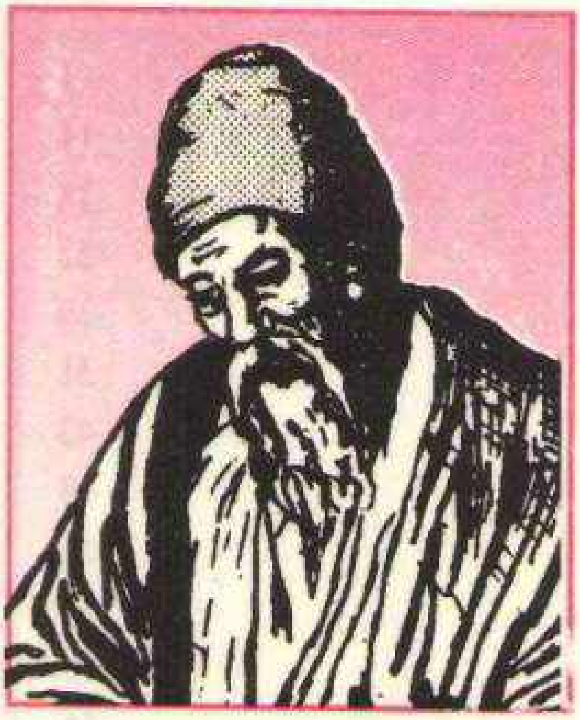
अनुक्रमणिका

विभाग पहिला

विभाग दुसरा

युक्लिड - एक थोर गणिती



एक नामवंत गणिती म्हणून युक्लिड यांचे नाव गणिताच्या क्षेत्रात, प्रामुख्याने भूमितीच्या संदर्भात अजरामर आहे. भूमितीशास्त्रात त्यांचे संशोधन कार्य अजोड आहे. त्यामुळेच त्यांनी केलेल्या भूमितीच्या मांडणीला 'युक्लिडीय भूमिती' हे सार्थ नाव देऊन जगाने त्यांचा गौरव केला आहे. आज आपण शिकत आहोत, त्या भूमितीचा पाया युक्लिड यांनी रचला.

जगाला त्यांच्या कार्याचा जेवढा परिचय आहे, तेवढा त्यांच्या जीवन चरित्राचा नाही, कारण त्यांच्याविषयी फारशी माहिती उपलब्ध नाही. त्यांचा जन्म व त्यांचे शिक्षण अथेन्स येथे झाले असावे. पुढे ते इजिप्तमध्ये अलेक्झांड्रिया येथे गेले. तेथेच त्यांनी गणित क्षेत्रातील कार्य वाढवले व ते प्रसिद्ध झाले. त्यांचा कार्यकाल इ.स.पूर्व 300 वर्षे म्हणजे सुमारे 2300 वर्षांपूर्वीचा असावा.

त्यांच्या पूर्वी होऊन गेलेल्या पायथागोरस, प्लेटो, थेल्स इत्यादी गणितज्ञांनी केलेल्या गणितविषयक संशोधनाची युक्लिड यांनी पद्धतशीर जुळणी व मांडणी केली. स्वतःच्या संशोधनाची त्यात भर घातली. गणिताच्या गुणधर्मात सुसंगतता व सुसूत्रता आणली आणि एक तर्कशुद्ध व नियमबद्ध गणितशास्त्र जगाला दिले. हे सर्व संशोधन 'एलिमेंट्स' नावाच्या पुस्तकात ग्रंथित केले आहे. त्याचे तेरा खंड आहेत. जगातील अनेक भाषांमध्ये या ग्रंथाचे भाषांतर झाले आहे.

प्रतलीय व अवकाशीय भूमिती, प्रमाण, पूर्ण संख्या, अपरिमेय संख्या इत्यादींविषयी विचार या ग्रंथामध्ये केलेला आहे. त्यांची विचार करण्याची अनुमान पद्धती विज्ञान, तत्त्वज्ञान, अभियांत्रिकी इत्यादी शास्त्रांनाही उपयुक्त ठरली आहे.

या महान गणितज्ञापुढे आपण कृतज्ञतेने सदैव नतमस्तक आहोत.

विभाग पहिला

1. विभाज्यता

उजळणी

जेव्हा एका संख्येला दुसऱ्या संख्येने नि:शेष भाग जातो, तेव्हा ती संख्या त्या दुसऱ्या संख्येने **विभाज्य** आहे असे म्हणतात.

जसे, 24 ला 6 ने (नि:शेष) भाग जातो म्हणून 24 ही संख्या 6 ने विभाज्य आहे.

2, 3, 5 व 10 यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या

2 ची कसोटी : संख्येच्या एककस्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी अंक असेल, तर त्या संख्येला 2 ने भाग जातो.

3 ची कसोटी : संख्येतील सर्व अंकांच्या बेरजेला 3 ने भाग जात असेल, तर ती संख्या 3 ने विभाज्य असते.

5 ची कसोटी : संख्येच्या एककस्थानी 0 किंवा 5 यांपैकी अंक असेल, तर ती संख्या 5 ने विभाज्य असते.

10 ची कसोटी : संख्येच्या एककस्थानी 0 हा अंक असेल, तर त्या संख्येला 10 ने भाग जातो.

4, 6, 9 आणि 11 यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या

4 ची कसोटी : संख्येतील दशकस्थानच्या व एककस्थानच्या अंकांनी होणाऱ्या संख्येला 4 ने भाग जात असेल, तर त्या संख्येला 4 ने भाग जातो.

(i) 3148 या संख्येत दशकस्थानच्या व एककस्थानच्या अंकांनी होणारी संख्या 48 आहे. या संख्येला 4 ने भाग जातो, म्हणून 3148 ला 4 ने भाग जातो.

(ii) 5019 या संख्येतील 19 ला 4 ने भाग जात नाही, म्हणून 5019 ला 4 ने भाग जात नाही, हे पडताळून पाहा.

6 ची कसोटी : संख्येला 2 व 3 या **दोन्ही** संख्यांनी भाग जात असेल, तर त्या संख्येला 6 ने भाग जातो.

(i) 64218 या संख्येतील एककस्थानी 8 हा अंक आहे, म्हणून तिला 2 ने भाग जातो. 64218 या संख्येतील अंकांची बेरीज $6 + 4 + 2 + 1 + 8 = 21$.
21 ला 3 ने भाग जातो, म्हणून 64218 ला 3 ने भाग जातो.
यावरून 64218 ला 2 व 3 या दोहोंनी भाग जातो. $\therefore$ 6 नेही भाग जातो.

(ii) 50918 ला 6 ने भाग जात नाही, हे पडताळून पाहा.

9 ची कसोटी : संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग जात असेल, तर ती संख्या 9 ने विभाज्य असते.

(i) 94,203 या संख्येतील अंकांची बेरीज $9 + 4 + 2 + 0 + 3 = 18$.
18 ला 9 ने भाग जातो, म्हणून 94,203 ला 9 ने भाग जातो.

(ii) 4625 मधील अंकांची बेरीज करून 4625 ला 9 ने भाग जात नाही, हे पडताळून पाहा.

11 ची कसोटी : संख्येतील एकाआड एक अंकांच्या बेरजांतील फरक 0 असेल किंवा 11 ने विभाज्य असेल, तर ती संख्या 11 ने विभाज्य असते.

(i) 1452 मधील एकाआड एक अंकांच्या बेरजा $1 + 5 = 6$ आणि $4 + 2 = 6$. बेरजांतील फरक $6 - 6 = 0$ $\therefore$ 1452 ला 11 ने भाग जातो.

(ii) 8162 या संख्येबाबत $8 + 6 = 14$, $1 + 2 = 3$.
14 व 3 यांतील फरक $14 - 3 = 11$. 11 ही संख्या 11 ने विभाज्य आहे.
$\therefore$ 8162 ला 11 ने भाग जातो.

(iii) 5123 ला 11 ने भाग जात नाही, हे तुम्ही पडताळून पाहा.

उदाहरणसंग्रह 1

1. पुढील प्रत्येक संख्येला 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 यांपैकी कोणत्या संख्यांनी भाग जातो, हे कसोट्यांच्या आधारे लिहा.
(1) 99 (2) 135 (3) 711 (4) 280 (5) 378 (6) 495
(7) 504 (8) 616 (9) 720 (10) 2,304 (11) 4,203 (12) 1,980

संख्येचे विभाजक

5 या संख्येने 105 ला नि:शेष भाग जातो, म्हणजे '5 हा 105 चा विभाजक आहे'.
दिलेल्या संख्येचे विभाजक शोधण्यास विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा उपयोग होतो.

जसे, 135 या संख्येचे 3, 5 आणि 9 हे विभाजक आहेत, हे कसोट्यांच्या आधारे समजते. या विभाजकांनी 135 ला भागून येणारे भागाकार हे 135 चे आणखी विभाजक आहेत.

$$\frac{135}{3} = 45, \qquad \frac{135}{5} = 27, \qquad \frac{135}{9} = 15$$

∴ 45, 27, 15 हे सुद्धा 135 चे विभाजक आहेत.

आता प्रत्येक संख्येला 1 ने आणि स्वत: त्या संख्येने भाग जातोच, म्हणून प्रत्येक संख्येचे 1 आणि ती संख्या हे विभाजक असतात. 135 चे 1 आणि 135 हेसुद्धा विभाजक आहेत.

(i) 135 चे 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135 असे आठ विभाजक आहेत.

(ii) 4 चे विभाजक 1, 2, 4 आहेत.

(iii) 36 चे 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 हे नऊ विभाजक आहेत.

उदाहरणसंग्रह 2

1. पुढील प्रत्येक संख्येचे सर्व विभाजक लिहा.

(1) 6	(2) 15	(3) 18	(4) 23	(5) 28
(6) 45	(7) 71	(8) 85	(9) 100	(10) 91

मूळ संख्या आणि संयुक्त संख्या

6, 7, 18, 23 या संख्यांचे विभाजक पाहू.

6 चे विभाजक : 1, 2, 3, 6

7 चे विभाजक : 1, 7

18 चे विभाजक : 1, 2, 3, 6, 9, 18

23 चे विभाजक : 1, 23

येथे 7 चे 1 व 7 हे दोनच विभाजक आहेत.

तसेच 23 चे 1 व 23 हे दोनच विभाजक आहेत.

ज्या संख्येचे 1 व ती संख्या हे दोनच विभाजक असतात, त्या संख्येला **मूळ संख्या** म्हणतात.

∴ 7 व 23 या मूळ संख्या आहेत.

6 व 18 या संख्यांना दोन पेक्षा जास्त विभाजक आहेत.

दोनपेक्षा जास्त विभाजक असणाऱ्या संख्यांना **संयुक्त संख्या** म्हणतात.

∴ 6 व 18 या संयुक्त संख्या आहेत.

1 ही संख्या मूळही नाही आणि संयुक्तही नाही.

दिलेली संख्या मूळ की संयुक्त हे कसे ओळखावे, ते पाहू.

100 पेक्षा मोठ्या असणाऱ्या संख्यांचा विचार करू.

उदा. 501, 803, 299, 893, 317 यांपैकी मूळ व संयुक्त संख्या कोणत्या ते ओळखा. (त्यासाठी विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा उपयोग करू.)

(i) 501 या संख्येला 3 ने भाग जातो, म्हणून 501 ही संयुक्त संख्या आहे.

(ii) 803 ही संख्या 11 ने विभाज्य आहे, म्हणून 803 ही संयुक्त संख्या आहे.

(iii) 299 ही संख्या 2, 3, 5, 11 यांपैकी कोणत्याही संख्येने विभाज्य नाही.

299 ला 2 ने भाग जात नाही, म्हणजे 2 च्या कोणत्याही पटीने भाग जाणार नाही, हे उघड आहे, म्हणून 299 ला 4, 6, 8,.... म्हणजे सम संख्यांनी भाग जातो का, हे पाहण्याची आवश्यकता नाही, म्हणून तिला इतर संख्यांनी भाग जातो का याचा विचार करू.

प्रत्यक्ष भागून, 7 ने 299 ला भाग जात नाही, हे लक्षात येते.

प्रत्यक्ष भागाकार करून, 299 ला 13 ने भाग जातो (भागाकार 23 येतो), हे समजते, म्हणून 299 ही संयुक्त संख्या आहे.

(iv) याप्रमाणेच विचार करून 893 ला 19 ने भाग जातो हे समजते, म्हणून 893 ही संयुक्त संख्या आहे.

(v) 317 ला 7 ने व 13 ने भाग जात नाही हे भागून समजते. 17 ने भागून पाहिल्यास ती 17 नेही विभाज्य नसल्याचे दिसते.

$17 \times 17 = 289$ व $289 < 317$ आणि $18 \times 18 = 324$ व $324 > 317$, म्हणून 317 चा कोणताही मूळ अवयव 17 पेक्षा मोठा असणार नाही. त्यामुळे 17 पेक्षा मोठ्या संख्यांनी भाग जातो का, हे पाहण्याची आवश्यकता नाही.

यावरून 317 ही मूळ संख्या आहे असे ठरते.

उदाहरणसंग्रह 3

1. मूळही नाही आणि संयुक्तही नाही, अशी संख्या कोणती ?

2. सम असणाऱ्या मूळ संख्या किती आहेत ? कोणत्या ?

3. 1 व 100 या संख्यांमधील सर्व मूळ संख्या लिहा. त्या किती आहेत ?

4. पुढील संख्या मूळ आहेत, की संयुक्त हे ठरवा.

(1) 93	(2) 97	(3) 101	(4) 117	(5) 127
(6) 295	(7) 407	(8) 499	(9) 527	(10) 637
(11) 689	(12) 209	(13) 901	(14) 953	(15) 997.

5. 101 पासून 201 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्या लिहा.
6. 507 या संख्येला 7 ने भाग जात नाही, तर तिला 21 ने भाग जाईल का ? कारण लिहा.
7. तीन अंकी लहानांत लहान आणि मोठ्यांत मोठी मूळ संख्या लिहा.

जोडमूळ संख्या

3, 5 ; 11, 13 ; 29, 31 या मूळ संख्यांच्या जोड्या पाहा. प्रत्येक जोडीतील संख्यांत दोनचा फरक आहे. अशा दोनचा फरक असणाऱ्या मूळ संख्यांना **जोडमूळ संख्या** किंवा **जुळ्या मूळ संख्या** म्हणतात.

197, 199 ; 239, 241 ; 599, 601 या जोडमूळ संख्यांच्या आणखी काही जोड्या आहेत. अशा आणखी खूप जोड्या आहेत.

सहमूळ संख्या

10 या संख्येचे विभाजक 1, 2, 5, 10 आहेत. 21 चे विभाजक 1, 3, 7, 21 आहेत. दोन्ही संख्यांच्या विभाजकांत 1 हा एकच सामाईक विभाजक आहे. अशा, म्हणजे 1 हा एकच सामाईक विभाजक असणाऱ्या संख्यांना **सहमूळ** संख्या किंवा **सापेक्ष मूळ** संख्या म्हणतात.

3, 8 ; 4, 9 ; 21, 22 ; 75, 28 ही सहमूळ संख्यांच्या जोड्यांची आणखी काही उदाहरणे आहेत.

सहमूळ संख्यांबाबत लक्षात घ्यायच्या बाबी :

(1) कोणत्याही दोन क्रमवार संख्यांची जोडी, ही सहमूळ संख्यांची जोडी असते.

(2) एखाद्या संख्येला दोन सहमूळ संख्यांनी भाग जात असेल, तर त्यांच्या गुणाकारानेही भाग जातो. जसे, 4068 ला 3 व 4 या सहमूळ संख्यांनी भाग जातो, म्हणजे 4068 ला 3×4 ने, म्हणजे 12 नेही भाग जातो.

उदाहरणसंग्रह 4

1. 1 पासून 100 पर्यंतच्या सर्व जोडमूळ संख्या लिहा.
2. पुढे दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांपैकी सहमूळ संख्यांच्या जोड्या ओळखा.
(1) 9, 12 (2) 27, 35 (3) 4, 5 (4) 3, 102 (5) 207, 702
(6) 17, 19 (7) 11, 55 (8) 21, 16 (9) 85, 51 (10) 52, 143

संख्येचे मूळ अवयव पाडणे

उदा. 30 चे मूळ अवयव पाडा.

$30 = 10 \times 3$. येथे 10 व 3 हे 30 चे अवयव आहेत.

10 ही संयुक्त संख्या अवयवरूपात 2×5 अशी लिहिता येते. यावरून 30 चे मूळ अवयव पुढीलप्रमाणे आहेत.

$\therefore 30 = 2 \times 5 \times 3$. (2, 5, 3 या मूळ संख्या आहेत.)

दिलेली संख्या तिच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिणे, यालाच त्या संख्येचे मूळ अवयव पाडणे असे म्हणतात.

मूळ अवयव पाडण्यासाठी विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा उपयोग होतो.

उदा. (1) 78 चे मूळ अवयव पाडा.

पद्धत 1

$$78 = 2 \times 39$$
$$= 2 \times 3 \times 13$$

पद्धत 2

2	78
3	39
13	13
	1

$\therefore 78 = 2 \times 3 \times 13$

उदा. (2) 8514 चे मूळ अवयव पाडा.

$8514 = 6 \times 1419$ .... (6 ची कसोटी वापरून)

$= 6 \times 3 \times 473$ .... (3 ची कसोटी वापरून)

$= 6 \times 3 \times 11 \times 43$ .... (11 ची कसोटी वापरून)

$= 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 43$

उदाहरणसंग्रह 5

1. पुढे दिलेल्या संख्यांचे मूळ अवयव पाडा.

(1) 120 (2) 324 (3) 176 (4) 420

(5) 925 (6) 715 (7) 6426 (8) 8569

महत्तम साधारण विभाजक (मसावि)

84 आणि 48 यांच्या विभाजकांचा विचार करू.

84 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

48 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

या विभाजकांचे निरीक्षण केल्यास, अधोरेखित 1, 2, 3, 4, 6, 12 हे विभाजक दोन्ही गटांत आहेत. यांना **साधारण** किंवा **सामाईक विभाजक** म्हणतात.

1, 2, 3, 4, 6, 12 या साधारण विभाजकांत 12 हा सर्वांत मोठा विभाजक आहे. त्याला **महत्तम साधारण विभाजक** किंवा थोडक्यात **मसावि** म्हणतात.

उदा. (1) 30 व 24 यांचा मसावि काढा.

30 चे विभाजक : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

24 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

30 व 24 यांचे साधारण विभाजक : 1, 2, 3, 6

साधारण विभाजकांत 6 सर्वांत मोठा आहे.

$\therefore$ 30 व 24 यांचा मसावि = 6

उदा. (2) 24, 32, 56 यांचा मसावि काढा.

24 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

32 चे विभाजक : 1, 2, 4, 8, 16, 32

56 चे विभाजक : 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

24, 32, 56 यांचे साधारण विभाजक 1, 2, 4, 8 आहेत.

त्यांमध्ये 8 हा सर्वांत मोठा विभाजक आहे.

$\therefore$ 24, 32, 56 यांचा मसावि 8 आहे.

उदा. (3) 18 व 35 यांचा मसावि काढा.

18 चे विभाजक : 1, 2, 3, 6, 9, 18

35 चे विभाजक : 1, 5, 7, 35

18 व 35 यांचे साधारण विभाजक : 1

$\therefore$ 18 व 35 यांचा मसावि 1 आहे.

(येथे 18 व 35 या सहमूळ संख्यांचा मसावि 1 आहे, हे लक्षात घ्या.)

उदाहरणसंग्रह 6

1. मसावि काढा.

(1) 6, 8 (2) 9, 12 (3) 6, 12, 18 (4) 30, 45

(5) 30, 20 (6) 42, 28, 70 (7) 60, 90 (8) 120, 96

मसावि काढण्याची मूळ अवयव पद्धत

संख्या मोठ्या असतील तर त्यांचे मूळ अवयव पाडून मसावि ठरवणे सोपे जाते. संख्येचे मूळ अवयव हे त्या संख्येचे विभाजक देखील असतात. पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 45 व 30 यांचा मसावि काढा.

प्रथम दिलेल्या संख्यांचे मूळ अवयव पाडू.

$45 = 5 \times 9$	$30 = 10 \times 3$
$= 5 \times 3 \times 3$	$= 5 \times 2 \times 3$
$= 3 \times \underline{3} \times \underline{5}$	$= 2 \times \underline{3} \times \underline{5}$

45 व 30 या संख्यांचे 3, 5 व (3×5) हे साधारण विभाजक आहेत. त्यांपैकी (3×5) हा विभाजक सर्वांत मोठा आहे.

$\therefore$ 45 व 30 यांचा मसावि $= (3 \times 5) = 15$

उदा. (2) 195, 312, 546 यांचा मसावि काढा.

$195 = 5 \times 39 = 5 \times 3 \times 13 = \underline{3} \times 5 \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78 = 4 \times 6 \times 13 = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 6 \times 91 = 2 \times 3 \times 13 \times 7 = 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

यावरून (3×13) हा सर्वांत मोठा साधारण विभाजक आहे.

$\therefore$ 195, 312 व 546 यांचा मसावि $= (3 \times 13) = 39$.

उदा. (3) 72 व 85 यांचा मसावि काढा.

$72 = 12 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$85 = 17 \times 5 = 5 \times 17$

येथे दिलेल्या संख्यांमध्ये कोणताही साधारण विभाजक नाही; परंतु 1 हा प्रत्येक संख्येचा विभाजक असतोच, म्हणजे केवळ 1 हाच सामाईक विभाजक आहे. $\therefore$ 72 व 85 यांचा मसावि 1 आहे.

उदा. (4) 80, 16, 128 यांचा मसावि काढा.

$80 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 5$

$16 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2}$

$128 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2 \times 2$

यावरून मसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

दिलेल्या संख्या 16 च्या पटीत आहेत व त्यांचा मसावि 16 आहे हे लक्षात घ्या.

तसेच 9 व 36 या संख्यांमध्ये 36 ही संख्या 9 च्या पटीत आहे, म्हणून 9 व 36 यांचा मसावि 9 येईल. मूळ अवयव पाडून हे पडताळून पाहा.

या उदाहरणांवरून पुढील बाबी लक्षात घ्या.

(1) संख्यांचे मूळ अवयव चढत्या क्रमाने मांडल्याने त्या संख्यांचे साधारण अवयव शोधणे सोपे झाले.

(2) साधारण मूळ अवयवांचा गुणाकार हा त्या संख्यांचा मसावि आहे.

(3) दिलेल्या सर्व संख्यांपैकी एखाद्या संख्येच्या पटीत इतर संख्या असतील, तर ती संख्या दिलेल्या संख्यांचा मसावि असते, म्हणून अशा संख्यांचा मसावि निरीक्षणानेही काढता येतो.

उदाहरणसंग्रह 7

1. मसावि काढा.

(1) 90, 50	(2) 42, 70	(3) 75, 45, 60
(4) 144, 216	(5) 406, 870	(6) 100, 125, 150
(7) 75, 57, 102	(8) 105, 154	(9) 56, 57
(10) 777, 315, 588	(11) 585, 675, 540	(12) 45, 42, 88

2. मसावि काढा. (निरीक्षणाने)

(1) 12, 24	(2) 30, 15	(3) 9, 27, 63
(4) 23, 69	(5) 11, 33, 44	(6) 18, 144

लघुतम साधारण विभाज्य (लसावि)

8 व 12 यांनी विभाज्य असणाऱ्या पुढील संख्यांचे निरीक्षण करा.

8 ने विभाज्य संख्या –

8, 16, <u>24</u>, 32, 40, <u>48</u>, 56, 64, <u>72</u>, ...

12 ने विभाज्य संख्या –

12, <u>24</u>, 36, <u>48</u>, 60, <u>72</u>, 84, ...

येथे अधोरेखित केलेल्या संख्या 24, 48, 72, ... या साधारण किंवा सामाईक विभाज्य संख्या आहेत. यांतील 24 ही सर्वांत लहान म्हणजे लघुतम आहे. यावरून 8 व 12 यांची 24 ही लघुतम साधारण विभाज्य संख्या, थोडक्यात लसावि आहे.

उदा. (1) 20 व 12 यांचा लसावि काढा.

20 ने विभाज्य संख्या : 20, 40, <u>60</u>, 80, 100, <u>120</u>, ...

12 ने विभाज्य संख्या : 12, 24, 36, 48, <u>60</u>, 72, 84, 96, 108, <u>120</u>, ...

12 व 20 ने विभाज्य असणाऱ्या साधारण संख्या : 60, 120, ...

यापैकी सर्वांत लहान संख्या 60.

$\therefore$ लसावि 60

उदा. (2) 3 व 8 यांचा लसावि काढा.

3 ने विभाज्य संख्या : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,... , 48,...

8 ने विभाज्य संख्या : 8, 16, 24, 32, 40, 48,...

3 व 8 ने विभाज्य असणाऱ्या साधारण संख्या : 24, 48, 72,...

यांपैकी सर्वांत लहान संख्या 24.

यावरून 3 व 8 यांचा लसावि 24.

- सहमूळ संख्यांचा गुणाकार हाच त्यांचा लसावि असतो, हे लक्षात घ्या.

उदाहरणसंग्रह 8

1. लसावि काढा.

(1) 4, 6 (2) 15, 10 (3) 4, 6, 8

(4) 12, 9 (5) 2, 4, 7 (6) 65, 39

2. पुढील सहमूळ संख्यांचा लसावि काढा.

(1) 9, 7 (2) 4, 11 (3) 15, 14

3. लसावि काढा. (प्रत्येक उदाहरणातील संख्या आणि लसावि यांचे निरीक्षण करून काही नियम मिळतो का पाहा.)

(1) 15, 30 (2) 48, 16 (3) 34, 102

लसावि काढण्याची मूळ अवयव पद्धत

मोठ्या संख्यांसाठी त्यांचे मूळ अवयव काढून लसावि काढणे सोपे जाते. ही पद्धत समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) लसावि काढा. 65, 39

दिलेल्या संख्या त्यांच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकार रूपात लिहू.

$65 = 13 \times 5 \qquad 39 = 13 \times 3$

65 व 39 चे साधारण मूळ अवयव 13

65 व 39 चे साधारण नसलेले मूळ अवयव 5, 3

65 व 39 चे साधारण मूळ अवयव व साधारण नसलेले मूळ अवयव घेऊन केलेला गुणाकार $13 \times 5 \times 3 = 195$ येतो.

