Revision Examen Intra

Question 1.

Soit U={do,ré,mi,fa,sol,la,si} l'ensemble universel et soit A, B, et C les sous-ensembles suivants de U: A={do,mi,sol}, B={do,fa,la} et C ={ré,fa,sol,si}. Pour chacun des ensembles suivants, listez tous ses éléments.

Partie a (3 points): $\overline{C} \cap (A \cup B)$,

Solution: do, mi, la

(Dans cet exemple $\overline{C} \subseteq A \cup B$, d'où $\overline{C} \cap (A \cup B) = \overline{C}$.)

Partie b (3 points): $(A \times B) \cap (B \times A)$,

Solution: (do,do)

(En général $(A \times B) \cap (B \times A)$ **=** $(A \cap B) \times (A \cap B)$ = $\{(x,x) | x \in A \cap B\}$. Dans cet exemple, $A \cap B$ **=**{do}.)

Partie c (3 points): $(A \oplus B) \oplus C$,

Solution: ré, mi, la, si

(En général, $(A \oplus B) \oplus C$ **=** {x|x est dans exactement 1 ou 3 des ensembles parmi A, B, C}. À l'aide d'un diagramme de Venn on peut voir facilement le contenu de $(A \oplus B) \oplus C$**.**)

Partie d (3 points): $P(A - B)$, où $P(E)$ est l'ensemble de sous-ensembles de E.

Solution: {}, {mi}, {sol}, {mi,sol}

(A - B = {mi,sol}.)

Partie e (4 points): $\{x \in Z \mid x \text{ divise } \#(P(U))\} \cap \{x \in Z \mid x \text{ divise } \#(B)\}$, où Z est l'ensemble des entiers et #(E) est la cardinalité de l'ensemble E.

Solution: {1, -1}.

(Pour tout ensemble E, #(P(E)) est une puissance de 2, et tout diviseur d'une puissance de 2 est plus ou moins une puissance de 2. Mais #(B) est 3, qui est impair, et tous ses diviseurs sont impairs. Un nombre qui divise une puissance de 2 et qui divise un nombre impair doit être plus ou moins une puissance de 2 qui est impair et le seul puissance de 2 qui est impair est 1.)

Question 2.

Pour chacune des fonctions suivantes, dites si elle est injective ou non et dites si elle est surjective ou non. Si elle est bijective, donnez son inverse. Si elle n'est pas surjective, donnez sa portée. Dans chaque cas, justifiez toutes vos affirmations. L'ensemble Z est l'ensemble des entiers et l'ensemble R est l'ensemble des nombres réels.

a) La fonction $f_1 : R \to R$, où $f_1(x) = 1 - 2x$.
Solution. Cette fonction est injective. Si $f_1(x) = f_1(y)$, alors $1 - 2x = 1 - 2y$. En soustrayant 1 de chaque côté de cette équation on obtient $-2x = -2y$ et en divisant par -2 on obtient $x = y$. Justification alternative : cette fonction est strictement décroissante. Cette fonction est surjective : pour tout nombre y réel, soit $x = (1-y)/2$, un nombre réel; alors $f_1(x) = 1 - 2(1-y)/2 = 1 - (1-y) = y$. Cette fonction est donc bijective et son inverse se trouve en prenant la formule pour x en termes de y et en changeant y a x, c'est-à-dire $(1-x)/2$.

b) La fonction $f_2 : Z \to Z$, où $f_2(x) = 1 - 2x$.
Solution. Cette fonction est injective selon l'une ou l'autre des argumentations dans la solution de la partie **a**. Cette fonction n'est pas surjective : pour tout entier x, $1 - 2x$ est impair, donc ne peut pas être 0, par exemple. La portée de cette fonction est l'ensemble des entiers impairs : pour tout entier impair $y = 2k + 1$, soit $x = -k$, un entier. Alors $f_2(x) = 1 - 2(-k) = 1 + 2k = y$.

c) La fonction $f_3 : R \to Z$, où $f_3(x) = \text{plancher}(1 - 2x)$.
Solution. Cette fonction n'est pas injective : par exemple, $f_3(0) = \text{plancher}(1) = 1$ et $f_3(-\frac{1}{4}) = \text{plancher}(1\frac{1}{2}) = 1$. Cette fonction est surjective : pour tout entier y, soit $x = (1-y)/2$, un nombre réel; alors $f_3(x) = \text{plancher}(1 - 2(1-y)/2) = \text{plancher}(y) = y$.

