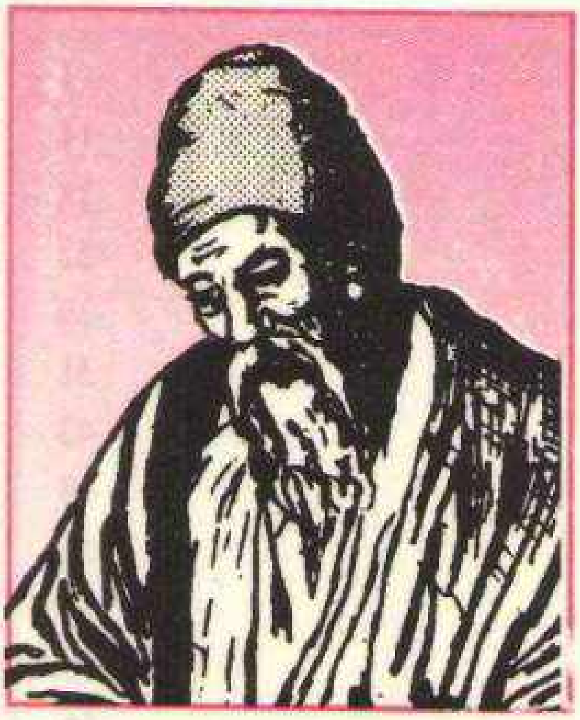
अनुक्रमणिका

विभाग पहिला

विभाग दुसरा

युक्लिड - एक थोर गणिती



एक नामवंत गणिती म्हणून युक्लिड यांचे नाव गणिताच्या क्षेत्रात, प्रामुख्याने भूमितीच्या संदर्भात अजरामर आहे. भूमितीशास्त्रात त्यांचे संशोधन कार्य अजोड आहे. त्यामुळेच त्यांनी केलेल्या भूमितीच्या मांडणीला 'युक्लिडीय भूमिती' हे सार्थ नाव देऊन जगाने त्यांचा गौरव केला आहे. आज आपण शिकत आहोत, त्या भूमितीचा पाया युक्लिड यांनी रचला.

जगाला त्यांच्या कार्याचा जेवढा परिचय आहे, तेवढा त्यांच्या जीवन चरित्राचा नाही, कारण त्यांच्याविषयी फारशी माहिती उपलब्ध नाही. त्यांचा जन्म व त्यांचे शिक्षण अथेन्स येथे झाले असावे. पुढे ते इजिप्तमध्ये अलेक्झांड्रिया येथे गेले. तेथेच त्यांनी गणित क्षेत्रातील कार्य वाढवले व ते प्रसिद्ध झाले. त्यांचा कार्यकाल इ.स.पूर्व 300 वर्षे म्हणजे सुमारे 2300 वर्षांपूर्वीचा असावा.

त्यांच्या पूर्वी होऊन गेलेल्या पायथागोरस, प्लेटो, थेल्स इत्यादी गणितज्ञांनी केलेल्या गणितविषयक संशोधनाची युक्लिड यांनी पद्धतशीर जुळणी व मांडणी केली. स्वत:च्या संशोधनाची त्यात भर घातली. गणिताच्या गुणधर्मात सुसंगतता व सुसूत्रता आणली आणि एक तर्कशुद्ध व नियमबद्ध गणितशास्त्र जगाला दिले. हे सर्व संशोधन 'एलिमेंट्स' नावाच्या पुस्तकात ग्रंथित केले आहे. त्याचे तेरा खंड आहेत. जगातील अनेक भाषांमध्ये या ग्रंथाचे भाषांतर झाले आहे.

प्रतलीय व अवकाशीय भूमिती, प्रमाण, पूर्ण संख्या, अपरिमेय संख्या इत्यादींविषयी विचार या ग्रंथामध्ये केलेला आहे. त्यांची विचार करण्याची अनुमान पद्धती विज्ञान, तत्त्वज्ञान, अभियांत्रिकी इत्यादी शास्त्रांनाही उपयुक्त ठरली आहे.

या महान गणितज्ञापुढे आपण कृतज्ञतेने सदैव नतमस्तक आहोत.

विभाग पहिला

1. विभाज्यता

उजळणी

जेव्हा एका संख्येला दुसऱ्या संख्येने नि:शेष भाग जातो, तेव्हा ती संख्या त्या दुसऱ्या संख्येने **विभाज्य** आहे असे म्हणतात.

जसे, 24 ला 6 ने (नि:शेष) भाग जातो म्हणून 24 ही संख्या 6 ने विभाज्य आहे.

2, 3, 5 व 10 यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या

2 ची कसोटी : संख्येच्या एककस्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी अंक असेल, तर त्या संख्येला 2 ने भाग जातो.

3 ची कसोटी : संख्येतील सर्व अंकांच्या बेरजेला 3 ने भाग जात असेल, तर ती संख्या 3 ने विभाज्य असते.

5 ची कसोटी : संख्येच्या एककस्थानी 0 किंवा 5 यांपैकी अंक असेल, तर ती संख्या 5 ने विभाज्य असते.

10 ची कसोटी : संख्येच्या एककस्थानी 0 हा अंक असेल, तर त्या संख्येला 10 ने भाग जातो.

4, 6, 9 आणि 11 यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या

4 ची कसोटी : संख्येतील दशकस्थानच्या व एककस्थानच्या अंकांनी होणाऱ्या संख्येला 4 ने भाग जात असेल, तर त्या संख्येला 4 ने भाग जातो.

(i) 3148 या संख्येत दशकस्थानच्या व एककस्थानच्या अंकांनी होणारी संख्या 48 आहे. या संख्येला 4 ने भाग जातो, म्हणून 3148 ला 4 ने भाग जातो.

(ii) 5019 या संख्येतील 19 ला 4 ने भाग जात नाही, म्हणून 5019 ला 4 ने भाग जात नाही, हे पडताळून पाहा.

6 ची कसोटी : संख्येला 2 व 3 या **दोन्ही** संख्यांनी भाग जात असेल, तर त्या संख्येला 6 ने भाग जातो.

(i) 64218 या संख्येतील एककस्थानी 8 हा अंक आहे, म्हणून तिला 2 ने भाग जातो. 64218 या संख्येतील अंकांची बेरीज $6 + 4 + 2 + 1 + 8 = 21$.
21 ला 3 ने भाग जातो, म्हणून 64218 ला 3 ने भाग जातो.
यावरून 64218 ला 2 व 3 या दोहोंनी भाग जातो. $\therefore$ 6 नेही भाग जातो.

(ii) 50918 ला 6 ने भाग जात नाही, हे पडताळून पाहा.

9 ची कसोटी : संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग जात असेल, तर ती संख्या 9 ने विभाज्य असते.

(i) 94,203 या संख्येतील अंकांची बेरीज $9 + 4 + 2 + 0 + 3 = 18$.
18 ला 9 ने भाग जातो, म्हणून 94,203 ला 9 ने भाग जातो.

(ii) 4625 मधील अंकांची बेरीज करून 4625 ला 9 ने भाग जात नाही, हे पडताळून पाहा.

11 ची कसोटी : संख्येतील एकाआड एक अंकांच्या बेरजांतील फरक 0 असेल किंवा 11 ने विभाज्य असेल, तर ती संख्या 11 ने विभाज्य असते.

(i) 1452 मधील एकाआड एक अंकांच्या बेरजा $1 + 5 = 6$ आणि $4 + 2 = 6$. बेरजांतील फरक $6 - 6 = 0$ $\therefore$ 1452 ला 11 ने भाग जातो.

(ii) 8162 या संख्येबाबत $8 + 6 = 14$, $1 + 2 = 3$.
14 व 3 यांतील फरक $14 - 3 = 11$. 11 ही संख्या 11 ने विभाज्य आहे.
$\therefore$ 8162 ला 11 ने भाग जातो.

(iii) 5123 ला 11 ने भाग जात नाही, हे तुम्ही पडताळून पाहा.

उदाहरणसंग्रह 1

1. पुढील प्रत्येक संख्येला 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 यांपैकी कोणत्या संख्यांनी भाग जातो, हे कसोट्यांच्या आधारे लिहा.
(1) 99 (2) 135 (3) 711 (4) 280 (5) 378 (6) 495
(7) 504 (8) 616 (9) 720 (10) 2,304 (11) 4,203 (12) 1,980

संख्येचे विभाजक

5 या संख्येने 105 ला नि:शेष भाग जातो, म्हणजे '5 हा 105 चा **विभाजक** आहे'. दिलेल्या संख्येचे विभाजक शोधण्यास विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा उपयोग होतो.

जसे, 135 या संख्येचे 3, 5 आणि 9 हे विभाजक आहेत, हे कसोट्यांच्या आधारे समजते. या विभाजकांनी 135 ला भागून येणारे भागाकार हे 135 चे आणखी विभाजक आहेत.

$$\frac{135}{3} = 45, \qquad \frac{135}{5} = 27, \qquad \frac{135}{9} = 15$$

∴ 45, 27, 15 हे सुद्धा 135 चे विभाजक आहेत.

आता प्रत्येक संख्येला 1 ने आणि स्वत: त्या संख्येने भाग जातोच, म्हणून प्रत्येक संख्येचे 1 आणि ती संख्या हे विभाजक असतात. 135 चे 1 आणि 135 हेसुद्धा विभाजक आहेत.

(i) 135 चे 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135 असे आठ विभाजक आहेत.

(ii) 4 चे विभाजक 1, 2, 4 आहेत.

(iii) 36 चे 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 हे नऊ विभाजक आहेत.

उदाहरणसंग्रह 2

1. पुढील प्रत्येक संख्येचे सर्व विभाजक लिहा.

(1) 6	(2) 15	(3) 18	(4) 23	(5) 28
(6) 45	(7) 71	(8) 85	(9) 100	(10) 91

मूळ संख्या आणि संयुक्त संख्या

6, 7, 18, 23 या संख्यांचे विभाजक पाहू.

6 चे विभाजक : 1, 2, 3, 6

7 चे विभाजक : 1, 7

18 चे विभाजक : 1, 2, 3, 6, 9, 18

23 चे विभाजक : 1, 23

येथे 7 चे 1 व 7 हे दोनच विभाजक आहेत.

तसेच 23 चे 1 व 23 हे दोनच विभाजक आहेत.

ज्या संख्येचे 1 व ती संख्या हे दोनच विभाजक असतात, त्या संख्येला **मूळ संख्या** म्हणतात.

∴ 7 व 23 या मूळ संख्या आहेत.

6 व 18 या संख्यांना दोन पेक्षा जास्त विभाजक आहेत.

दोनपेक्षा जास्त विभाजक असणाऱ्या संख्यांना **संयुक्त संख्या** म्हणतात.

∴ 6 व 18 या संयुक्त संख्या आहेत.

1 ही संख्या मूळही नाही आणि संयुक्तही नाही.

दिलेली संख्या मूळ की संयुक्त हे कसे ओळखावे, ते पाहू.

100 पेक्षा मोठ्या असणाऱ्या संख्यांचा विचार करू.

उदा. 501, 803, 299, 893, 317 यांपैकी मूळ व संयुक्त संख्या कोणत्या ते ओळखा. (त्यासाठी विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा उपयोग करू.)

(i) 501 या संख्येला 3 ने भाग जातो, म्हणून 501 ही संयुक्त संख्या आहे.

(ii) 803 ही संख्या 11 ने विभाज्य आहे, म्हणून 803 ही संयुक्त संख्या आहे.

(iii) 299 ही संख्या 2, 3, 5, 11 यांपैकी कोणत्याही संख्येने विभाज्य नाही.

299 ला 2 ने भाग जात नाही, म्हणजे 2 च्या कोणत्याही पटीने भाग जाणार नाही, हे उघड आहे, म्हणून 299 ला 4, 6, 8,.... म्हणजे सम संख्यांनी भाग जातो का, हे पाहण्याची आवश्यकता नाही, म्हणून तिला इतर संख्यांनी भाग जातो का याचा विचार करू.

प्रत्यक्ष भागून, 7 ने 299 ला भाग जात नाही, हे लक्षात येते.

प्रत्यक्ष भागाकार करून, 299 ला 13 ने भाग जातो (भागाकार 23 येतो), हे समजते, म्हणून 299 ही संयुक्त संख्या आहे.

(iv) याप्रमाणेच विचार करून 893 ला 19 ने भाग जातो हे समजते, म्हणून 893 ही संयुक्त संख्या आहे.

(v) 317 ला 7 ने व 13 ने भाग जात नाही हे भागून समजते. 17 ने भागून पाहिल्यास ती 17 नेही विभाज्य नसल्याचे दिसते.

$17 \times 17 = 289$ व $289 < 317$ आणि $18 \times 18 = 324$ व $324 > 317$, म्हणून 317 चा कोणताही मूळ अवयव 17 पेक्षा मोठा असणार नाही. त्यामुळे 17 पेक्षा मोठ्या संख्यांनी भाग जातो का, हे पाहण्याची आवश्यकता नाही.

यावरून 317 ही मूळ संख्या आहे असे ठरते.

उदाहरणसंग्रह 3

1. मूळही नाही आणि संयुक्तही नाही, अशी संख्या कोणती ?
2. सम असणाऱ्या मूळ संख्या किती आहेत ? कोणत्या ?
3. 1 व 100 या संख्यांमधील सर्व मूळ संख्या लिहा. त्या किती आहेत ?
4. पुढील संख्या मूळ आहेत, की संयुक्त हे ठरवा.

(1) 93 (2) 97 (3) 101 (4) 117 (5) 127
(6) 295 (7) 407 (8) 499 (9) 527 (10) 637
(11) 689 (12) 209 (13) 901 (14) 953 (15) 997.

5. 101 पासून 201 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्या लिहा.
6. 507 या संख्येला 7 ने भाग जात नाही, तर तिला 21 ने भाग जाईल का ? कारण लिहा.
7. तीन अंकी लहानांत लहान आणि मोठ्यांत मोठी मूळ संख्या लिहा.

जोडमूळ संख्या

3, 5 ; 11, 13 ; 29, 31 या मूळ संख्यांच्या जोड्या पाहा. प्रत्येक जोडीतील संख्यांत दोनचा फरक आहे. अशा दोनचा फरक असणाऱ्या मूळ संख्यांना **जोडमूळ संख्या** किंवा **जुळ्या मूळ संख्या** म्हणतात.

197, 199 ; 239, 241 ; 599, 601 या जोडमूळ संख्यांच्या आणखी काही जोड्या आहेत. अशा आणखी खूप जोड्या आहेत.

सहमूळ संख्या

10 या संख्येचे विभाजक 1, 2, 5, 10 आहेत. 21 चे विभाजक 1, 3, 7, 21 आहेत. दोन्ही संख्यांच्या विभाजकांत 1 हा एकच सामाईक विभाजक आहे. अशा, म्हणजे 1 हा एकच सामाईक विभाजक असणाऱ्या संख्यांना **सहमूळ** संख्या किंवा **सापेक्ष मूळ** संख्या म्हणतात.

3, 8 ; 4, 9 ; 21, 22 ; 75, 28 ही सहमूळ संख्यांच्या जोड्यांची आणखी काही उदाहरणे आहेत.

सहमूळ संख्यांबाबत लक्षात घ्यायच्या बाबी :

(1) कोणत्याही दोन क्रमवार संख्यांची जोडी, ही सहमूळ संख्यांची जोडी असते.

(2) एखाद्या संख्येला दोन सहमूळ संख्यांनी भाग जात असेल, तर त्यांच्या गुणाकारानेही भाग जातो. जसे, 4068 ला 3 व 4 या सहमूळ संख्यांनी भाग जातो, म्हणजे 4068 ला 3×4 ने, म्हणजे 12 नेही भाग जातो.

उदाहरणसंग्रह 4

1. 1 पासून 100 पर्यंतच्या सर्व जोडमूळ संख्या लिहा.
2. पुढे दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांपैकी सहमूळ संख्यांच्या जोड्या ओळखा.
(1) 9, 12 (2) 27, 35 (3) 4, 5 (4) 3, 102 (5) 207, 702
(6) 17, 19 (7) 11, 55 (8) 21, 16 (9) 85, 51 (10) 52, 143

संख्येचे मूळ अवयव पाडणे

उदा. 30 चे मूळ अवयव पाडा.

$30 = 10 \times 3$.   येथे 10 व 3 हे 30 चे अवयव आहेत.

10 ही संयुक्त संख्या अवयवरूपात 2×5 अशी लिहिता येते. यावरून 30 चे मूळ अवयव पुढीलप्रमाणे आहेत.

$\therefore 30 = 2 \times 5 \times 3$. (2, 5, 3 या मूळ संख्या आहेत.)