$195, 195 \times 2, 195 \times 3, \ldots$ या संख्या 65 व 39 ने विभाज्य आहेत. त्यांपैकी 195 ही लघुतम संख्या आहे. यावरून 65 व 39 चा लसावि = 195

उदा. (2) लसावि काढा. 36, 120

$36 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$120 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 5$

साधारण असलेले मूळ अवयव : 2, 2, 3

साधारण नसलेले मूळ अवयव : 2, 3, 5

36 व 120 यांचा लसावि

= साधारण असलेले मूळ अवयव × साधारण नसलेले मूळ अवयव

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 360$

उदा. (3) लसावि काढा. 30, 84, 60

$30 = \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$60 = \underline{2} \times \boxed{2} \times \underline{3} \times 5$

$84 = \underline{2} \times \boxed{2} \times \underline{3} \times 7$

30, 60, 84 चे साधारण मूळ अवयव : 2, 3

उरलेल्या अवयवांपैकी 30 व 60 चे साधारण मूळ अवयव : 5

उरलेल्या अवयवांपैकी 60 व 84 चे साधारण मूळ अवयव : 2

उरलेल्या अवयवांपैकी 30 व 84 चे साधारण मूळ अवयव : एकही नाही.

उरलेले मूळ अवयव : 7

30, 60, 84 यांचा लसावि $= 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7$

$= 420$

उदा. (4) लसावि काढा. 108, 175, 120

$108 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3 \times 3$

$175 = 5 \times 5 \times 7$

$120 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 5$

108, 175, 120 चे साधारण मूळ अवयव : एकही नाही.

उरलेल्या अवयवांपैकी 108, 175 चे साधारण मूळ अवयव : नाही.

उरलेल्या अवयवांपैकी 175, 120 चे साधारण मूळ अवयव : 5.

उरलेल्या अवयवांपैकी 108, 120 चे साधारण मूळ अवयव : 2, 2, 3

उरलेले मूळ अवयव : 2, 3, 3, 5, 7.

$\therefore$ लसावि $= 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$= 20 \times 18 \times 15 \times 7$

$= 360 \times 15 \times 7$

$= 5400 \times 7$

$= 37800$

उदा. (5) 48, 180 यांचा मसावि व लसावि काढा.

$48 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$

$180 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3 \times 5$

48 व 180 चे साधारण मूळ अवयव 2, 2, 3

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

लसावि = साधारण असलेले अवयव × साधारण नसलेले अवयव

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 12 \times 60$

$= 720$

उदाहरणसंग्रह 9

1. लसावि काढा.

(1) 6, 8 (2) 6, 8, 10 (3) 15, 20

(4) 9, 15, 20 (5) 45, 36 (6) 45, 36, 30

(7) 65, 39 (8) 28, 72, 98 (9) 105, 195

(10) 165, 90 (11) 120, 90, 175 (12) 216, 288, 270

2. मसावि आणि लसावि काढा.

(1) 250, 150 (2) 96, 192 (3) 32, 37

(4) 132, 88 (5) 405, 225 (6) 46, 51, 35

2. क्रियांचा क्रम व कंसाचा वापर

मागील इयत्तेत तुम्ही बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया करण्यास शिकला आहात. या क्रियांचा आपण आणखी अभ्यास करू.
पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) सोपे रूप द्या. $75 + 25 \times 10$

या उदाहरणात बेरीज आणि गुणाकार या दोन क्रिया आहेत.

आधी $75 + 25$ ही बेरीज केली, तर राशीची किंमत $100 \times 10 = 1000$ येईल.	आधी 25×10 हा गुणाकार केला, तर राशीची किंमत $75 + 250 = 325$ येईल.

म्हणजे एकाच राशीच्या दोन वेगवेगळ्या किमती आहेत, असे म्हणावे लागेल. असे झाल्यास गोंधळ होईल हे उघड आहे.

आता आणखी एक उदाहरण पाहा.

उदा. (2) सोपे रूप द्या. $48 \div 8 \div 2$

या उदाहरणात भागाकार ही एकच क्रिया दोन् वेळा आली आहे.

$48 \div 8$ हा भागाकार आधी केला, तर $48 \div 8 \div 2 = 6 \div 2 = 3$	$8 \div 2$ हा भागाकार आधी केला, तर $48 \div 8 \div 2 = 48 \div 4 = 12$

म्हणजे या उदाहरणातही एकाच राशीच्या दोन भिन्न किमती येतात हे योग्य नाही. वरील दोन्ही उदाहरणांत एकाच राशीच्या दोन वेगवेगळ्या किमती का आल्या ? दिलेल्या राशीतील क्रियांचा क्रम आपण बदलला, हे त्याचे कारण आहे.

कंसाचा उपयोग

एका राशीची किंमत एकच असावी यासाठी कोणती क्रिया आधी करायची हे समजणे आवश्यक असते. यासाठी कंसाचा उपयोग करतात. जी क्रिया आधी करावी असे अपेक्षित असते, ती कंसामध्ये लिहितात.

जसे, $75 + 25 \times 10$ या राशीत बेरीज आधी करणे अपेक्षित असेल, तर राशीची मांडणी $(75 + 25) \times 10$ अशी करावी लागेल. जर मांडणी $75 + (25 \times 10)$ अशी केली तर आधी गुणाकार करणे अपेक्षित असेल.

$\therefore (75 + 25) \times 10$ या राशीची किंमत 1000 आहे.

आणि $75 + (25 \times 10)$ या राशीची किंमत 325 आहे.

तसेच, $(48 \div 8) \div 2 = 3$ आणि $48 \div (8 \div 2) = 12$

कंसाचा वापर एकसारखा करावा लागू नये, म्हणून क्रियांच्या क्रमाविषयी पुढील नियम आहेत.

(1) कंसात दिलेली क्रिया प्रथम करावी.

(2) नंतर राशीमध्ये एकापेक्षा अधिक क्रिया असतील, तर गुणाकार व भागाकार या क्रिया, डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील त्या क्रमाने कराव्या.

(3) नंतर बेरीज व वजाबाकी या क्रिया, डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील, त्या क्रमाने कराव्या.

(4) कंसात एकापेक्षा अधिक क्रिया असतील, तर वरील दोन नियम पाळून त्या आधी कराव्या.

या नियमांचा उपयोग करून पुढे सोडवून दिलेली उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) सोपे रूप द्या. $196 - 60 \times 3 \div 4$

राशीत वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या तीन क्रिया आहेत. प्रथम गुणाकार, भागाकार या क्रिया डावीकडून उजवीकडे क्रमाने करू.

$196 - 60 \times 3 \div 4$	
$= 196 - 180 \div 4$	60×3 हा गुणाकार केला.
$= 196 - 45$	$180 \div 4$ हा भागाकार केला. तो 45 आला.
$= 151$	नंतर $196 - 45$ ही वजाबाकी केली.

उदा. (2) सोपे रूप द्या. $243 + 6 \times (45 - 28 - 17)$

$243 + 6 \times (45 - 28 - 17)$	प्रथम कंसातील वजाबाकी क्रिया
$= 243 + 6 \times (17 - 17)$	डावीकडून उजवीकडे केली.
$= 243 + 6 \times 0$	
$= 243 + 0$	बेरीज व गुणाकार यांपैकी गुणाकार
$= 243$	ही क्रिया आधी केली. शेवटी बेरीज केली.

उदा. (3) सोपे रूप द्या. $(8 \times 2 - 6) \div (3 + 14 \div 7)$

दिलेल्या राशीत कंसाचा वापर दोन वेळा केला आहे. आधी पहिल्या कंसातील राशीचे सोपे रूप काढू.

रीत	स्पष्टीकरण
$8 \times 2 - 6$	
$= 16 - 6$	प्रथम गुणाकार केला.
$= 10$	नंतर वजाबाकी केली.

आता दुसऱ्या कंसातील राशीला सोपे रूप देऊ.

$3 + 14 \div 7$	
$= 3 + 2$	प्रथम भागाकार केला.
$= 5$	नंतर बेरीज केली.

आता दिलेल्या राशीचे सोपे रूप काढू.

$(8 \times 2 - 6) \div (3 + 14 \div 7)$

$= 10 \div 5 = 2$

काही वेळा क्रियांचा क्रम स्पष्ट होण्यासाठी एकापेक्षा जास्त वेळा कंसांचा उपयोग करावा लागतो. अशा वेळी '( )' या साध्या कंसाबरोबरच '[ ]' अशा चौकटी कंसाचा, तसेच '{ }' अशा महिरपी कंसाचा उपयोग करतात. एकापेक्षा जास्त प्रकारचे कंस वापरले असतील, तर प्रथम सर्वांत आतील कंसातील क्रिया कराव्या. पुढील उदाहरणावरून हे समजून घ्या.

उदा. (4) सोपे रूप द्या.

$25 \times [113 - (30 \div 2 \div 3 + 4) + 2 \times (19 - 6)]$

प्रथम आतील कंस सोडवू.

$30 \div 2 \div 3 + 4$	दिलेली राशी $= 25 \times [113 - 9 + 2 \times 13]$
$= 15 \div 3 + 4$	$= 25 \times [113 - 9 + 26]$
$= 5 + 4$	$= 25 \times [104 + 26]$
$= 9$	$= 25 \times 130$
	$= 3250$

टीप : एखादी संख्या आणि कंसातील राशी यांत गुणाकाराची क्रिया अपेक्षित असेल, तर संख्या व कंस यांमध्ये '×' हे चिन्ह न लिहिण्याचा संकेत आहे. जसे, 5 (14 − 11) याचा अर्थ $5 \times (14 - 11)$ असा असतो.

उदा. (5) $3 + 9 \div 3 - 1$ या राशीची किंमत 3 येईल यासाठी राशीत योग्य ठिकाणी कंस घाला.

दिलेली राशी : $3 + 9 \div 3 - 1$

नियमानुसार क्रिया केल्यास राशीची किंमत पुढे दिल्याप्रमाणे येईल.

$$\begin{aligned} 3 + 9 \div 3 - 1 &= 3 + 3 - 1 \\ &= 6 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

पण राशीची किंमत 3 आली पाहिजे. यासाठी खाली दिल्याप्रमाणे कंस घालून पाहू.

$$\begin{aligned} \text{राशी} &= (3 + 9) \div 3 - 1 \\ &= 12 \div 3 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

उदाहरणसंग्रह 10

1. खालील राशींना सोपे रूप द्या.

(1) $12 \times 14 \div 7$

(2) $160 \times 10 \div 5 \times 4$

(3) $160 \times 10 \div (5 \times 4)$

(4) $(160 \times 10) \div (5 \times 4)$

(5) $94 - 61 - 23$

(6) $94 - (61 - 23)$

(7) $237 - 87 + 30$

(8) $237 - (87 + 30)$

(9) $450 \div 10 \div 5$

(10) $450 \div (10 \div 5)$

(11) $103 + 91 \times 2 + 8$

(12) $(103 + 91) \times (2 + 8)$

(13) $216 \div (24 - 6) + 2 \times (53 - 14 - 6)$

(14) $[18 + 5\ (7 - 3)] + 64 \div [20 - (8 \times 2)]$

(15) $210 \div \{125 - [5 + 3\ (14 - 9)]\}$

2. पुढील प्रत्येक राशीपुढे तिची किंमत किती यावी हे दिले आहे. ती किंमत येण्यासाठी राशीत योग्य जागी कंस घाला.

(1) $18 \div 6 + 3$ (किंमत 2)

(2) $4 \times 13 + 2 + 40$ (किंमत 100)

(3) $100 + 20 \div 5$ (किंमत 24)

(4) $100 \div 20 \div 5$ (किंमत 25)

(5) $13 - 9 + 2$ (किंमत 2)

(6) $30 - 10 - 10$ (किंमत 30)

(7) $30 - 10 \div 10$ (किंमत 2)

(8) $50 - 35 + 15$ (किंमत 0)

3. संख्येसाठी अक्षराचा वापर

गणित विषयात लेखन करताना चिन्हांचा वापर करतात. 'पाच आणि नऊ या संख्यांची बेरीज' हे चिन्हांचा वापर करून थोडक्यात, '5 + 9' असे लिहितात.

चिन्हांचा वापर केल्याने लेखन आटोपशीर होते, तसेच ते समजण्यास सुलभ होते. संख्यांसाठी अक्षरांचा वापर केल्यानेही गणिताचे लेखन सोपे होते.

संख्येसाठी अक्षराचा वापर दोन प्रकारे करतात.

प्रकार एक : माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षराचा वापर

'आठपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या कोणती ?' या प्रश्नाचे उत्तर शोधण्यासाठी आपण '8 + 4' ही बेरीज करू. येणारी संख्या 12 हे प्रश्नाचे उत्तर आहे.

वरील प्रश्नातील 'आठपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या' ही माहिती चिन्हाचा वापर करून आपण (8 + 4) अशी लिहिली.

आता 'एका संख्येपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या', ही माहिती चिन्हांत कशी लिहिता येईल हे पाहू.

'एका संख्येपेक्षा' म्हणजे नेमक्या कोणत्या संख्येपेक्षा हे माहीत नाही. तरीही हे चिन्हांत लिहिता येईल. त्यासाठी माहीत नसलेली संख्या a या अक्षराने दाखवू. आता 'एका संख्येपेक्षा चारने मोठी असणारी संख्या' ही माहिती चिन्हांत $(a + 4)$ अशी लिहिता येईल.

त्याचप्रमाणे 'एका संख्येपेक्षा 7 ने लहान असणारी संख्या' हे $(b - 7)$ असे लिहिता येईल. येथे माहीत नसलेल्या संख्येसाठी b हे अक्षर घेतले आहे.

येथे लक्षात घ्या, की दोन किंवा अधिक संख्यांत बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रिया केल्यावर एक संख्याच मिळते. जसे, 8 व 4 यांची बेरीज करून 12 ही संख्या मिळते; परंतु अक्षर आणि संख्या यांच्यात क्रियेचे चिन्ह वापरून येणारी राशी [$(a + 4)$, $(b - 7)$ इत्यादी] आणखी सोपी करता येत नाही.

'एक संख्या आणि 2 यांचा गुणाकार' ही माहिती, 'एका संख्ये'साठी m

हे अक्षर घेऊन '$m \times 2$' किंवा $2 \times m$ अशी लिहिता येईल; **परंतु अक्षर आणि संख्या यांचा गुणाकार असेल, तर संख्या आधी लिहिण्याची आणि गुणाकाराचे चिन्ह न लिहिण्याची पद्धत आहे.** या पद्धतीनुसार $m \times 2$ किंवा $2 \times m$ हा गुणाकार $2m$ असा लिहितात. त्याचप्रमाणे $10 \times k$ किंवा $k \times 10$ हा गुणाकार $10k$ असा लिहितात.

माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षराचा वापर करून लेखन केलेली आणखी काही उदाहरणे पुढे दिलेली आहेत. त्यांचा अभ्यास करा. संख्येसाठी $a,b,c,....,z$ यांपैकी कोणतेही अक्षर घेतले तरी चालते, हे लक्षात घ्या.

माहिती	अक्षर वापरून लेखन
(1) 10 आणि एक संख्या यांची बेरीज	$10 + p$
(2) 23 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार	$23 \times d$ किंवा $23d$
(3) 18 ला एका संख्येने भागले, तर येणारा भागाकार	$18 \div y$ किंवा $\frac{18}{y}$
(4) एका संख्येला 18 ने भागले, तर येणारा भागाकार	$\frac{x}{18}$ किंवा $x \div 18$
(5) एका संख्येतून 15 वजा केले, तर येणारी वजाबाकी	$a - 15$
(6) 15 तून एक संख्या वजा केली, तर येणारी वजाबाकी	$15 - b$
(7) एका संख्येपेक्षा 2 ने लहान संख्या	$(d - 2)$
(8) काही आंब्यांपैकी 6 आंब्यांचा रस करून उरलेले आंबे	$(m - 6)$
(9) काही पेरूंचे 3 समान वाटे केले, तर प्रत्येक वाट्यातील पेरू	$\frac{p}{3}$

उदाहरणसंग्रह 11

1. प्रत्येक उदाहरणात, माहीत नसलेल्या संख्येसाठी x हे अक्षर वापरून लेखन करा.

(1) एका संख्येतून 5 वजा केले, तर येणारी वजाबाकी

(2) 5 मधून एक संख्या वजा केली, तर येणारी वजाबाकी

(3) शहनाजजवळची काही आणि हेमंतजवळची 6 मिळून एकूण पुस्तके

(4) 24 ने एका संख्येला भागले, तर येणारा भागाकार

(5) 24 ला एका संख्येने भागले, तर येणारा भागाकार

(6) एका संख्येची चौपट

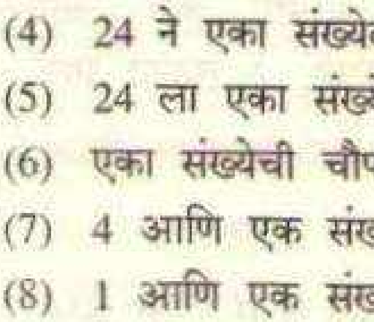
(7) 4 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार

(8) 1 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार

(9) प्रत्येकाला 10 याप्रमाणे काही मुलांना वाटलेली बोरे

(10) 100 किग्रॅ तांदूळ काही कुटुंबांनी सारखे वाटून घेतले, तर प्रत्येक कुटुंबाला मिळालेले तांदूळ

प्रकार दोन : सूत्र किंवा नियम तयार करण्यासाठी अक्षराचा वापर



सोबतच्या आकृतीत रेख AB हा वर्तुळाचा व्यास आहे. रेख OA आणि रेख OB त्रिज्या आहेत. व्यास व त्रिज्या हे शब्द संख्यांसाठी सुद्धा वापरतात. जसे, वर्तुळाचा व्यास 10 सेमी आहे, त्रिज्या 5 सेमी आहे, असे आपण म्हणतो.

व्यास = 2 × त्रिज्या, हे तुम्हाला माहीत आहे. व्यासासाठी d आणि त्रिज्येसाठी r ही अक्षरे वापरून हेच सूत्र थोडक्यात $d = 2r$ असे होईल.

आता पुढील बेरजा विचारात घ्या.

(1) $13 + 9 = 22$, $9 + 13 = 22$

(2) $41 + 37 = 78$, $37 + 41 = 78$

(3) $100 + 200 = 300$, $200 + 100 = 300$

(4) $25 + 103 = 128$, $103 + 25 = 128$

बेरजांचे निरीक्षण केल्यावर आपल्या लक्षात येते, की दोन संख्यांची बेरीज आणि त्याच दोन संख्या उलट क्रमाने घेऊन केलेली बेरीज तेवढीच येते. म्हणजे $13 + 9 = 9 + 13$; $41 + 37 = 37 + 41$ इत्यादी.

हाच **नियम** संख्यांसाठी a व b या अक्षरांचा उपयोग करून, थोडक्यात $\boldsymbol{a + b = b + a}$ असा लिहिता येईल.

आता कोणतीही संख्या व 0 यांच्या गुणाकाराची काही उदाहरणे पाहू.

$14 \times 0 = 0$; $3 \times 0 = 0$; $19 \times 0 = 0$ इत्यादी.

यावरून असा नियम लक्षात येतो, की कोणतीही संख्या $\times 0 = 0$. संख्येसाठी a हे अक्षर वापरून हा **नियम** $\boldsymbol{a \times 0 = 0}$ असा थोडक्यात लिहिता येतो.

उदाहरणसंग्रह 12

1. कंसात दिलेली अक्षरे वापरून पुढील सूत्रे लिहा.

(1) आयताची परिमिती = 2 × लांबी + 2 × रुंदी

(लांबीसाठी l, रुंदीसाठी b)

(2) चौरसाची परिमिती = 4 × बाजूची लांबी. (बाजूची लांबी a)

(3) त्रिकोणाची परिमिती = त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंच्या लांबीची बेरीज

(त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी a, b, c)

(4) नफा = विक्री – खरेदी (नफा = p, विक्री = s, खरेदी = c)

2. संख्येसाठी कंसात दिलेल्या अक्षरांचा वापर करून दिलेले नियम लिहा.

(1) दोन संख्यांचा गुणाकार आणि् त्याच दोन संख्या उलट क्रमाने घेऊन केलेला गुणाकार, तेवढाच येतो. (a, b)

(2) कोणत्याही संख्येला 1 ने गुणल्यास गुणाकार तीच संख्या येते. (n)

4. बिंदू, रेषा, प्रतल

❋ उजळणी

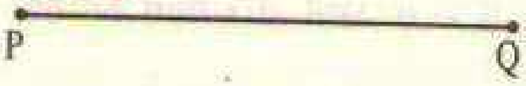
बिंदू

सोबतच्या आकृतीमध्ये A, B व C हे तीन बिंदू दाखवले आहेत.

रेषा

सोबतची आकृती रेषा XY किंवा रेषा L ची आहे.

रेषाखंड

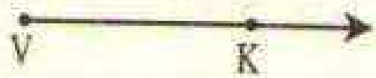


शेजारील आकृती रेख PQ ची किंवा रेख QP ची आहे.

शेजारील आकृतीत रेख DE, रेख EF व रेख DF आहेत, हे लक्षात घ्या.

किरण

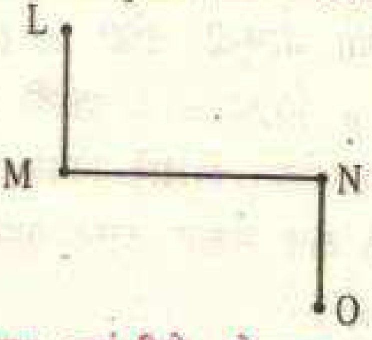
शेजारील आकृतीत किरण VK दाखवलेला आहे.



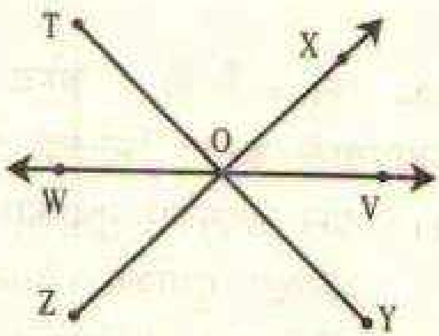
उदाहरणसंग्रह 13

1. खालील आकृत्यांमधील रेषाखंड, रेषा व किरण यांची नावे लिहा.

(1)



(2)

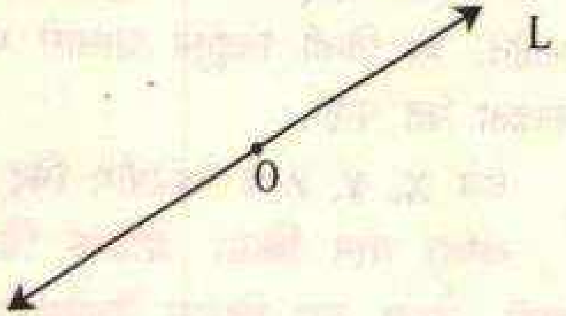


रेषाखंडाच्या लांबीचे लेखन

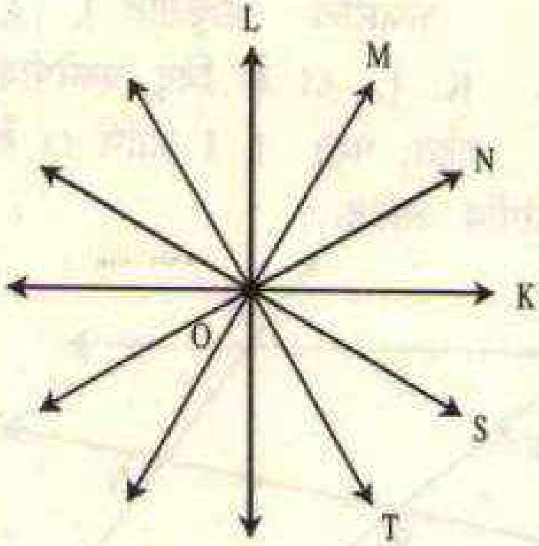
रेषाखंड AB ची लांबी 4 सेमी आहे. याचे लेखन $l(AB) = 4$ सेमी असे करतात आणि याचे वाचन 'रेषाखंड AB ची लांबी 4 सेमी आहे' असे करतात. रेषाखंड PQ ची लांबी 2 सेमी आहे. याचे लेखन '$l(PQ) = 2$ सेमी' असे करतात. याचे वाचन 'रेषाखंड PQ ची लांबी 2 सेमी आहे', असे करतात.

एका बिंदूतून जाणाऱ्या रेषा

बाजूची आकृती पाहा. आकृतीत O हा एक बिंदू आहे. या बिंदूतून L ही एक रेषा जाते.



O याच बिंदूतून जाणाऱ्या आणखी किती रेषा काढता येतात, ते पाहू.



O या एका बिंदूतून रेषा M, रेषा N, रेषा K, --- अशा असंख्य रेषा काढता येतात.

एका बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा काढता येतात.

दोन बिंदूतून जाणाऱ्या रेषा

सोबतच्या आकृतीत A व B हे दोन भिन्न बिंदू असून या दोन बिंदूतून रेषा AB जाते.

कोणत्याही दोन भिन्न बिंदूतून एक आणि एकच रेषा जाते.

येथे एक म्हणजे कमीत कमी एक आणि एकच म्हणजे जास्तीत जास्त एक हे लक्षात घ्या.

एकरेषीय बिंदू व नैकरेषीय बिंदू

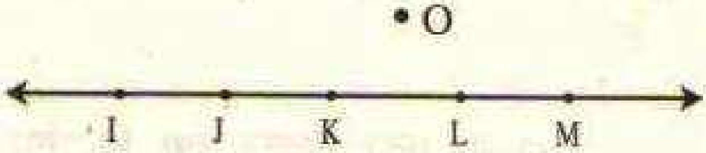
बाजूच्या आकृतीत L, M, N हे तीन बिंदू आहेत. या तिन्ही बिंदूतून फक्त एकच रेषा काढता येते, म्हणजेच L, M, N हे एकरेषीय बिंदू आहेत.

तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त बिंदूतून एकच रेषा काढता येत असेल, तर त्या बिंदूंना एकरेषीय बिंदू म्हणतात.

बाजूच्या आकृतीत X, Y, Z हे तीन बिंदू आहेत. या तिन्ही बिंदूंतून जाणारी एकही रेषा काढता येत नाही.

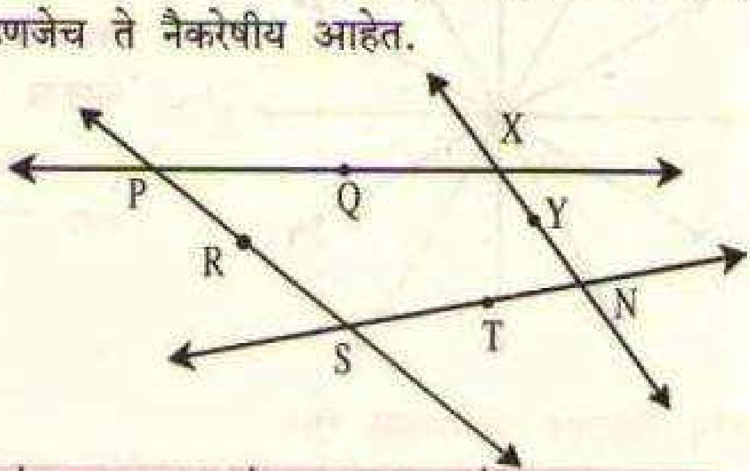
येथे X, Y, Z हे नैकरेषीय बिंदू आहेत.