d) La fonction $f_4 : Z \to Z$, où $f_4(x) = (1 - 2x) \bmod 8$.
Solution. Cette fonction n'est pas injective : par exemple, $f_4(0) = 1 \bmod 8 = 1$ et $f_4(-4) = 9 \bmod 8 = 1$. Cette fonction n'est pas surjective : le reste d'un entier modulo 8 doit être entre 0 et 7 inclusivement, donc ne peut pas être 8, par exemple. Pour trouver la portée on construit la table des valeurs suivante :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_4(x)$	1	7	5	3	1	7	5	3

La portée contient les valeurs 1, 3, 5 et 7. On démontre que la portée ne contient aucun autre nombre. Pour tout entier x, soit $y = x \bmod 8$. Alors $x \equiv y \pmod 8$, d'où $(-2x) \equiv (-2y) \pmod 8$, d'où $(1-2x) \equiv (1-2y) \pmod 8$, d'où $f_4(x) = f_4(y)$, qui ne prend que les valeurs dans $\{1, 7, 5, 3\}$. C'est donc la portée de cette fonction.

e) La fonction composée $f_4 \circ f_4$.
Solution. Cette fonction n'est pas injective puisque f_4 n'est pas injective. Elle n'est pas surjective pour la même raison que pour la partie **d**. La table de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$(f_4 \circ f_4)(x)$	7	3	7	3	7	3	7	3

et la même argumentation que dans la partie **d** donne la portée : $\{3, 7\}$.

Question 3.

Soient les six fonctions $f_i : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, pour i=1,2,3,4,5,6, définies comme suite.

$$f_1(n) = 4^{\log_2 n} \qquad f_2(n) = n + \log_{10} n \qquad f_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$f_4(n) = n3^n \qquad f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} 3^n \qquad f_6(n) = \begin{cases} n^2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Partie a (18 points). Trouvez, pour chacune de ces fonctions, une fonction *aussi simple et précise que possible* qui reflète son comportement asymptotique (grand O).

Solution.

$4^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 n}\right)^2 = n^2$, donc $f_1(n) \in O(n^2)$.

n croît plus vite que $\log_{10} n$, donc $f_2(n) \in O(n)$.

$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 = n^2/2 + n/2$. Puisque n^2 croît plus vite que n, $f_3(n) \in O(n^2)$.

$n3^n$ est déjà le plus simple possible, donc $f_4(n) \in O(n3^n)$.

$\sum_{i=1}^{n} 3^i = (3^{n+1} - 3)/2$, donc $f_5(n) \in O(3^n)$. Par contre, $\sum_{i=1}^{n} 3^n = n3^n$, donc si vous avez lu ce que la question disait au lieu de la question voulait dire, $f_5(n) \in O(n\,3^n)$.

Pour tout $n \geq 1$, $f_6(n) \leq n^2$, donc $f_6(n) \in O(n^2)$.

Partie b (12 points). Pour tout couple (f_i, f_j) de fonctions, où i = 1,2,3,4,5,6 et j = 1,2,3,4,5,6, déterminez si $f_i \in O(f_j)$.

Solution. Dans le tableau dessous, l'élément dans la ligne i et la colonne j est 1 si $f_i(n) \in O\left(f_j(n)\right)$ et 0 sinon.

j= / i	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1
3	1	0	1	1	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1*	1	0
6	1	0	1	1	1	1

Tous les éléments du tableau peuvent être construits en comparant les estimés sauf (1,6) et (3,6). L'estimé $f_6(n) \in O(n^2)$ n'est pas bon; c'est-à-dire $n^2 \notin O\left(f_6(n)\right)$ puisque $f_6(n)=n$ pour tout n impair. Mais on ne peut pas faire mieux avec une fonction simple, donc il n'y a pas de bon estimé simple pour $f_6(n)$.

*Si $f_5(n) \in O(n\,3^n)$, alors cet 1 devient un 0.

Question 4.

Toute proposition peut être exprimée en utilisant seulement les trois opérateurs suivants - la négation, la conjonction et la disjonction - à l'aide de la procédure suivante. D'abord on construit la table de vérité de la proposition. Puis pour chaque ligne de cette table où la proposition est vraie, on construit la conjonction de toutes les propositions atomiques, où chaque proposition atomique qui est fausse est précédée par le symbole de négation. Enfin on construit la disjonction de toutes ces conjonctions. Voici un exemple.

p	q	$p \oplus q$	conjonction	disjonction $= (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
1	1	0		
1	0	1	$p \wedge \neg q$	
0	1	1	$\neg p \wedge q$	
0	0	0		

Partie a (8 points). À l'aide de la procédure décrite au-dessus, exprimez la proposition $p \to q$ sans utiliser d'opérateurs autres que la négation, la conjonction et la disjonction. Puis, à l'aide des équivalences logiques du tableau 5 sur la page 15 du livre et les deux premières lignes du tableau 6, simplifiez votre expression pour qu'elle soit la plus courte possible. Voici un exemple d'un tel raccourci: $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) = p \wedge (q \vee \neg q) = p \wedge 1 = p$.