दिलेली संख्या तिच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिणे, यालाच त्या संख्येचे मूळ अवयव पाडणे असे म्हणतात.

मूळ अवयव पाडण्यासाठी विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा उपयोग होतो.

उदा. (1) 78 चे मूळ अवयव पाडा.

पद्धत 1

$$78 = 2 \times 39$$
$$= 2 \times 3 \times 13$$

पद्धत 2

2	78
3	39
13	13
	1

$\therefore 78 = 2 \times 3 \times 13$

उदा. (2) 8514 चे मूळ अवयव पाडा.

$8514 = 6 \times 1419$ .... (6 ची कसोटी वापरून)

$= 6 \times 3 \times 473$ .... (3 ची कसोटी वापरून)

$= 6 \times 3 \times 11 \times 43$ .... (11 ची कसोटी वापरून)

$= 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 43$

उदाहरणसंग्रह 5

1. पुढे दिलेल्या संख्यांचे मूळ अवयव पाडा.

(1) 120   (2) 324   (3) 176   (4) 420

(5) 925   (6) 715   (7) 6426   (8) 8569

महत्तम साधारण विभाजक (मसावि)

84 आणि 48 यांच्या विभाजकांचा विचार करू.

84 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

48 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

या विभाजकांचे निरीक्षण केल्यास, अधोरेखित 1, 2, 3, 4, 6, 12 हे विभाजक दोन्ही गटांत आहेत. यांना **साधारण** किंवा **सामाईक विभाजक** म्हणतात.

1, 2, 3, 4, 6, 12 या साधारण विभाजकांत 12 हा सर्वांत मोठा विभाजक आहे. त्याला **महत्तम साधारण विभाजक** किंवा थोडक्यात **मसावि** म्हणतात.

उदा. (1) 30 व 24 यांचा मसावि काढा.

30 चे विभाजक : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

24 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

30 व 24 यांचे साधारण विभाजक : 1, 2, 3, 6

साधारण विभाजकांत 6 सर्वांत मोठा आहे.

∴ 30 व 24 यांचा मसावि = 6

उदा. (2) 24, 32, 56 यांचा मसावि काढा.

24 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

32 चे विभाजक : 1, 2, 4, 8, 16, 32

56 चे विभाजक : 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

24, 32, 56 यांचे साधारण विभाजक 1, 2, 4, 8 आहेत.

त्यांमध्ये 8 हा सर्वांत मोठा विभाजक आहे.

∴ 24, 32, 56 यांचा मसावि 8 आहे.

उदा. (3) 18 व 35 यांचा मसावि काढा.

18 चे विभाजक : 1, 2, 3, 6, 9, 18

35 चे विभाजक : 1, 5, 7, 35

18 व 35 यांचे साधारण विभाजक : 1

∴ 18 व 35 यांचा मसावि 1 आहे.

(येथे 18 व 35 या सहमूळ संख्यांचा मसावि 1 आहे, हे लक्षात घ्या.)

उदाहरणसंग्रह 6

1. मसावि काढा.

(1) 6, 8 (2) 9, 12 (3) 6, 12, 18 (4) 30, 45

(5) 30, 20 (6) 42, 28, 70 (7) 60, 90 (8) 120, 96

मसावि काढण्याची मूळ अवयव पद्धत

संख्या मोठ्या असतील तर त्यांचे मूळ अवयव पाडून मसावि ठरवणे सोपे जाते. संख्येचे मूळ अवयव हे त्या संख्येचे विभाजक देखील असतात.
पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 45 व 30 यांचा मसावि काढा.

प्रथम दिलेल्या संख्यांचे मूळ अवयव पाडू.

$45 = 5 \times 9$	$30 = 10 \times 3$
$= 5 \times 3 \times 3$	$= 5 \times 2 \times 3$
$= 3 \times \underline{3} \times \underline{5}$	$= 2 \times \underline{3} \times \underline{5}$

45 व 30 या संख्यांचे 3, 5 व (3×5) हे साधारण विभाजक आहेत. त्यांपैकी (3×5) हा विभाजक सर्वांत मोठा आहे.

$\therefore$ 45 व 30 यांचा मसावि $= (3 \times 5) = 15$

उदा. (2) 195, 312, 546 यांचा मसावि काढा.

$195 = 5 \times 39 = 5 \times 3 \times 13 = \underline{3} \times 5 \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78 = 4 \times 6 \times 13 = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 6 \times 91 = 2 \times 3 \times 13 \times 7 = 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

यावरून (3×13) हा सर्वांत मोठा साधारण विभाजक आहे.

$\therefore$ 195, 312 व 546 यांचा मसावि $= (3 \times 13) = 39$.

उदा. (3) 72 व 85 यांचा मसावि काढा.

$72 = 12 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$85 = 17 \times 5 = 5 \times 17$

येथे दिलेल्या संख्यांमध्ये कोणताही साधारण विभाजक नाही; परंतु 1 हा प्रत्येक संख्येचा विभाजक असतोच, म्हणजे केवळ 1 हाच सामाईक विभाजक आहे. $\therefore$ 72 व 85 यांचा मसावि 1 आहे.

उदा. (4) 80, 16, 128 यांचा मसावि काढा.

$80 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 5$

$16 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2}$

$128 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2 \times 2$

यावरून मसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

दिलेल्या संख्या 16 च्या पटीत आहेत व त्यांचा मसावि 16 आहे हे लक्षात घ्या.

तसेच 9 व 36 या संख्यांमध्ये 36 ही संख्या 9 च्या पटीत आहे, म्हणून 9 व 36 यांचा मसावि 9 येईल. मूळ अवयव पाडून हे पडताळून पाहा.

या उदाहरणांवरून पुढील बाबी लक्षात घ्या.

(1) संख्यांचे मूळ अवयव चढत्या क्रमाने मांडल्याने त्या संख्यांचे साधारण अवयव शोधणे सोपे झाले.

(2) साधारण मूळ अवयवांचा गुणाकार हा त्या संख्यांचा मसावि आहे.

(3) दिलेल्या सर्व संख्यांपैकी एखाद्या संख्येच्या पटीत इतर संख्या असतील, तर ती संख्या दिलेल्या संख्यांचा मसावि असते, म्हणून अशा संख्यांचा मसावि निरीक्षणानेही काढता येतो.

उदाहरणसंग्रह 7

1. मसावि काढा.

(1) 90, 50	(2) 42, 70	(3) 75, 45, 60
(4) 144, 216	(5) 406, 870	(6) 100, 125, 150
(7) 75, 57, 102	(8) 105, 154	(9) 56, 57
(10) 777, 315, 588	(11) 585, 675, 540	(12) 45, 42, 88

2. मसावि काढा. (निरीक्षणाने)

(1) 12, 24	(2) 30, 15	(3) 9, 27, 63
(4) 23, 69	(5) 11, 33, 44	(6) 18, 144

लघुतम साधारण विभाज्य (लसावि)

8 व 12 यांनी विभाज्य असणाऱ्या पुढील संख्यांचे निरीक्षण करा.

8 ने विभाज्य संख्या –

8, 16, <u>24</u>, 32, 40, <u>48</u>, 56, 64, <u>72</u>, ...

12 ने विभाज्य संख्या –

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...

येथे अधोरेखित केलेल्या संख्या 24, 48, 72, ... या साधारण किंवा सामाईक विभाज्य संख्या आहेत. यांतील 24 ही सर्वांत लहान म्हणजे लघुतम आहे. यावरून 8 व 12 यांची 24 ही लघुतम साधारण विभाज्य संख्या, थोडक्यात लसावि आहे.

उदा. (1) 20 व 12 यांचा लसावि काढा.

20 ने विभाज्य संख्या : 20, 40, 60, 80, 100, 120, ...

12 ने विभाज्य संख्या : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ...

12 व 20 ने विभाज्य असणाऱ्या साधारण संख्या : 60, 120, ...

यापैकी सर्वांत लहान संख्या 60.

∴ लसावि 60

उदा. (2) 3 व 8 यांचा लसावि काढा.

3 ने विभाज्य संख्या : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,... , 48,...

8 ने विभाज्य संख्या : 8, 16, 24, 32, 40, 48,...

3 व 8 ने विभाज्य असणाऱ्या साधारण संख्या : 24, 48, 72,...

यांपैकी सर्वांत लहान संख्या 24.

यावरून 3 व 8 यांचा लसावि 24.

- सहमूळ संख्यांचा गुणाकार हाच त्यांचा लसावि असतो, हे लक्षात घ्या.

उदाहरणसंग्रह 8

1. लसावि काढा.

(1) 4, 6 (2) 15, 10 (3) 4, 6, 8

(4) 12, 9 (5) 2, 4, 7 (6) 65, 39

2. पुढील सहमूळ संख्यांचा लसावि काढा.

(1) 9, 7 (2) 4, 11 (3) 15, 14

3. लसावि काढा. (प्रत्येक उदाहरणातील संख्या आणि लसावि यांचे निरीक्षण करून काही नियम मिळतो का पाहा.)

(1) 15, 30 (2) 48, 16 (3) 34, 102

लसावि काढण्याची मूळ अवयव पद्धत

मोठ्या संख्यांसाठी त्यांचे मूळ अवयव काढून लसावि काढणे सोपे जाते. ही पद्धत समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) लसावि काढा. 65, 39

दिलेल्या संख्या त्यांच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकार रूपात लिहू.

$65 = 13 \times 5$ $\quad\quad$ $39 = 13 \times 3$

65 व 39 चे साधारण मूळ अवयव 13

65 व 39 चे साधारण नसलेले मूळ अवयव 5, 3

65 व 39 चे साधारण मूळ अवयव व साधारण नसलेले मूळ अवयव घेऊन केलेला गुणाकार $13 \times 5 \times 3 = 195$ येतो.

195, 195×2, 195×3, ... या संख्या 65 व 39 ने विभाज्य आहेत. त्यांपैकी 195 ही लघुतम संख्या आहे. यावरून 65 व 39 चा लसावि = 195

उदा. (2) लसावि काढा. 36, 120

$36 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$120 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 5$

साधारण असलेले मूळ अवयव : 2, 2, 3

साधारण नसलेले मूळ अवयव : 2, 3, 5

36 व 120 यांचा लसावि

= साधारण असलेले मूळ अवयव × साधारण नसलेले मूळ अवयव

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 360$

उदा. (3) लसावि काढा. 30, 84, 60

$30 = \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$60 = \underline{2} \times \boxed{2} \times \underline{3} \times 5$

$84 = \underline{2} \times \boxed{2} \times \underline{3} \times 7$

30, 60, 84 चे साधारण मूळ अवयव : 2, 3

उरलेल्या अवयवांपैकी 30 व 60 चे साधारण मूळ अवयव : 5

उरलेल्या अवयवांपैकी 60 व 84 चे साधारण मूळ अवयव : 2

उरलेल्या अवयवांपैकी 30 व 84 चे साधारण मूळ अवयव : एकही नाही.

उरलेले मूळ अवयव : 7

30, 60, 84 यांचा लसावि = $2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7$

$= 420$

उदा. (4) लसावि काढा. 108, 175, 120

$108 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3 \times 3$

$175 = 5 \times 5 \times 7$

$120 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 5$

108, 175, 120 चे साधारण मूळ अवयव : एकही नाही.

उरलेल्या अवयवांपैकी 108, 175 चे साधारण मूळ अवयव : नाही.

उरलेल्या अवयवांपैकी 175, 120 चे साधारण मूळ अवयव : 5.

उरलेल्या अवयवांपैकी 108, 120 चे साधारण मूळ अवयव : 2, 2, 3

उरलेले मूळ अवयव : 2, 3, 3, 5, 7

$\therefore$ लसावि $= 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$= 20 \times 18 \times 15 \times 7$

$= 360 \times 15 \times 7$

$= 5400 \times 7$

$= 37800$

उदा. (5) 48, 180 यांचा मसावि व लसावि काढा.

$48 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$

$180 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3 \times 5$

48 व 180 चे साधारण मूळ अवयव 2, 2, 3

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

लसावि = साधारण असलेले अवयव $\times$ साधारण नसलेले अवयव

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 12 \times 60$

$= 720$

उदाहरणसंग्रह 9

1. लसावि काढा.

(1) 6, 8 (2) 6, 8, 10 (3) 15, 20

(4) 9, 15, 20 (5) 45, 36 (6) 45, 36, 30

(7) 65, 39 (8) 28, 72, 98 (9) 105, 195

(10) 165, 90 (11) 120, 90, 175 (12) 216, 288, 270

2. मसावि आणि लसावि काढा.

(1) 250, 150 (2) 96, 192 (3) 32, 37

(4) 132, 88 (5) 405, 225 (6) 46, 51, 35

2. क्रियांचा क्रम व कंसाचा वापर

मागील इयत्तेत तुम्ही बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया करण्यास शिकला आहात. या क्रियांचा आपण आणखी अभ्यास करू. पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) सोपे रूप द्या. $75 + 25 \times 10$

या उदाहरणात बेरीज आणि गुणाकार या दोन क्रिया आहेत.

आधी $75 + 25$ ही बेरीज केली, तर राशीची किंमत $100 \times 10 = 1000$ येईल.	आधी 25×10 हा गुणाकार केला, तर राशीची किंमत $75 + 250 = 325$ येईल.

म्हणजे एकाच राशीच्या दोन वेगवेगळ्या किमती आहेत, असे म्हणावे लागेल. असे झाल्यास गोंधळ होईल हे उघड आहे.

आता आणखी एक उदाहरण पाहा.

उदा. (2) सोपे रूप द्या. $48 \div 8 \div 2$

या उदाहरणात भागाकार ही एकच क्रिया दोन् वेळा आली आहे.

$48 \div 8$ हा भागाकार आधी केला, तर $48 \div 8 \div 2 = 6 \div 2 = 3$	$8 \div 2$ हा भागाकार आधी केला, तर $48 \div 8 \div 2 = 48 \div 4 = 12$

म्हणजे या उदाहरणातही एकाच राशीच्या दोन भिन्न किमती येतात हे योग्य नाही. वरील दोन्ही उदाहरणांत एकाच राशीच्या दोन वेगवेगळ्या किमती का आल्या ? दिलेल्या राशीतील क्रियांचा क्रम आपण बदलला, हे त्याचे कारण आहे.

कंसाचा उपयोग

एका राशीची किंमत एकच असावी यासाठी कोणती क्रिया आधी करायची हे समजणे आवश्यक असते. यासाठी कंसाचा उपयोग करतात. जी क्रिया आधी करावी असे अपेक्षित असते, ती कंसामध्ये लिहितात.

जसे, $75 + 25 \times 10$ या राशीत बेरीज आधी करणे अपेक्षित असेल, तर राशीची मांडणी $(75 + 25) \times 10$ अशी करावी लागेल. जर मांडणी $75 + (25 \times 10)$ अशी केली तर आधी गुणाकार करणे अपेक्षित असेल.

$\therefore$ $(75 + 25) \times 10$ या राशीची किंमत 1000 आहे.

आणि $75 + (25 \times 10)$ या राशीची किंमत 325 आहे.

तसेच, $(48 \div 8) \div 2 = 3$ आणि $48 \div (8 \div 2) = 12$

कंसाचा वापर एकसारखा करावा लागू नये, म्हणून क्रियांच्या क्रमाविषयी पुढील नियम आहेत.

(1) कंसात दिलेली क्रिया प्रथम करावी.

(2) नंतर राशीमध्ये एकापेक्षा अधिक क्रिया असतील, तर गुणाकार व भागाकार या क्रिया, डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील त्या क्रमाने कराव्या.

(3) नंतर बेरीज व वजाबाकी या क्रिया, डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील, त्या क्रमाने कराव्या.

(4) कंसात एकापेक्षा अधिक क्रिया असतील, तर वरील दोन नियम पाळून त्या आधी कराव्या.

या नियमांचा उपयोग करून पुढे सोडवून दिलेली उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) सोपे रूप द्या. $196 - 60 \times 3 \div 4$

राशीत वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या तीन क्रिया आहेत. प्रथम गुणाकार, भागाकार या क्रिया डावीकडून उजवीकडे क्रमाने करू.

$196 - 60 \times 3 \div 4$	
$= 196 - 180 \div 4$	60×3 हा गुणाकार केला.
$= 196 - 45$	$180 \div 4$ हा भागाकार केला. तो 45 आला.
$= 151$	नंतर $196 - 45$ ही वजाबाकी केली.

उदा. (2) सोपे रूप द्या. $243 + 6 \times (45 - 28 - 17)$

$243 + 6 \times (45 - 28 - 17)$	प्रथम कंसातील वजाबाकी क्रिया
$= 243 + 6 \times (17 - 17)$	डावीकडून उजवीकडे केली.
$= 243 + 6 \times 0$	
$= 243 + 0$	बेरीज व गुणाकार यांपैकी गुणाकार
$= 243$	ही क्रिया आधी केली. शेवटी बेरीज केली.