जेव्हा तीन किंवा अधिक बिंदूंतून जाणारी एकही रेषा काढता येत नाही, तेव्हा त्या बिंदूंना नैकरेषीय बिंदू म्हणतात.



शेजारील आकृतीत I, J, K, L, M हे बिंदू एकरेषीय आहेत; परंतु I, J आणि O हे मात्र एकरेषीय बिंदू नाहीत, म्हणजेच ते नैकरेषीय आहेत.

सोबतच्या आकृतीतील काही एकरेषीय व काही नैकरेषीय बिंदू खालील तक्त्यात दाखवले आहेत. ते अभ्यासा.

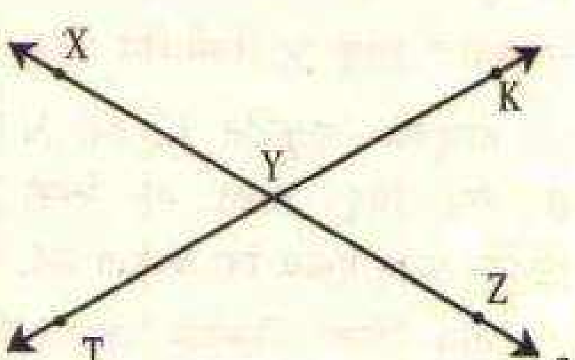


एकरेषीय बिंदू	X, Y, N	P, Q, X	S, T, N	P, R, S
नैकरेषीय बिंदू	X, Y, R	P, Q, T	P, R, Y	R, S, T

उदाहरणसंग्रह 14

1. आकृतीचे निरीक्षण करून तक्ता पूर्ण करा.

बिंदूंची नावे	एकरेषीय बिंदू	नैकरेषीय बिंदू
K, Y, T	✓	
X, Y, T		✓
T, Y, Z		
X, Y, Z		

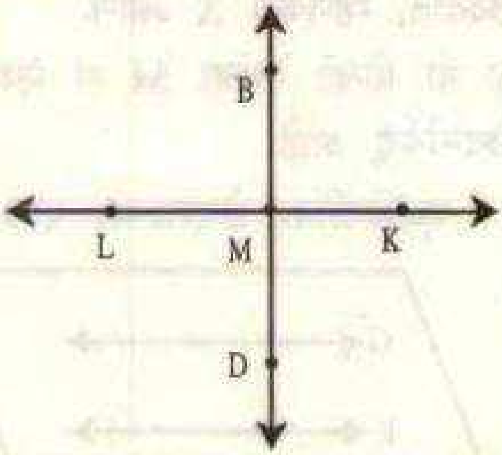


2. T हा एक बिंदू घ्या. या बिंदूतून किती रेषा काढता येतील ?

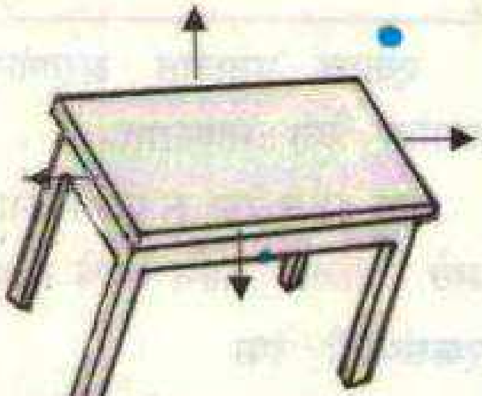
3. शेजारील आकृतीत P, Q, R हे तीन बिंदू आहेत. प्रत्येक दोन बिंदूंतून जाणारी रेषा काढा. अशा किती रेषा काढता येतील ?

4. S व R हे दोन बिंदू घ्या. या दोन बिंदूंना सामावणाऱ्या (बिंदूंतून जाणाऱ्या) किती रेषा काढता येतील ?

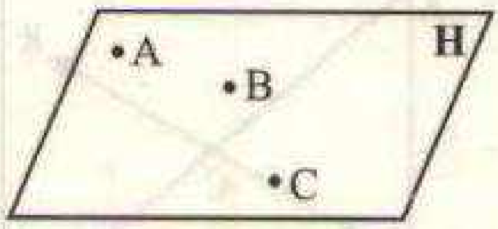
5. बाजूची आकृती पाहा. त्यामधील एकरेषीय व नैकरेषीय (तीन - तीन) बिंदूंचे गट लिहा.



प्रतल



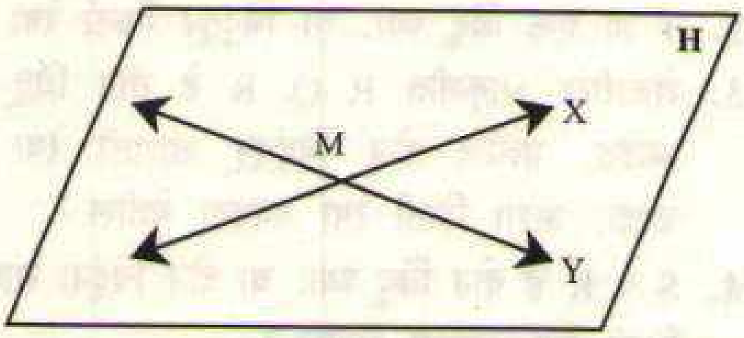
शेजारील चित्रात टेबलाचा पृष्ठभाग छायांकित करून दाखवला आहे. कल्पना करा, की या टेबलाचा पृष्ठभाग सर्व दिशांनी आपण वाढवत गेलो, तर तो मोठा होत जाईल. सर्व दिशांनी अमर्याद असलेला सपाट पृष्ठभाग म्हणजेच प्रतल होय.



जरी प्रतल हे अमर्याद असले, तरी सोईसाठी ते सोबत दिलेल्या आकृतीप्रमाणे दाखवतात. प्रत्येक वेळी प्रतल अमर्याद आहे हे दाखवण्यासाठी बाण दाखवले जात नाहीत. प्रतलाचे नाव एका अक्षराने दाखवतात. जसे, प्रतल H.

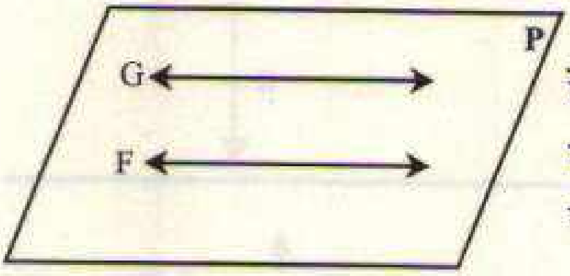
तीन नैकरेषीय बिंदूंतून एकही रेषा जात नाही; परंतु तीन नैकरेषीय बिंदूंतून (जसे आकृतीत बिंदू A, B, C) एक व एकच प्रतल जाते.

समांतर रेषा



सोबतच्या आकृतीतील H या प्रतलातील रेषा X आणि रेषा Y एकमेकींना 'M' या एकाच बिंदूत छेदतात, म्हणजेच X आणि Y या दोन्ही रेषांचा M हा एकच सामाईक बिंदू आहे. M बिंदू या रेषांचा **छेदनबिंदू** आहे.

एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन रेषांचा छेदनबिंदू एक व एकच असतो.



सोबतच्या आकृतीत P या प्रतलातील रेषा G व रेषा F एकमेकींना छेदत नाहीत, म्हणजेच त्यांचा एकही बिंदू सामाईक नाही. या रेषा समांतर रेषा आहेत.

एकाच प्रतलात असणाऱ्या पण एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

रेषा G व रेषा F एकमेकींना समांतर आहेत, हेच चिन्हात 'रेषा G ∥ रेषा F' असे लिहितात आणि त्याचे वाचन 'रेषा G समांतर रेषा F' असे करतात.

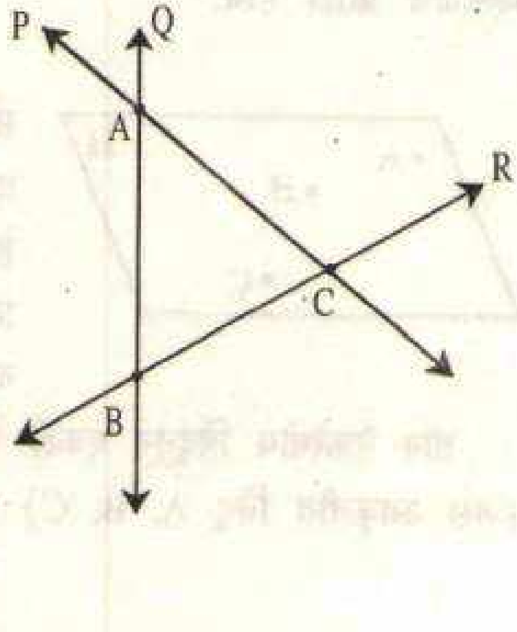
एकसंपाती रेषा

बाजूच्या आकृतीत रेषा P व रेषा Q यांचा छेदनबिंदू A आहे.

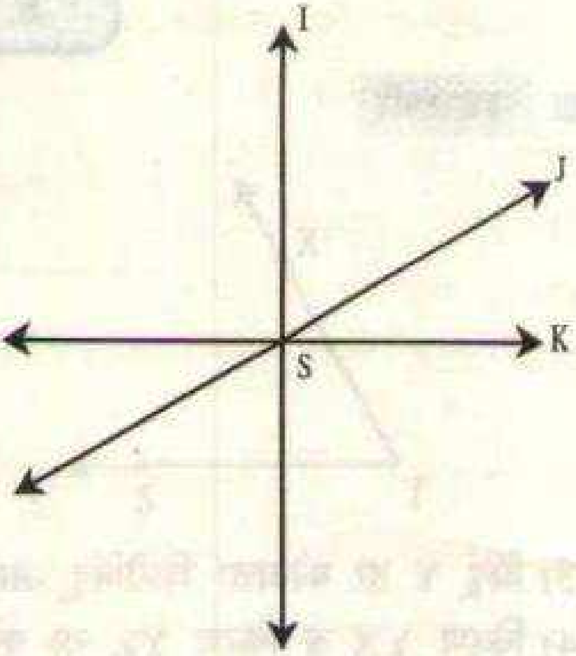
रेषा Q व रेषा R यांचा छेदनबिंदू B आहे.

रेषा R व रेषा P यांचा छेदनबिंदू C आहे.

येथे रेषा P, Q आणि R यांपैकी दोन-दोन रेषा विचारात घेतल्यास त्यांचे छेदनबिंदू वेगवेगळे आहेत.



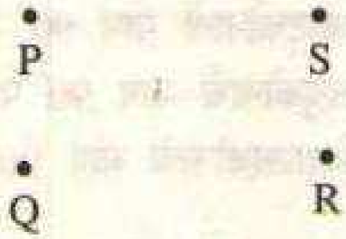
शेजारील आकृतीत रेषा I, रेषा J व रेषा K या तिन्ही रेषा S या एकाच बिंदूत छेदतात. रेषा I, रेषा J व रेषा K या एकसंपाती रेषा आहेत. त्यांचा छेदनबिंदू 'S' हा संपात बिंदू आहे.



एकाच बिंदूत छेदणाऱ्या तीन किंवा अधिक रेषांना एकसंपाती रेषा म्हणतात व त्यांच्या छेदनबिंदूला संपात बिंदू म्हणतात.

उदाहरणसंग्रह 15

1. शेजारील आकृतीत P, Q, R व S हे चार बिंदू दिलेले आहेत. यांपैकी दोन-दोन बिंदूंना सामावणाऱ्या रेषा काढा व प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) Q हा संपात बिंदू असणाऱ्या रेषांची नावे लिहा.

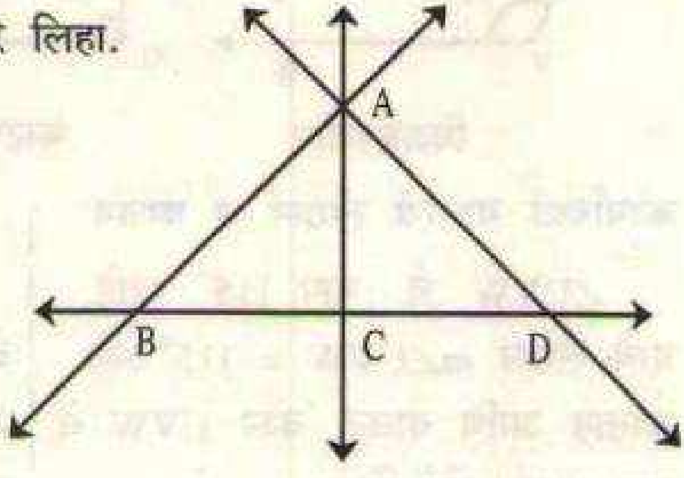
(2) रेषा PS, रेषा SR, रेषा QS व रेषा PR यांपैकी एकसंपाती रेषा कोणत्या ?

2. आकृती पाहा व प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) एकरेषीय बिंदूंची नावे लिहा.

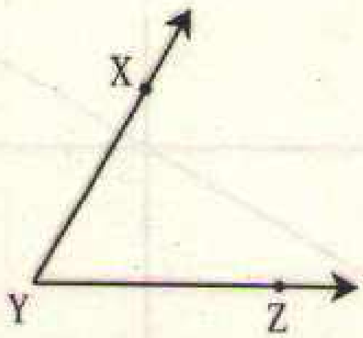
(2) नैकरेषीय बिंदूंचे सर्व गट लिहा.

(3) एकसंपाती रेषा आणि त्यांचा संपात बिंदू लिहा.



5. कोन

उजळणी



बाजूची आकृती पाहा.

(1) किरण YX व किरण YZ या दोन किरणांचा Y हा सामाईक आरंभबिंदू आहे.

(2) या दोन किरणांपासून कोन XYZ तयार झालेला आहे.

(3) बिंदू Y हा कोनाचा शिरोबिंदू आहे.

(4) किरण YX व किरण YZ या कोनाच्या भुजा आहेत.

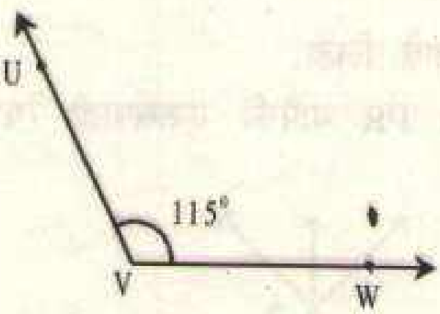
(5) XYZ हा कोन, चिन्ह वापरून $\angle XYZ$ किंवा $\angle ZYX$ असा लिहितात.

(6) काटकोन, लघुकोन व विशालकोन हे कोनांचे तीन प्रकार आहेत.

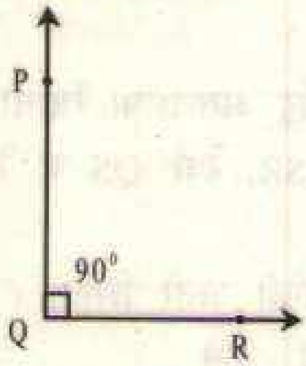
(7) काटकोनाचे माप 90° असते.

(8) लघुकोनाचे माप 90° पेक्षा कमी असते.

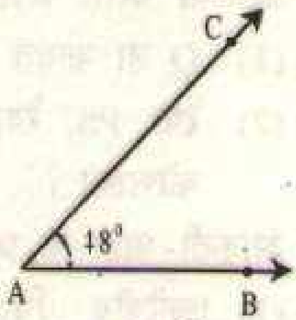
(9) विशालकोनाचे माप 90° पेक्षा जास्त असते.



विशालकोन



काटकोन



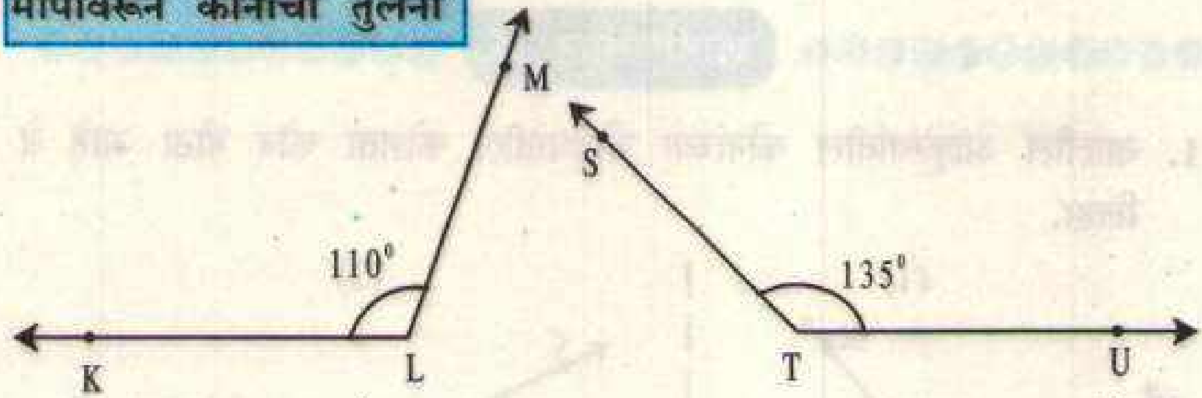
लघुकोन

कोनांच्या मापांचे लेखन व वाचन

$\angle UVW$ चे माप 115° आहे. याचे लेखन $m\angle UVW = 115^\circ$ असे करतात आणि वाचन 'कोन UVW चे माप 115° आहे' किंवा माप कोन UVW = 115° असे करतात.

$\angle BAC$ चे माप 48° आहे. याचे लेखन $m\angle BAC = 48^\circ$ असे करतात. आणि वाचन 'कोन BAC चे माप 48° आहे' असे करतात किंवा माप कोन BAC = 48° असे करतात.

मापांवरून कोनांची तुलना



$m\angle KLM = 110^\circ$ $m\angle STU = 135^\circ$

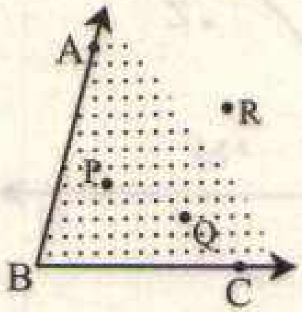
$\angle STU$ चे माप $\angle KLM$ च्या मापापेक्षा जास्त आहे.

दोन कोनांपैकी ज्याचे माप जास्त असते तो दुसऱ्या कोनापेक्षा मोठा असतो.

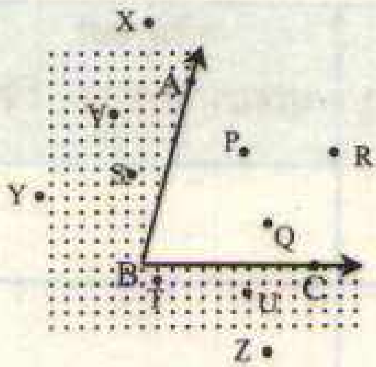
$\therefore$ $\angle STU$ हा $\angle KLM$ पेक्षा मोठा आहे.

कोनाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग

- बाजूच्या आकृतीत बिंदू A, बिंदू B, बिंदू C, बिंदू K व बिंदू L हे $\angle ABC$ वर आहेत.

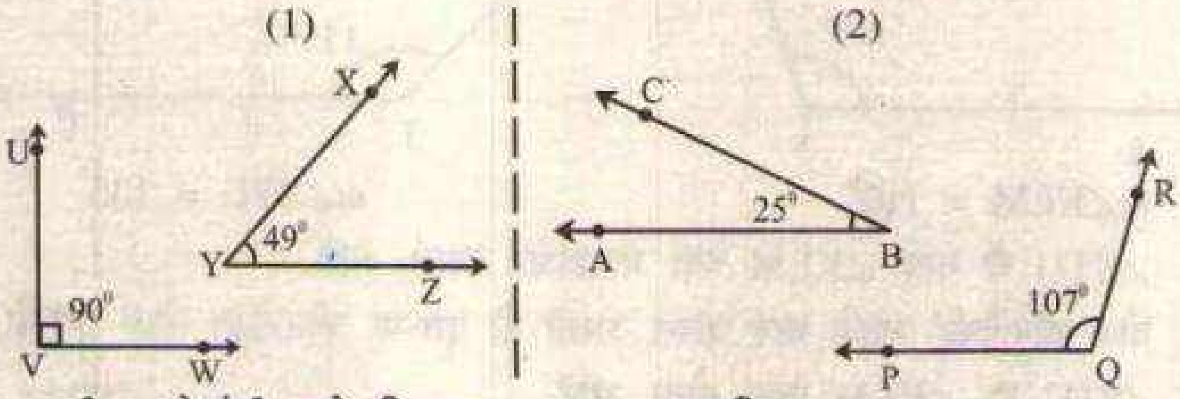


- बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ च्या अंतर्भागाचा काही भाग ठिपक्यांनी दाखवला आहे. किरण BA व किरण BC अमर्याद आहेत, म्हणून $\angle ABC$ चा अंतर्भागही अमर्याद आहे. बिंदू P, Q व R हे $\angle ABC$ च्या अंतर्भागात आहेत.

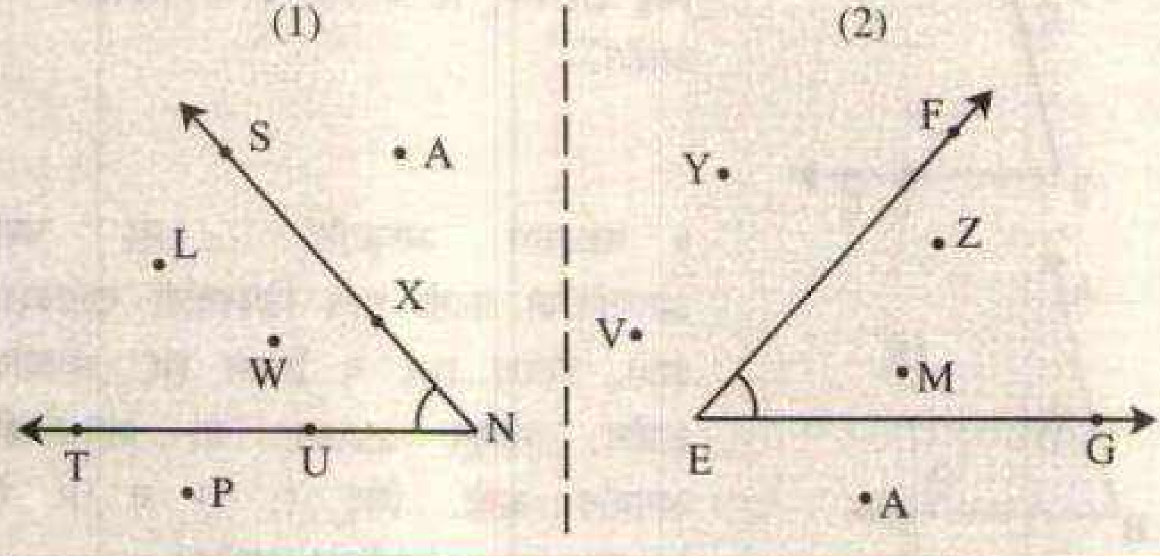


- बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ च्या बाह्यभागाचा काही भाग ठिपक्यांनी दाखवला आहे. कोनाचा बाह्यभागही अमर्याद असतो, हे लक्षात घ्या. बिंदू S, T, U, V, X, Y व Z हे $\angle ABC$ च्या बाह्यभागातील बिंदू आहेत.

1. खालील आकृत्यांतील कोनांच्या जोड्यांतील कोणता कोन मोठा आहे ते लिहा.



2. वरील कोनांची मापे चिन्हाचा वापर करून लिहा.
3. पुढे दिलेल्या आकृत्यांच्या संदर्भात कोनावरील बिंदूंची, कोनांच्या अंतर्भागातील बिंदूंची व कोनांच्या बाह्यभागातील बिंदूंची नावे लिहा.

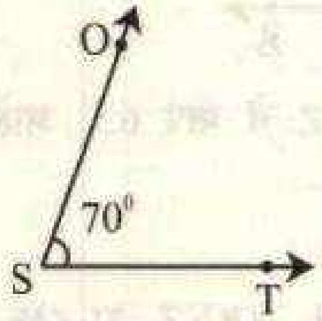


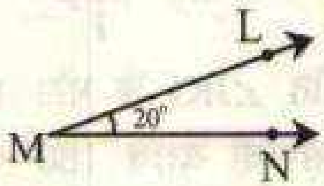
आकृती	कोनावरील बिंदू	कोनाच्या अंतर्भागातील बिंदू	कोनाच्या बाह्यभागातील बिंदू
आ. (1)			
आ. (2)			

6. कोनांच्या जोड्या

भूमितीचा अभ्यास करताना कोनांच्या काही विशिष्ट जोड्यांचा वापर नेहमी करावा लागतो. कोनांच्या अशा काही जोड्यांचा अभ्यास करू.

कोटिकोनांची जोडी

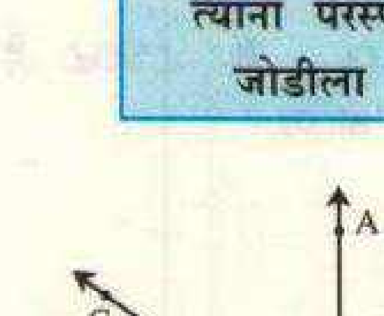




वरील आकृतीत, $\angle OST$ चे माप 70° व $\angle LMN$ चे माप 20° आहे. $\angle OST$ व $\angle LMN$ या दोन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 90° येते.

येथे $\angle OST$ व $\angle LMN$ ही कोटिकोनांची जोडी आहे. $\angle OST$ हा $\angle LMN$ चा कोटिकोन आहे, तसेच $\angle LMN$ हा $\angle OST$ चा कोटिकोन आहे.

> **ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90° असते, त्यांना परस्परांचे कोटिकोन म्हणतात. त्या कोनांच्या जोडीला कोटिकोनांची जोडी असेही म्हणतात.**



बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ व $\angle CBD$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

दोन कोटिकोनांपैकी एकाचे माप दिलेले असेल, तर दुसऱ्या कोनाचे माप खालील पद्धतीने काढतात.

> कोटिकोनाचे माप $= 90^\circ -$ दिलेल्या कोनाचे माप

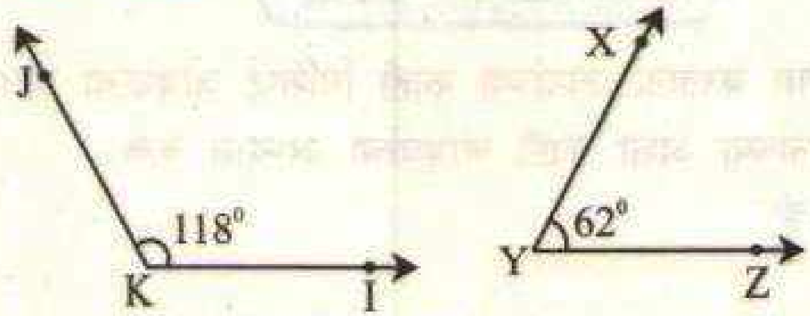
उदा. एका कोनाचे माप 35° आहे, तर त्याच्या कोटिकोनाचे माप किती ?

