Modèle de Heston et Simulation Numérique

Guenole Wariol KOPANGOYE

02/07/2025

1 Introduction

Le modèle de Heston (1993) est un modèle de **volatilité stochastique** utilisé en finance quantitative pour mieux décrire la dynamique des prix d'actifs. Contrairement au modèle de Black-Scholes, où la volatilité est supposée constante, le modèle de Heston considère une volatilité aléatoire suivant un processus stochastique.

2 Modèle de base

Soit S_t le prix de l'actif à l'instant t, et v_t sa variance instantanée. Le modèle de Heston est défini par le système d'équations différentielles stochastiques (EDS) suivant :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sqrt{v_t} \, S_t \, dW_t^{(1)}, \tag{1}$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) \, dt + \sigma \sqrt{v_t} \, dW_t^{(2)}, \tag{2}$$

où :

- μ est le taux de rendement attendu de l'actif,
- v_t est la variance instantanée,
- $\kappa > 0$ est la vitesse de rappel vers la moyenne,
- $\theta > 0$ est le niveau de variance à long terme,
- $\sigma > 0$ est la volatilité de la variance (vol-of-vol),
- $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens corrélés avec :

$$dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} = \rho \, dt, \quad -1 \leq \rho \leq 1.$$

3 Interprétation des paramètres

- μ : rendement moyen du sous-jacent,
- θ : variance moyenne de long terme,
- κ : vitesse à laquelle v_t revient vers θ,

- σ : intensité des fluctuations de la variance,
- ρ : corrélation entre les chocs du prix et ceux de la variance.

Ce dernier paramètre ($\rho < 0$ en pratique) explique le phénomène de **leverage effect** : une baisse du prix entraîne une augmentation de la volatilité.

4 Prix d'une option européenne

Le prix d'une option européenne dans le modèle de Heston est donné par l'espérance sous la mesure risque-neutre :

$$C(S_0, K, T) = e^{-rT} \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[(S_T - K)^+ \,|\, S_0, v_0\big], \tag{3}$$

où :

- K est le prix d'exercice,
- T est l'échéance,
- r est le taux sans risque,
- la dynamique sous la mesure risque-neutre est obtenue en remplaçant μ par r.

5 Méthodes numériques

5.1 Simulation de Monte Carlo

On peut approximer les trajectoires de (S_t, v_t) par une discrétisation d'Euler :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\Big[\Big(r - \tfrac{1}{2}v_t\Big)\Delta t + \sqrt{v_t \Delta t}\, Z_1\Big], \tag{4}$$

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \kappa(\theta - v_t)\Delta t + \sigma\sqrt{v_t \Delta t}\, Z_2, \tag{5}$$

où (Z_1, Z_2) suivent une loi normale bivariée avec corrélation ρ.

5.2 Calibration des paramètres

Les paramètres $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$ peuvent être calibrés en minimisant l'écart entre les prix d'options observés sur le marché et ceux donnés par le modèle de Heston. Typiquement, on résout :

$$\min_{\kappa,\theta,\sigma,\rho,v_0} \sum_i \Big(C_{\text{Heston}}(K_i, T_i) - C_{\text{marché}}(K_i, T_i)\Big)^2$$

où la somme est prise sur plusieurs options cotées.

6 Conclusion

Le modèle de Heston constitue une amélioration notable par rapport à Black-Scholes car il permet de capturer la dynamique de volatilité observée sur les marchés financiers. Sa mise en œuvre repose sur des simulations de Monte Carlo ou des méthodes semi-analytiques, et il reste un modèle de référence en finance quantitative.