उदा. (3) सोपे रूप द्या. $(8\times2-6)\ \div(3+14\div7)$

दिलेल्या राशीत कंसाचा वापर दोन वेळा केला आहे. आधी पहिल्या कंसातील राशीचे सोपे रूप काढू.

रीत	स्पष्टीकरण
$8\times2-6$	
$=16-6$	प्रथम गुणाकार केला.
$=10$	नंतर वजाबाकी केली.

आता दुसऱ्या कंसातील राशीला सोपे रूप देऊ.

$3+14\div7$	
$=3+2$	प्रथम भागाकार केला.
$=5$	नंतर बेरीज केली.

आता दिलेल्या राशीचे सोपे रूप काढू.

$(8\times2-6)\ \div(3+14\div7)$

$=10\div5=2$

काही वेळा क्रियांचा क्रम स्पष्ट होण्यासाठी एकापेक्षा जास्त वेळा कंसांचा उपयोग करावा लागतो. अशा वेळी '( )' या साध्या कंसाबरोबरच '[ ]' अशा चौकटी कंसाचा, तसेच '{ }' अशा महिरपी कंसाचा उपयोग करतात. एकापेक्षा जास्त प्रकारचे कंस वापरले असतील, तर प्रथम सर्वांत आतील कंसातील क्रिया कराव्या. पुढील उदाहरणावरून हे समजून घ्या.

उदा. (4) सोपे रूप द्या.

$25\times[113-(30\div2\div3+4)+2\times(19-6)]$

प्रथम आतील कंस सोडवू.

	दिलेली राशी
$30\div2\div3+4$	$=25\times[113-9+2\times13]$
$=15\div3+4$	$=25\times[113-9+26]$
$=5+4$	$=25\times[104+26]$
$=9$	$=25\times130$
	$=3250$

टीप : एखादी संख्या आणि कंसातील राशी यांत गुणाकाराची क्रिया अपेक्षित असेल, तर संख्या व कंस यांमध्ये '×' हे चिन्ह न लिहिण्याचा संकेत आहे. जसे, $5\,(14-11)$ याचा अर्थ $5\times(14-11)$ असा असतो.

उदा. (5) $3 + 9 \div 3 - 1$ या राशीची किंमत 3 येईल यासाठी राशीत योग्य ठिकाणी कंस घाला.

दिलेली राशी : $3 + 9 \div 3 - 1$

नियमानुसार क्रिया केल्यास राशीची किंमत पुढे दिल्याप्रमाणे येईल.

$$\begin{aligned} 3 + 9 \div 3 - 1 &= 3 + 3 - 1 \\ &= 6 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

पण राशीची किंमत 3 आली पाहिजे. यासाठी खाली दिल्याप्रमाणे कंस घालून पाहू.

$$\begin{aligned} \text{राशी} &= (3 + 9) \div 3 - 1 \\ &= 12 \div 3 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

उदाहरणसंग्रह 10

1. खालील राशींना सोपे रूप द्या.

(1) $12 \times 14 \div 7$

(2) $160 \times 10 \div 5 \times 4$

(3) $160 \times 10 \div (5 \times 4)$

(4) $(160 \times 10) \div (5 \times 4)$

(5) $94 - 61 - 23$

(6) $94 - (61 - 23)$

(7) $237 - 87 + 30$

(8) $237 - (87 + 30)$

(9) $450 \div 10 \div 5$

(10) $450 \div (10 \div 5)$

(11) $103 + 91 \times 2 + 8$

(12) $(103 + 91) \times (2 + 8)$

(13) $216 \div (24 - 6) + 2 \times (53 - 14 - 6)$

(14) $[18 + 5\ (7 - 3)] + 64 \div [20 - (8 \times 2)]$

(15) $210 \div \{125 - [5 + 3\ (14 - 9)]\}$

2. पुढील प्रत्येक राशीपुढे तिची किंमत किती यावी हे दिले आहे. ती किंमत येण्यासाठी राशीत योग्य जागी कंस घाला.

(1) $18 \div 6 + 3$ (किंमत 2)

(2) $4 \times 13 + 2 + 40$ (किंमत 100)

(3) $100 + 20 \div 5$ (किंमत 24)

(4) $100 \div 20 \div 5$ (किंमत 25)

(5) $13 - 9 + 2$ (किंमत 2)

(6) $30 - 10 - 10$ (किंमत 30)

(7) $30 - 10 \div 10$ (किंमत 2)

(8) $50 - 35 + 15$ (किंमत 0)

3. संख्येसाठी अक्षराचा वापर

गणित विषयात लेखन करताना चिन्हांचा वापर करतात. 'पाच आणि नऊ या संख्यांची बेरीज' हे चिन्हांचा वापर करून थोडक्यात, '5 + 9' असे लिहितात.

चिन्हांचा वापर केल्याने लेखन आटोपशीर होते, तसेच ते समजण्यास सुलभ होते. संख्यांसाठी अक्षरांचा वापर केल्यानेही गणिताचे लेखन सोपे होते.

संख्येसाठी अक्षराचा वापर दोन प्रकारे करतात.

प्रकार एक : माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षराचा वापर

'आठपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या कोणती ?' या प्रश्नाचे उत्तर शोधण्यासाठी आपण '8 + 4' ही बेरीज करू. येणारी संख्या 12 हे प्रश्नाचे उत्तर आहे.

वरील प्रश्नातील 'आठपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या' ही माहिती चिन्हाचा वापर करून आपण (8 + 4) अशी लिहिली.

आता 'एका संख्येपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या', ही माहिती चिन्हांत कशी लिहिता येईल हे पाहू.

'एका संख्येपेक्षा' म्हणजे नेमक्या कोणत्या संख्येपेक्षा हे माहीत नाही. तरीही हे चिन्हांत लिहिता येईल. त्यासाठी माहीत नसलेली संख्या a या अक्षराने दाखवू. आता 'एका संख्येपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या' ही माहिती चिन्हांत $(a + 4)$ अशी लिहिता येईल.

त्याचप्रमाणे 'एका संख्येपेक्षा 7 ने लहान असणारी संख्या' हे $(b - 7)$ असे लिहिता येईल. येथे माहीत नसलेल्या संख्येसाठी b हे अक्षर घेतले आहे.

येथे लक्षात घ्या, की दोन किंवा अधिक संख्यांत बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रिया केल्यावर एक संख्याच मिळते. जसे, 8 व 4 यांची बेरीज करून 12 ही संख्या मिळते; परंतु अक्षर आणि संख्या यांच्यात क्रियेचे चिन्ह वापरून येणारी राशी [$(a + 4)$, $(b - 7)$ इत्यादी] आणखी सोपी करता येत नाही.

'एक संख्या आणि 2 यांचा गुणाकार' ही माहिती, 'एका संख्ये'साठी m

हे अक्षर घेऊन '$m \times 2$' किंवा $2 \times m$ अशी लिहिता येईल; **परंतु अक्षर आणि संख्या यांचा गुणाकार असेल, तर संख्या आधी लिहिण्याची आणि गुणाकाराचे चिन्ह न लिहिण्याची पद्धत आहे.** या पद्धतीनुसार $m \times 2$ किंवा $2 \times m$ हा गुणाकार $2m$ असा लिहितात. त्याचप्रमाणे $10 \times k$ किंवा $k \times 10$ हा गुणाकार $10k$ असा लिहितात.

माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षराचा वापर करून लेखन केलेली आणखी काही उदाहरणे पुढे दिलेली आहेत. त्यांचा अभ्यास करा. संख्येसाठी $a, b, c, ..., z$ यांपैकी कोणतेही अक्षर घेतले तरी चालते, हे लक्षात घ्या.

माहिती	अक्षर वापरून लेखन
(1) 10 आणि एक संख्या यांची बेरीज	$10 + p$
(2) 23 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार	$23 \times d$ किंवा $23d$
(3) 18 ला एका संख्येने भागले, तर येणारा भागाकार	$18 \div y$ किंवा $\frac{18}{y}$
(4) एका संख्येला 18 ने भागले, तर येणारा भागाकार	$\frac{x}{18}$ किंवा $x \div 18$
(5) एका संख्येतून 15 वजा केले, तर येणारी वजाबाकी	$a - 15$
(6) 15 तून एक संख्या वजा केली, तर येणारी वजाबाकी	$15 - b$
(7) एका संख्येपेक्षा 2 ने लहान संख्या	$(d - 2)$
(8) काही आंब्यांपैकी 6 आंब्यांचा रस करून उरलेले आंबे	$(m - 6)$
(9) काही पेरूंचे 3 समान वाटे केले, तर प्रत्येक वाट्यातील पेरू	$\frac{p}{3}$

उदाहरणसंग्रह 11

1. प्रत्येक उदाहरणात, माहीत नसलेल्या संख्येसाठी x हे अक्षर वापरून लेखन करा.

(1) एका संख्येतून 5 वजा केले, तर येणारी वजाबाकी

(2) 5 मधून एक संख्या वजा केली, तर येणारी वजाबाकी

(3) शहनाजजवळची काही आणि हेमंतजवळची 6 मिळून एकूण पुस्तके

(4) 24 ने एका संख्येला भागले, तर येणारा भागाकार

(5) 24 ला एका संख्येने भागले, तर येणारा भागाकार

(6) एका संख्येची चौपट

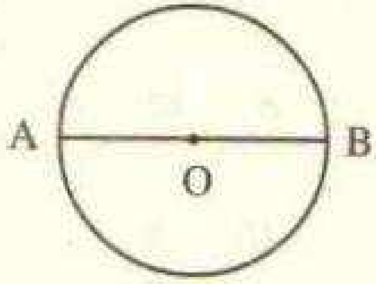
(7) 4 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार

(8) 1 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार

(9) प्रत्येकाला 10 याप्रमाणे काही मुलांना वाटलेली बोरे

(10) 100 किग्रॅ तांदूळ काही कुटुंबांनी सारखे वाटून घेतले, तर प्रत्येक कुटुंबाला मिळालेले तांदूळ

प्रकार दोन : सूत्र किंवा नियम तयार करण्यासाठी अक्षराचा वापर



सोबतच्या आकृतीत रेख AB हा वर्तुळाचा व्यास आहे. रेख OA आणि रेख OB त्रिज्या आहेत. व्यास व त्रिज्या हे शब्द संख्यांसाठी सुद्‌धा वापरतात. जसे, वर्तुळाचा व्यास 10 सेमी आहे, त्रिज्या 5 सेमी आहे, असे आपण म्हणतो.

व्यास = 2 × त्रिज्या, हे तुम्हाला माहीत आहे. व्यासासाठी d आणि त्रिज्येसाठी r ही अक्षरे वापरून हेच सूत्र थोडक्यात $d = 2r$ असे होईल.

आता पुढील बेरजा विचारात घ्या.

(1) $13 + 9 = 22$, $9 + 13 = 22$

(2) $41 + 37 = 78$, $37 + 41 = 78$

(3) $100 + 200 = 300$, $200 + 100 = 300$

(4) $25 + 103 = 128$, $103 + 25 = 128$

बेरजांचे निरीक्षण केल्यावर आपल्या लक्षात येते, की दोन संख्यांची बेरीज आणि त्याच दोन संख्या उलट क्रमाने घेऊन केलेली बेरीज तेवढीच येते. म्हणजे $13 + 9 = 9 + 13$; $41 + 37 = 37 + 41$ इत्यादी.

हाच **नियम** संख्यांसाठी a व b या अक्षरांचा उपयोग करून, थोडक्यात $\boldsymbol{a + b = b + a}$ असा लिहिता येईल.

आता कोणतीही संख्या व 0 यांच्या गुणाकाराची काही उदाहरणे पाहू.

$14 \times 0 = 0$; $3 \times 0 = 0$; $19 \times 0 = 0$ इत्यादी.

यावरून असा नियम लक्षात येतो, की कोणतीही संख्या $\times\ 0 = 0$. संख्येसाठी a हे अक्षर वापरून हा **नियम** $\boldsymbol{a \times 0 = 0}$ असा थोडक्यात लिहिता येतो.

उदाहरणसंग्रह 12

1. कंसात दिलेली अक्षरे वापरून पुढील सूत्रे लिहा.

(1) आयताची परिमिती = 2 × लांबी + 2 × रुंदी

(लांबीसाठी l, रुंदीसाठी b)

(2) चौरसाची परिमिती = 4 × बाजूची लांबी. (बाजूची लांबी a)

(3) त्रिकोणाची परिमिती = त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंच्या लांबीची बेरीज

(त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी a, b, c)

(4) नफा = विक्री − खरेदी (नफा = p, विक्री = s, खरेदी = c)

2. संख्येसाठी कंसात दिलेल्या अक्षरांचा वापर करून दिलेले नियम लिहा.

(1) दोन संख्यांचा गुणाकार आणि त्याच दोन संख्या उलट क्रमाने घेऊन केलेला गुणाकार, तेवढाच येतो. (a, b)

(2) कोणत्याही संख्येला 1 ने गुणल्यास गुणाकार तीच संख्या येते. (n)

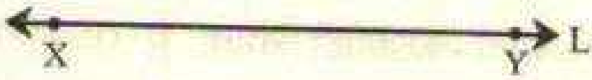
4. बिंदू, रेषा, प्रतल

उजळणी

बिंदू

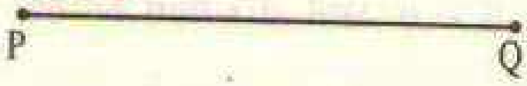
सोबतच्या आकृतीमध्ये A, B व C हे तीन बिंदू दाखवले आहेत.

रेषा



सोबतची आकृती रेषा XY किंवा रेषा L ची आहे.

रेषाखंड

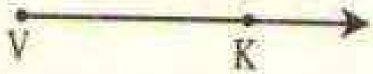


शेजारील आकृती रेख PQ ची किंवा रेख QP ची आहे.

शेजारील आकृतीत रेख DE, रेख EF व रेख DF आहेत, हे लक्षात घ्या.

किरण

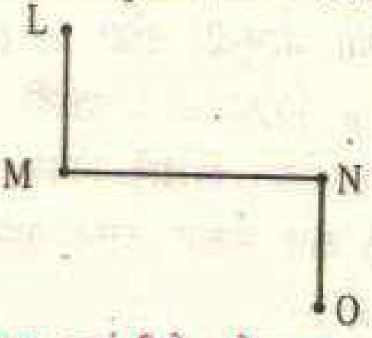
शेजारील आकृतीत किरण VK दाखवलेला आहे.



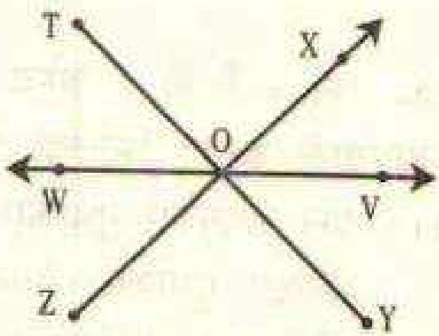
उदाहरणसंग्रह 13

1. खालील आकृत्यांमधील रेषाखंड, रेषा व किरण यांची नावे लिहा.

(1)



(2)

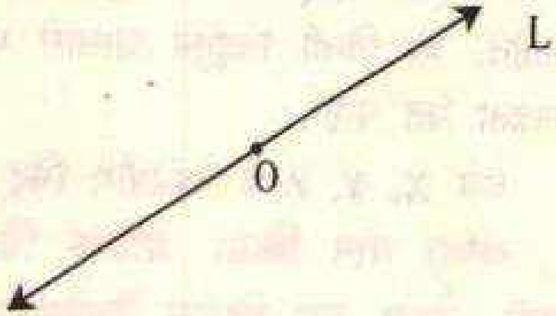


रेषाखंडाच्या लांबीचे लेखन

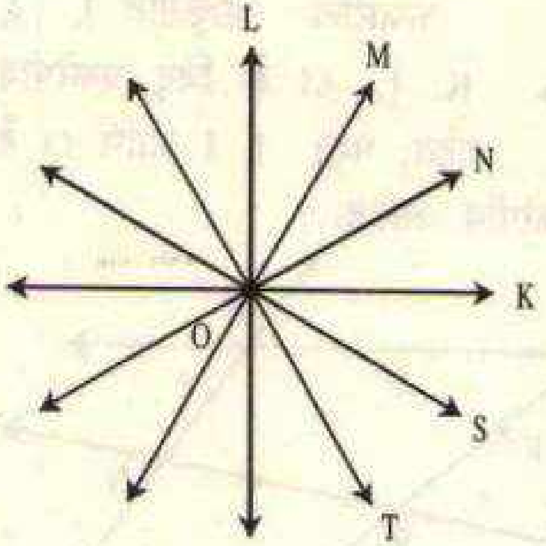
रेषाखंड AB ची लांबी 4 सेमी आहे. याचे लेखन $l(AB) = 4$ सेमी असे करतात आणि याचे वाचन 'रेषाखंड AB ची लांबी 4 सेमी आहे' असे करतात. रेषाखंड PQ ची लांबी 2 सेमी आहे. याचे लेखन '$l(PQ) = 2$ सेमी' असे करतात. याचे वाचन 'रेषाखंड PQ ची लांबी 2 सेमी आहे', असे करतात.