कोटिकोनांच्या मापांची बेरीज 90° असते.

त्यातील एका कोनाचे माप 35° आहे,

म्हणून त्याच्या कोटिकोनाचे माप $= 90 - 35 = 55^\circ$ आहे.

पूरककोनांची जोडी

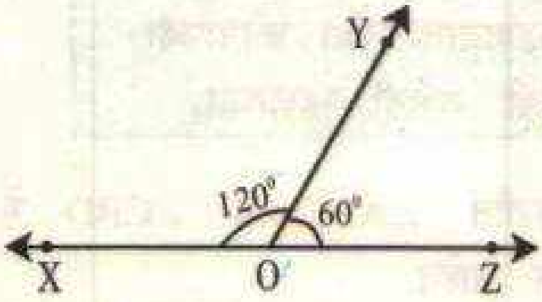


वरील आकृतीत $\angle JKI$ चे माप 118° व $\angle XYZ$ चे माप 62° आहे. या दोन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° येते.

$\angle JKI$ व $\angle XYZ$ ही पूरककोनांची जोडी आहे.

$\angle JKI$ हा $\angle XYZ$ चा पूरककोन आहे. तसेच $\angle XYZ$ हा $\angle JKI$ चा पूरककोन आहे. $\angle JKI$ व $\angle XYZ$ हे परस्परांचे पूरककोन आहेत.

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, त्या दोन कोनांना परस्परांचे पूरककोन असे म्हणतात. त्या कोनांच्या जोडीला पूरककोनांची जोडी असेही म्हणतात.



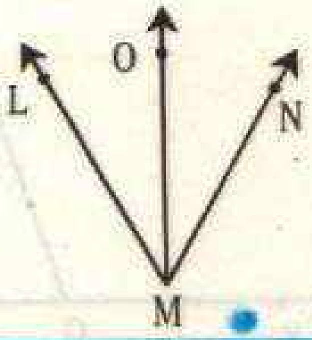
आकृतीत $\angle XOY$ व $\angle YOZ$ हे परस्परांचे पूरककोन आहेत.

दोन परस्पर पूरककोनांपैकी एकाचे माप दिले असेल, तर दुसऱ्या कोनाचे माप खालील पद्धतीने काढतात.

पूरककोनाचे माप = 180° − दिलेल्या कोनाचे माप

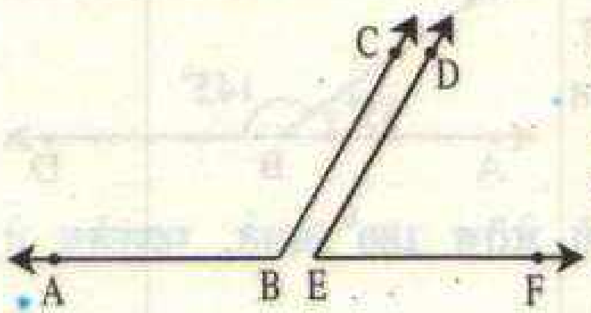
उदा. एका कोनाचे माप 105° असल्यास त्याच्या पूरककोनाचे माप काढा.
पूरककोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.
त्यांतील एका कोनाचे माप 105° आहे,
म्हणून त्याच्या पूरककोनाचे माप $= 180 - 105 = 75^\circ$

संलग्न कोनांची जोडी



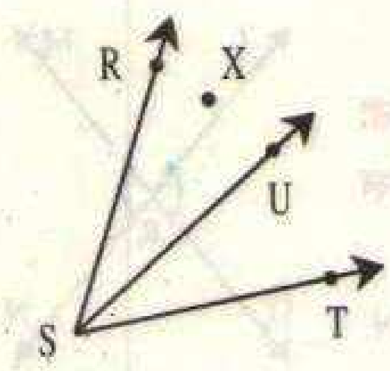
बाजूच्या आकृतीत, $\angle LMO$ व $\angle OMN$ या दोन्ही कोनांची MO ही सामाईक भुजा आहे. $\angle LMO$ व $\angle OMN$ यांचे अंतर्भाग वेगवेगळे आहेत. येथे $\angle LMO$ व $\angle OMN$ ही **संलग्न कोनांची जोडी** किंवा **लगतच्या कोनांची जोडी** आहे.

ज्या दोन कोनांची एक भुजा सामाईक असते आणि त्यांचे अंतर्भाग वेगवेगळे असतात, त्या कोनांच्या जोडीला संलग्न कोनांची जोडी किंवा लगतच्या कोनांची जोडी म्हणतात.



(1) बाजूच्या आकृतीत $\angle ABC$ व $\angle FED$ मध्ये एकही भुजा सामाईक नाही, म्हणून $\angle ABC$ व $\angle FED$ हे संलग्न कोन किंवा लगतचे कोन नाहीत.

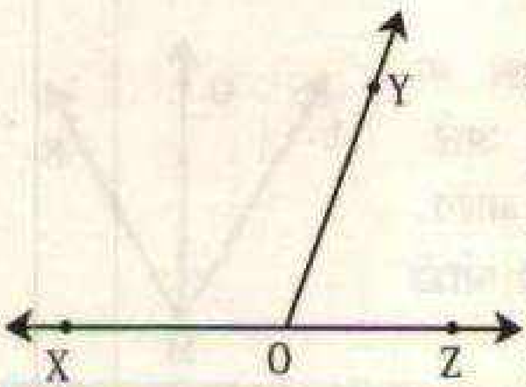
(2) $\angle RST$ व $\angle RSU$ यांची भुजा SR सामाईक आहे.



बाजूच्या आकृतीत X हा बिंदू $\angle RST$ च्या अंतर्भागात आहे, तसाच तो $\angle RSU$ च्याही अंतर्भागात आहे, म्हणजे $\angle RST$ व $\angle RSU$ यांचे अंतर्भाग वेगवेगळे नाहीत; म्हणून $\angle RST$ व $\angle RSU$ ही संलग्न कोनांची जोडी नाही. तसेच $\angle RST$ व $\angle UST$ हेही संलग्न कोन नाहीत.

रेषीय जोडीतील कोन

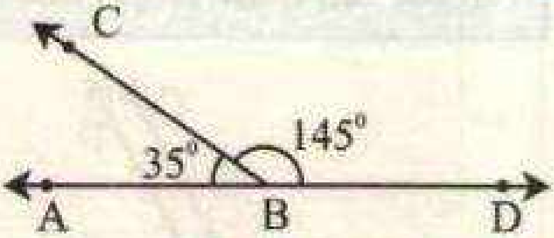
विरुद्ध किरण : सोबतच्या आकृतीत बिंदू P, Q, R एकरेषीय असून, बिंदू Q हा P व R यांच्या दरम्यान आहे. अशा वेळी किरण QP व किरण QR यांना **विरुद्ध किरण** म्हणतात.



शेजारील आकृतीत, $\angle XOY$ व $\angle YOZ$ हे संलग्न कोन आहेत. या दोन्ही कोनांची भुजा OY सामाईक आहे. $\angle XOY$ ची भुजा OX आणि $\angle YOZ$ ची भुजा OZ या असामाईक भुजा परस्पर विरुद्ध किरण आहेत. $\angle XOY$ व $\angle YOZ$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

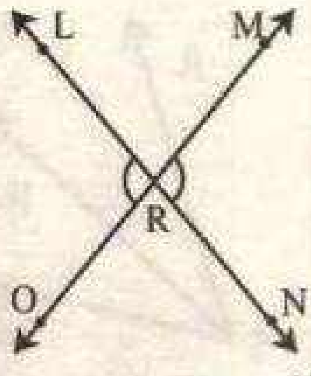
ज्या संलग्न कोनांच्या असामाईक भुजा विरुद्ध किरण असतात, त्या संलग्न कोनांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात.

सोबतच्या आकृतीत $\angle ABC$ व $\angle CBD$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत. या कोनांची मापे मोजून लिहिली आहेत त्यांची बेरीज 180° येते.



रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, म्हणजेच ते परस्पर पूरक असतात.

विरुद्ध कोनांची जोडी



शेजारील आकृतीत, रेषा LN व रेषा MO यांचा R हा छेदनबिंदू आहे. आकृतीतील कोनांच्या पुढील जोड्यांचे निरीक्षण करा.

(1) $\angle LRO$ व $\angle MRN$ (2) $\angle LRM$ व $\angle ORN$.

येथे $\angle LRO$ व $\angle MRN$ या कोनांच्या भुजा RL व भुजा RN परस्परांचे विरुद्ध किरण आहेत. तसेच याच कोनांच्या भुजा RO व भुजा RM हेदेखील विरुद्ध किरण आहेत.

येथे $\angle LRO$ व $\angle MRN$ ही विरुद्ध कोनांची जोडी आहे. त्याचप्रमाणे $\angle LRM$ व $\angle ORN$ हीदेखील विरुद्ध कोनांची जोडी आहे.

वरील आकृतीतील विरुद्ध कोनांच्या कोणत्याही जोडीतील कोनांची मापे मोजा आणि ही मापे समान आहेत हे पडताळून पाहा.

विरुद्ध कोनांच्या जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.

उदाहरणसंग्रह 17

1. काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्या कोनांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.

(1) 37° (2) 48° (3) 55° (4) 79° (5) 68°
(6) 10° (7) 25° (8) 40° (9) 89° (10) 17°

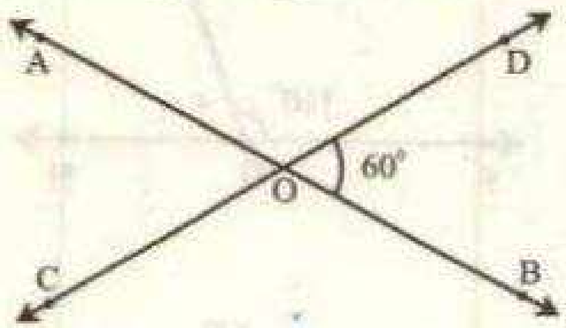
2. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्या कोनांच्या पूरककोनांची मापे लिहा.

(1) 65° (2) 24°. (3) 90° (4) 47° (5) 79°
(6) 58° (7) 154° (8) 125° (9) 140° (10) 165°

3. खालील कोनांच्या जोड्यांतील कोणत्या जोड्या कोटिकोनांच्या आहेत आणि कोणत्या पूरककोनांच्या आहेत ते लिहा.

(1) 69°, 111° (2) 26°, 64° (3) 90°, 90° (4) 50°, 40°
(5) 163°, 17° (6) 45°, 45° (7) 168°, 12° (8) 35°, 55°

4. पुढील आकृती पाहून खालील कोनांची मापे लिहा.



(1) $m\angle AOC$ = ----------
(2) $m\angle AOD$ = ----------
(3) $m\angle BOC$ = ----------

5. वरील प्र. 4 मधील आकृतीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $\angle BOC$ चा विरुद्‌ध कोन लिहा.
(2) $\angle BOC$ च्या विरुद्‌ध कोनाचे माप लिहा.
(3) $\angle AOD$ चे रेषीय जोडीतील कोन लिहा.
(4) $\angle AOD$ च्या रेषीय जोडीतील कोनाचे माप लिहा.
(5) $\angle AOC$ च्या कोटिकोनाचे माप किती ?
(6) $\angle AOD$ च्या पूरक कोनाचे माप किती ?
(7) $\angle BOD$ च्या संलग्न कोनांची नावे लिहा.

6. खालील सारणी पूर्ण करा.

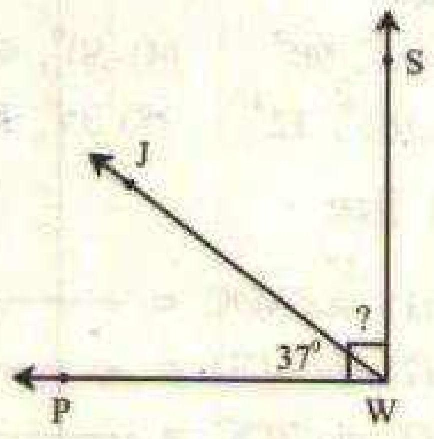
दिलेला कोन	60°	45°	78°	10°	25°	80°	37°
कोटिकोन							

7. खालील सारणी पूर्ण करा.

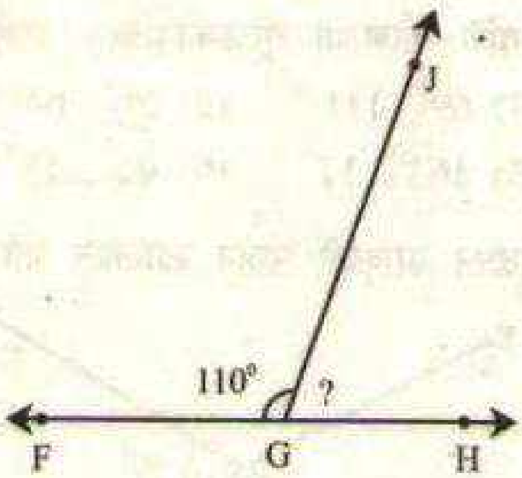
दिलेला कोन	32°	90°	110°	137°	165°	129°	65°
पूरककोन							

8. खालील प्रत्येक आकृतीतील '?' चिन्हाने दाखवलेल्या कोनाचे माप लिहा.

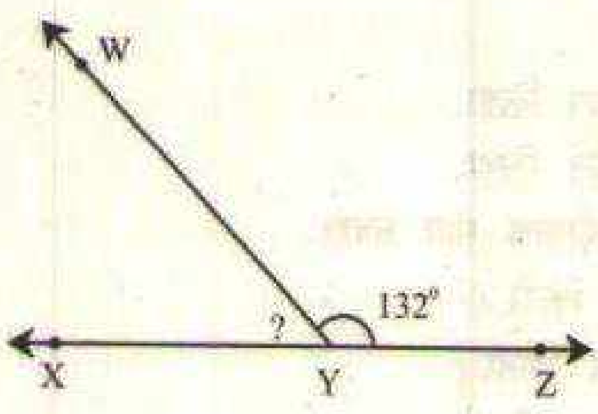
(1)



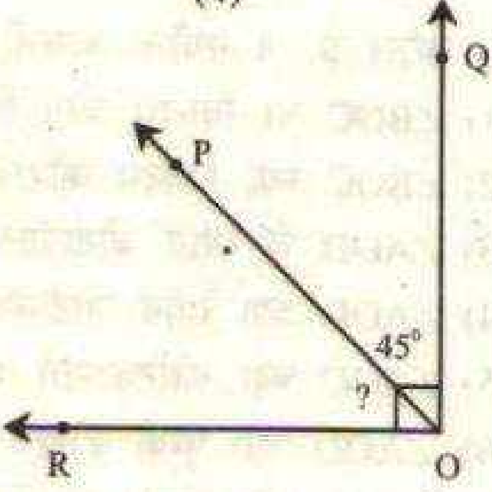
(2)



(3)

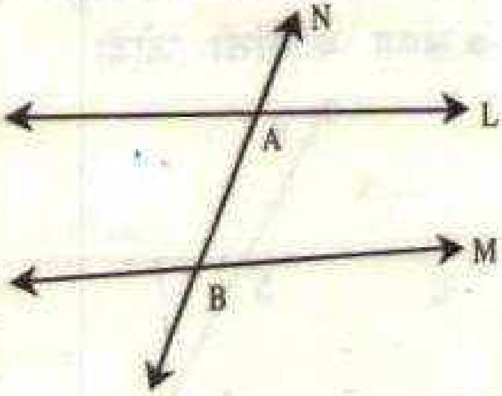


(4)



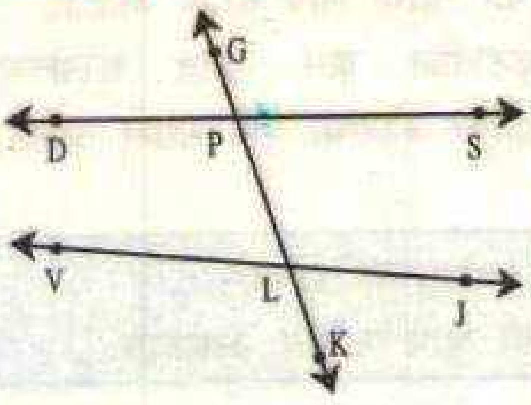
छेदिका

बाजूच्या आकृतीत रेषा L व रेषा M यांना N ही रेषा, अनुक्रमे A व B बिंदूंत छेदते. याप्रमाणे दोन रेषांना वेगवेगळ्या बिंदूंत छेदणारी रेषा **छेदिका** असते.



येथे रेषा N ही, रेषा L व रेषा M यांची छेदिका आहे.

छेदिकेमुळे होणारे कोन



सोबतची आकृती पाहा. छेदिकेमुळे P या छेदनबिंदूपाशी चार व L या छेदनबिंदूपाशी चार असे एकूण 8 कोन तयार झालेले दिसतात. यांपैकी कोनांच्या काही जोड्यांचा अभ्यास करू.

- **संगत कोनांची जोडी**

वरील आकृतीत ∠GPS व ∠PLJ ही संगत कोनांची एक जोडी आहे. अशा संगत कोनांच्या आणखी तीन जोड्या मिळतात.

∠SPL व ∠JLK , ∠DPG व ∠PLV , ∠DPL व ∠VLK

- **आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी**

वरील आकृतीत ∠SPL व ∠PLV ही आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी आहे. तसेच ∠DPL व ∠PLJ ही आंतरव्युत्क्रम कोनांची दुसरी जोडी मिळते.

एका जोडीतील आंतरव्युत्क्रम कोन छेदिकेच्या विरुद्ध अंगास असतात.

आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोडीला 'व्युत्क्रम कोनांची जोडी' असेही म्हणतात.

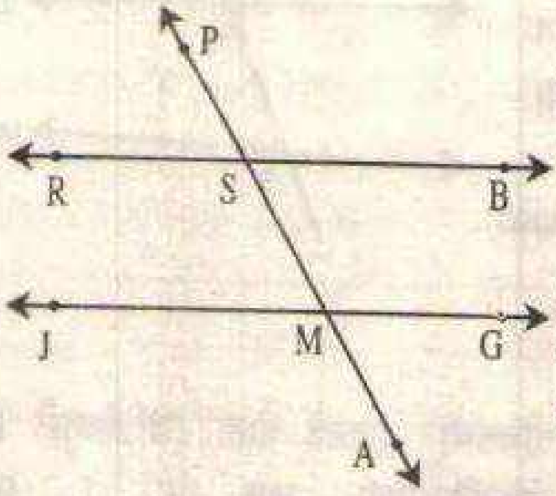
- **आंतरकोनांची जोडी**

∠DPL व ∠PLV ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या आंतरकोनांची एक जोडी आहे. तसेच ∠SPL व ∠PLJ ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारी आंतरकोनांची दुसरी जोडी आहे.

छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या दोन आंतरकोनांना 'आंतरकोनांची जोडी' असे म्हणतात.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या कोनांच्या जोड्यांचे गुणधर्म

- **संगत कोनांची जोडी**



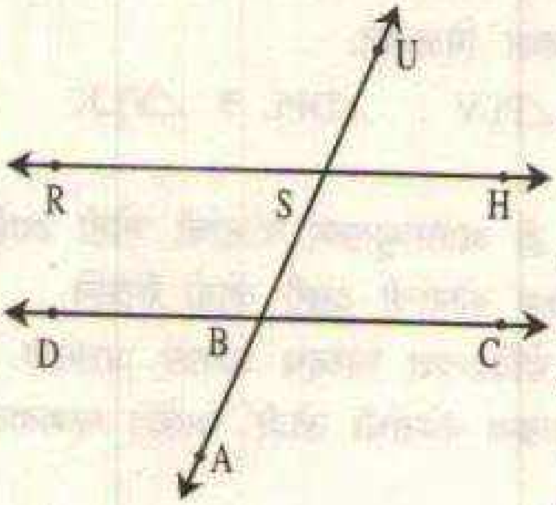
सोबतची आकृती पाहा. रेषा RB व रेषा JG या दोन समांतर रेषा आहेत. रेषा PA ही त्यांची छेदिका आहे.

$\angle PSB$ व $\angle SMG$ ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या संगत कोनांची जोडी आहे. यांची मापे मोजा. असे दिसून येईल, की त्यांची मापे समान आहेत.

आकृतीतील इतर संगत कोनांच्या जोड्यांतील कोनांची मापे मोजून प्रत्येक जोडीतील कोनांची मापे समान आहेत, याचा पडताळा घ्या.

> **समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या संगत कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.**

- **व्युत्क्रम कोनांची जोडी**



शेजारील आकृती पाहा.

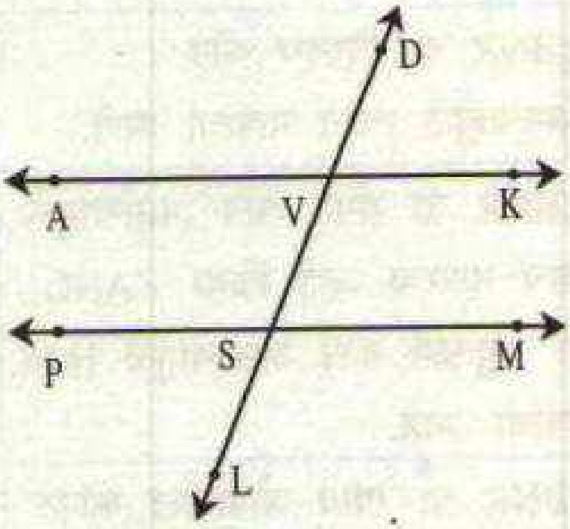
रेषा RH ‖ रेषा DC व रेषा UA त्यांची छेदिका आहे.

$\angle RSB$ व $\angle SBC$ ही व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी आहे. या कोनांची मापे मोजू. असे दिसून येईल, की $\angle RSB$ व $\angle SBC$ यांची मापे समान आहेत.

आकृतीतील व्युत्क्रम कोनांच्या दुसऱ्या जोडीतील कोनांची मापे मोजून ती समान असल्याचा पडताळा घ्या.

> **समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.**

• आंतरकोनांची जोडी

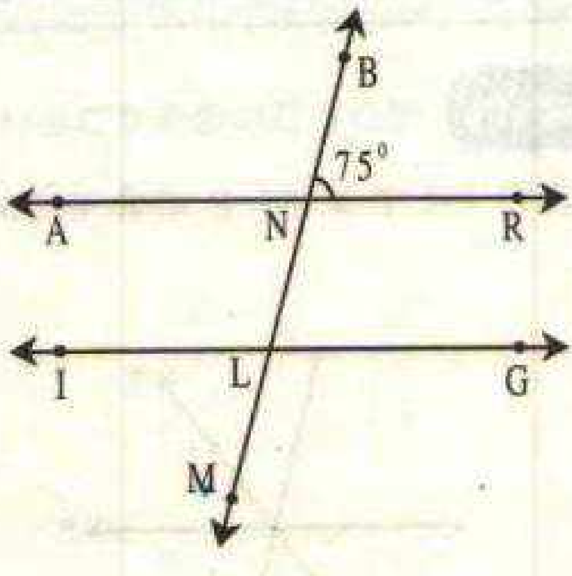


शेजारील आकृती पाहा.

रेषा AK ∥ रेषा PM व रेषा DL त्यांची छेदिका आहे. $\angle KVS$ व $\angle VSM$ ही छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारी आंतरकोनांची जोडी आहे. या आंतरकोनांची मापे मोजा. असे दिसून येईल, की $\angle KVS$ व $\angle VSM$ यांच्या मापांची बेरीज 180° येते.

तसेच वरील आकृतीतील आंतरकोनांच्या दुसऱ्या जोडीतील कोनांची मापे मोजा व त्यांची बेरीज 180° येते, याचा पडताळा घ्या.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.



उदा. शेजारील आकृतीत,

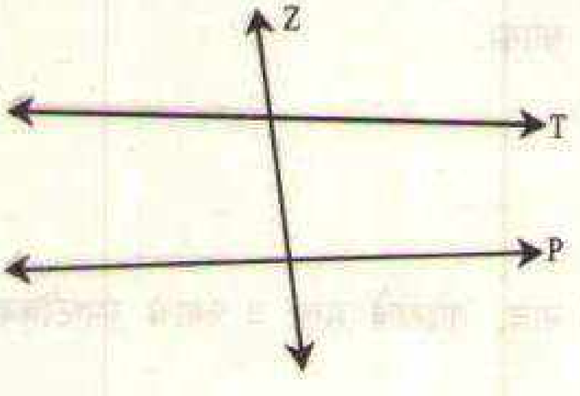
रेषा AR ∥ रेषा IG. रेषा BM त्यांची छेदिका आहे. $m\angle BNR = 75^\circ$ N व L हे छेदनबिंदू आहेत, तर $\angle ANL$, $\angle NLG$ व $\angle RNL$ ची मापे काढा.

पुढील पानावरील सारणीत कोनाचे नाव, कोनाचे माप व त्याचे स्पष्टीकरण दिले आहे ते अभ्यासा.

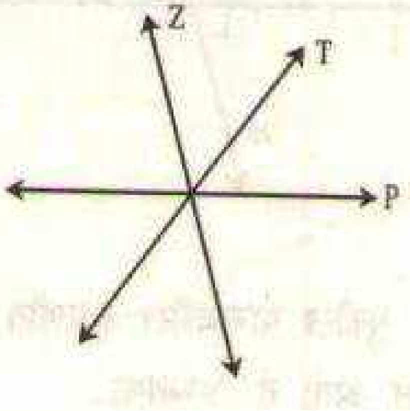
कोनाचे नाव	कोनाचे माप	स्पष्टीकरण
$\angle BNR$	75°	दिलेली माहिती
$\angle ANL$	75°	$\angle BNR$ चा विरुद्ध कोन असल्यामुळे त्याच मापाचा आहे.
$\angle NLG$	75°	$\angle BNR$ चा संगत कोन असल्यामुळे त्याच मापाचा आहे किंवा $\angle ANL$ चा व्युत्क्रम कोन असल्यामुळे त्याच मापाचा आहे.
$\angle RNL$	105°	$\angle BNR$ चा रेषीय जोडीतील कोन असल्यामुळे त्याचे माप $180 - 75 = 105^\circ$ आहे किंवा $\angle NLG$ व $\angle RNL$ हे आंतरकोनांच्या जोडीतील कोन असल्यामुळे $\angle RNL$ चे माप $180 - 75 = 105^\circ$ आहे.