Solution.

p	q	$p \to q$	conjonction	disjonction $= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
1	1	1	$p \wedge q$	$= ((p \vee \neg p) \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
1	0	0		$= (1 \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = q \vee (\neg p \wedge \neg q)$
0	1	1	$\neg p \wedge q$	$= (q \vee \neg p) \vee (q \wedge \neg q) = (\neg p \vee q) \vee 0$
0	0	1	$\neg p \wedge \neg q$	$= \neg p \vee q$

Partie b (8 points). Si la table de vérité d'une expression E contient plus des 1 que des 0, on peut construire une expression plus courte en appliquant cette procédure à sa négation $\neg E$ puis en niant cette expression à l'aide des lois de De Morgan. De cette façon, trouvez une expression courte pour $p \to q$ sans utiliser d'opérateurs autres que la négation, la conjonction et la disjonction.

Solution.

p	q	$\neg(p \to q)$	conjonction	disjonction pour $\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$
1	1	0		disjonction pour $p \to q = \neg(p \wedge \neg q)$
1	0	1	$p \wedge \neg q$	
0	1	0		
0	0	0		$= \neg p \vee q$

Partie c (10 points). Trouvez l'expression la plus courte possible sans opérateur autre que la négation, la conjonction et la disjonction pour la proposition E avec la table de vérité ci-dessous.

p	q	r	E
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Solution.

p	q	r	E	$\neg E$	conjonction	disjonction pour $\neg E$
1	1	1	1	0		$= (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
1	1	0	1	0		$= \neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge r$
1	0	1	1	0		$= \neg p \wedge 1 \wedge r$
1	0	0	1	0		$= \neg p \wedge r$
0	1	1	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	disjonction pour E
0	1	0	1	0		$= \neg(\neg p \wedge r)$
0	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$= p \vee \neg r$
0	0	0	1	0		

Question 5.

Partie a (6 points). Donnez la valeur numérique de la somme de la suite arithmétique suivante.

1, 5, 9, 13, ... , 2009.

Solution.

La somme d'une suite arithmétique est (nombre de termes)$\times$(premier terme + dernier terme)/2 = nombre de termes$\times$(1 + 2009)/2 = nombre de termes $\times$ 2010/2 = nombre de termes $\times$ 1005.

Pour calculer le nombre n de termes, on utilise la formule pour le dernier terme: $a+(n-1)d$. Ici $a=1$, $d=4$ et le dernier terme est 2009. Donc $2009 = 1 + 4(n-1)$, d'où $4(n-1)=2008$, d'où $n-1=502$, d'où $n=503$. La somme est donc $503\times1005 = 503000 + 3015 = 506015$.

Partie b (6 points). Donnez la valeur numérique de la somme de la suite géométrique suivante.

0,75, 3, 12, ... , 12288.

Solution.

La somme d'une suite géométrique est (dernier terme$\times r$ - premier terme)/(r-1). Ici le dernier terme est 12288, le premier terme est 0,75 et $r=4$, d'où la somme est $(12288\times4 - 0{,}75)/3 = 4096\times4 - 0{,}25 = 16384 - 0{,}25 = 16383{,}75$.

Question 6.

Partie a (7 points). Remplissez le tableau suivant.

Solution.

n	0	1	2	3	4	5	6
$7^n \bmod 9$	1	7	4	1	7	4	1

Partie b (6 points). Trouvez une formule qui donne la valeur numérique de $7^n \bmod 9$ pour tout entier $n \geq 0$. Cette formule peut contenir plusieurs lignes dont chacune donne la valeur numérique de $7^n \bmod 9$ pour tout entier $n \geq 0$ qui satisfait une certaine condition.

Solution.

$$7^n \bmod 9 = \begin{cases} 1 \text{ si } n \bmod 3 = 0 \\ 7 \text{ si } n \bmod 3 = 1 \\ 4 \text{ si } n \bmod 3 = 2 \end{cases}.$$ Explication: C'est une fonction périodique de période 3.

Question 7.

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\,;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1=-1 \leq 0$.
2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$ et alors $x+y=1>0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leq 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$.