एका बिंदूतून जाणाऱ्या रेषा

बाजूची आकृती पाहा. आकृतीत O हा एक बिंदू आहे. या बिंदूतून L ही एक रेषा जाते.



O याच बिंदूतून जाणाऱ्या आणखी किती रेषा काढता येतात, ते पाहू.



O या एका बिंदूतून रेषा M, रेषा N, रेषा K, --- अशा असंख्य रेषा काढता येतात.

एका बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा काढता येतात.

दोन बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषा

सोबतच्या आकृतीत A व B हे दोन भिन्न बिंदू असून या दोन बिंदूंतून रेषा AB जाते.

कोणत्याही दोन भिन्न बिंदूंतून एक आणि एकच रेषा जाते.

येथे एक म्हणजे कमीत कमी एक आणि एकच म्हणजे जास्तीत जास्त एक हे लक्षात घ्या.

एकरेषीय बिंदू व नैकरेषीय बिंदू

बाजूच्या आकृतीत L, M, N हे तीन बिंदू आहेत. या तिन्ही

बिंदूंतून फक्त एकच रेषा काढता येते, म्हणजेच L, M, N हे एकरेषीय बिंदू आहेत.

तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त बिंदूंतून एकच रेषा काढता येत असेल, तर त्या बिंदूंना एकरेषीय बिंदू म्हणतात.

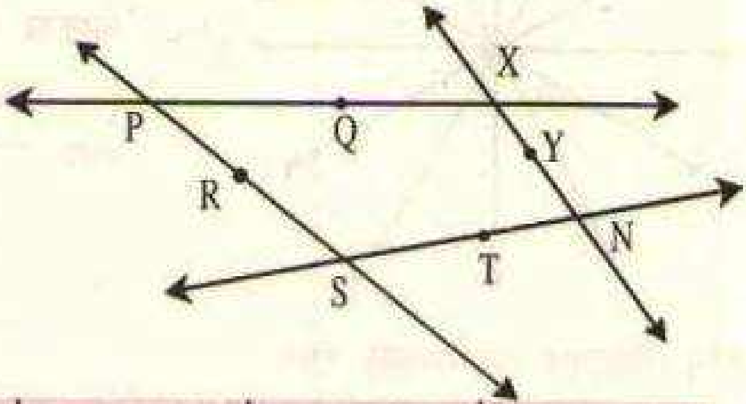
बाजूच्या आकृतीत X, Y, Z हे तीन बिंदू आहेत. या तिन्ही बिंदूंतून जाणारी एकही रेषा काढता येत नाही.

येथे X, Y, Z हे नैकरेषीय बिंदू आहेत.

जेव्हा तीन किंवा अधिक बिंदूंतून जाणारी एकही रेषा काढता येत नाही, तेव्हा त्या बिंदूंना नैकरेषीय बिंदू म्हणतात.

शेजारील आकृतीत I, J, K, L, M हे बिंदू एकरेषीय आहेत; परंतु I, J आणि O हे मात्र एकरेषीय बिंदू नाहीत, म्हणजेच ते नैकरेषीय आहेत.

सोबतच्या आकृतीतील काही एकरेषीय व काही नैकरेषीय बिंदू खालील तक्त्यात दाखवले आहेत. ते अभ्यासा.

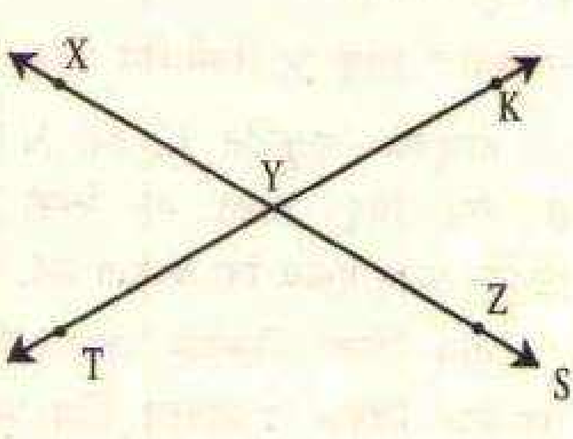


एकरेषीय बिंदू	X, Y, N	P, Q, X	S, T, N	P, R, S
नैकरेषीय बिंदू	X, Y, R	P, Q, T	P, R, Y	R, S, T

उदाहरणसंग्रह 14

1. आकृतीचे निरीक्षण करून तक्ता पूर्ण करा.

बिंदूंची नावे	एकरेषीय बिंदू	नैकरेषीय बिंदू
K, Y, T	✓	
X, Y, T		✓
T, Y, Z		
X, Y, Z		

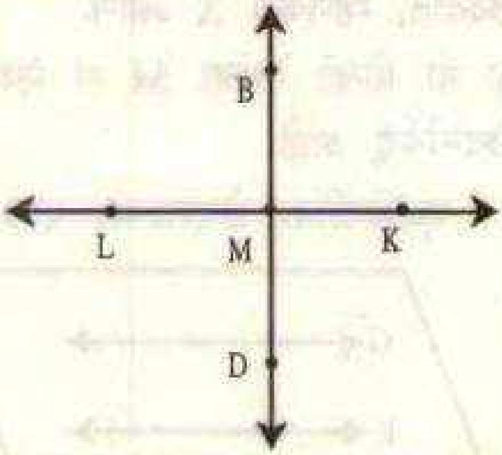


2. T हा एक बिंदू घ्या. या बिंदूतून किती रेषा काढता येतील ?

3. शेजारील आकृतीत P, Q, R हे तीन बिंदू आहेत. प्रत्येक दोन बिंदूतून जाणारी रेषा काढा. अशा किती रेषा काढता येतील ?

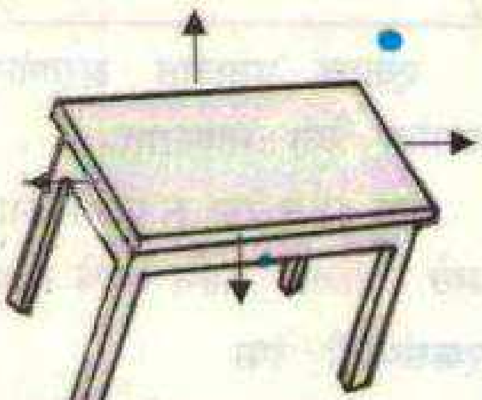
4. S व R हे दोन बिंदू घ्या. या दोन बिंदूंना सामावणाऱ्या (बिंदूतून जाणाऱ्या) किती रेषा काढता येतील ?

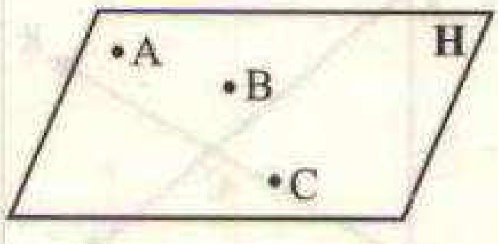
5. बाजूची आकृती पाहा. त्यामधील एकरेषीय व नैकरेषीय (तीन - तीन) बिंदूंचे गट लिहा.



प्रतल

शेजारील चित्रात टेबलाचा पृष्ठभाग छायांकित करून दाखवला आहे. कल्पना करा, की या टेबलाचा पृष्ठभाग सर्व दिशांनी आपण वाढवत गेलो, तर तो मोठा होत जाईल. सर्व दिशांनी अमर्याद असलेला सपाट पृष्ठभाग म्हणजेच प्रतल होय.



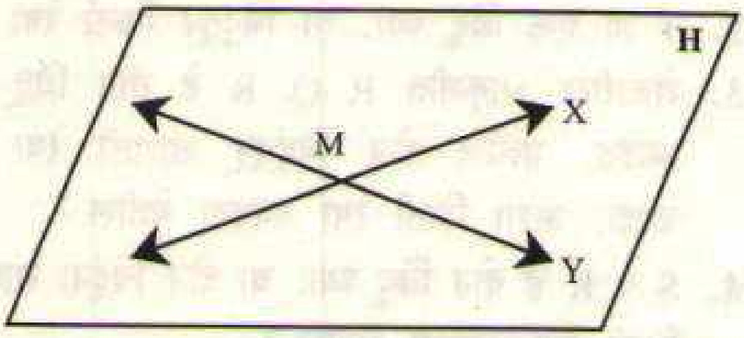


जरी प्रतल हे अमर्याद असले, तरी सोईसाठी ते सोबत दिलेल्या आकृतीप्रमाणे दाखवतात. प्रत्येक वेळी प्रतल अमर्याद आहे हे दाखवण्यासाठी बाण दाखवले जात नाहीत. प्रतलाचे नाव एका अक्षराने दाखवतात. जसे, प्रतल H.

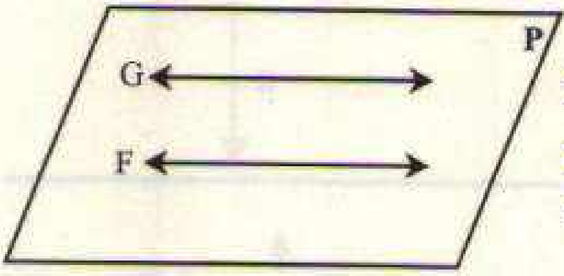
तीन नैकरेषीय बिंदूतून एकही रेषा जात नाही; परंतु तीन नैकरेषीय बिंदूतून (जसे आकृतीत बिंदू A, B, C) एक व एकच प्रतल जाते.

समांतर रेषा

सोबतच्या आकृतीतील H या प्रतलातील रेषा X आणि रेषा Y एकमेकींना 'M' या एकाच बिंदूत छेदतात, म्हणजेच X आणि Y या दोन्ही रेषांचा M हा एकच सामाईक बिंदू आहे. M बिंदू या रेषांचा **छेदनबिंदू** आहे.



एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन रेषांचा छेदनबिंदू एक व एकच असतो.



सोबतच्या आकृतीत P या प्रतलातील रेषा G व रेषा F एकमेकींना छेदत नाहीत, म्हणजेच त्यांचा एकही बिंदू सामाईक नाही. या रेषा समांतर रेषा आहेत.

एकाच प्रतलात असणाऱ्या पण एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

रेषा G व रेषा F एकमेकींना समांतर आहेत, हेच चिन्हात 'रेषा G ॥ रेषा F' असे लिहितात आणि त्याचे वाचन 'रेषा G समांतर रेषा F' असे करतात.

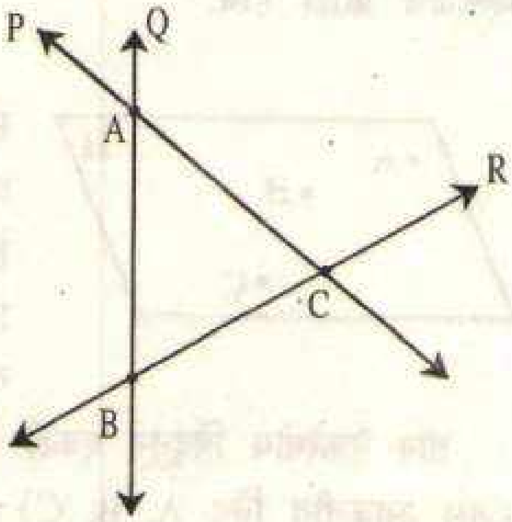
एकसंपाती रेषा

बाजूच्या आकृतीत रेषा P व रेषा Q यांचा छेदनबिंदू A आहे.

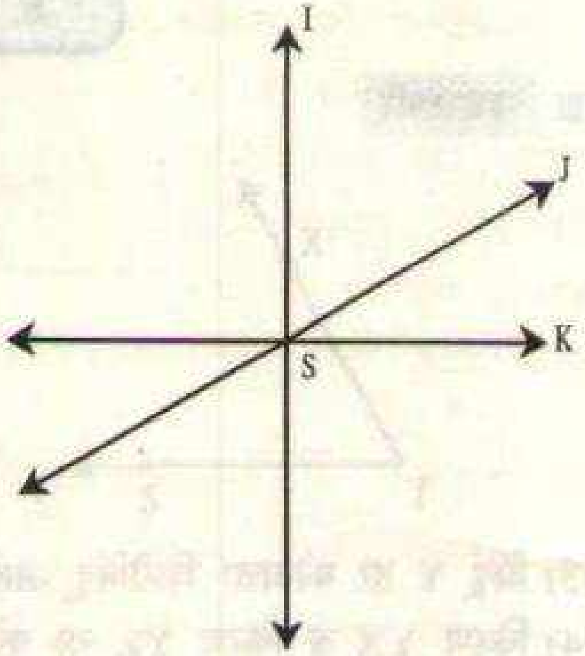
रेषा Q व रेषा R यांचा छेदनबिंदू B आहे.

रेषा R व रेषा P यांचा छेदनबिंदू C आहे.

येथे रेषा P, Q आणि R यांपैकी दोन-दोन रेषा विचारात घेतल्यास त्यांचे छेदनबिंदू वेगवेगळे आहेत.



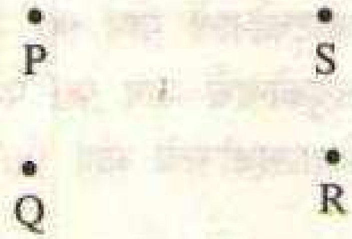
शेजारील आकृतीत रेषा I, रेषा J व रेषा K या तिन्ही रेषा S या एकाच बिंदूत छेदतात. रेषा I, रेषा J व रेषा K या एकसंपाती रेषा आहेत. त्यांचा छेदनबिंदू 'S' हा संपात बिंदू आहे.



एकाच बिंदूत छेदणाऱ्या तीन किंवा अधिक रेषांना एकसंपाती रेषा म्हणतात व त्यांच्या छेदनबिंदूला संपात बिंदू म्हणतात.

उदाहरणसंग्रह 15

1. शेजारील आकृतीत P, Q, R व S हे चार बिंदू दिलेले आहेत. यांपैकी दोन-दोन बिंदूंना सामावणाऱ्या रेषा काढा व प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) Q हा संपात बिंदू असणाऱ्या रेषांची नावे लिहा.

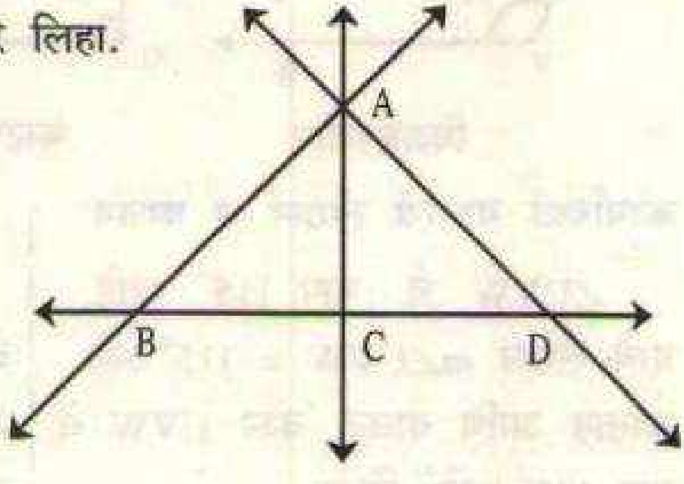
(2) रेषा PS, रेषा SR, रेषा QS व रेषा PR यांपैकी एकसंपाती रेषा कोणत्या ?

2. आकृती पाहा व प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) एकरेषीय बिंदूंची नावे लिहा.

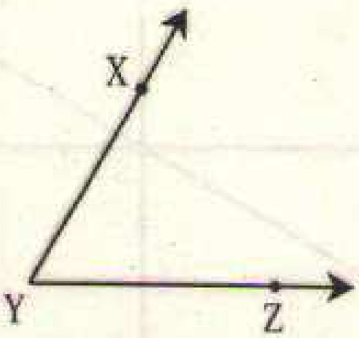
(2) नैकरेषीय बिंदूंचे सर्व गट लिहा.

(3) एकसंपाती रेषा आणि त्यांचा संपात बिंदू लिहा.



5. कोन

उजळणी



बाजूची आकृती पाहा.