उदाहरणसंग्रह 18

1. खालीलपैकी कोणत्या आकृतीत रेषा Z ही रेषा T व रेषा P यांची छेदिका आहे ? कारण लिहा.

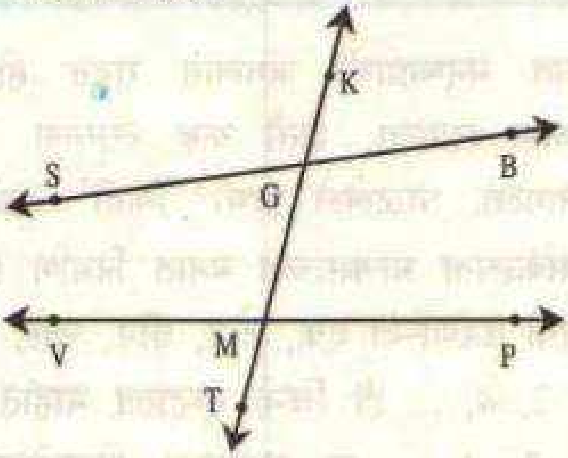


आ. (1)

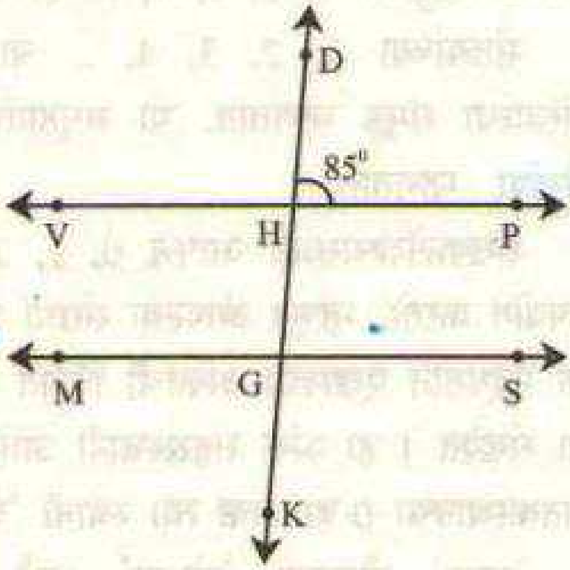


आ. (2)

2. सोबतची आकृती पाहा व त्यातील संगत कोन, व्युत्क्रम कोन, आंतरकोनांच्या जोड्या लिहा.

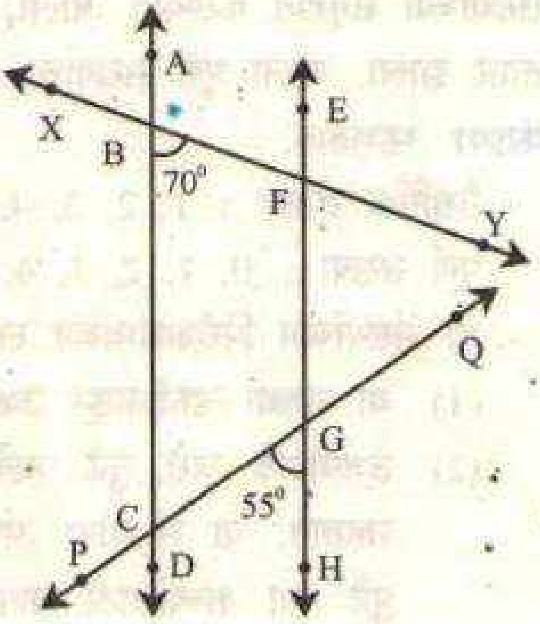


3. आकृतीत रेषा VP ॥ रेषा MS, रेषा DK त्यांची छेदिका आहे. $m\angle DHP = 85^\circ$ तर



(1) $m\angle MGK$ = ...
(2) $m\angle VHD$ =......
(3) $m\angle PHG$ =.......
(4) $m\angle HGS$ = ...

4. सोबतची आकृती पाहा.
रेषा AD ॥ रेषा EH रेषा XY व रेषा PQ त्यांच्या छेदिका आहेत.
$m\angle CBF = 70^\circ$, $m\angle CGH = 55^\circ$.
तर



(1) $m\angle EFB$ = ...
(2) $m\angle GFY$ = ...
(3) $m\angle BCG$ = ...

7. नैसर्गिक संख्या व पूर्ण संख्या

अतिप्राचीन काळात मनुष्यप्राणी जंगलात राहत होता. कालांतराने तो नदीकिनारी वास्तव्य करू लागला. शेती करू लागला. गाई, घोडे, शेळ्या इत्यादी प्राणी पाळू लागला. पाळलेले प्राणी 'किती' आहेत, हे समजण्याच्या गरजेतून 'संख्या' ही संकल्पना माणसाच्या मनात निर्माण झाली.

मोजण्यासाठी उपयोगी पडणाऱ्या एक, दोन, तीन, चार, ... या संख्या आणि त्यांची अनुक्रमे 1, 2, 3, 4, ... ही चिन्हे तुम्हाला माहीत आहेत.

संख्यांच्या 1, 2, 3, 4, ... या समूहाला मोजसंख्यांचा किंवा नैसर्गिक संख्यांचा समूह म्हणतात. या समूहातील संख्यांना **मोजसंख्या** किंवा **नैसर्गिक संख्या** म्हणतात.

संख्यालेखनासाठी आपण 0, 1, 2, ...,9 या दहा चिन्हांचा किंवा अंकांचा उपयोग करतो, म्हणून आपल्या संख्या लेखनपद्धतीला **दशमान पद्धत** म्हणतात. या पद्धतीत एखाद्या अंकाची किंमत त्याच्या स्थानावरून कळते. जसे, 41069 या संख्येत 1 हा अंक सहस्रस्थानी आहे, म्हणून या अंकाची किंमत 1000 आहे. शतकस्थानचा 0 हा अंक त्या स्थानी 'काहीही नाही' असे दर्शवतो.

'शून्य' हीसुद्धा 'संख्या' आहे, असे मानून तिचा समावेश नैसर्गिक संख्यांच्या समूहात करण्यात आला, त्यामुळे 0, 1, 2, 3, 4, ... हा नवा समूह तयार झाला. याला पूर्ण संख्यांचा समूह म्हणतात आणि यातील संख्यांना **पूर्ण संख्या** म्हणतात.

नैसर्गिक संख्या : 1, 2, 3, 4, 5, ...

पूर्ण संख्या : 0, 1, 2, 3, 4, ...

या संख्यांच्या निरीक्षणावरून लक्षात येते, की -

(1) या संख्या डावीकडून उजवीकडे क्रमाने मोठ्या होत जातात.

(2) उजवीकडे जसे पुढे जावे, तशा आणखी पुढच्या संख्या मिळतच राहतात. या संख्यांना अंत नसतो. ('...' हे चिन्ह 'आणि याप्रमाणे पुढे' या शब्दांसाठी वापरले जाते. त्यातून यापुढील संख्यांना अंत नसतो, असा अर्थ सूचित होतो.) त्यामुळे सर्वांत मोठी नैसर्गिक संख्या किंवा सर्वांत मोठी पूर्ण संख्या सांगता येत नाही.

(3) सर्वांत लहान नैसर्गिक संख्या 1 आहे.

(4) सर्वांत लहान पूर्ण संख्या 0 आहे.

बेरीज या क्रियेचे गुणधर्म

हे गुणधर्म समजण्यासाठी पुढील बेरजा करा. दिलेल्या उदाहरणातील संख्यांचे आणि येणाऱ्या उत्तरांचे निरीक्षण करा.

(1) 13 + 6 (2) 6 + 13 (3) 5,729 + 16,067

(4) 16,067 + 5,729 (5) 35,49,209 + 4,83,517

(6) 96 + 0 (7) 0 + 96 (8) 2,93,13,875 + 0

(9) (5 + 9) + 7 (10) 5 + (9 + 7)

(11) (548 + 120) + 680 (12) 548 + (120 + 680)

उत्तरांवरून बेरजेचे पुढील गुणधर्म तुमच्या लक्षात येतील.

(1) सर्व उदाहरणांतील संख्या या पूर्ण संख्या आहेत. त्यांची बेरीजसुद्धा पूर्ण संख्या आहे.

(2) प्रत्येक उदाहरणातील संख्यांचा क्रम बदलला, तरी बेरीज तीच येते. (उदा. 1 व 2, 3 व 4)

(3) एखाद्या संख्येत शून्य मिळवले, (किंवा शून्यात एखादी संख्या मिळवली) तरी बेरीज त्या संख्येएवढीच येते. (उदा. 6, 7, 8)

(4) तीन पूर्ण संख्यांची बेरीज करताना पहिली बेरीज आधी केली किंवा दुसरी बेरीज आधी केली तरी उत्तर बदलत नाही. (उदा. 9 व 10, 11 व 12)

संख्यांसाठी अक्षरे वापरून हेच गुणधर्म पुढे दिल्याप्रमाणे लिहिता येतात.

a, b आणि c या पूर्ण संख्या असतील, तर

(1) $(a + b)$ हीसुद्धा पूर्ण संख्या असते.

(2) $(a + b) = (b + a)$

(3) $a + 0 = a$ तसेच $0 + a = a$

(4) $(a + b) + c = a + (b + c)$

तीनपेक्षा जास्त संख्यांनाही हा गुणधर्म लागू पडतो, हे तुम्ही उदाहरणांनी पडताळून पाहा.

• गुणाकार या क्रियेचे गुणधर्म

पुढील उदाहरणे सोडवा. उदाहरणांचे आणि उत्तरांचे निरीक्षण करून काही गुणधर्म तुम्हांला समजतील.

(1) 8×3 (2) 3×8 (3) 16×135 (4) 135×16
(5) 14×1 (6) 1×14 (7) $5,01,643 \times 1$ (8) 0×4
(9) 325×0 (10) $40,15,318 \times 0$ (11) $(6 \times 3) \times 2$
(12) $6 \times (3 \times 2)$ (13) $19 \times (24 \times 5)$ (14) $(19 \times 24) \times 5$

या उदाहरणांच्या उत्तरांवरून पुढील गुणधर्म लक्षात येतात.

a , b आणि c या कोणत्याही पूर्ण संख्या असतील, तर

(1) $a \times b$ हीसुद्धा पूर्ण संख्या असते.

(2) $a \times b = b \times a$ (उदा. 1 व 2, 3 व 4, 5 व 6)

(3) $a \times 1 = 1 \times a = a$ (उदा. 5, 6, 7)

(4) $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (उदा. 8, 9, 10)

(5) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (उदा. 11 व 12, 13 व 14)

• बेरीज व गुणाकार यांचा संयुक्त गुणधर्म

हा गुणधर्म समजण्यासाठी पुढील उदाहरण दोन रीतींनी सोडवून दाखवले आहे, ते अभ्यासा.

उदा. एका वर्गातील 23 मुले आणि 28 मुली सहलीला जाणार आहेत. सहलीची वर्गणी प्रत्येकी 50 रु. आहे. तर एकूण किती वर्गणी जमा झाली ?

रीत 1	रीत 2
मुलामुलींची एकूण संख्या (23 + 28)	मुलांची वर्गणी 50×23 रु.
∴ एकूण वर्गणी = 50 (23 + 28)	मुलींची वर्गणी 50×28 रु.
= 50×51	∴ एकूण वर्गणी
= 2550 रु.	$50 \times 23 + 50 \times 28$
	= 1150 + 1400
	= 2550 रु.

उदाहरणाच्या रीतींवरून असे दिसते, की

$50\ (23 + 28) = 50 \times 23 + 50 \times 28$

याप्रमाणेच पुढील उदाहरणांत किमती समान असतात, याचा पडताळा घ्या.

(1) $4 (9 + 6)$ आणि $4 \times 9 + 4 \times 6$

(2) $12 \times 5 + 12 \times 15$ आणि $12 (5 + 15)$

या उदाहरणांमधून असा गुणधर्म दिसतो, की a, b, c **या कोणत्याही पूर्ण संख्या असतील तर –**

$$a (b + c) = a \times b + a \times c \text{ किंवा } a \times b + a \times c = a (b + c)$$

• बेरीज व गुणाकार यांच्या गुणधर्मांचा उपयोग

बऱ्याच वेळा आकडेमोड सोपी करण्यासाठी बेरीज व गुणाकाराच्या गुणधर्मांचा उपयोग कसा होतो, हे पुढील उदाहरणांवरून अभ्यासा.

उदा. (1) बेरीज करा : $1749 + 2568 + 3132$

$1749 + 2568 + 3132$
$= 1749 + (2568 + 3132)$
$= 1749 + 5700$
$= 7449$

दुसऱ्या व तिसऱ्या संख्यांतील दशक व एककस्थानी असणाऱ्या अंकांनी होणाऱ्या 68 व 32 या संख्यांची बेरीज 100 येते. ∴ दुसऱ्या व तिसऱ्या संख्यांची बेरीज आधी केली.

उदा. (2) बेरीज करा : $2375 + 9056 + 13625$

$2375 + 9056 + 13625$
$= 2375 + 13625 + 9056$
$= (2375 + 13625) + 9056$
$= 16000 + 9056$
$= 25056$

वरील उदाहरणात विचार केल्याप्रमाणेच पहिल्या व तिसऱ्या संख्यांतील 75 व 25 यांची बेरीज 100 येते. ∴ पहिल्या व तिसऱ्या संख्यांची बेरीज आधी केली. त्यासाठी संख्यांचा क्रम बदलून घेतला.

उदा. (3) गुणाकार करा : $125 \times 263 \times 8$

$125 \times 263 \times 8$
$= 125 \times 8 \times 263$
$= (125 \times 8) \times 263$
$= 1000 \times 263$
$= 263000$

$25 \times 8 = 200$ हे माहीत आहे.
∴ 125×8 हा गुणाकार करणे सोपे आहे.
∴ संख्यांचा क्रम बदलून घेतला आणि 125×8 हा गुणाकार आधी केला.

उदाहरणसंग्रह 19

1. पुढील बेरजा, गुणधर्म वापरून सोप्या रीतीने करा.

(1) $273 + 56 + 44$ (2) $178 + 593 + 622$

(3) $133 + 17 + 650$ (4) $5107 + 2950 + 343$

2. पुढील गुणाकार, गुणधर्म वापरून सोप्या रीतीने करा.

(1) $48 \times 5 \times 2$ (2) $15 \times 67 \times 6$ (3) $25 \times 213 \times 4$

(4) $3109 \times 5 \times 20$ (5) $8 \times 568 \times 125$ (6) $16 \times 25 \times 408$

• बेरीज व गुणाकार यांच्या संयुक्त गुणधर्मांचा उपयोग

उदा. (1) सोपे रूप द्या : (1) $47 \times 93 + 47 \times 7$ (2) $16 \times 17 + 16 \times 41$

(1) $47 \times 93 + 47 \times 7$
$= 47\ (93 + 7)$
$= 47 \times 100$
$= 4700$

(2) $16 \times 17 + 16 \times 41$
$= 16\ (17 + 41)$
$= 16 \times 58$
$= 928$

दोन्ही उदाहरणांचे स्वरूप $a \times b + a \times c$ असे आहे.
$\therefore a \times b + a \times c = a\ (b + c)$ या गुणधर्माचा उपयोग करून राशींची मांडणी केली आणि सोपे रूप दिले.

उदा. (2) गुणाकार करा : 105×105

(1) 105×105
$= 105\ (100 + 5)$
$= 105 \times 100 + 105 \times 5$
$= 10500 + 525$
$= 11025$

105 ही संख्या $(100 + 5)$ अशी लिहिली. त्यामुळे उदाहरणाचे स्वरूप $a\ (b + c)$ असे झाले.
$a\ (b + c) = a \times b + a \times c$ या गुणधर्माचा उपयोग करून सोपे रूप दिले.

उदाहरणसंग्रह 20

1. पुढील प्रत्येक उदाहरणाची मांडणी $a \times b + a \times c$ अशी करा.

(1) $9\ (3 + 14)$ (2) $25\ (23 + 16)$ (3) $20\ (58 + 109)$

2. पुढील प्रत्येक उदाहरणाची मांडणी $a\ (b + c)$ अशी करा.

(1) $15 \times 3 + 15 \times 7$ (2) $9 \times 38 + 9 \times 12$

(3) $125 \times 69 + 125 \times 31$

3. सोपे रूप द्या. [$a \times b + a \times c = a\ (b + c)$ हे सूत्र वापरा.]

(1) $9 \times 38 + 9 \times 12$ (2) $125 \times 69 + 125 \times 31$

(3) $594 \times 210 + 594 \times 290$ (4) $16 \times 81 + 34 \times 81$

4. $a\ (b + c) = a \times b + a \times c$ हे सूत्र वापरून पुढील गुणाकार करा.

(1) 51×51 (2) 75×75 (3) 102×102

8. घातांक

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ येथे 2 ही संख्या 9 वेळा लिहून गुणाकार क्रिया दाखवली आहे. हा गुणाकार 2^9 असा लिहितात. 2^9 ही घातांकित संख्या आहे.

'2^9' चे वाचन 'दोनचा घातांक नऊ' किंवा '2 चा नववा घात' असे करतात.

2^9 या घातांकरूपातील संख्येत 2 हा 'पाया' व 9 हा 'घातांक' आहे.

$$\underset{\text{(गुणाकार रूप)}}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^9$$

घातांक

पाया

उदा. खालील तक्ता अभ्यासा.

	गुणाकार रूप	घातांक रूप	पाया	घातांक
1.	$7 \times 7 \times 7$	7^3	7	3
2.	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^5	3	5
3.	9×9	9^2	9	2
4.	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^6	2	6
5.	$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$	1^5	1	5

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$2^2 = 2 \times 2$

$2^1 = 2$

2^3 याचे वाचन दोनचा तिसरा घात किंवा दोनचा घन असे करतात.

2^2 याचे वाचन दोनचा दुसरा घात किंवा दोनचा वर्ग असे करतात.

'तिसरा घात' ऐवजी 'घन' आणि 'दुसरा घात' ऐवजी 'वर्ग' असे वाचन करतात.

$2^1 = 2$, यात संख्येचा पहिला घात म्हणजे तीच संख्या आहे; म्हणून संख्येचा घातांक 1 असेल, तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे.

जसे, 5 म्हणजेच 5^1 , 10 म्हणजेच 10^1 इत्यादी.

उदाहरणसंग्रह 21

1. खालील संख्यांचे वाचन करून तक्ता पूर्ण करा.

क्रमांक	घातांक रूप	गुणाकार रूप	पाया	घातांक
(1)	1^3	....	....	....
(2)	3^7	....	....	....
(3)	7^9	....	....	....
(4)	2^6	....	....	....
(5)	3^4	....	....	....
(6)	4^3	....	....	....
(7)	2^8	....	....	....
(8)	15^2	....	....	....
(9)	3	....	....	....
(10)	10^5	....	....	....

2. घातांकरूपात लिहा.

(1) पाया 6 , घातांक 4 (2) दोनचा घातांक चार (3) सातचा वर्ग

(4) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (5) $6 \times 6 \times 6$ (6) नऊचा घन

3. गुणाकाररूपात लिहा.

(1) 11^4 (2) 6^2 (3) 10^4 (4) 5^3 (5) 8^5

घातांकित संख्येची किंमत काढणे

पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 3^5 ची किंमत काढा.

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ (पाया 3 हा पाच वेळा घेऊन गुणाकार)

उदा. (2) 2^7 ची किंमत काढा.

$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ (पाया 2 हा सात वेळा घेऊन गुणाकार)

उदाहरणसंग्रह 22

1. किंमत काढा.

(1) 3^6 (2) 6^3 (3) 2^6 (4) 1^8 (5) 5^4

(6) 4^3 (7) 10^5 (8) 10^7 (9) 7^4 (10) 8^2

अक्षरी संख्येचे घातांकरूपात लेखन

जसे $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$, तसेच $a \times a \times a \times a = a^4$ असे लिहिता येते. त्याचप्रमाणे, $p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p = p^{10}$

$x \times x \times x = x^3$, $x \times x = x^2$, $x = x^1$

दिलेली संख्या, दिलेला पाया घेऊन घातांकरूपात लेखन

उदा. (1) पाया 4 घेऊन 64 ही संख्या घातांकरूपात लिहा.

रीत : येथे दिलेला पाया 4 म्हणून 64 ही संख्या 4 या अवयवाच्या गुणाकार रूपात लिहू.

$\therefore 64 = 4 \times 16$
$= 4 \times 4 \times 4$
$= 4^3$

किंवा

4	64
4	16
4	4
	1

उदा. (2) 64 ही संख्या पाया 2 घेऊन घातांकरूपात लिहा.

रीत : येथे पाया 2 दिला आहे, म्हणून 64 ही संख्या 2 या अवयवाच्या गुणाकार रूपात लिहू.

$\therefore 64 = 2 \times 32$
$= 2 \times 2 \times 16$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 8$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^6$

$\therefore 64 = 2^6$.

उदाहरणसंग्रह 23

1. खालील प्रत्येक संख्या, दिलेला पाया घेऊन घातांकरूपात लिहा.

(1) 125 , पाया 5 (2) 32 , पाया 2 (3) 625 , पाया 5

(4) 243 , पाया 3 (5) 100 , पाया 10 (6) 1,00,00,000 , पाया 10

(7) 81 , पाया 9 (8) 81 , पाया 3

9. वर्ग आणि वर्गमूळ

3×3 , 8×8 , 16×16 , 99×99 , $a \times a$, $x \times x$ या प्रत्येक राशीत एका संख्येला त्याच संख्येने गुणले आहे.

एखाद्या संख्येला त्याच संख्येने गुणणे, म्हणजेच त्या संख्येचा वर्ग करणे.

जसे, 8×8 म्हणजे 8 चा वर्ग. 99×99 म्हणजे 99 चा वर्ग.

$x \times x$ म्हणजे x चा वर्ग. $a \times a$ म्हणजे a चा वर्ग.

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू $\times$ बाजू, हे तुम्ही पाचवीत शिकला आहात. यावरून बाजू 10 असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ 10×10 म्हणजे ते '10 चा वर्ग' एवढे असते.

उदा. (1) खालील संख्यांचे वर्ग करा.

(1) 9	(2) 15	(3) 218
9 चा वर्ग	15 चा वर्ग	218 चा वर्ग
$= 9 \times 9$	$= 15 \times 15$	$= 218 \times 218$
$= 81$	$= 225$	$= 47524$

उदाहरणसंग्रह 24

1. खालील संख्यांचे वर्ग करा.

(1) 5 (2) 10 (3) 16 (4) 25 (5) 110

संख्येच्या वर्गाचे लेखन, वाचन

10×10 म्हणजे 10 चा वर्ग, हे आपण पाहिले. 10×10 हा गुणाकार 10^2 असा लिहितात. '10^2' हे 'दहाचा वर्ग' असे वाचतात.

त्याचप्रमाणे $17 \times 17 = 17^2$, $25 \times 25 = 25^2$, $x \times x = x^2$ इत्यादी.

उदाहरणसंग्रह 25

1. खालील संख्यांचे वाचन कसे करतात ते लिहा व त्यांच्या किमती काढा.

(1) 6^2 (2) 11^2 (3) 14^2 (4) 65^2 (5) 55^2 (6) 18^2
(7) 67^2 (8) 109^2 (9) 121^2 (10) 112^2 (11) 91^2 (12) 200^2

एककस्थानी 5 हा अंक असलेल्या संख्येचा वर्ग तोंडी सांगणे

यासाठी तोंडी कराव्या लागणाऱ्या क्रमवार पायऱ्या पुढील उदाहरणांवरून लक्षात घ्या. जसे, 25 चा वर्ग काढू.

पायऱ्या	संख्या 25
(1) एककस्थानच्या 5 या अंकाखेरीज संख्येत उरलेल्या अंकांनी तयार झालेली संख्या	2
(2) तयार झालेल्या संख्येच्या पुढील लगतची संख्या	3
(3) या दोन लगतच्या संख्यांचा गुणाकार	$2 \times 3 = 6$
(4) वरील गुणाकारापुढे 25 लिहून मिळणारी संख्या	625
$\therefore$ 25 चा वर्ग = 625	

उदाहरणसंग्रह 26

1. पुढील संख्यांचे वर्ग लिहा.

(1) 85 (2) 55 (3) 75 (4) 95 (5) 115 (6) 205 (7) 185 (8) 105

• वर्गमूळ

1, 4, 9, 16, 25 या संख्या अनुक्रमे 1, 2, 3, 4, 5 या संख्यांचे वर्ग आहेत, म्हणजेच 1, 4, 9, 16, 25 या वर्गसंख्या आहेत.

3 चा वर्ग 9 आहे. याउलट 9 चे वर्गमूळ 3 आहे. हे चिन्ह वापरून $\sqrt{9} = 3$ असे लिहितात. वर्गमूळ '$\sqrt{\ }$' या चिन्हाने दर्शवतात.

तसेच $4^2 = 16 \quad \therefore \sqrt{16} = 4$; $10^2 = 100 \quad \therefore \sqrt{100} = 10$;

$5^2 = 25 \quad \therefore \sqrt{25} = 5$

एका चौरसाचे क्षेत्रफळ 25 आहे. म्हणजे त्याच्या बाजूचा वर्ग 25 आहे. चौरसाची बाजू काढण्यासाठी 25 चे वर्गमूळ काढावे लागेल.

दिलेल्या वर्गसंख्येचे वर्गमूळ कसे काढतात हे समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 196 चे वर्गमूळ काढा.

196 चे वर्गमूळ काढायचे म्हणजे ती संख्या दोन समान संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहावी लागेल. यासाठी त्या संख्येचे अवयव पाडावे लागतील.

रीत : $196 = 49 \times 4$ — 196 ही 4 ने विभाज्य आहे.

$$
\begin{aligned}
196 &= 49 \times 4 \\
&= 7 \times 7 \times 2 \times 2 \\
&= (7 \times 2) \times (7 \times 2) \\
&= (7 \times 2)^2 = 14^2
\end{aligned}
$$

म्हणून 196 हा 14 चा वर्ग आहे. म्हणजेच $\sqrt{196} = 14$

$\therefore$ 196 चे वर्गमूळ 14 आहे.

उदा. (2) 225 चे वर्गमूळ काढा.

रीत : $225 = 45 \times 5$ (5 ची विभाज्यता कसोटी)

$$
\begin{aligned}
225 &= 45 \times 5 \\
&= 9 \times 5 \times 5 \\
&= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \\
&= (3 \times 5) \times (3 \times 5) \\
&= (3 \times 5)^2 = 15^2
\end{aligned}
$$

$\therefore 225 = (15)^2$ $\therefore$ 225 चे वर्गमूळ 15 म्हणजेच $\sqrt{225} = 15$

उदा. (3) 4356 चे वर्गमूळ काढा.

