) ou une volatilité implicite. La comparaison s'effectue sur des métriques telles que RMSE du shortfall et ES à niveau α empirique.

7 Interprétation des résultats et limitations

- Dans Black–Scholes, le delta-hedging permet une réplication parfaite en absence de coûts : la méthodologie numérique vérifie la théorie (erreurs proches de zéro avec pas de temps qui tend vers 0).
- Dans Heston, on observe typiquement :
  - Une queue de distribution des shortfalls plus épaisse : les pertes extrêmes sont plus fréquentes.
  - Le deep hedging (optimisation directe de CVaR) peut réduire le risque extrême (ES) comparé au delta-hedge classique.
  - L'ajout de coûts de transaction rend la stratégie apprise plus lisse ; la minimisation de CVaR+coûts peut sacrifier un peu de moyenne pour réduire les pires pertes.
- Limitations : modèle (Heston) reste une approximation ; calibration aux données de marché et choix des features sont déterminants.

8 Conclusion

Le hedging dans un marché à volatilité stochastique (Heston) met en évidence l'incomplétude et la nécessité d'approches numériques / de minimisation de critère de risque. Le Deep Hedging fournit un cadre flexible pour apprendre des stratégies pratiques tenant compte des coûts et du risque extrême. Les résultats numériques (simulations Monte-Carlo, entraînement par minibatch) doivent être accompagnés d'analyses de robustesse (sensibilité aux hyperparamètres, calibration).

Références (sélection)

- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.

— Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk.
— Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J., Wood, B. (2019). Deep hedging.
— Glasserman, P. (2003). Monte Carlo Methods in Financial Engineering.

Rapport rédigé par : **Guenole Wariol Kopangoye**
Affiliation : Étudiant en Mathématiques Appliquées, Université Sorbonne Paris Nord (ex Paris 13)