(1) किरण YX व किरण YZ या दोन किरणांचा Y हा सामाईक आरंभबिंदू आहे.

(2) या दोन किरणांपासून कोन XYZ तयार झालेला आहे.

(3) बिंदू Y हा कोनाचा शिरोबिंदू आहे.

(4) किरण YX व किरण YZ या कोनाच्या भुजा आहेत.

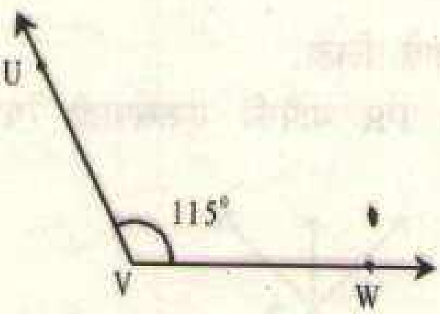
(5) XYZ हा कोन, चिन्ह वापरून $\angle XYZ$ किंवा $\angle ZYX$ असा लिहितात.

(6) काटकोन, लघुकोन व विशालकोन हे कोनांचे तीन प्रकार आहेत.

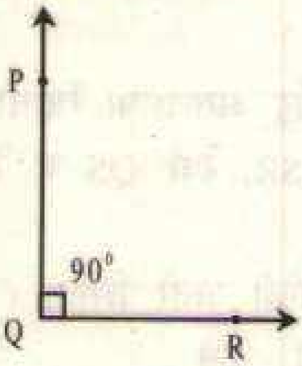
(7) काटकोनाचे माप 90° असते.

(8) लघुकोनाचे माप 90° पेक्षा कमी असते.

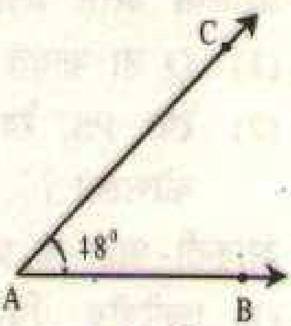
(9) विशालकोनाचे माप 90° पेक्षा जास्त असते.



विशालकोन



काटकोन



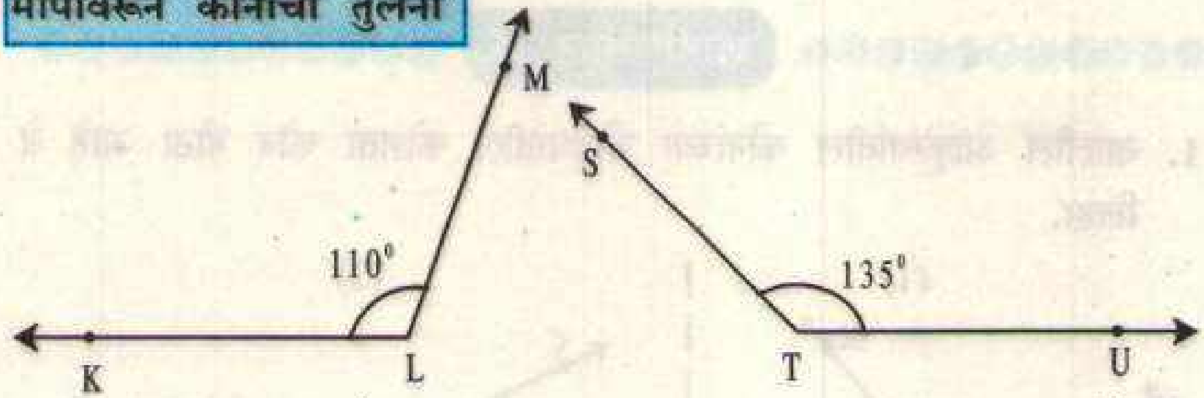
लघुकोन

कोनांच्या मापांचे लेखन व वाचन

$\angle UVW$ चे माप 115° आहे. याचे लेखन $m\angle UVW = 115^\circ$ असे करतात आणि वाचन 'कोन UVW चे माप 115° आहे' किंवा माप कोन UVW = 115° असे करतात.

$\angle BAC$ चे माप 48° आहे. याचे लेखन $m\angle BAC = 48^\circ$ असे करतात. आणि वाचन 'कोन BAC चे माप 48° आहे' असे करतात किंवा माप कोन BAC = 48° असे करतात.

मापांवरून कोनांची तुलना



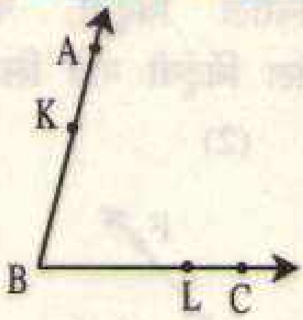
$m\angle KLM = 110^\circ$ $m\angle STU = 135^\circ$

$\angle STU$ चे माप $\angle KLM$ च्या मापापेक्षा जास्त आहे.

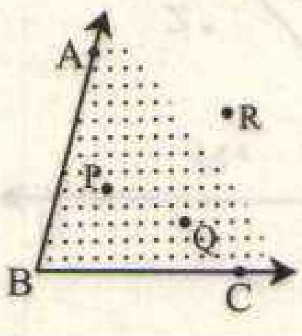
दोन कोनांपैकी ज्याचे माप जास्त असते तो दुसऱ्या कोनापेक्षा मोठा असतो.

$\therefore$ $\angle STU$ हा $\angle KLM$ पेक्षा मोठा आहे.

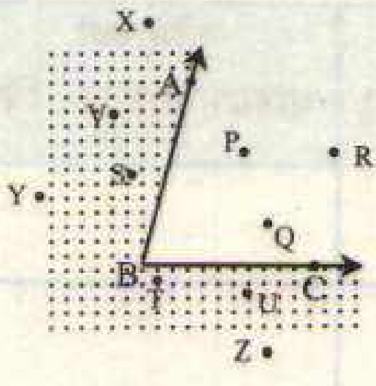
कोनाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग



• बाजूच्या आकृतीत बिंदू A, बिंदू B, बिंदू C, बिंदू K व बिंदू L हे $\angle ABC$ वर आहेत.



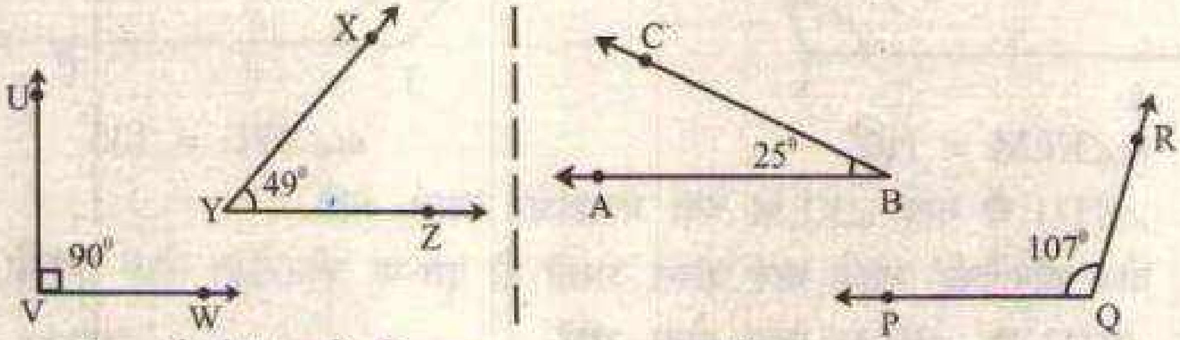
• बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ च्या अंतर्भागाचा काही भाग ठिपक्यांनी दाखवला आहे. किरण BA व किरण BC अमर्याद आहेत, म्हणून $\angle ABC$ चा अंतर्भागही अमर्याद आहे. बिंदू P, Q व R हे $\angle ABC$ च्या अंतर्भागात आहेत.



• बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ च्या बाह्यभागाचा काही भाग ठिपक्यांनी दाखवला आहे. कोनाचा बाह्यभागही अमर्याद असतो, हे लक्षात घ्या. बिंदू S, T, U, V, X, Y व Z हे $\angle ABC$ च्या बाह्यभागातील बिंदू आहेत.

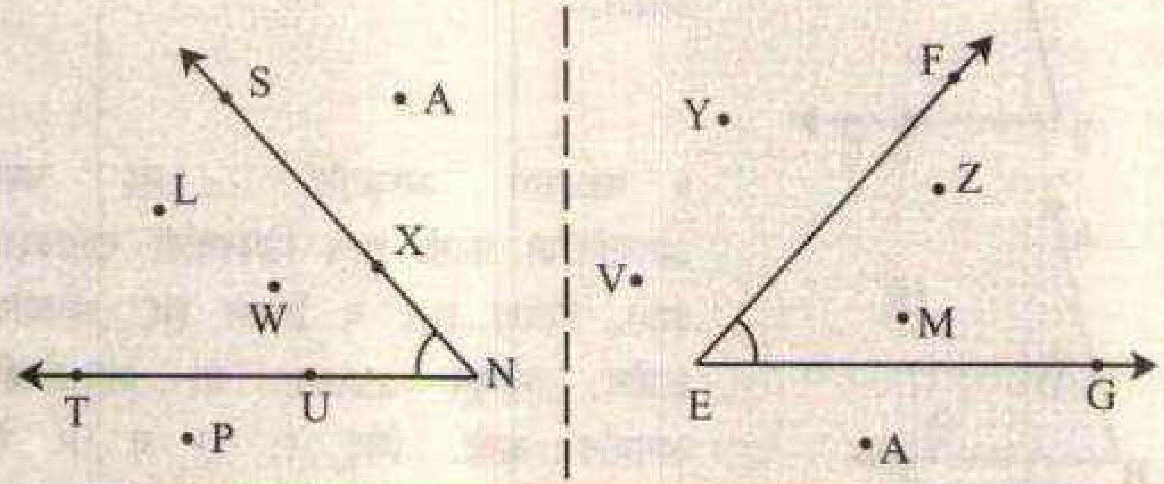
1. खालील आकृत्यांतील कोनांच्या जोड्यांतील कोणता कोन मोठा आहे ते लिहा.

(1) (2)



2. वरील कोनांची मापे चिन्हाचा वापर करून लिहा.
3. पुढे दिलेल्या आकृत्यांच्या संदर्भात कोनावरील बिंदूंची, कोनांच्या अंतर्भागातील बिंदूंची व कोनांच्या बाह्यभागातील बिंदूंची नावे लिहा.

(1) (2)

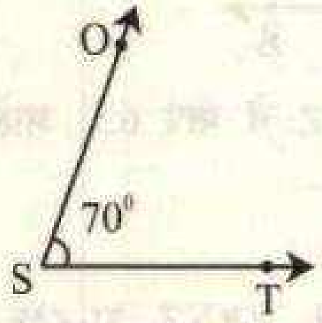


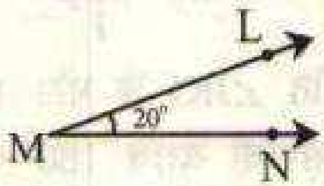
आकृती	कोनावरील बिंदू	कोनाच्या अंतर्भागातील बिंदू	कोनाच्या बाह्यभागातील बिंदू
आ. (1)			
आ. (2)			

6. कोनांच्या जोड्या

भूमितीचा अभ्यास करताना कोनांच्या काही विशिष्ट जोड्यांचा वापर नेहमी करावा लागतो. कोनांच्या अशा काही जोड्यांचा अभ्यास करू.

कोटिकोनांची जोडी

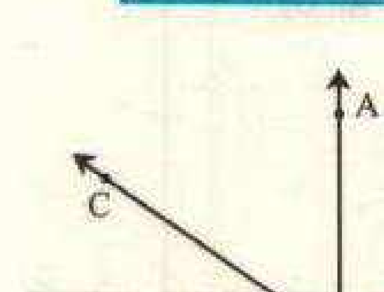




वरील आकृतीत, $\angle OST$ चे माप 70° व $\angle LMN$ चे माप 20° आहे. $\angle OST$ व $\angle LMN$ या दोन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 90° येते.

येथे $\angle OST$ व $\angle LMN$ ही कोटिकोनांची जोडी आहे. $\angle OST$ हा $\angle LMN$ चा कोटिकोन आहे, तसेच $\angle LMN$ हा $\angle OST$ चा कोटिकोन आहे.

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90° असते, त्यांना परस्परांचे कोटिकोन म्हणतात. त्या कोनांच्या जोडीला कोटिकोनांची जोडी असेही म्हणतात.



बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ व $\angle CBD$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

दोन कोटिकोनांपैकी एकाचे माप दिलेले असेल, तर दुसऱ्या कोनाचे माप खालील पद्धतीने काढतात.

कोटिकोनाचे माप = 90° − दिलेल्या कोनाचे माप

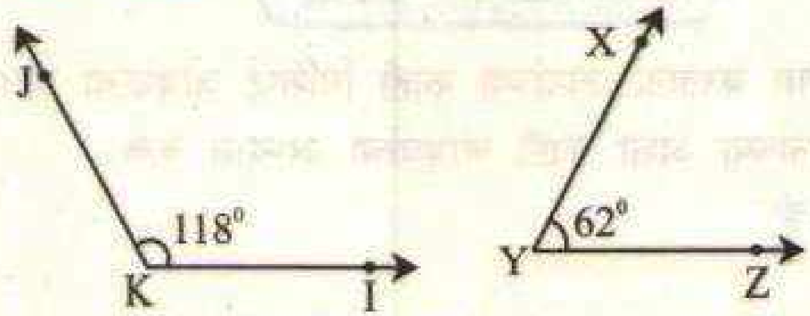
उदा. एका कोनाचे माप 35° आहे, तर त्याच्या कोटिकोनाचे माप किती ?

कोटिकोनांच्या मापांची बेरीज 90° असते.

त्यातील एका कोनाचे माप 35° आहे,

म्हणून त्याच्या कोटिकोनाचे माप = 90 − 35 = 55° आहे.

पूरककोनांची जोडी

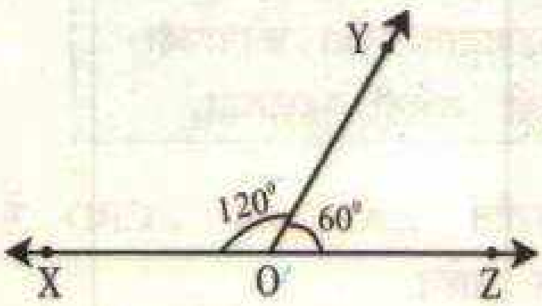


वरील आकृतीत $\angle JKI$ चे माप 118° व $\angle XYZ$ चे माप 62° आहे. या दोन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° येते.

$\angle JKI$ व $\angle XYZ$ ही पूरककोनांची जोडी आहे.

$\angle JKI$ हा $\angle XYZ$ चा पूरककोन आहे. तसेच $\angle XYZ$ हा $\angle JKI$ चा पूरककोन आहे. $\angle JKI$ व $\angle XYZ$ हे परस्परांचे पूरककोन आहेत.

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, त्या दोन कोनांना परस्परांचे पूरककोन असे म्हणतात. त्या कोनांच्या जोडीला पूरककोनांची जोडी असेही म्हणतात.



आकृतीत $\angle XOY$ व $\angle YOZ$ हे परस्परांचे पूरककोन आहेत.

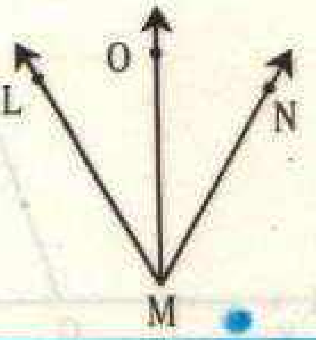
दोन परस्पर पूरककोनांपैकी एकाचे माप दिले असेल, तर दुसऱ्या कोनाचे माप खालील पद्धतीने काढतात.

पूरककोनाचे माप = 180° – दिलेल्या कोनाचे माप

उदा. एका कोनाचे माप 105° असल्यास त्याच्या पूरककोनाचे माप काढा.
पूरककोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.
त्यांतील एका कोनाचे माप 105° आहे,
म्हणून त्याच्या पूरककोनाचे माप $= 180 - 105 = 75^\circ$

संलग्न कोनांची जोडी

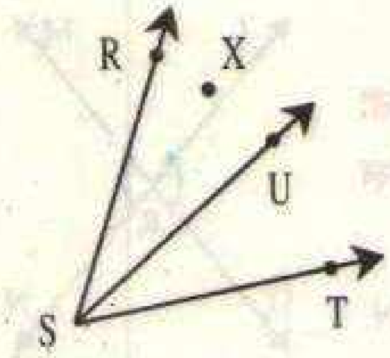
बाजूच्या आकृतीत, ∠LMO व ∠OMN या दोन्ही कोनांची MO ही सामाईक भुजा आहे. ∠LMO व ∠OMN यांचे अंतर्भाग वेगवेगळे आहेत. येथे ∠LMO व ∠OMN ही **संलग्न कोनांची जोडी** किंवा **लगतच्या कोनांची जोडी** आहे.