रीत : $4356 = 484 \times 9$ (4356 ही 9 ने विभाज्य आहे.)

$= 121 \times 4 \times 9$ (484 ही 4 ने विभाज्य आहे.)

$$
\begin{aligned}
&= 11 \times 11 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\
&= (11 \times 2 \times 3) \times (11 \times 2 \times 3) \\
&= (11 \times 2 \times 3)^2 = (66)^2
\end{aligned}
$$

$\therefore 4356 = (66)^2$ म्हणजेच $\sqrt{4356} = 66$

उदाहरणसंग्रह 27

1. वर्गमूळ काढा.

(1) 441 (2) 576 (3) 3025 (4) 7744 (5) 10404

(6) 11664 (7) 15625 (8) 11025 (9) 14641 (10) 9801

10. दशांश अपूर्णांक – भागाकार

❋ उजळणी

छेद 10, 100, 1000, ... असणाऱ्या अपूर्णांकांना दशांश अपूर्णांक म्हणतात. दशांश, शतांश, ... याप्रमाणे स्थाने निर्माण करून आणि त्या स्थानांपूर्वी दशांशचिन्ह वापरून अशा अपूर्णांकांचे लेखन करतात.

जसे, $8\frac{4}{10} = 8.4$; $13\frac{71}{100} = 13.71$; $\frac{9}{100} = 0.09$;

$2\frac{37}{1000} = 2.037$ इत्यादी.

खाली सोडवून दिलेली उदाहरणे अभ्यासा. त्यावरून दशांश अपूर्णांकांमध्ये बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया कशा करतात, हे तुम्हांला आठवेल.

उदा. (1)

$$\begin{array}{r} 53.74 \\ +\ 7.28 \\ \hline 61.02 \end{array}$$

उदा. (2)

$$\begin{array}{r} 304.16 \\ -\ 129.50 \\ \hline 174.66 \end{array}$$

उदा. (3)

$$\begin{array}{r} 18.047 \\ \times\ 2.53 \\ \hline 54141 \\ +\ 902350 \\ +\ 3609400 \\ \hline 45.65891 \end{array}$$

18.047 (गुण्य संख्येत दशांशचिन्हाच्या पुढे 3 स्थाने आहेत.)

2.53 (गुणक संख्येत दशांशचिन्हाच्या पुढे 2 स्थाने आहेत.)

(गुण्य व गुणकातील दशांशचिन्ह विचारात न घेता गुणाकार करू.)

45.65891 (गुणाकारात, दशांशचिन्हाच्या पुढे 3 + 2 = 5 स्थाने येतील अशी दशांशचिन्हाची जागा ठरवली.)

उदा. (4)

$$\begin{array}{r} 703.48 \\ \times\ 10 \\ \hline 7034.8 \end{array}$$

उदा. (5)

$$\begin{array}{r} 703.48 \\ \times\ 100 \\ \hline 70348.0 \end{array}$$

उदा. (6)

$$\begin{array}{r} 703.48 \\ \times\ 1000 \\ \hline 703480.0 \end{array}$$

दशांश अपूर्णांकाला 10 ने गुणले तर गुणाकारातील अंक व त्यांचा क्रम तोच राहतो. फक्त दशांशचिन्ह एक स्थान उजवीकडे सरकते. तसेच संख्येला 100, 1000, ... ने गुणले, तर दशांशचिन्ह अनुक्रमे दोन, तीन, ... स्थाने उजवीकडे सरकते.

सममूल्य अपूर्णांक

एखाद्या दशांश अपूर्णांकाच्या उजवीकडे कितीही शून्ये लिहिली, तरी मिळणारे अपूर्णांक त्या मूळच्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतात.

जसे, 13.7, 13.70, 13.700 हे अपूर्णांक सममूल्य आहेत.

उदाहरणसंग्रह 28

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) 38.974 + 9.408	(2) 105.24 − 78.55	(3) 4063.0 − 1546.7
(4) 2.928 + 543.14	(5) 247.12 × 65	(6) 0.918 × 8.2
(7) 805.43 × 4.07	(8) 9.148 × 10	(9) 13.094 × 100
(10) 0.03993 × 1000	(11) 5.635 × 3.7	(12) 750.08 × 2.03

दशांश अपूर्णांकाला पूर्णांकाने भागणे

दशांश अपूर्णांकाला पूर्णांकाने भागण्याची रीत, पूर्णांकाला पूर्णांकाने भागण्याच्या रीतीप्रमाणेच असते.

खाली सोडवून दिलेल्या उदाहरणांवरून ही रीत समजून घेऊ.

उदा. (1) भागाकार करा : 372.42 ÷ 18

रीत	स्पष्टीकरण
$$\begin{array}{r} 20.69 \\ 18\,\overline{)\,372.42} \\ -\;36 \\ \hline 012 \\ -\;00 \\ \hline 124^{*} \\ -\;108 \\ \hline 162 \\ -\;162 \\ \hline 000^{*} \end{array}$$	प्रथम भाज्यातील 372 या पूर्णांकाला 18 ने भागू. * येथे दिलेल्या अपूर्णांकातील पूर्णांकाला भागण्याची क्रिया पूर्ण झाली म्हणून अपूर्णांकातील 4 हा अंक घेतला. भागाकारातील पुढील अंक हे अपूर्णांक भाग दर्शवतात, म्हणून भागाकारातील 20 नंतर दशांशचिन्ह दिले. अपूर्णांकाला भागण्याची क्रिया, पूर्णांकाला भागण्याच्या क्रियेप्रमाणेच करू.
$\therefore$ 372.42 ÷ 18 = 20.69	* येथे भागाकाराची क्रिया पूर्ण झाली.

उदा. (2) भागाकार करा : $2.814 \div 7$

रीत

```
     0.402
7) 2.814
 – 0
 ------
   28
 – 28
 ------
   001
 – 000
 ------
     14
   – 14
 ------
     00
```

स्पष्टीकरण

प्रथम 2 या पूर्णांकाला 7 ने भागू.

$2 < 7 \therefore$ भाग लावला शून्याचा.

येथे पूर्णांकाला भागण्याची क्रिया पूर्ण झाली.

$\therefore$ भागाकारातील 0 च्या पुढे दशांश-चिन्ह मांडू.

संख्येतील अपूर्णांक भागाला 7 ने भागण्याची क्रिया नेहमीच्या रीतीने करू.

येथे भागाकाराची क्रिया पूर्ण झाली.

$\therefore 2.814 \div 7 = 0.402$

उदा. (3) भागाकार करा : $23382.72 \div 46$

रीत

```
      00508.32
46) 23382.72
  – 0
  --------
    23
  – 00
  --------
    233
  – 230
  --------
    0038
   – 000
  --------
      382
    – 368
  --------
      0147
     – 138
  --------
       092
      – 92
  --------
        00
```

स्पष्टीकरण

भाजक संख्या मोठी असल्याने प्रथम 46 चा पाढा तयार करून घेऊ.

$46 \times 1 = 46$ $\quad 46 \times 2 = 92$

$46 \times 3 = 138$ $\quad 46 \times 4 = 184$

$46 \times 5 = 230$ $\quad 46 \times 6 = 276$

$46 \times 7 = 322$ $\quad 46 \times 8 = 368$

$46 \times 9 = 414$.

आता भाज्यातील $2 < 46$

$\therefore$ भागाकार 0 व बाकी 2.

पुढे $23 < 46 \therefore$ पुन्हा भागाकार 0 आणि बाकी 23.

त्यापुढे $233 > 46$. पाढ्याच्या आधारे भाग 5 चा दिला. याप्रमाणे भाग देऊन भागाकार पूर्ण केला. भागाकार 00508.32 म्हणजेच 508.32 आला.

1. पुढील भागाकार करा.

(1) $16.45 \div 5$ (2) $2615.13 \div 9$ (3) $8054.926 \div 5$

(4) $8054.926 \div 22$ (5) $2955.52 \div 16$ (6) $1246.8 \div 12$

(7) $1246.8 \div 120$ (8) $256.851 \div 27$ (9) $256.851 \div 81$

(10) $131.44 \div 31$ (11) $34.896 \div 48$ (12) $1.401 \div 25$

दशांश अपूर्णांकाला दशांश अपूर्णांकाने भागणे

पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) भागाकार करा : $8.6208 \div 2.4$

प्रथम दिलेले उदाहरण अंश-छेद रूपात लिहू. $\frac{8.6208}{2.4}$ येथे 8.6208 हा भाज्य आणि 2.4 हा भाजक आहे. पूर्णांक भाजकाने दशांश अपूर्णांकाला भागण्यास आपण शिकलो आहोत; म्हणून प्रथम भाजक पूर्णांक होईल असा योग्य बदल दिलेल्या उदाहरणात करून घेऊ.

$2.4 \times 10 = 24$ हे आपणांस माहीत आहे.

$\therefore$ दिलेले उदाहरण, सममूल्य अपूर्णांकांच्या गुणधर्माचा उपयोग करून

$\frac{8.6208\times10}{2.4\times10} = \frac{86.208}{24}$ असा बदल करून लिहू.

आता $86.208 \div 24$ ची किंमत आणि $8.6208 \div 2.4$ ची किंमत सारखीच असल्याने $86.208 \div 24$ हा भागाकार करू.

$$
\begin{array}{r}
3.592 \\
24\overline{)\,86.208} \\
-\ 72 \\
\hline
142 \\
-\ 120 \\
\hline
0220 \\
-\ 216 \\
\hline
048 \\
-\ 48 \\
\hline
00
\end{array}
$$

आता $\frac{86.208}{24} = 3.592$

$\therefore \frac{8.6208}{2.4} = 3.592$

उदा. (2) भागाकार करा : $1.2509 \div 3.5$

$$\frac{1.2509}{3.5} = \frac{1.2509 \times 10}{3.5 \times 10} = \frac{12.509}{35}$$

रीत

$$\begin{array}{r}
0.3574 \\
35\overline{)\,12.509} \\
-\ 00 \\
\hline
125 \\
-\ 105 \\
\hline
0200 \\
-\ 175 \\
\hline
259 \\
-\ 245 \\
\hline
0140 \\
-\ 0140 \\
\hline
000
\end{array}$$

स्पष्टीकरण

∴ 35 चा पाढा तयार करू.

$35 \times 1 = 35$ $\quad 35 \times 2 = 70$

$35 \times 3 = 105$ $\quad 35 \times 4 = 140$

$35 \times 5 = 175$ $\quad 35 \times 6 = 210$

$35 \times 7 = 245$ $\quad 35 \times 8 = 280$

$35 \times 9 = 315$.

दिलेल्या भाज्य संख्येतील अंक संपले तरी बाकी 14 उरली आहे.

∴ भाज्यातील शेवटच्या अंकाच्या पुढील स्थानी 0 आहे असे मानून, 14 या बाकीपुढे 0 घेऊ आणि भाग देऊ.

आता $\frac{12.509}{35} = 0.3574$ $\quad \therefore \frac{1.2509}{3.5} = 0.3574$

उदाहरणसंग्रह 30

1. पुढील भागाकार करा.

(1) $10.35 \div 1.5$ (2) $31.05 \div 0.5$ (3) $759.0 \div 1.1$

(4) $957.44 \div 2.2$ (5) $139.3 \div 0.7$ (6) $1.393 \div 0.7$

(7) $82.175 \div 1.9$ (8) $324 \div 1.8$ (9) $784.8 \div 0.4$

(10) $499.95 \div 7.5$ (11) $1846.8 \div 7.2$ (12) $1894.1 \div 6.2$

11. गुणोत्तर व प्रमाण

एका क्रिकेट सामन्यात महेशने 60 व सागरने 20 धावा काढल्या. त्यांच्या धावांची तुलना दोन प्रकारे करता येते.

1. वजावाकी करून

महेशच्या धावा – सागरच्या धावा $= 60 - 20$

$= 40$

यावरून महेशने सागरपेक्षा 40 धावा जास्त काढल्या आहेत.

2. भागाकार करून

महेशच्या धावा सागरच्या धावांच्या किती पट आहेत हे काढू. यासाठी महेशच्या धावांना सागरच्या धावांनी भागावे लागेल.

$$\frac{\text{महेशची धावसंख्या}}{\text{सागरची धावसंख्या}} = \frac{60}{20} = \frac{3}{1}$$

यावरून महेशच्या धावा सागरच्या धावांच्या 3 पट आहेत.

जेव्हा दोन राशींची तुलना भागाकाराने करतात, तेव्हा त्या संख्यांच्या भागाकाराला 'गुणोत्तर' म्हणतात.

गुणोत्तर दाखवण्यासाठी ':' हे चिन्ह वापरतात.

5 चे 9 शी गुणोत्तर $\frac{5}{9}$ किंवा '5:9' असे लिहितात आणि 'पाचला नऊ' असे वाचतात. याउलट 9 चे 5 शी गुणोत्तर $\frac{9}{5}$ किंवा '9:5' असे लिहितांत आणि 'नऊला पाच' असे वाचतात.

$\frac{a}{b}$ हे गुणोत्तर '$a:b$' असे लिहितात आणि 'a ला b' असे वाचतात.

दोन संख्यांची तुलना भागाकाराने करणे, म्हणजेच त्या दोन संख्यांचे गुणोत्तर काढणे.

गुणोत्तराचा अर्थ समजण्यासाठी आणखी एक उदाहरण पाहू.

उदा. (1) एका वर्गात 30 मुले व 24 मुली आहेत. मुलांची संख्या व मुलींची संख्या यांचे गुणोत्तर काढा.

मुलांच्या संख्येचे मुलींच्या संख्येशी गुणोत्तर $= \dfrac{\text{मुलांची संख्या}}{\text{मुलींची संख्या}} = \dfrac{30}{24}$.

$\dfrac{30}{24}$ हे गुणोत्तर '30:24' असे लिहितात आणि त्याचे वाचन 'तिसास चोवीस' असे करतात.

गुणोत्तराचे अतिसंक्षिप्त रूप

$$\frac{30}{24} = \frac{30 \div 6}{24 \div 6} = \frac{5}{4}$$

$\dfrac{5}{4}$ हे $\dfrac{30}{24}$ चे अतिसंक्षिप्त रूप आहे.

साधारणत: कोणतेही गुणोत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात लिहितात.

उदा. (2) जॉनचे वजन 50 किग्रॅ असून, अजयचे वजन 40 किग्रॅ आहे, तर जॉनच्या वजनाचे अजयच्या वजनाशी गुणोत्तर किती ? तसेच अजयच्या वजनाचे जॉनच्या वजनाशी गुणोत्तर किती ?

जॉनच्या वजनाचे अजयच्या वजनाशी गुणोत्तर $= \dfrac{50}{40} = \dfrac{5}{4} = 5:4$

अजयच्या वजनाचे जॉनच्या वजनाशी गुणोत्तर $= \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5} = 4:5$

या उदाहरणांवरून लक्षात घ्या, की संख्यांचा क्रम बदलला तर संख्यांचे गुणोत्तर बदलते. गुणोत्तराला एकक नसते.

उदाहरणसंग्रह 31

1. प्रत्येक उदाहरणातील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी, तसेच दुसऱ्या संख्येचे पहिल्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर लिहा. (गुणोत्तराचे चिन्ह वापरून)

(1) 10, 9 (2) 7, 22 (3) 2, 5 (4) 7, 11 (5) 13, 17

2. खालील प्रत्येक गुणोत्तराचे वाचन करा.

(1) 7:9 (2) 10:6 (3) 30:10 (4) 5:20 (5) 1:4

3. खालील प्रत्येक गुणोत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात लिहा.

(1) 15:6	(2) 20:60	(3) 25:45	(4) 12:30
(5) 26:13	(6) 4:20	(7) 77:99	(8) 35:70

उदा. 2 रुपयांचे 50 पैशांशी गुणोत्तर लिहा.

येथे 2 रु. व 50 पैसे या रकमा आहेत, म्हणजेच त्या दोन्ही राशी एकाच प्रकारच्या आहेत, पण त्यांची एकके भिन्न आहेत. त्यांची एकके समान करू.

2 रुपये = 200 पैसे

200 पैशांचे 50 पैशांशी गुणोत्तर = 200:50

= 4:1 (प्रत्येक पदास 50 ने भागून)

एकाच प्रकारच्या दोन राशींचे गुणोत्तर काढताना त्यांची एकके समान करून घ्यावी लागतात, परंतु गुणोत्तराला एकक नसते.

उदाहरणसंग्रह 32

1. कमलेशची उंची 140 सेमी व अदितीची उंची 105 सेमी आहे. कमलेशच्या उंचीचे अदितीच्या उंचीशी गुणोत्तर काढा.

2. वहीची किंमत 9 रुपये असून, पेनची किंमत 15 रु. आहे. पेनच्या किमतीचे वहीच्या किमतीशी गुणोत्तर काढा.

3. पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी गुणोत्तर लिहा.

(1) 15 सेकंद, 1 मिनिट (2) 90 पैसे, 1 रुपया

(3) 1 मीटर, 60 सेमी (4) 30 मिनिटे, 1 तास

(5) 1 लीटर, 600 मिली (6) 250 ग्रॅम, 1 किग्रॅ

4. दुसऱ्या राशीचे पहिल्या राशीशी गुणोत्तर काढा.

(1) 2 रु., 75 पैसे (2) 15 सेकंद, 1 मि. 15 सेकंद

(3) 90 सेमी, 1.5 मी. (4) 2 किग्रॅ, 500 ग्रॅम

शाब्दिक उदाहरणे

उदा. कस्तुरबा उद्यानातील बदामाच्या व नारळाच्या झाडांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 4:7 आहे. जर बागेतील बदामाच्या झाडांची संख्या 20 असेल, तर नारळाच्या झाडांची संख्या काढा.

रीत :

$$\frac{\text{बदामाच्या झाडांची संख्या}}{\text{नारळाच्या झाडांची संख्या}} = \frac{4}{7}$$

तसेच $$\frac{\text{बदामाच्या झाडांची संख्या}}{\text{नारळाच्या झाडांची संख्या}} = \frac{20}{\square}$$

यावरून $$\frac{4}{7} = \frac{20}{\boxed{?}}$$

या दोन समान अपूर्णांकांपैकी 20 हा अंश, 4 या अंशाच्या पाचपट आहे. म्हणून 7 या छेदाची 5 पट करून चौकटीतील संख्या मिळेल. 7 ची 5 पट 35

$\therefore$ नारळाची 35 झाडे आहेत.

उदाहरणसंग्रह 33

1. कोंडाजीअण्णांकडील गाईंच्या व म्हशींच्या संख्यांचे गुणोत्तर 3:7 आहे. जर त्यांच्याकडील म्हशींची संख्या 28 असेल, तर गाईंची संख्या किती ?
2. एका वर्गातील मुले व मुली यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 5:6 आहे. जर त्या वर्गातील मुलांची संख्या 30 असेल, तर मुलींची संख्या काढा.
3. दोन संख्यांचे गुणोत्तर 7:2 असून, त्यांपैकी मोठी संख्या 21 असेल, तर लहान संख्या कोणती ?

4:14 आणि 6:21 या दोन गुणोत्तरांचा विचार करू.

$4:14 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} = 2:7$ $\quad\quad$ $6:21 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} = 2:7$

येथे 4:14 आणि 6:21 या दोन्ही गुणोत्तरांची अतिसंक्षिप्त रूपे समान आहेत.

$\therefore$ 4:14 = 6:21

जेव्हा दोन गुणोत्तरे समान असतात, तेव्हा त्या गुणोत्तरांतील संख्या प्रमाणात आहेत, असे म्हणतात.

4:14 = 6:21 याचा अर्थ 4, 14, 6 व 21 या चार संख्या प्रमाणात आहेत.

त्याचप्रमाणे 15:10 = 12:8 (प्रत्येक गुणोत्तराचे संक्षिप्त रूप 3:2)

$\therefore$ 15, 10, 12, 8 या संख्या प्रमाणात आहेत.

जेव्हा a, b, c, d या चार संख्या अशा असतील, की

$a:b = c:d$ तेव्हा a, b, c, d प्रमाणात आहेत, असे म्हणतात.

खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

1. खालील प्रत्येक गटातील संख्या प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.

उदा. (1) 3, 6, 8, 16

$3:6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$8:16 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 3:6 = 8:16

$\therefore$ 3, 6, 8, 16 या संख्या प्रमाणात आहेत.

उदा. (2) 6, 8, 10, 14

$6:8 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$10:14 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ 6:8 व 10:14 ही गुणोत्तरे समान नाहीत.

$\therefore$ 6, 8, 10, 14 या संख्या प्रमाणात नाहीत.

उदा. (3) $3:2 = x:8$ असेल तर x = किती ?

$3:2 = x:8 \therefore \frac{3}{2} = \frac{x}{8}$

आता छेदांच्या निरीक्षणावरून, $2 \times 4 = 8$, $\therefore 3 \times 4 = x \therefore x = 12$

1. खालील संख्या प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.

(1) 10, 5, 20, 10 (2) 4, 6, 8, 12 (3) 10, 8, 6, 4

2. खालील प्रमाणांतील x ची किंमत काढा.

(1) $8:12 = 2:x$ (2) $4:5 = x:50$ (3) $x:6 = 10:15$ (4) $5:x = 20:24$

शाब्दिक उदाहरणे

खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

उदा. (1) 7 चेंडूंची किंमत 42 रु. आहे, तर अशाच 21 चेंडूंची किंमत काढा.

चेंडू	किंमत
7	42 रु.
21	? रु.

चेंडूंची संख्या तिप्पट झाली आहे म्हणून त्यांची किंमतही तिप्पट होईल. चेंडूंच्या संख्यांचे गुणोत्तर = चेंडूंच्या किमतींचे गुणोत्तर

$\therefore \dfrac{7}{21} = \dfrac{42}{\square}$

$\therefore 42 = 7 \times 6$ (अंशाची 6 पट आहे.)

$\therefore$ चौकटीतील संख्या $21 \times 6 = 126$. (छेदाची 6 पट आहे.)

$\therefore$ 21 चेंडूंची किंमत 126 रु.

उदा. (2) 12 केळ्यांना 15 रु. पडतात, तर 8 केळ्यांची किंमत किती ?

केळ्यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर = केळ्यांच्या किमतींचे गुणोत्तर

$\therefore \dfrac{12}{8} = \dfrac{15}{\square}$

$\therefore \dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{\square}$ ---- संक्षिप्त रूप दिले.

आता $15 = 3 \times 5$ (अंशाची 5 पट आहे.)

$\therefore$ चौकटीतील संख्या $2 \times 5 = 10$ (छेदाची 5 पट केली.)

$\therefore$ 8 केळ्यांची किंमत 10 रु.

खालील उदाहरणे प्रमाणाचा उपयोग करून सोडवा.

1. 12 भोवऱ्यांची किंमत 60 रु. आहे, तर तशाच 17 भोवऱ्यांची किंमत काढा.
2. सुबाभळीच्या 100 रोपांची किंमत 90 रुपये आहे, तर 250 रोपांची किंमत किती होईल ?
3. सोयाबीनच्या बियाण्याच्या 3 पिशव्यांची किंमत 2250 रु. आहे, तर तशाच 7 पिशव्यांची किंमत काढा.
4. एक विमान 5 तासांत 4000 किमी जाते. त्याच वेगाने ते विमान 7 तासांत किती अंतर जाईल ?
5. 10 सेमी लांबीच्या लोखंडी गजाचे वजन 250 ग्रॅम आहे. तशाच 25 सेमी लांबीच्या लोखंडी गजाचे वजन काढा.
6. एक गाडी 1 तासात 24 किमी अंतर जाते. त्याच वेगाने ती गाडी 20 मिनिटांत किती अंतर जाईल ?

12. नफा – तोटा

उजळणी

- वस्तू खरेदी करणे म्हणजे विकत घेणे. ज्या किमतीला वस्तू खरेदी केली जाते, तिला खरेदी किंमत किंवा खरेदी म्हणतात.
- वस्तू ज्या किमतीला विकली जाते, तिला विक्री किंमत किंवा विक्री म्हणतात.
- खरेदी किमतीपेक्षा विक्री किंमत जास्त असेल, तर नफा किंवा फायदा होतो.

नफा = विक्री – खरेदी

- काही वेळा वस्तू खराब होणे, जुनी होणे किंवा अधिक चांगल्या दर्जाची वस्तू बाजारात येणे, अशा कारणांनी वस्तू खरेदी किमतीपेक्षा कमी किमतीत विकावी लागते.
- खरेदी किमतीपेक्षा विक्री किंमत कमी झाल्यामुळे तोटा होतो.

तोटा = खरेदी – विक्री

उदाहरणसंग्रह 36

1. तक्त्यातील उदाहरणांत नफा झाला, की तोटा झाला हे ओळखून रिकाम्या चौकटींमध्ये योग्य संख्या लिहा.

क्रमांक	खरेदी (रु.)	विक्री (रु.)	नफा (रु.)	तोटा (रु.)
(1)	560	600		
(2)	450	400		
(3)	300	345		
(4)	785	765		
(5)	5180	6000		
(6)	3050	3200		
(7)	8600	8520		

शाब्दिक उदाहरणे

उदा. (1) गुलाबभाईंनी 30 रु. डझन या दराने 10 डझन संत्री घेतली. त्यांपैकी 6 डझन संत्री 42 रु. डझन या दराने व उरलेली संत्री 28 रु. डझन या दराने विकली, तर त्यांना नफा झाला की तोटा ? किती ?

1 डझन संत्र्यांची खरेदी 30 रु.

∴ 10 डझन संत्र्यांची खरेदी $10 \times 30 = 300$ रु.

1 डझन संत्र्यांचा विक्रीचा दर 42 रु.

∴ 6 डझन संत्र्यांची विक्रीची किंमत $6 \times 42 = 252$ रु.

उरलेली संत्री $10 - 6 = 4$ डझन

या 4 डझन संत्र्यांची विक्री किंमत $4 \times 28 = 112$ रु.

∴ एकूण विक्री किंमत $= 252 + 112 = 364$ रु.

खरेदीपेक्षा विक्री जास्त असल्याने गुलाबभाईंना नफा झाला.

नफा = विक्री – खरेदी

$= 364 - 300$

$= 64$

∴ 64 रु. नफा झाला.

उदा. (2) तुळसाने 12 रु. लीटर दराने 50 लीटर दूध विकत घेतले. ते सर्व दूध तिने 575 रुपयांस विकले, तर तिला नफा झाला की तोटा ? किती ?

1 लीटर दुधाची खरेदी किंमत 12 रु.

∴ 50 लीटर दुधाची खरेदी किंमत $50 \times 12 = 600$ रु.

आता विक्री = 575 रु.

येथे खरेदीपेक्षा विक्री कमी आहे, म्हणजेच तुळसाला तोटा झाला.

तोटा = खरेदी – विक्री

$= 600 - 575$

$= 25$

∴ 25 रु. तोटा झाला.