ज्या दोन कोनांची एक भुजा सामाईक असते आणि त्यांचे अंतर्भाग वेगवेगळे असतात, त्या कोनांच्या जोडीला संलग्न कोनांची जोडी किंवा लगतच्या कोनांची जोडी म्हणतात.

(1) बाजूच्या आकृतीत ∠ABC व ∠FED मध्ये एकही भुजा सामाईक नाही, म्हणून ∠ABC व ∠FED हे संलग्न कोन किंवा लगतचे कोन नाहीत.

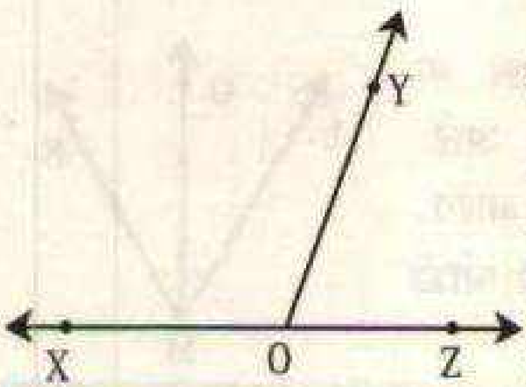
(2) ∠RST व ∠RSU यांची भुजा SR सामाईक आहे.



बाजूच्या आकृतीत X हा बिंदू ∠RST च्या अंतर्भागात आहे, तसाच तो ∠RSU च्याही अंतर्भागात आहे, म्हणजे ∠RST व ∠RSU यांचे अंतर्भाग वेगवेगळे नाहीत; म्हणून ∠RST व ∠RSU ही संलग्न कोनांची जोडी नाही. तसेच ∠RST व ∠UST हेही संलग्न कोन नाहीत.

रेषीय जोडीतील कोन

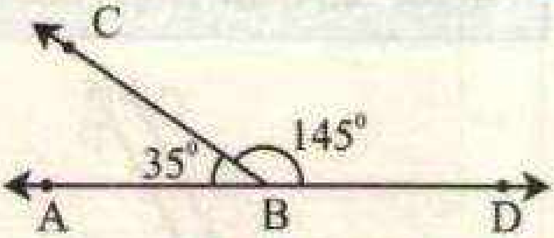
विरुद्ध किरण : सोबतच्या आकृतीत बिंदू P, Q, R एकरेषीय असून, बिंदू Q हा P व R यांच्या दरम्यान आहे. अशा वेळी किरण QP व किरण QR यांना **विरुद्ध किरण** म्हणतात.



शेजारील आकृतीत, $\angle XOY$ व $\angle YOZ$ हे संलग्न कोन आहेत. या दोन्ही कोनांची भुजा OY सामाईक आहे. $\angle XOY$ ची भुजा OX आणि $\angle YOZ$ ची भुजा OZ या असामाईक भुजा परस्पर विरुद्ध किरण आहेत. $\angle XOY$ व $\angle YOZ$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

ज्या संलग्न कोनांच्या असामाईक भुजा विरुद्ध किरण असतात, त्या संलग्न कोनांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात.

सोबतच्या आकृतीत $\angle ABC$ व $\angle CBD$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत. या कोनांची मापे मोजून लिहिली आहेत त्यांची बेरीज 180° येते.

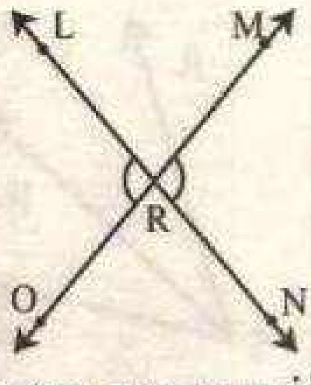


रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, म्हणजेच ते परस्पर पूरक असतात.

विरुद्ध कोनांची जोडी

शेजारील आकृतीत, रेषा LN व रेषा MO यांचा R हा छेदनबिंदू आहे. आकृतीतील कोनांच्या पुढील जोड्यांचे निरीक्षण करा.

(1) $\angle LRO$ व $\angle MRN$ (2) $\angle LRM$ व $\angle ORN$.



येथे $\angle LRO$ व $\angle MRN$ या कोनांच्या भुजा RL व भुजा RN परस्परांचे विरुद्ध किरण आहेत. तसेच याच कोनांच्या भुजा RO व भुजा RM हेदेखील विरुद्ध किरण आहेत.

येथे $\angle LRO$ व $\angle MRN$ ही विरुद्ध कोनांची जोडी आहे. त्याचप्रमाणे $\angle LRM$ व $\angle ORN$ हीदेखील विरुद्ध कोनांची जोडी आहे.

वरील आकृतीतील विरुद्ध कोनांच्या कोणत्याही जोडीतील कोनांची मापे मोजा आणि ही मापे समान आहेत हे पडताळून पाहा.

विरुद्ध कोनांच्या जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.

उदाहरणसंग्रह 17

1. काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्या कोनांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.

(1) 37° (2) 48° (3) 55° (4) 79° (5) 68°
(6) 10° (7) 25° (8) 40° (9) 89° (10) 17°

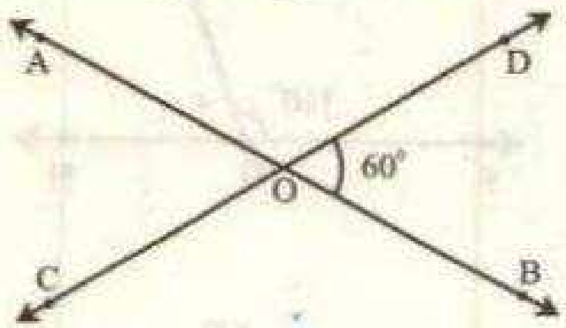
2. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्या कोनांच्या पूरककोनांची मापे लिहा.

(1) 65° (2) 24°. (3) 90° (4) 47° (5) 79°
(6) 58° (7) 154° (8) 125° (9) 140° (10) 165°

3. खालील कोनांच्या जोड्यांतील कोणत्या जोड्या कोटिकोनांच्या आहेत आणि कोणत्या पूरककोनांच्या आहेत ते लिहा.

(1) 69°, 111° (2) 26°, 64° (3) 90°, 90° (4) 50°, 40°
(5) 163°, 17° (6) 45°, 45° (7) 168°, 12° (8) 35°, 55°

4. पुढील आकृती पाहून खालील कोनांची मापे लिहा.



(1) $m\angle AOC$ = ----------
(2) $m\angle AOD$ = ----------
(3) $m\angle BOC$ = ----------

5. वरील प्र. 4 मधील आकृतीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $\angle BOC$ चा विरुद्ध कोन लिहा.
(2) $\angle BOC$ च्या विरुद्ध कोनाचे माप लिहा.
(3) $\angle AOD$ चे रेषीय जोडीतील कोन लिहा.
(4) $\angle AOD$ च्या रेषीय जोडीतील कोनाचे माप लिहा.
(5) $\angle AOC$ च्या कोटिकोनाचे माप किती ?
(6) $\angle AOD$ च्या पूरक कोनाचे माप किती ?
(7) $\angle BOD$ च्या संलग्न कोनांची नावे लिहा.

6. खालील सारणी पूर्ण करा.

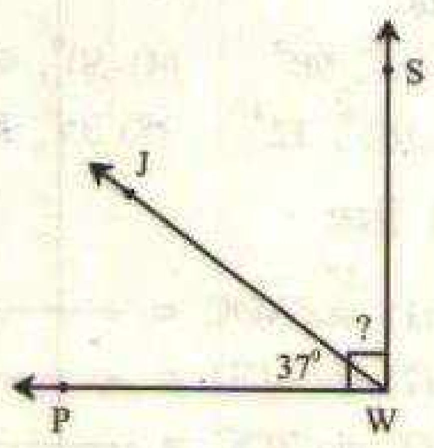
दिलेला कोन	60°	45°	78°	10°	25°	80°	37°
कोटिकोन							

7. खालील सारणी पूर्ण करा.

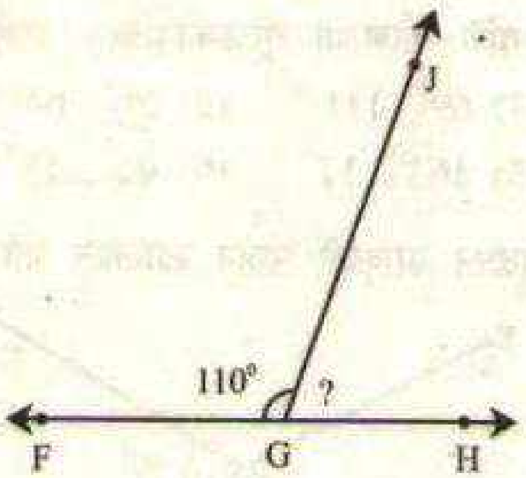
दिलेला कोन	32°	90°	110°	137°	165°	129°	65°
पूरककोन							

8. खालील प्रत्येक आकृतीतील '?' चिन्हाने दाखवलेल्या कोनाचे माप लिहा.

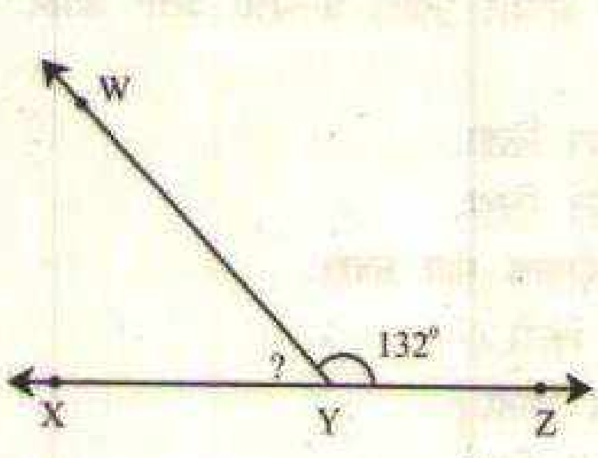
(1)



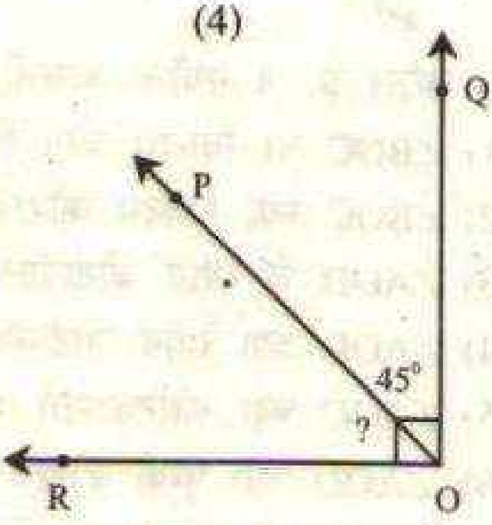
(2)



(3)

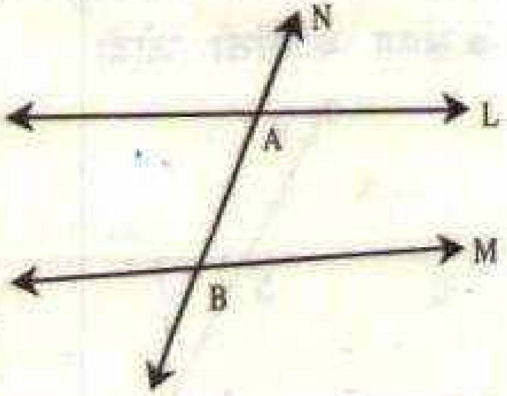


(4)



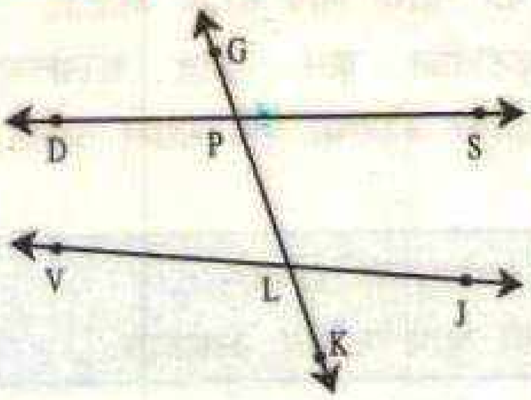
छेदिका

बाजूच्या आकृतीत रेषा L व रेषा M यांना N ही रेषा, अनुक्रमे A व B बिंदूत छेदते. याप्रमाणे दोन रेषांना वेगवेगळ्या बिंदूत छेदणारी रेषा **छेदिका** असते.



येथे रेषा N ही, रेषा L व रेषा M यांची छेदिका आहे.

छेदिकेमुळे होणारे कोन



सोबतची आकृती पाहा. छेदिकेमुळे P या छेदनबिंदूपाशी चार व L या छेदनबिंदूपाशी चार असे एकूण 8 कोन तयार झालेले दिसतात. यांपैकी कोनांच्या काही जोड्यांचा अभ्यास करू.

- **संगत कोनांची जोडी**

वरील आकृतीत ∠GPS व ∠PLJ ही संगत कोनांची एक जोडी आहे. अशा संगत कोनांच्या आणखी तीन जोड्या मिळतात.

∠SPL व ∠JLK , ∠DPG व ∠PLV , ∠DPL व ∠VLK

- **आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी**

वरील आकृतीत ∠SPL व ∠PLV ही आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी आहे. तसेच ∠DPL व ∠PLJ ही आंतरव्युत्क्रम कोनांची दुसरी जोडी मिळते.

एका जोडीतील आंतरव्युत्क्रम कोन छेदिकेच्या विरुद्ध अंगास असतात.

आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोडीला 'व्युत्क्रम कोनांची जोडी' असेही म्हणतात.

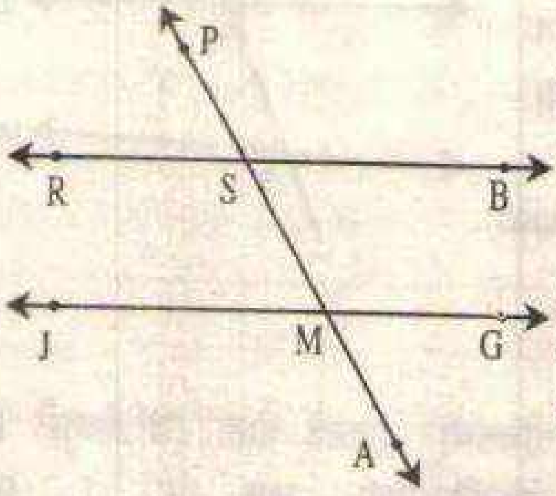
- **आंतरकोनांची जोडी**

∠DPL व ∠PLV ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या आंतरकोनांची एक जोडी आहे. तसेच ∠SPL व ∠PLJ ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारी आंतरकोनांची दुसरी जोडी आहे.

छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या दोन आंतरकोनांना 'आंतरकोनांची जोडी' असे म्हणतात.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या कोनांच्या जोड्यांचे गुणधर्म

• संगत कोनांची जोडी



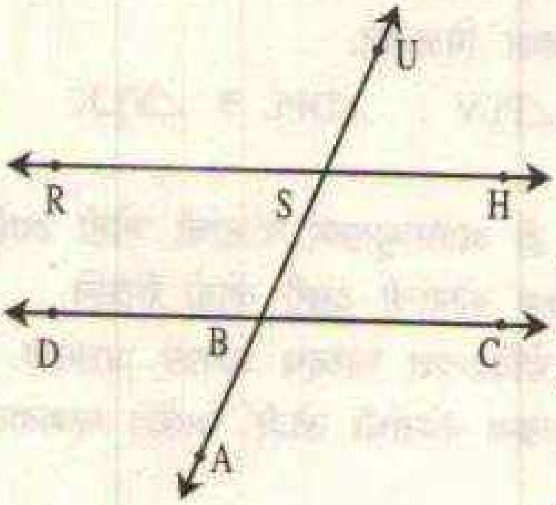
सोबतची आकृती पाहा. रेषा RB व रेषा JG या दोन समांतर रेषा आहेत. रेषा PA ही त्यांची छेदिका आहे.

∠PSB व ∠SMG ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या संगत कोनांची जोडी आहे. यांची मापे मोजा. असे दिसून येईल, की त्यांची मापे समान आहेत.

आकृतीतील इतर संगत कोनांच्या जोड्यांतील कोनांची मापे मोजून प्रत्येक जोडीतील कोनांची मापे समान आहेत, याचा पडताळा घ्या.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या संगत कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.

• व्युत्क्रम कोनांची जोडी



शेजारील आकृती पाहा.

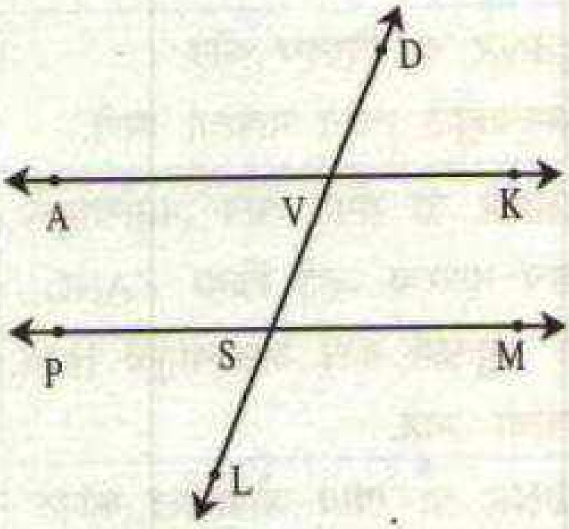
रेषा RH ∥ रेषा DC व रेषा UA त्यांची छेदिका आहे.

∠RSB व ∠SBC ही व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी आहे. या कोनांची मापे मोजू. असे दिसून येईल, की ∠RSB व ∠SBC यांची मापे समान आहेत.

आकृतीतील व्युत्क्रम कोनांच्या दुसऱ्या जोडीतील कोनांची मापे मोजून ती समान असल्याचा पडताळा घ्या.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.

• आंतरकोनांची जोडी

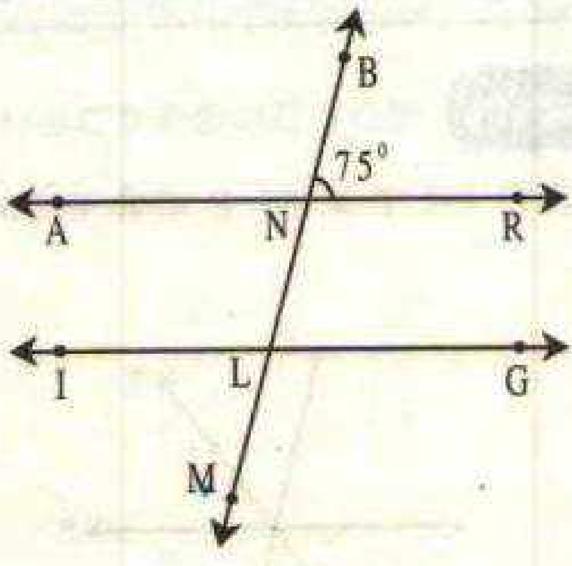


शेजारील आकृती पाहा.

रेषा AK ∥ रेषा PM व रेषा DL त्यांची छेदिका आहे. $\angle KVS$ व $\angle VSM$ ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारी आंतरकोनांची जोडी आहे. या आंतरकोनांची मापे मोजा. असे दिसून येईल, की $\angle KVS$ व $\angle VSM$ यांच्या मापांची बेरीज 180° येते.

तसेच वरील आकृतीतील आंतरकोनांच्या दुसऱ्या जोडीतील कोनांची मापे मोजा व त्यांची बेरीज 180° येते, याचा पडताळा घ्या.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.



उदा. शेजारील आकृतीत,

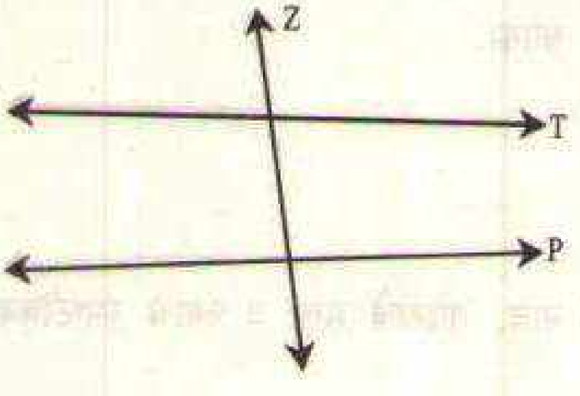
रेषा AR ∥ रेषा IG. रेषा BM त्यांची छेदिका आहे. $m\angle BNR = 75^\circ$ N व L हे छेदनबिंदू आहेत, तर $\angle ANL$, $\angle NLG$ व $\angle RNL$ ची मापे काढा.

पुढील पानावरील सारणीत कोनाचे नाव, कोनाचे माप व त्याचे स्पष्टीकरण दिले आहे ते अभ्यासा.

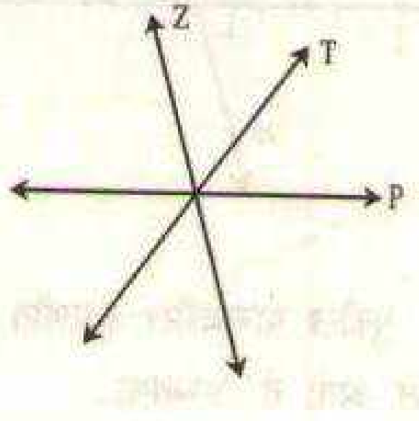
कोनाचे नाव	कोनाचे माप	स्पष्टीकरण
$\angle BNR$	75°	दिलेली माहिती
$\angle ANL$	75°	$\angle BNR$ चा विरुद्ध कोन असल्यामुळे त्याच मापाचा आहे.
$\angle NLG$	75°	$\angle BNR$ चा संगत कोन असल्यामुळे त्याच मापाचा आहे किंवा $\angle ANL$ चा व्युत्क्रम कोन असल्यामुळे त्याच मापाचा आहे.
$\angle RNL$	105°	$\angle BNR$ चा रेषीय जोडीतील कोन असल्यामुळे त्याचे माप $180 - 75 = 105^\circ$ आहे किंवा $\angle NLG$ व $\angle RNL$ हे आंतरकोनांच्या जोडीतील कोन असल्यामुळे $\angle RNL$ चे माप $180 - 75 = 105^\circ$ आहे.

उदाहरणसंग्रह 18

1. खालीलपैकी कोणत्या आकृतीत रेषा Z ही रेषा T व रेषा P यांची छेदिका आहे ? कारण लिहा.

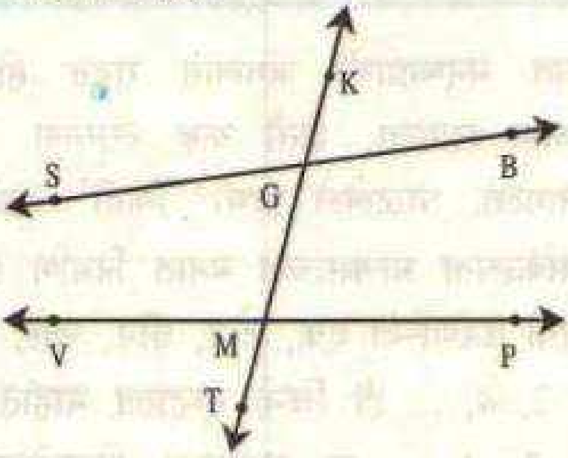


आ. (1)

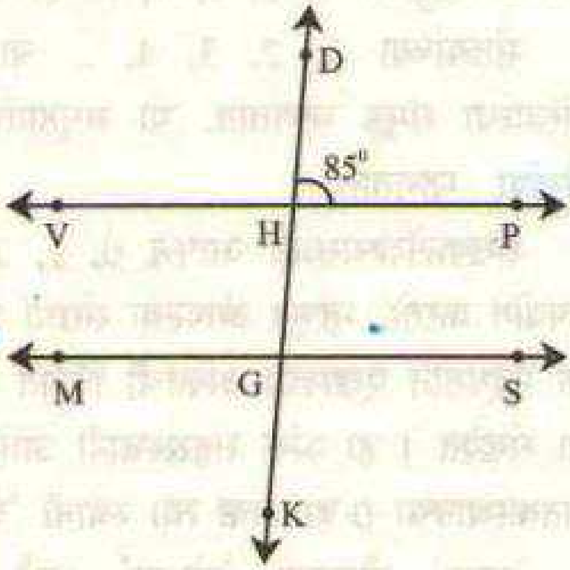


आ. (2)

2. सोबतची आकृती पाहा व त्यातील संगत कोन, व्युत्क्रम कोन, आंतरकोनांच्या जोड्या लिहा.

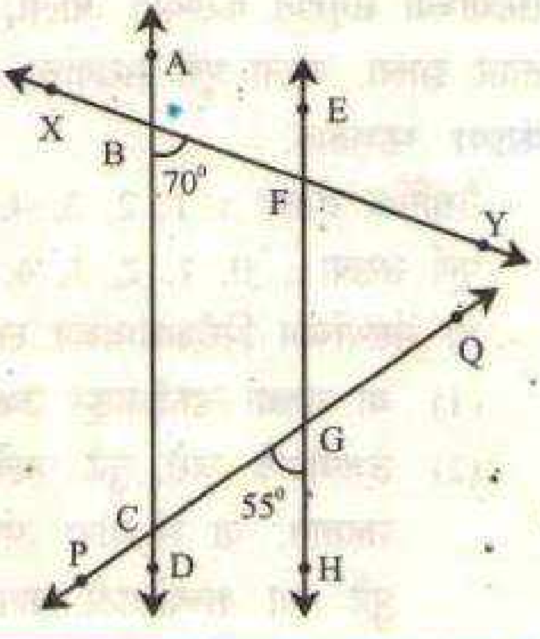


3. आकृतीत रेषा VP ∥ रेषा MS, रेषा DK त्यांची छेदिका आहे. $m\angle DHP = 85^\circ$ तर



(1) $m\angle MGK$ = ...
(2) $m\angle VHD$ =......
(3) $m\angle PHG$ =.......
(4) $m\angle HGS$ = ...

4. सोबतची आकृती पाहा.
रेषा AD ∥ रेषा EH रेषा XY व रेषा PQ त्यांच्या छेदिका आहेत.
$m\angle CBF = 70^\circ$, $m\angle CGH = 55^\circ$.
तर



(1) $m\angle EFB$ = ...
(2) $m\angle GFY$ = ...
(3) $m\angle BCG$ = ...

7. नैसर्गिक संख्या व पूर्ण संख्या

अतिप्राचीन काळात मनुष्यप्राणी जंगलात राहत होता. कालांतराने तो नदीकिनारी वास्तव्य करू लागला. शेती करू लागला. गाई, घोडे, शेळ्या इत्यादी प्राणी पाळू लागला. पाळलेले प्राणी 'किती' आहेत, हे समजण्याच्या गरजेतून 'संख्या' ही संकल्पना माणसाच्या मनात निर्माण झाली.

मोजण्यासाठी उपयोगी पडणाऱ्या एक, दोन, तीन, चार, ... या संख्या आणि त्यांची अनुक्रमे 1, 2, 3, 4, ... ही चिन्हे तुम्हाला माहीत आहेत.

संख्यांच्या 1, 2, 3, 4, ... या समूहाला मोजसंख्यांचा किंवा नैसर्गिक संख्यांचा समूह म्हणतात. या समूहातील संख्यांना **मोजसंख्या** किंवा **नैसर्गिक संख्या** म्हणतात.

संख्यालेखनासाठी आपण 0, 1, 2, ...,9 या दहा चिन्हांचा किंवा अंकांचा उपयोग करतो, म्हणून आपल्या संख्या लेखनपद्धतीला **दशमान पद्धत** म्हणतात. या पद्धतीत एखाद्या अंकाची किंमत त्याच्या स्थानावरून कळते. जसे, 41069 या संख्येत 1 हा अंक सहस्रस्थानी आहे, म्हणून या अंकाची किंमत 1000 आहे. शतकस्थानचा 0 हा अंक त्या स्थानी 'काहीही नाही' असे दर्शवतो.

'शून्य' हीसुद्धा 'संख्या' आहे, असे मानून तिचा समावेश नैसर्गिक संख्यांच्या समूहात करण्यात आला, त्यामुळे 0, 1, 2, 3, 4, ... हा नवा समूह तयार झाला. याला पूर्ण संख्यांचा समूह म्हणतात आणि यातील संख्यांना **पूर्ण संख्या** म्हणतात.

नैसर्गिक संख्या : 1, 2, 3, 4, 5, ...

पूर्ण संख्या : 0, 1, 2, 3, 4, ...

या संख्यांच्या निरीक्षणावरून लक्षात येते, की -

(1) या संख्या डावीकडून उजवीकडे क्रमाने मोठ्या होत जातात.

(2) उजवीकडे जसे पुढे जावे, तशा आणखी पुढच्या संख्या मिळतच राहतात. या संख्यांना अंत नसतो. ('...' हे चिन्ह 'आणि याप्रमाणे पुढे' या शब्दांसाठी वापरले जाते. त्यातून यापुढील संख्यांना अंत नसतो, असा अर्थ सूचित होतो.) त्यामुळे सर्वांत मोठी नैसर्गिक संख्या किंवा सर्वांत मोठी पूर्ण संख्या सांगता येत नाही.

(3) सर्वांत लहान नैसर्गिक संख्या 1 आहे.

(4) सर्वांत लहान पूर्ण संख्या 0 आहे.

बेरीज या क्रियेचे गुणधर्म

हे गुणधर्म समजण्यासाठी पुढील बेरजा करा. दिलेल्या उदाहरणातील संख्यांचे आणि येणाऱ्या उत्तरांचे निरीक्षण करा.

(1) $13 + 6$ (2) $6 + 13$ (3) $5,729 + 16,067$

(4) $16,067 + 5,729$ (5) $35,49,209 + 4,83,517$

(6) $96 + 0$ (7) $0 + 96$ (8) $2,93,13,875 + 0$

(9) $(5 + 9) + 7$ (10) $5 + (9 + 7)$

(11) $(548 + 120) + 680$ (12) $548 + (120 + 680)$

उत्तरांवरून बेरजेचे पुढील गुणधर्म तुमच्या लक्षात येतील.

(1) सर्व उदाहरणांतील संख्या या पूर्ण संख्या आहेत. त्यांची बेरीजसुद्धा पूर्ण संख्या आहे.

(2) प्रत्येक उदाहरणातील संख्यांचा क्रम बदलला, तरी बेरीज तीच येते. (उदा. 1 व 2, 3 व 4)

(3) एखाद्या संख्येत शून्य मिळवले, (किंवा शून्यात एखादी संख्या मिळवली) तरी बेरीज त्या संख्येएवढीच येते. (उदा. 6, 7, 8)

(4) तीन पूर्ण संख्यांची बेरीज करताना पहिली बेरीज आधी केली किंवा दुसरी बेरीज आधी केली तरी उत्तर बदलत नाही. (उदा. 9 व 10, 11 व 12)

संख्यांसाठी अक्षरे वापरून हेच गुणधर्म पुढे दिल्याप्रमाणे लिहिता येतात.

a, b आणि c या पूर्ण संख्या असतील, तर

(1) $(a + b)$ हीसुद्धा पूर्ण संख्या असते.

(2) $(a + b) = (b + a)$

(3) $a + 0 = a$ तसेच $0 + a = a$

(4) $(a + b) + c = a + (b + c)$

तीनपेक्षा जास्त संख्यांनाही हा गुणधर्म लागू पडतो, हे तुम्ही उदाहरणांनी पडताळून पाहा.

• गुणाकार या क्रियेचे गुणधर्म

पुढील उदाहरणे सोडवा. उदाहरणांचे आणि उत्तरांचे निरीक्षण करून काही गुणधर्म तुम्हांला समजतील.

(1) 8×3 (2) 3×8 (3) 16×135 (4) 135×16
(5) 14×1 (6) 1×14 (7) $5,01,643 \times 1$ (8) 0×4
(9) 325×0 (10) $40,15,318 \times 0$ (11) $(6 \times 3) \times 2$
(12) $6 \times (3 \times 2)$ (13) $19 \times (24 \times 5)$ (14) $(19 \times 24) \times 5$

या उदाहरणांच्या उत्तरांवरून पुढील गुणधर्म लक्षात येतात.

a , b आणि c या कोणत्याही पूर्ण संख्या असतील, तर

(1) $a \times b$ हीसुद्धा पूर्ण संख्या असते.

(2) $a \times b = b \times a$ (उदा. 1 व 2, 3 व 4, 5 व 6)

(3) $a \times 1 = 1 \times a = a$ (उदा. 5, 6, 7)

(4) $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (उदा. 8, 9, 10)

(5) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (उदा. 11 व 12, 13 व 14)

• बेरीज व गुणाकार यांचा संयुक्त गुणधर्म

हा गुणधर्म समजण्यासाठी पुढील उदाहरण दोन रीतींनी सोडवून दाखवले आहे, ते अभ्यासा.