उदाहरणसंग्रह 37

1. मगनशेठने 20 रु. दराने 15 खेळणी आणली. ती सर्व खेळणी त्यांनी 345 रुपयांस विकली, तर त्यांना या व्यवहारात नफा झाला की तोटा ? किती ?
2. हनिफने 50 सफरचंदांची पेटी 260 रुपयांस खरेदी केली. ती सर्व सफरचंदे त्याने 5 रुपयांस एक याप्रमाणे विकली, तर त्याला किती रुपये फायदा किंवा तोटा झाला ?
3. हरभजनने 10 पेन्सिलींची एक पेटी 12.50 रुपयांस विकत घेतली. त्यातील पेन्सिली त्याने प्रत्येकी 1.50 रु. प्रमाणे विकल्या. त्याला या व्यवहारात किती फायदा किंवा तोटा झाला ?
4. अजीमने 6 रु. प्रति किग्रॅ दराने 40 किग्रॅ वांगी घेतली. त्यांपैकी 25 किग्रॅ वांगी त्याने 8 रु. किग्रॅ दराने विकली व बाकीची 6 रु. किग्रॅ दराने विकली, तर त्याला वांगी विकून नफा झाला की तोटा ? किती ?
5. 72 रु. किग्रॅ दराचा 28 किग्रॅ चहा व 90 रु. किग्रॅ दराचा 56 किलोग्रॅम चहा एकत्र करून तो चहा 85 रु. किग्रॅ दराने विकला, तर चहा विक्रीतून किती नफा होईल ?
6. कौस्तुभने 96 किग्रॅ साखर 17 रु. दराने खरेदी करून ती 18.50 रु. किग्रॅ दराने विकली, तर त्याला साखर विक्रीतून किती नफा होईल ?

विक्री आणि नफा किंवा तोटा माहीत असल्यास खरेदी काढणे.

उदा. (1) सविताने प्रत्येकी 380 रु. दराने 25 साड्या विकल्या. त्या सर्व साड्या विकून तिला 1500 रु. नफा झाला, तर साड्यांची खरेदी किंमत काढा.

1 साडीची विक्री किंमत 380 रु.

∴ 25 साड्यांची एकूण विक्री किंमत 380 × 25 = 9500 रु.

सविताला 1500 रु. नफा झाला.

खरेदी = विक्री − नफा

= 9500 − 1500

= 8000

∴ साड्यांची खरेदीची किंमत 8000 रु.

उदा. (2) एका व्यापाऱ्याने प्रत्येकी 7.50 रु. प्रमाणे 20 टोप्या विकल्यामुळे त्याला 10 रु. तोटा झाला, तर प्रत्येक टोपीची खरेदी किंमत किती ?

1 टोपीची विक्री = 7.50 रु.

$\therefore$ 20 टोप्यांची विक्री = 7.50 × 20 = 150.00 रु.

व्यापाऱ्यास 10 रु. तोटा झाला.

खरेदी = विक्री + तोटा

= 150 + 10

= 160

आता 20 टोप्यांची खरेदी 160 रु.

$\therefore$ 1 टोपीची खरेदी = $\frac{160}{20}$ = 8 रु.

$\therefore$ प्रत्येक टोपीची खरेदी किंमत 8 रु.

उदाहरणसंग्रह 38

1. 2340 रुपयांना 15 शर्ट विकले, तेव्हा दुकानदारास 60 रु. तोटा झाला, तर प्रत्येक शर्टची खरेदी किंमत किती होती ते काढा.
2. प्रत्येकी 5 रुपये प्रमाणे 40 खेळणी विकल्यास दुकानदारास 80 रु. नफा होईल, तर प्रत्येक खेळण्याची खरेदी किंमत काढा.
3. शंकररावांनी घेतलेली 4 हेक्टर जमीन त्यांनी लगेच 16 लाख रुपयांस विकली. त्यामुळे त्यांना 50000 रु. नफा झाला, तर त्यांनी प्रति हेक्टर कोणत्या दराने जमीन खरेदी केली होती ?
4. एका दुकानदाराने 16 घड्याळे 1570 रुपयांस विकल्यास 190 रु. तोटा होतो, तर प्रत्येक घड्याळाची खरेदी किंमत काय होती ?

13. परिमिती

✱ उजळणी

मागील इयत्तेत त्रिकोण, आयत, चौरस यांची परिमिती कशी काढतात, हे आपण अभ्यासले आहे.

काही रेषाखंडांनी बंदिस्त असलेल्या आकृतीच्या सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज म्हणजे त्या आकृतीची परिमिती होय.

- आयताची परिमिती = 2 × लांबी + 2 × रुंदी
- चौरसाची परिमिती = 4 × बाजूची लांबी
- त्रिकोणाची परिमिती = त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंच्या लांबींची बेरीज

परिमिती काढण्याची सूत्रे आपण शिकलो आहोत. हीच सूत्रे आपण आता अक्षरांचा वापर करून लिहू.

- आयताची परिमिती = 2 × लांबी + 2 × रुंदी

आयताच्या लांबीसाठी l आणि रुंदीसाठी b ही अक्षरे घेऊ.

∴ आयताची परिमिती $= 2 \times l + 2 \times b$

∴ **आयताची परिमिती $= 2\,(l + b)$**

- चौरसाची परिमिती = 4 × बाजू

चौरसाच्या बाजूसाठी x हे अक्षर घेऊ.

∴ **चौरसाची परिमिती $= 4 \times x = 4x$**

- त्रिकोणाच्या बाजूंसाठी a, b, c ही अक्षरे मानल्यास

त्रिकोणाची परिमिती = सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज

∴ **त्रिकोणाची परिमिती $= a + b + c$**

उदा. (1) आयताची लांबी 8 सेमी व रुंदी 5 सेमी आहे, तर आयताची परिमिती काढा.

दिलेल्या बाबी : लांबी (l) = 8 सेमी, रुंदी (b) = 5 सेमी

आयताची परिमिती $= 2\,(l + b)$

$= 2\,(8 + 5)$

$= 2\,(13)$

$= 26$ सेमी

उदा. (2) 2.8 मी बाजू असणाऱ्या चौरसाची परिमिती काढा.

दिलेल्या बाबी : चौरसाची बाजू (x) = 2.8 मी

चौरसाची परिमिती $= 4 \times x$

$= 4 \times 2.8$

$= 11.2$ मी

उदा. (3) 12 सेमी, 15 सेमी व 8 सेमी बाजू असणाऱ्या त्रिकोणाची परिमिती काढा.

दिलेल्या बाबी : त्रिकोणाच्या बाजू a = 12 सेमी

b = 15 सेमी

c = 8 सेमी

त्रिकोणाची परिमिती $= a + b + c$

$= 12 + 15 + 8$

$= 35$ सेमी

उदाहरणसंग्रह 39

1. आयताची लांबी व रुंदी खाली दिली आहे. आयताची परिमिती काढा.
   (1) 9 सेमी, 6 सेमी (2) 5.2 मी, 4 मी (3) 7.5 सेमी, 3.2 सेमी
2. 12 सेमी बाजू असणाऱ्या चौरसाची परिमिती काढा.
3. 6 सेमी, 9 सेमी व 5 सेमी बाजू असणाऱ्या त्रिकोणाची परिमिती काढा.
4. 4.8 मी, 10.2 मी, 5.3 मी बाजू असणाऱ्या त्रिकोणाची परिमिती काढा.

शाब्दिक उदाहरणे

उदा. (1) त्रिकोणाकृती भूखंडाच्या बाजू 65 मी, 60 मी, 32 मी असून, त्याला तारेचे चार पदरी कुंपण घालायचे असल्यास एकूण किती लांबीची तार लागेल ?

दिलेल्या बाबी : भूखंडाच्या बाजू a = 65 मी, b = 60 मी, c = 32 मी.

विचारलेल्या बाबी : कुंपणास किती लांबीची तार लागेल ?

विचार : तारेच्या एक पदरी कुंपणासाठी जागेच्या परिमितीएवढी तार लागेल.

4 पदरी कुंपणासाठी = 4 × परिमिती एवढी तार लागेल.

रीत	आपण काय केले ?
त्रिकोणाची परिमिती $= a + b + c$	सूत्र लिहिले.
$= 65 + 60 + 32$	किमती घातल्या.
$= 157$ मी	बेरीज केली.

$\therefore$ तारेच्या 1 पदरी कुंपणासाठी 157 मी तार लागेल.

$\therefore$ तारेच्या 4 पदरी कुंपणासाठी लागणाऱ्या तारेची लांबी $= 4 \times$ परिमिती

$= 4 \times 157$

$= 628$ मी

$\therefore$ कुंपणासाठी 628 मी तार लागेल.

उदा. (2) मीनू रोज धावण्याचा सराव करण्यासाठी 80 मी बाजू असलेल्या चौरसाकार मैदानाभोवती 8 फेरे मारते, तर ती रोज किती मीटर धावते ?

दिलेल्या बाबी : मैदानाची बाजू $(x) = 80$ मी

फेऱ्यांची संख्या $= 8$

विचारलेल्या बाबी : मीनू एकूण किती मीटर धावते ?

विचार : मीनू एका फेऱ्यात मैदानाच्या परिमितीएवढे अंतर धावते.

8 फेऱ्यांत '8 × परिमिती' एवढे अंतर धावते.

रीत	आपण काय केले ?
मैदानाची परिमिती = चौरसाची परिमिती	
$= 4 \times x$	सूत्र लिहिले.
$= 4 \times 80$	किमती घातल्या.
$= 320$ मी	गुणाकार केला.

$\therefore$ मीनू एका फेऱ्यात 320 मी अंतर धावते.

8 फेऱ्यांत $320 \times 8 = 2560$ मी अंतर धावते.

$\therefore$ मीनू रोज 2560 मी धावते.

उदा. (3) 17 मी लांब व 10 मी रुंद आयताकृती बागेभोवती तारेचे कुंपण घालायचे आहे. तारेसाठी येणारा खर्च एका मीटरला 3.25 रु. आहे, तर तारेचे 3 फेरे घालण्यासाठी एकूण खर्च किती येईल ?

दिलेल्या बाबी : आयताची लांबी $(l) = 17$ मी

आयताची रुंदी $(b) = 10$ मी

तारेचे फेरे = 3

एक मीटरचा खर्च = 3.25 रु.

विचारलेल्या बाबी : कुंपण घालण्यासाठी एकूण खर्च किती येईल ?

विचार : 3 फेऱ्यांच्या कुंपणासाठी तारेची लांबी = 3 × परिमिती

कुंपणासाठी एकूण खर्च = (3 × परिमिती) × 3.25 रु.

	रीत	आपण काय केले ?
बागेची परिमिती	$= 2\,(l + b)$	सूत्र लिहिले.
	$= 2\,(17 + 10)$	किमती घातल्या.
	$= 2\,(27)$	बेरीज केली.
	= 54 मी	गुणाकार केला.

∴ 3 फेऱ्यांच्या कुंपणासाठी तारेची लांबी = 3 × परिमिती

= 3 × 54 = 162 मी

कुंपणासाठी एकूण खर्च = 162 × 3.25

= 526.50 रु.

∴ कुंपणासाठी एकूण खर्च 526.50 रु. येईल.

उदाहरणसंग्रह 40

1. 15 मी लांब व 10 मी रुंदीचा एक मंडप घातला आहे. त्याच्या कडेने झालर लावण्यासाठी ती किती मीटर लांबीची असावी लागेल ?
2. 1.5 मी मापाच्या चौरसाकृती खिडकीवर बारीक जाळी बसवायची आहे. त्यासाठी कडेने लाकडी पट्टी लावायची आहे, तर पट्टी किती मीटर लांबीची लागेल ?
3. सतबीर रोज सकाळी 320 मी लांब व 210 मी रुंद असलेल्या बागेच्या कडेने पायी चालतो, तर तो रोज एका फेरीत किती अंतर पायी चालतो ?
4. 30 मी, 20 मी, व 25 मी बाजू असलेल्या त्रिकोणाकृती भूखंडाला, एका मीटरला 2.50 रु. या दराने 4 पदरी कुंपण घालण्यासाठी एकूण किती खर्च येईल ?
5. 5 मी 20 सेमी लांब व 3 मी 30 सेमी रुंद सतरंजीच्या काठांना चारही बाजूने गोठ लावण्यासाठी किती मीटर गोठ लागेल ?

परिमिती दिल्यास बाजू काढणे

उदा. (1) चौरसाची परिमिती 48 सेमी आहे, तर त्या चौरसाची बाजू काढा.

चौरसाची परिमिती = $4 \times x$

येथे परिमिती 48 आहे.

$\therefore 4 \times x = 48$

परंतु $4 \times 12 = 48$

$\therefore \quad x = 12$

$\therefore$ त्या चौरसाची बाजू = 12 सेमी

उदा. (2) आयताची परिमिती 36 सेमी असून, त्या आयताची लांबी 10 सेमी आहे, तर त्याची रुंदी काढा.

आयताची परिमिती = $2\ (l + b)$

$\therefore \quad 2\ (10 + b) = 36$

परंतु $2 \times 18 = 36$

$\therefore \quad 10 + b = 18$

10 व 8 यांची बेरीज 18 येते.

यावरून, $b = 8$

$\therefore$ आयताची रुंदी = 8 सेमी

उदाहरणसंग्रह 41

1. एका त्रिकोणाची परिमिती 50 सेमी आहे. त्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू 15 सेमी व 20 सेमी आहेत, तर तिसऱ्या बाजूची लांबी काढा.
2. एका चौरसाची परिमिती 80 सेमी आहे. त्या चौरसाची बाजू काढा.
3. एका आयताची परिमिती 62 मी असून रुंदी 7 मी आहे, तर त्या आयताची लांबी काढा.
4. एका त्रिकोणाकृती पताकेची परिमिती 55 सेमी आहे. त्या पताकेची एक बाजू 15 सेमी आहे. उरलेल्या बाजू समान मापाच्या आहेत, तर उरलेल्या प्रत्येक बाजूची लांबी काढा.
5. एका आयताकृती तलावाची लांबी 30 मी असून, परिमिती 100 मी आहे, तर त्याची रुंदी काढा.

6. चौरसाकृती खोलीची परिमिती 16 मी आहे, तर त्या खोलीची प्रत्येक बाजू किती लांबीची असेल ?

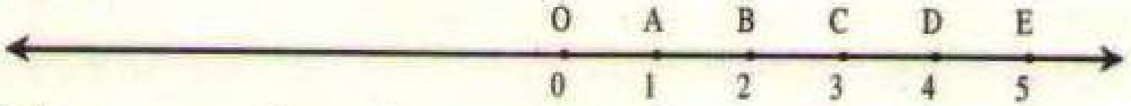
7. एका तारेच्या आयताकृतीची लांबी 50 सेमी व रुंदी 30 सेमी आहे. ती सरळ करून त्याच तारेची चौरसाकृती तयार केल्यास तिची प्रत्येक बाजू किती सेमी ?

विभाग दुसरा

14. पूर्णांक संख्या

आपण नैसर्गिक संख्या व पूर्ण संख्या यांची ओळख करून घेतली आहे. आता 'पूर्णांक' संख्यांची ओळख आपण करून घेणार आहोत. 'पूर्णांक' संख्यांची ओळख करून घेण्यासाठी संख्यारेषा उपयुक्त ठरते, म्हणून प्रथम संख्यारेषेची ओळख करून घेऊ.

संख्यारेषा



येथे दाखवल्याप्रमाणे एक रेषा काढली. त्या रेषेच्या कोणत्याही एका बिंदूला O हे नाव दिले. बिंदू O च्या उजवीकडे A हा त्या रेषेचा आणखी एक बिंदू घेतला. बिंदू O हा शून्य ही संख्या दर्शवतो आणि A हा बिंदू 1 ही संख्या दर्शवतो असे मानले.

कंपासमध्ये OA एवढे अंतर घेऊन, बिंदू A च्या उजवीकडे OA एवढ्याच अंतरावर बिंदू B घेतला. तो 2 ही संख्या दर्शवतो. याप्रमाणेच बिंदू B च्या उजवीकडे क्रमाने बिंदू C, D, E, ... घेतले. ते अनुक्रमे 3, 4, 5, ... या संख्या दर्शवतात.

जेव्हा रेषेचे बिंदू संख्या दर्शवतात, तेव्हा त्या रेषेला संख्यारेषा म्हणतात.

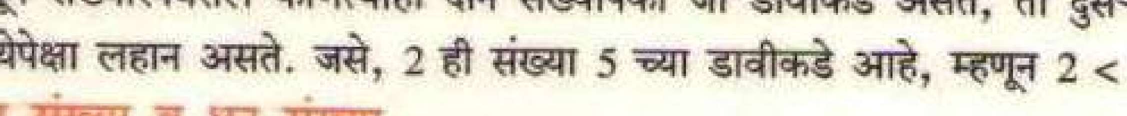
वरील आकृतीत संख्यारेषेवर 0, 1, 2, 3, ... या पूर्ण संख्या दर्शवल्या आहेत.

संख्यारेषेवर 0 (शून्य) ही संख्या दर्शवणाऱ्या बिंदूला O हेच नाव देण्याची पद्धत आहे. या बिंदूला आरंभबिंदू म्हणतात.

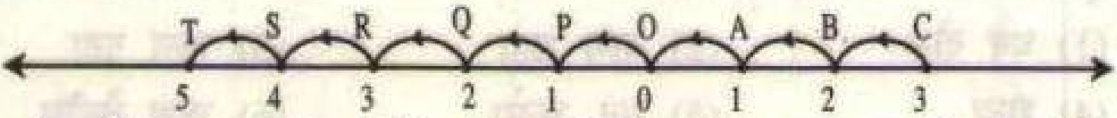
संख्यारेषेवरून असे दिसते,की जसजसे उजवीकडे जावे,तसतशा संख्या मोठ्या होत जातात. याउलट जसजसे डावीकडे जावे तसतशा संख्या लहान होत जातात. म्हणून संख्यारेषेवरील कोणत्याही दोन संख्यांपैकी जी डावीकडे असते, ती दुसऱ्या संख्येपेक्षा लहान असते. जसे, 2 ही संख्या 5 च्या डावीकडे आहे, म्हणून $2 < 5$.

ऋण संख्या व धन संख्या

कोणतीही पूर्ण संख्या, समजा 3, घेतली. या संख्येतून 1 वजा केला, की 2 ही संख्या मिळते. 2 मधून 1 वजा केल्यास 1 आणि 1 मधून 1 वजा केल्यास 0 ही संख्या मिळते.



आता 'हीच क्रिया यापुढे अशीच चालू ठेवता येईल का ?' या प्रश्नाचे उत्तर 'होय' असे आहे.



संख्यारेषेवर O या आरंभबिंदूच्या डावीकडे, OA एवढ्याच अंतरावर बिंदू P मिळेल. डावीकडे हीच क्रिया अशीच चालू ठेवून Q, R, S,... असे आणखी कितीही बिंदू मिळवता येतील. आरंभबिंदूच्या डावीकडील P, Q, R,... हे बिंदूसुद्धा अनुक्रमे 1, 2, 3,... या संख्या दर्शवतील.

आता वाचताना किंवा लिहिताना 1, 2, 3,... या संख्या आरंभबिंदूच्या डावीकडील की उजवीकडील हे समजण्यासाठी डावीकडील संख्यांना ऋण संख्या आणि उजवीकडील संख्यांना धन संख्या म्हणण्याचा संकेत आहे.

आरंभबिंदू दर्शवत असलेली 0 ही संख्या धनही नसते आणि ऋणही नसते.

शून्याच्या डावीकडील म्हणजे ऋण 1, ऋण 2, ऋण 3,... या संख्या चिन्हांनी – 1, – 2, – 3 अशा दाखवतात.

शून्याच्या उजवीकडील म्हणजे धन 1, धन 2, धन 3,... या संख्या चिन्हांनी + 1, + 2, + 3,... अशा दाखवतात.

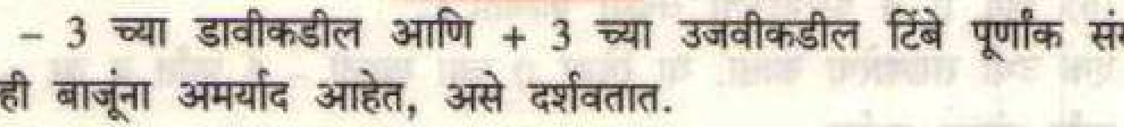
आता या सर्व संख्यांचा समूह आपल्याला पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

... , – 3, – 2, – 1, 0, + 1, + 2, + 3 , ...

या समूहातील संख्यांना **पूर्णांक संख्या** म्हणतात.

– 3 च्या डावीकडील आणि + 3 च्या उजवीकडील टिंबे पूर्णांक संख्या दोन्ही बाजूंना अमर्याद आहेत, असे दर्शवतात.

पुढील आकृतीत संख्यारेषेवर दाखवलेल्या पूर्णांक संख्या पाहा.



या संख्यारेषेवर बिंदू X ने दर्शवलेली संख्या – 5 (वाचन 'ऋण 5'), बिंदू Q ने दर्शवलेली संख्या + 4 (वाचन 'धन 4') आणि आरंभबिंदू O ने दर्शवलेली संख्या 0 (शून्य) आहे.

साधारणत: संख्यारेषा सोईसाठी आडवी काढतात. उभी संख्यारेषाही काढता येते. संख्यारेषा उभी काढली, तर आरंभबिंदूच्या वरील संख्या धन आणि आरंभबिंदूच्या खालील संख्या ऋण मानण्याचा संकेत आहे.

उदाहरणसंग्रह 42

1. पुढील संख्या चिन्हांत लिहा.

   (1) धन दोन (2) ऋण सहा (3) ऋण दहा

   (4) शून्य (5) धन अठरा (6) ऋण तेवीस

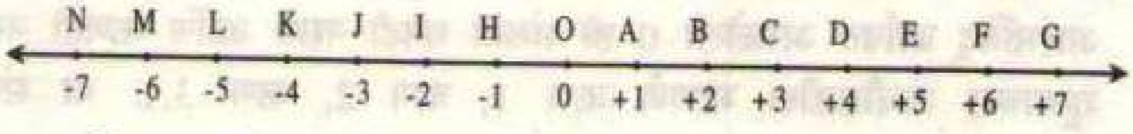
2. पुढील संख्या अक्षरांत लिहा.

   (1) – 9 (2) + 5 (3) – 28 (4) – 100 (5) + 81 (6) – 4

   (7) – 1 (8) + 1 (9) + 72 (10) – 48 (11) + 65 (12) – 95

3. वरील प्रश्न (2) मधील संख्यांचे, संख्यारेषेच्या संदर्भात 0 च्या डावीकडील संख्या आणि 0 च्या उजवीकडील संख्या असे वर्गीकरण करा.

4. पुढील संख्यारेषेचे निरीक्षण करा. खाली दिलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



   (1) बिंदू O कोणती संख्या दर्शवतो ?

   (2) बिंदू A ने दर्शवलेली संख्या कोणती ?

   (3) + 7 ही संख्या दर्शवणारा बिंदू कोणता ?

   (4) – 3 ही संख्या दर्शवणारा बिंदू कोणता ?

   (5) बिंदू I ने दर्शवलेली संख्या कोणती ?

   (6) बिंदू B ने दर्शवलेली संख्या कोणती ?

5. एक उभी संख्यारेषा काढा. या रेषेवर 0 च्या खाली – 5 पर्यंत व वर + 5 पर्यंत संख्या दर्शवा.

पूर्णांक संख्यांचा लहानमोठेपणा (क्रमसंबंध)

संख्यांच्या लहानमोठेपणालाच संख्यांचा क्रमसंबंध असेही म्हणतात.

दोन पूर्णांक संख्यांचा लहानमोठेपणा त्यांच्या संख्यारेषेवरील स्थानांवरून ठरवता येतो.

दोन संख्यांपैकी जी संख्या संख्यारेषेवर डावीकडे असते ती संख्या दुसरीपेक्षा लहान असते.

उदा.(1) पुढील दोन संख्यांचा लहानमोठेपणा संख्यारेषेवरून ठरवा.

(1) + 2, + 6 (2) – 1, – 5 (3) – 3, 0

(1) संख्यारेषेवर + 2 चे स्थान + 6 च्या डावीकडे आहे.

$\therefore (+2) < (+6)$

(2) संख्यारेषेवर ऋण 5 चे स्थान ऋण 1 च्या डावीकडे आहे.

$\therefore (-5) < (-1)$

(3) संख्यारेषेवर – 3 चे स्थान 0 च्या डावीकडे आहे.

$\therefore -3 < 0$

संख्यारेषेवरून निरीक्षणाने असेही लक्षात येते, की कोणतीही ऋण संख्या शून्याच्या किंवा कोणत्याही धन संख्येच्या डावीकडे आहे.

कोणतीही ऋण पूर्णांक संख्या शून्यापेक्षा किंवा कोणत्याही धन पूर्णांक संख्येपेक्षा लहान असते.

तसेच पूर्णांक संख्या डावीकडे आणि उजवीकडे अमर्याद असल्याने **सर्वांत लहान पूर्णांक संख्या सांगता येत नाही आणि सर्वांत मोठी पूर्णांक संख्याही सांगता येत नाही.**

उदाहरणसंग्रह 43

खाली दिलेल्या संख्यारेषेच्या आधारे प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7

1. रिकाम्या चौकटींत < किंवा > यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) + 1 $\square$ + 6 (2) – 8 $\square$ – 5 (3) – 5 $\square$ – 8

(4) – 2 $\square$ + 3 (5) + 3 $\square$ – 2 (6) – 1 $\square$ + 1

(7) 0 $\square$ – 7 (8) – 4 $\square$ + 4 (9) + 2 $\square$ – 6

(10) – 3 $\square$ 0 (11) – 6 $\square$ + 5 (12) 0 $\square$ + 7

2. वरील संख्यारेषेवर दर्शवलेल्या संख्यांपैकी

(1) + 4 पेक्षा मोठ्या संख्या कोणत्या ?

(2) – 3 पेक्षा लहान संख्या कोणत्या ?

(3) – 4 पेक्षा मोठ्या आणि + 2 पेक्षा लहान अशा संख्या कोणत्या ?

(4) सर्वांत लहान संख्या कोणती ?

(5) सर्वांत मोठी संख्या कोणती ?

3. पूर्णांक संख्यासमूहातील सर्वांत लहान आणि सर्वांत मोठी संख्या कोणती ?

पूर्णांक संख्यांच्या चिन्हविरहित किमती

पूर्णांक संख्या ऋण की धन हे दर्शवणारे चिन्ह काढून टाकले, की मिळणाऱ्या संख्यांना त्यांच्या चिन्हविरहित किमती म्हणू.