उदा. एका वर्गातील 23 मुले आणि 28 मुली सहलीला जाणार आहेत. सहलीची वर्गणी प्रत्येकी 50 रु. आहे. तर एकूण किती वर्गणी जमा झाली ?

रीत 1	रीत 2
मुलामुलींची एकूण संख्या (23 + 28)	मुलांची वर्गणी 50×23 रु.
∴ एकूण वर्गणी = 50 (23 + 28)	मुलींची वर्गणी 50×28 रु.
= 50×51	∴ एकूण वर्गणी
= 2550 रु.	$50 \times 23 + 50 \times 28$
	= 1150 + 1400
	= 2550 रु.

उदाहरणाच्या रीतींवरून असे दिसते, की

$50\ (23 + 28) = 50 \times 23 + 50 \times 28$

याप्रमाणेच पुढील उदाहरणांत किमती समान असतात, याचा पडताळा घ्या.

(1) $4\ (9 + 6)$ आणि $4 \times 9 + 4 \times 6$

(2) $12 \times 5 + 12 \times 15$ आणि $12\ (5 + 15)$

या उदाहरणांमधून असा गुणधर्म दिसतो, की a, b, c **या कोणत्याही पूर्ण संख्या असतील तर –**

$$a\ (b + c) = a \times b + a \times c \text{ किंवा } a \times b + a \times c = a\ (b + c)$$

• बेरीज व गुणाकार यांच्या गुणधर्मांचा उपयोग

बऱ्याच वेळा आकडेमोड सोपी करण्यासाठी बेरीज व गुणाकाराच्या गुणधर्मांचा उपयोग कसा होतो, हे पुढील उदाहरणांवरून अभ्यासा.

उदा. (1) बेरीज करा : $1749 + 2568 + 3132$

$1749 + 2568 + 3132$ $= 1749 + (2568 + 3132)$ $= 1749 + 5700$ $= 7449$	दुसऱ्या व तिसऱ्या संख्यांतील दशक व एककस्थानी असणाऱ्या अंकांनी होणाऱ्या 68 व 32 या संख्यांची बेरीज 100 येते. $\therefore$ दुसऱ्या व तिसऱ्या संख्यांची बेरीज आधी केली.

उदा. (2) बेरीज करा : $2375 + 9056 + 13625$

$2375 + 9056 + 13625$ $= 2375 + 13625 + 9056$ $= (2375 + 13625) + 9056$ $= 16000 + 9056$ $= 25056$	वरील उदाहरणात विचार केल्याप्रमाणेच पहिल्या व तिसऱ्या संख्यांतील 75 व 25 यांची बेरीज 100 येते. $\therefore$ पहिल्या व तिसऱ्या संख्यांची बेरीज आधी केली. त्यासाठी संख्यांचा क्रम बदलून घेतला.

उदा. (3) गुणाकार करा : $125 \times 263 \times 8$

$125 \times 263 \times 8$ $= 125 \times 8 \times 263$ $= (125 \times 8) \times 263$ $= 1000 \times 263$ $= 263000$	$25 \times 8 = 200$ हे माहीत आहे. $\therefore$ 125×8 हा गुणाकार करणे सोपे आहे. $\therefore$ संख्यांचा क्रम बदलून घेतला आणि 125×8 हा गुणाकार आधी केला.

उदाहरणसंग्रह 19

1. पुढील बेरजा, गुणधर्म वापरून सोप्या रीतीने करा.

(1) $273 + 56 + 44$ (2) $178 + 593 + 622$

(3) $133 + 17 + 650$ (4) $5107 + 2950 + 343$

2. पुढील गुणाकार, गुणधर्म वापरून सोप्या रीतीने करा.

(1) $48 \times 5 \times 2$ (2) $15 \times 67 \times 6$ (3) $25 \times 213 \times 4$

(4) $3109 \times 5 \times 20$ (5) $8 \times 568 \times 125$ (6) $16 \times 25 \times 408$

• बेरीज व गुणाकार यांच्या संयुक्त गुणधर्माचा उपयोग

उदा. (1) सोपे रूप द्या : (1) $47 \times 93 + 47 \times 7$ (2) $16 \times 17 + 16 \times 41$

(1) $47 \times 93 + 47 \times 7$
$= 47\ (93 + 7)$
$= 47 \times 100$
$= 4700$

(2) $16 \times 17 + 16 \times 41$
$= 16\ (17 + 41)$
$= 16 \times 58$
$= 928$

दोन्ही उदाहरणांचे स्वरूप $a \times b + a \times c$ असे आहे.
$\therefore a \times b + a \times c = a\ (b + c)$ या गुणधर्माचा उपयोग करून राशींची मांडणी केली आणि सोपे रूप दिले.

उदा. (2) गुणाकार करा : 105×105

(1) 105×105
$= 105\ (100 + 5)$
$= 105 \times 100 + 105 \times 5$
$= 10500 + 525$
$= 11025$

105 ही संख्या $(100 + 5)$ अशी लिहिली. त्यामुळे उदाहरणाचे स्वरूप $a\ (b + c)$ असे झाले.
$a\ (b + c) = a \times b + a \times c$ या गुणधर्माचा उपयोग करून सोपे रूप दिले.

उदाहरणसंग्रह 20

1. पुढील प्रत्येक उदाहरणाची मांडणी $a \times b + a \times c$ अशी करा.

(1) $9\ (3 + 14)$ (2) $25\ (23 + 16)$ (3) $20\ (58 + 109)$

2. पुढील प्रत्येक उदाहरणाची मांडणी $a\ (b + c)$ अशी करा.

(1) $15 \times 3 + 15 \times 7$ (2) $9 \times 38 + 9 \times 12$

(3) $125 \times 69 + 125 \times 31$

3. सोपे रूप द्या. [$a \times b + a \times c = a\ (b + c)$ हे सूत्र वापरा.]

(1) $9 \times 38 + 9 \times 12$ (2) $125 \times 69 + 125 \times 31$

(3) $594 \times 210 + 594 \times 290$ (4) $16 \times 81 + 34 \times 81$

4. $a\ (b + c) = a \times b + a \times c$ हे सूत्र वापरून पुढील गुणाकार करा.

(1) 51×51 (2) 75×75 (3) 102×102

8. घातांक

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ येथे 2 ही संख्या 9 वेळा लिहून गुणाकार क्रिया दाखवली आहे. हा गुणाकार 2^9 असा लिहितात. 2^9 ही घातांकित संख्या आहे.

'2^9' चे वाचन 'दोनचा घातांक नऊ' किंवा '2 चा नववा घात' असे करतात.

2^9 या घातांकरूपातील संख्येत 2 हा 'पाया' व 9 हा 'घातांक' आहे.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$$

(गुणाकार रूप)

घातांक

पाया

उदा. खालील तक्ता अभ्यासा.

	गुणाकार रूप	घातांक रूप	पाया	घातांक
1.	$7 \times 7 \times 7$	7^3	7	3
2.	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^5	3	5
3.	9×9	9^2	9	2
4.	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^6	2	6
5.	$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$	1^5	1	5

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$2^2 = 2 \times 2$

$2^1 = 2$

2^3 याचे वाचन दोनचा तिसरा घात किंवा दोनचा घन असे करतात.

2^2 याचे वाचन दोनचा दुसरा घात किंवा दोनचा वर्ग असे करतात.

'तिसरा घात' ऐवजी 'घन' आणि 'दुसरा घात' ऐवजी 'वर्ग' असे वाचन करतात.

$2^1 = 2$, यात संख्येचा पहिला घात म्हणजे तीच संख्या आहे; म्हणून संख्येचा घातांक 1 असेल, तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे.

जसे, 5 म्हणजेच 5^1, 10 म्हणजेच 10^1 इत्यादी.

उदाहरणसंग्रह 21

1. खालील संख्यांचे वाचन करून तक्ता पूर्ण करा.

क्रमांक	घातांक रूप	गुणाकार रूप	पाया	घातांक
(1)	1^3	....	....	....
(2)	3^7	....	....	....
(3)	7^9	....	....	....
(4)	2^6	....	....	....
(5)	3^4	....	....	....
(6)	4^3	....	....	....
(7)	2^8	....	....	....
(8)	15^2	....	....	....
(9)	3	....	....	....
(10)	10^5	....	....	....

2. घातांकरूपात लिहा.

(1) पाया 6 , घातांक 4 (2) दोनचा घातांक चार (3) सातचा वर्ग

(4) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (5) $6 \times 6 \times 6$ (6) नऊचा घन

3. गुणाकाररूपात लिहा.

(1) 11^4 (2) 6^2 (3) 10^4 (4) 5^3 (5) 8^5

घातांकित संख्येची किंमत काढणे

पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 3^5 ची किंमत काढा.

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ (पाया 3 हा पाच वेळा घेऊन गुणाकार)

उदा. (2) 2^7 ची किंमत काढा.

$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ (पाया 2 हा सात वेळा घेऊन गुणाकार)

उदाहरणसंग्रह 22

1. किंमत काढा.

(1) 3^6 (2) 6^3 (3) 2^6 (4) 1^8 (5) 5^4

(6) 4^3 (7) 10^5 (8) 10^7 (9) 7^4 (10) 8^2

अक्षरी संख्येचे घातांकरूपात लेखन

जसे $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$, तसेच $a \times a \times a \times a = a^4$ असे लिहिता येते. त्याचप्रमाणे, $p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p = p^{10}$

$x \times x \times x = x^3$, $x \times x = x^2$, $x = x^1$

दिलेली संख्या, दिलेला पाया घेऊन घातांकरूपात लेखन

उदा. (1) पाया 4 घेऊन 64 ही संख्या घातांकरूपात लिहा.

रीत : येथे दिलेला पाया 4 म्हणून 64 ही संख्या 4 या अवयवाच्या गुणाकार रूपात लिहू.

$\therefore 64 = 4 \times 16$
$= 4 \times 4 \times 4$
$= 4^3$

किंवा

4	64
4	16
4	4
	1

उदा. (2) 64 ही संख्या पाया 2 घेऊन घातांकरूपात लिहा.

रीत : येथे पाया 2 दिला आहे, म्हणून 64 ही संख्या 2 या अवयवाच्या गुणाकार रूपात लिहू.

$\therefore 64 = 2 \times 32$
$= 2 \times 2 \times 16$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 8$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^6$

$\therefore 64 = 2^6$.

उदाहरणसंग्रह 23

1. खालील प्रत्येक संख्या, दिलेला पाया घेऊन घातांकरूपात लिहा.

(1) 125 , पाया 5 (2) 32 , पाया 2 (3) 625 , पाया 5

(4) 243 , पाया 3 (5) 100 , पाया 10 (6) 1,00,00,000 , पाया 10

(7) 81 , पाया 9 (8) 81 , पाया 3

9. वर्ग आणि वर्गमूळ

3×3 , 8×8 , 16×16 , 99×99 , $a \times a$, $x \times x$ या प्रत्येक राशीत एका संख्येला त्याच संख्येने गुणले आहे.

एखाद्या संख्येला त्याच संख्येने गुणणे, म्हणजेच त्या संख्येचा वर्ग करणे.

जसे, 8×8 म्हणजे 8 चा वर्ग. 99×99 म्हणजे 99 चा वर्ग.

$x \times x$ म्हणजे x चा वर्ग. $a \times a$ म्हणजे a चा वर्ग.

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू, हे तुम्ही पाचवीत शिकला आहात. यावरून बाजू 10 असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ 10×10 म्हणजे ते '10 चा वर्ग' एवढे असते.

उदा. (1) खालील संख्यांचे वर्ग करा.

(1) 9	(2) 15	(3) 218
9 चा वर्ग	15 चा वर्ग	218 चा वर्ग
$= 9 \times 9$	$= 15 \times 15$	$= 218 \times 218$
$= 81$	$= 225$	$= 47524$

उदाहरणसंग्रह 24

1. खालील संख्यांचे वर्ग करा.

(1) 5 (2) 10 (3) 16 (4) 25 (5) 110

संख्येच्या वर्गाचे लेखन, वाचन

10×10 म्हणजे 10 चा वर्ग, हे आपण पाहिले. 10×10 हा गुणाकार 10^2 असा लिहितात. '10^2' हे 'दहाचा वर्ग' असे वाचतात.

त्याचप्रमाणे $17 \times 17 = 17^2$, $25 \times 25 = 25^2$, $x \times x = x^2$ इत्यादी.

उदाहरणसंग्रह 25

1. खालील संख्यांचे वाचन कसे करतात ते लिहा व त्यांच्या किमती काढा.

(1) 6^2 (2) 11^2 (3) 14^2 (4) 65^2 (5) 55^2 (6) 18^2
(7) 67^2 (8) 109^2 (9) 121^2 (10) 112^2 (11) 91^2 (12) 200^2

एककस्थानी 5 हा अंक असलेल्या संख्येचा वर्ग तोंडी सांगणे

यासाठी तोंडी कराव्या लागणाऱ्या क्रमवार पायऱ्या पुढील उदाहरणांवरून लक्षात घ्या. जसे, 25 चा वर्ग काढू.

पायऱ्या	संख्या 25
(1) एककस्थानच्या 5 या अंकाखेरीज संख्येत उरलेल्या अंकांनी तयार झालेली संख्या	2
(2) तयार झालेल्या संख्येच्या पुढील लगतची संख्या	3
(3) या दोन लगतच्या संख्यांचा गुणाकार	$2 \times 3 = 6$
(4) वरील गुणाकारापुढे 25 लिहून मिळणारी संख्या	625
$\therefore$ 25 चा वर्ग = 625	

उदाहरणसंग्रह 26

1. पुढील संख्यांचे वर्ग लिहा.

(1) 85 (2) 55 (3) 75 (4) 95 (5) 115 (6) 205 (7) 185 (8) 105

- **वर्गमूळ**

1, 4, 9, 16, 25 या संख्या अनुक्रमे 1, 2, 3, 4, 5 या संख्यांचे वर्ग आहेत, म्हणजेच 1, 4, 9, 16, 25 या वर्गसंख्या आहेत.

3 चा वर्ग 9 आहे. याउलट 9 चे वर्गमूळ 3 आहे. हे चिन्ह वापरून $\sqrt{9} = 3$ असे लिहितात. वर्गमूळ '$\sqrt{\ }$' या चिन्हाने दर्शवतात.

तसेच $4^2 = 16 \quad \therefore \sqrt{16} = 4$; $10^2 = 100 \quad \therefore \sqrt{100} = 10$;

$5^2 = 25 \quad \therefore \sqrt{25} = 5$

एका चौरसाचे क्षेत्रफळ 25 आहे. म्हणजे त्याच्या बाजूचा वर्ग 25 आहे. चौरसाची बाजू काढण्यासाठी 25 चे वर्गमूळ काढावे लागेल.

दिलेल्या वर्गसंख्येचे वर्गमूळ कसे काढतात हे समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 196 चे वर्गमूळ काढा.

196 चे वर्गमूळ काढायचे म्हणजे ती संख्या दोन समान संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहावी लागेल. यासाठी त्या संख्येचे अवयव पाडावे लागतील.

रीत : $196 = 49 \times 4$ 196 ही 4 ने विभाज्य आहे.

$= 7 \times 7 \times 2 \times 2$

$= (7 \times 2) \times (7 \times 2)$

$= (7 \times 2)^2 = 14^2$

म्हणून 196 हा 14 चा वर्ग आहे. म्हणजेच $\sqrt{196} = 14$

$\therefore$ 196 चे वर्गमूळ 14 आहे.

उदा. (2) 225 चे वर्गमूळ काढा.

रीत : $225 = 45 \times 5$ (5 ची विभाज्यता कसोटी)

$= 9 \times 5 \times 5$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= (3 \times 5) \times (3 \times 5)$

$= (3 \times 5)^2 = 15^2$

$\therefore 225 = (15)^2$ $\therefore$ 225 चे वर्गमूळ 15 म्हणजेच $\sqrt{225} = 15$

उदा. (3) 4356 चे वर्गमूळ काढा.

रीत : $4356 = 484 \times 9$ (4356 ही 9 ने विभाज्य आहे.)

$= 121 \times 4 \times 9$ (484 ही 4 ने विभाज्य आहे.)

$= 11 \times 11 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= (11 \times 2 \times 3) \times (11 \times 2 \times 3)$

$= (11 \times 2 \times 3)^2 = (66)^2$

$\therefore 4356 = (66)^2$ म्हणजेच $\sqrt{4356} = 66$

उदाहरणसंग्रह 27

1. वर्गमूळ काढा.

(1) 441   (2) 576   (3) 3025   (4) 7744   (5) 10404

(6) 11664   (7) 15625   (8) 11025   (9) 14641   (10) 9801