जसे, – 5 चे चिन्ह काढल्यास 5, + 5 चे चिन्ह काढल्यास 5,

+ 16 चे चिन्ह काढल्यास 16, – 21 चे चिन्ह काढल्यास 21

0 या संख्येला धन किंवा ऋण चिन्ह नसते.

पूर्णांक संख्यांची बेरीज

पूर्णांक संख्यांची बेरीज करताना त्या संख्यांची चिन्हे वगळून येणाऱ्या संख्या विचारात घ्याव्या लागतात. बेरीज करताना चार शक्यता निर्माण होतात.

(1) दोन्ही संख्या धन असतील, जसे, + 6 व + 15

(2) दोन्ही संख्या ऋण असतील, जसे, – 9 व – 13

(3) एक संख्या धन व दुसरी ऋण असेल, जसे, – 18 व + 10

(4) एक संख्या धन किंवा ऋण व दुसरी शून्य असेल,

जसे, – 4 + 0 व 0 + 7

प्रत्येक शक्यतेच्या बाबतीत नियम लक्षात घेऊन बेरीज करावी लागते.

(1) दोन्ही संख्या धन असल्यास त्यांच्या चिन्हविरहित किमतींची बेरीज करावी. येणाऱ्या संख्येला धन चिन्ह द्यावे.

जसे, (+ 6) + (+ 15)

+ 6 व + 15 यांच्या चिन्हविरहित किमती अनुक्रमे 6 व 15 आहेत.

$6 + 15 = 21 \quad \therefore (+6) + (+15) = +21$

(2) दोन्ही संख्या ऋण असल्यास त्यांच्या चिन्हविरहित किमतींची बेरीज करावी. येणाऱ्या संख्येला ऋण चिन्ह द्यावे.

जसे, (– 9) + (– 13)

– 9 व – 13 यांच्या चिन्हविरहित किमती अनुक्रमे 9 व 13 आहेत.

9 + 13 = 22. या बेरजेला ऋण चिन्ह देऊ. $\therefore (-9) + (-13) = -22$

(3) एक संख्या ऋण व एक धन असल्यास,

त्यांच्या चिन्हविरहित किमती लक्षात घ्याव्या.

त्या किमतींमधील फरक काढावा. (मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करावी.)

ज्या संख्येची चिन्हविरहित किंमत जास्त असेल, तिचे मूळचे चिन्ह येणाऱ्या फरकाला द्यावे.

काही उदाहरणांनी या पायऱ्या समजून घेऊ.

उदा. (1) – 18 व + 10 यांची बेरीज करा.

– 18 ची चिन्हविरहित किंमत 18 व + 10 ची 10 आहे.

त्यांच्यातील फरक 18 – 10 = 8

18 ही चिन्हविरहित किंमत मोठी आहे. म्हणून 8 ला – 18 चे, म्हणजे – हे चिन्ह द्यायचे. $\therefore$ (– 18) + (+ 10) = – 8

उदा. (2) – 7 व + 16 यांची बेरीज करा.

– 7 ची चिन्हविरहित किंमत 7 आणि + 16 ची चिन्हविरहित किंमत 16.

7 व 16 यांतील फरक 16 – 7 = 9

बेरजेला + 16 या संख्येचे चिन्ह द्यायचे.

$\therefore$ (– 7) + (+ 16) = + 9

उदा. (3) – 20 व + 20 यांची बेरीज करा.

– 20 ची चिन्हविरहित किंमत 20 आणि + 20 ची चिन्हविरहित किंमत 20.

20 व 20 यांतील फरक 20 – 20 = 0

$\therefore$ (– 20) + (+ 20) = 0 (0 या संख्येला चिन्ह नसते.)

उदा. (4) पूर्ण संख्यांप्रमाणेच कोणतीही पूर्णांक संख्या व शून्य यांची बेरीज त्या पूर्णांक संख्येएवढीच असते.

जसे, – 8 + 0 = – 8 ; 0 + (+ 19) = + 19 ; 0 + 0 = 0

उदाहरणसंग्रह 44

1. पुढील संख्यांच्या चिन्हविरहित किमती लिहा.

   (1) + 38 (2) – 23 (3) 0 (4) – 5 (5) + 14

2. प्रत्येक जोडीतील संख्यांच्या चिन्हविरहित किमतींपैकी कोणती किंमत मोठी आहे हे ठरवा आणि त्या किमतींतील फरक काढा.

   (1) + 8, – 6 (2) – 8, + 6 (3) – 2, + 11 (4) + 15, – 20

   (5) + 45 , – 35 (6) + 32, – 45 (7) – 16, + 16 (8) 0, – 4

3. बेरीज करा.

(1) − 12, + 10	(2) + 12, − 10	(3) + 12, + 10
(4) − 12, − 10	(5) + 37, − 22	(6) − 37, + 22
(7) − 37, − 22	(8) + 37, + 22	(9) − 23, − 27
(10) + 23, − 27	(11) + 27 , + 23	(12) − 23, + 27
(13) − 8, 0	(14) − 5, − 15	(15) − 15, − 5
(16) + 11, + 9	(17) + 9, + 11	(18) + 20, − 1
(19) − 1, + 20	(20) 0, 0	(21) − 10, + 10
(22) + 11, − 11	(23) − 165, + 165	(24) + 92, − 92

पूर्णांक संख्यांची रूढ लेखन पद्धती

आतापर्यंतच्या लेखनात आपण ऋण आणि धन संख्यांची चिन्हे संख्येमागे लिहिली. रूढ लेखन पद्धतीमध्ये धन संख्यादर्शक '+' हे चिन्ह लिहीत नाहीत. जसे, + 8 ही संख्या 8 अशी लिहितात, म्हणजे संख्या चिन्हविरहित असेल, तर ती धन संख्या आहे असे समजतात आणि तिचे वाचन 'धन आठ' असे न करता 'आठ' असेच करतात.

बेरजेच्या काही उदाहरणांचे लेखन व वाचन पुढे दिले आहे, ते नीट समजून घ्या.

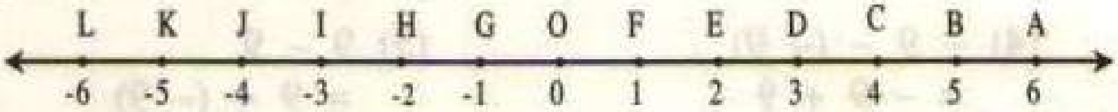
उदाहरण	रूढ लेखन	वाचन
(1) (+ 55) + (− 30)	55 + (− 30)	पंचावन अधिक ऋण तीस
(2) (+ 49) + (+ 14)	49 + (14) किंवा 49 + 14	एकोणपन्नास अधिक चौदा
(3) (− 27) + (− 127)	(− 27) + (− 127)	ऋण सत्तावीस अधिक ऋण एकशे सत्तावीस
(4) (− 19) + (+ 35)	(− 19) + (35) किंवा − 19 + 35	ऋण एकोणवीस अधिक पस्तीस
(5) (− 10) + (+ 10)	− 10 + (10) किंवा − 10 + 10	ऋण दहा अधिक दहा

मागील उदाहरणांवरून आणखी हेही लक्षात घ्या, की 'धन' या अर्थाने तसेच 'बेरीज करणे' या अर्थाने '+' हे एकच चिन्ह वापरतात. '+' हे चिन्ह कोणत्या अर्थाने वापरले आहे हे संदर्भावरून समजून घ्यावे लागते.

यापुढे आपण पूर्णांक संख्यालेखन रूढ पद्धतीने करणार आहोत, म्हणजे धन संख्या '+' हे चिन्ह न वापरताच लिहिणार आहोत. या पद्धतीचा सराव होणे आवश्यक आहे. त्यासाठी मागील उदाहरणसंग्रहातील बेरजेची उदाहरणे रूढ पद्धतीने लिहा आणि त्यांची उत्तरे काढा.

विरुद्ध संख्या

पुढील संख्यारेषेचे निरीक्षण करा.



O हा आरंभबिंदू शून्य ही संख्या दर्शवतो. बिंदू I, बिंदू O च्या डावीकडे 3 अंतरावर आहे. तसेच बिंदू D, बिंदू O च्या उजवीकडे 3 अंतरावर आहे. **संख्यारेषेवर आरंभबिंदूच्या परस्पर विरुद्ध अंगास समान अंतरावर असणाऱ्या बिंदूंनी दर्शवलेल्या संख्यांना विरुद्ध संख्या म्हणतात.** जसे, आरंभबिंदूपासून 3 एवढ्या अंतरावर असलेल्या – 3 आणि + 3 या परस्पर विरुद्ध संख्या आहेत.

तसेच (+ 6, – 6), (– 1, + 1), (+ 15, – 15) या परस्पर विरुद्ध संख्यांच्या आणखी काही जोड्या आहेत. **0 ची विरुद्ध संख्या 0 च असते.**

उदाहरणसंग्रह 45

1. विरुद्ध संख्या लिहा. (1) + 5 (2) – 2 (3) – 15 (4) + 27 (5) 10

पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी

'–' हे चिन्ह 'वजा करणे' आणि 'ऋण' संख्या या दोन्ही अर्थांनी वापरतात. चिन्ह कोणत्या अर्थाने वापरले आहे हे संदर्भावरून समजते.

जसे, 10 – (– 4) त्याचे वाचन 'दहा वजा ऋण चार किंवा दहा उणे ऋण चार' असे आहे; म्हणजे क्रमाने पहिले '–' चिन्ह 'वजा करणे' या अर्थाने आणि दुसरे '–' चिन्ह 'ऋण' संख्या या अर्थाने वापरले आहे.

'(– 9) – 9' चे वाचन 'ऋण नऊ वजा नऊ' असे करावे.

पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी करण्याचे नियम पुढीलप्रमाणे आहेत.

दिलेल्या संख्येतून दुसरी दिलेली संख्या वजा करणे, म्हणजे त्या दिलेल्या संख्येत दुसरीची विरुद्ध संख्या मिळवणे.

या नियमाने वजाबाकीचे प्रत्येक उदाहरण बेरजेत रूपांतरित होते.

उदा. (1) $15 - (-4)$

नियमानुसार 15 मधून -4 वजा करणे म्हणजे 15 मध्ये -4 ची विरुद्ध संख्या 4 मिळवणे. $\therefore 15 - (-4) = 15 + 4 = 19$

तसेच (2) $-8 - (-13)$
$= -8 + 13$
$= 5$

(3) $-9 - (9)$
$= -9 + (-9)$
$= -18$

(4) $-9 - (-9)$
$= -9 + 9$
$= 0$

(5) $9 - 9$
$= 9 + (-9)$
$= 0$

(6) $125 - 98$
$= 125 + (-98)$
$= 27$

(7) $-125 - 98$
$= -125 + (-98)$
$= -223$

(8) $-125 - (-98)$
$= -125 + (98)$
$= -27$

(9) $-98 - (-125)$
$= -98 + (125)$
$= 27$

(10) $0 - (-35)$
$= 0 + (35)$
$= 35$

उदाहरणसंग्रह 46

1. 'a मधून b ही पूर्णांक संख्या वजा करणे, म्हणजे a मध्ये b ची विरुद्ध संख्या मिळवणे' अशी वाक्ये a व b यांच्या पुढील किमतींसाठी लिहा.

(1) $a = 13, b = (-8)$ (2) $a = -4, b = (-11)$
(3) $a = 6, b = -6$ (4) $a = 9, b = 9$
(5) $a = -5, b = -5$ (6) $a = 14, b = 0$
(7) $a = 0, b = 14$ (8) $a = 0, b = -14$
(9) $a = 20, b = 12$

2. वजाबाकी करा.

(1) $8 - 5$	(2) $(-8) - (-5)$	(3) $8 - (-5)$
(4) $-8 - 5$	(5) $-16 - (-9)$	(6) $16 - 9$
(7) $-16 - 9$	(8) $16 - (-9)$	(9) $5 - (-5)$
(10) $-5 - 5$	(11) $5 - 5$	(12) $-5 - (-5)$
(13) $-28 - (-35)$	(14) $41 - (-33)$	(15) $-19 - 15$
(16) $12 - (-2)$	(17) $55 - (-30)$	(18) $49 - 14$
(19) $-27 - (-127)$	(20) $-19 - 35$	

पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार व भागाकार

प्रथम दोन्ही संख्यांच्या चिन्हविरहित किमतींचा गुणाकार करावा.

(1) दोन्ही संख्या धन असतील तर गुणाकार धन असतो.

(2) दोन्ही संख्या ऋण असतील तर गुणाकार धन असतो.

(3) एक संख्या ऋण व दुसरी धन असेल, तर गुणाकार ऋण असतो.

भागाकाराचे नियमही हेच आहेत.

गुणाकार-भागाकाराचे हे नियम पुढील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

उदा. (1) $(-14) \times (-5)$

-14 व -5 यांच्या चिन्हविरहित किमती अनुक्रमे 14 व 5 आहेत.

या किमतींचा गुणाकार $14 \times 5 = 70$

$\therefore (-14) \times (-5) = 70$

दोन ऋण संख्यांचा गुणाकार धन येतो.

उदा. (2) $(-105) \times 8$

-105 ची चिन्हविरहित किंमत 105 आणि (धन) 8 ची किंमत 8

$105 \times 8 = 840$

एक संख्या ऋण आणि एक धन आहे, म्हणून गुणाकार ऋण आहे.

$\therefore (-105) \times 8 = -840$

उदा. (3) $47 \times (-12)$

वरील उदाहरणाप्रमाणे विचार करून $47 \times 12 = 564$

$\therefore 47 \times (-12) = -564$

उदा. (4) $120 \div 30$

दोन्ही धन संख्या आहेत. त्यांच्या चिन्हविरहित किमती 120 व 30 आहेत.

$120 \div 30 = 4$

दोन धन संख्यांचा भागाकार धन संख्या असतो.

$\therefore$ (धन) $120 \div$ (धन) $30 =$ (धन) 4

उदा. (5) $(-48) \div 12$

$(-48) \div 12 = -4$ (कारण एक संख्या धन व दुसरी ऋण आहे.)

उदा. (6) $(60) \div (-5) = -12$ (कारण एक संख्या धन व दुसरी ऋण आहे.)

उदा. (7) $(-225) \div (-9) = 25$ (कारण दोन्ही संख्या ऋण आहेत.)

उदाहरणसंग्रह 47

1. पुढील गुणाकार करा.

(1) $12 \times (-3)$ (2) $(-6) \times 4$ (3) $(-15) \times (-5)$

(4) 35×8 (5) $(-38) \times (-2)$ (6) $15 \times (-61)$

2. पुढील भागाकार करा.

(1) $(-15) \div (-5)$ (2) $(-38) \div (-2)$ (3) $90 \div 6$

(4) $(-90) \div (-6)$ (5) $\frac{-72}{-12}$ (6) $\frac{63}{-21}$ (7) $\frac{-84}{14}$

क्रियांचा क्रम व कंसाचा वापर

क्रियांचा क्रम व कंसाचा वापर या प्रकरणात एका राशीत एकापेक्षा जास्त क्रिया आल्या तर त्यांचा क्रम ठरवण्यासंबंधीचे नियम दिले आहेत, ते पाहा.

पूर्णांक संख्यांसाठी सुद्धा क्रियांच्या क्रमाचे नियम तेच आहेत. पुढील उदाहरणे अभ्यासून ते समजून घ्या.

उदा. (1) सोपे रूप द्या.

$(13) \times (-5) - (-96) \div (2) + 20$

$= (13) \times (-5) - (-96) \div (2) + 20$

$= (-65) - (-48) + 20$ प्रथम गुणाकार-भागाकार या क्रिया डावीकडून उजवीकडे क्रमाने केल्या.

$= (-65) + 48 + 20$

$= -17 + 20$ डावीकडून उजवीकडे प्रथम वजाबाकी येते, म्हणून वजाबाकी प्रथम केली.

$= 3$

उदा. (2) सोपे रूप द्या. $112 \div [(-11) \times (-3) - (-42 \div 14 + 8)]$

$112 \div [(-11) \times (-3) - (-42 \div 14 + 8)]$

$= 112 \div [(-11) \times (-3) - (-3 + 8)]$ प्रथम आतल्या कंसातील

$= 112 \div [(-11) \times (-3) - (5)]$ क्रिया केल्या.

$= 112 \div [33 - 5]$

$= 112 \div 28$

$= 4$

उदाहरणसंग्रह 48

1. सोपे रूप द्या.

(1) $-5 + [(9) \times (-3) + (6 \times 11)] \div 13$

(2) $[180 + (-15) + 20] - [(-2) \times (-11) - (4 + 3)]$

(3) $(210 - 150) + [9 \times 10 + (-5 \times 2)] - 100$

(4) $-10 + [(-3) \times (-5) \div 3]$

(5) $(12 \times 4) \div 2 - 24$

(6) $[(15) \times (2) + (-4) \times (5)] \div (-5)$

पूर्णांक संख्यांचे क्रियांसंबंधीचे गुणधर्म

बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रियांसंबंधीचे पूर्णांक संख्यांचे गुणधर्म हे पूर्ण संख्यांच्या गुणधर्मांप्रमाणेच आहेत.

a, b, c या पूर्णांक संख्या असतील, तर

(1) $(a + b)$ ही पूर्णांक संख्या असते.

(2) $(a - b)$ ही पूर्णांक संख्या असते.

(3) $a \times b$ ही पूर्णांक संख्या असते.

(4) $a + 0 = a$ तसेच $0 + a = a$

(5) $a \times 1 = a$ तसेच $1 \times a = a$

(6) $a \times 0 = 0$ तसेच $0 \times a = 0$

(7) $a - 0 = a$

(8) $a + b = b + a$

(9) $a \times b = b \times a$

(10) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(11) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

(12) $a(b + c) = a \times b + a \times c$ **किंवा** $a \times b + a \times c = a(b + c)$

उदाहरणे सोडवताना या गुणधर्मांचा पडताळा घ्या.

उदाहरणसंग्रह 49

1. सोपे रूप द्या.

(1) $(-8) + (-3)$ (2) $13 - 15$ (3) $6 - (-19)$ (4) $10 + (-7)$

2. सोपे रूप द्या.

(1) $16 + (-5)$ (2) $(-5) + 16$ (3) $(-7) + (-11)$

(4) $(-11) + (-7)$ (5) $16 \times (-5)$ (6) $(-5) \times 16$

(7) $(-7) \times (-11)$ (8) 52×1 (9) $(-25) \times 1$

3. सोपे रूप द्या.

(1) $[5 \times (-3)] \times 6$ (2) $5 \times [(-3) \times 6]$

(3) $(-16) \times [4 \times 3]$ (4) $(-16 \times 4) \times 3$

(5) $[5 + (-3)] + 6$ (6) $5 + [(-3) + 6]$

(7) $-16 + [4 + 3]$ (8) $[-16 + 4] + 3$

4. सोपे रूप द्या.

(1) $4 \times [10 + (-12)]$ (2) $4 \times 10 + 4 \times (-12)$

(3) $(-5) \times [-13 + 10]$ (4) $(-5) \times (-13) + (-5) \times (10)$

15. बैजिक राशी

संख्येसाठी अक्षराचा वापर कसा करतात आणि त्याचा वापर करून गणिती मांडणी कशी करता येते, हे आपण यापूर्वी पाहिले आहे.

बैजिक राशी

$5x$, $p + 3$, $3a + b$, $4x - 6$, $\frac{x}{2}$

अशा गणिती मांडणींना **बैजिक राशी** म्हणतात. बैजिक राशीत येणाऱ्या अक्षराला **चल** म्हणतात. जसे, '$p + 3$' या बैजिक राशीत p हे चल आहे. '$3a + b$' या राशीमध्ये a आणि b ही दोन चले आहेत.

पद

$6mn$ या बैजिक राशीचा अभ्यास करू.

$6mn = 6 \times m \times n$

$6mn$ या राशीत गुणाकार ही एकच क्रिया आहे.

ज्या राशीत गुणाकार ही एकच क्रिया असते, त्या राशीला पद म्हणतात.

म्हणून $6mn$ हे एक पद आहे. तसेच $-7x$ आणि $4y^2$ ही देखील पदे आहेत.

सहगुणक

$-4y$ मध्ये -4 हा सहगुणक व y हे चल आहे.

पुढील सारणीचे निरीक्षण करा. प्रत्येक पदातील 'सहगुणक' समजून घ्या.

पद	सहगुणक	चले
$215pq$	215	p, q
$11mn$	11	m, n
$-9x^2y^3$	-9	x, y
$\frac{1}{3}m$	$\frac{1}{3}$	m
a	1	a

a या पदात सहगुणक दिसत नाही, परंतु $a = 1 \times a$ हे लक्षात घ्या. यावरून a चा सहगुणक 1 आहे.

उदाहरणसंग्रह 50

1. खालील बैजिक पदांतील सहगुणक व चल लिहा.

(1) $15p$ (2) y (3) $\frac{25}{7}x$ (4) $\frac{1}{2}\ p$ (5) $-9ax$ (6) $-5b^3$

सरूप व भिन्न रूप पदे

(1) $2x$, $4x$, $6x$ या तिन्ही पदांत x हेच चल आहे. प्रत्येक पदातील x चा घातांक 1 हाच आहे.

(2) $3y^2$, $-5y^2$ या दोन्ही पदांत y हेच चल आहे. प्रत्येक पदातील y चा घातांक 2 आहे.

(3) $2mn^2$, $4n^2m$ या दोन्ही पदांत m व n हीच दोन चले आहेत. दोन्ही पदांत m चा घातांक 1 आणि n चा घातांक 2 हाच आहे.

याप्रमाणे दोन किंवा अधिक पदांत चले तीच असतील आणि त्यांचे घातांकही समान असतील, तर त्या पदांना **सरूप पदे** म्हणतात.

$2x$, $4x$, $6x$ ही सरूप पदे आहेत. तसेच $3y^2$, $-5y^2$ ही सरूप पदे आहेत. $2mn^2$ आणि $4n^2m$ हीसुद्धा सरूप पदे आहेत.

सरूप नसणाऱ्या पदांना **भिन्न रूप** पदे म्हणतात. जसे, x व $2y$ या पदांत x व y ही भिन्न चले आहेत, म्हणून x व $2y$ ही पदे सरूप नाहीत, म्हणजे ती भिन्न रूप पदे आहेत. तसेच $5x$, $7x^2$ या पदांत x हे एकच चल असले, तरी त्यांचे घातांक भिन्न आहेत, म्हणून $5x$, $7x^2$ ही भिन्न रूप पदे आहेत.

$-3a^2$, $-3b^2$ या पदांत सहगुणक व चलांचे घातांक तेच असले, तरी चले भिन्न आहेत, म्हणून ही भिन्न रूप पदे आहेत.

उदाहरणसंग्रह 51

1. खाली दिलेल्या पदांच्या समूहांतून सरूप पदांचे गट तयार करा.

(1) $5x$, $-7y$, $6y$, $-3m$, $2z$, m, $-y$, $5z$, $-8x$

(2) $4x^2$, $-7y^3$, $-10x^2$, $-y^3$, $5y^3$

(3) $2x^2yz$, xyz^2, xzy, $-6xyz^2$, $-xyz$, $7yzx^2$

एकपदी

$2x$, $7xy$, $-3mn$ या तीन राशींपैकी प्रत्येक राशीत फक्त एकच पद आहे. या राशी **एकपदी** आहेत. -7, 5, 13 यादेखील एकपदी आहेत.

द्‌विपदी

$3a + b$, $m + q$, $x - 7y$, $7 - p$ या चार राशींपैकी प्रत्येक राशीत दोनच पदे आहेत आणि या दोन पदांत बेरीज किंवा वजाबाकी ही क्रिया आहे. या राशी **द्‌विपदी** आहेत.

त्रिपदी

आता $x^2 + x + 1$, $a^2 - 2a + 5$, $7p + 11r - 6$, $p^2 + p - 7$ या चार राशींपैकी प्रत्येक राशीत तीन पदे आहेत. या राशी **त्रिपदी** आहेत.

उदाहरणसंग्रह 52

1. खालील बैजिक राशींतील एकपदी, द्‌विपदी व त्रिपदी ओळखा.

(1) $a^2 - 2ab + b^2$ (2) $x^2y^2z^2$ (3) $x^2 - 9$

(4) $ab^2 - 2ab + 4abc$ (5) $45xyz$ (6) 8

(7) $-pq$ (8) $7k + 6l$ (9) $3x^2 + 4y + 6z$

बैजिक राशीची किंमत

- $4y$ या एकपद राशीत y हे चल आहे. येथे y ची किंमत कोणतीही संख्या असू शकते. त्यामुळे y ची किंमत जशी बदलेल, तशी $4y$ या राशीची किंमतही बदलते.

जसे, $y = 3$ असताना $4y = 4 \times 3 = 12$

$y = 10$ असताना $4y = 4 \times 10 = 40$

$y = -5$ असताना $4y = 4 \times (-5) = -20$

$y = 0$ असताना $4y = 4 \times 0 = 0$

- $3p + 5q$ या राशीत p व q ही दोन चले आहेत, म्हणजे p व q यांच्या किमती कोणत्याही संख्या असू शकतात. p व q च्या वेगवेगळ्या किमतींसाठी '$3p + 5q$' या राशीच्या वेगवेगळ्या किमती येतील.

जसे, $p = 4$, $q = -2$ असल्यास

$3p + 5q = 3 \times 4 + 5 \times (-2) = 12 + (-10) = 2$

त्याचप्रमाणे $p = (-5)$ व $q = 3$ असताना,

$3p + 5q = 3 \times (-5) + 5 \times 3 = -15 + 15 = 0$

उदा. (1) $p = 3$ घेऊन $p^3 - p^2$ या राशीची किंमत काढा.

$$\begin{aligned} p^3 - p^2 &= 3^3 - 3^2, \qquad (p = 3 \text{ ठेवून}) \\ &= 27 - 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

उदा. (2) $p = 2$ व $q = 3$ घेऊन $5p^2 - 4q$ या राशींची किंमत काढा.

$$\begin{aligned} 5p^2 - 4q &= 5 \times 2^2 - 4 \times 3, \qquad (p = 2 \text{ व } q = 3 \text{ ठेवून}) \\ &= 5 \times 4 - 4 \times 3 \\ &= 20 - 12 \\ &= 8 \end{aligned}$$

उदाहरणसंग्रह 53

1. $x = 4$ घेऊन खालील बैजिक राशींच्या किमती काढा.

(1) $5 - x$ (2) $3(5 - x)$ (3) $(5 - x)^2$ (4) $(x + 2)^2$

(5) $3(x + 2)$ (6) $2(x + 2) + 3$

2. $x = 3$ घेऊन खालील बैजिक राशींच्या किमती काढा.

(1) $5x - 3$ (2) x^2 (3) $2x^3$ (4) $5x^2 + x$ (5) $x^2 + 2x$

3. जर $a = 3$, $b = 4$, $c = -2$ असेल, तर खालील राशींच्या किमती काढा.

(1) $2a + 5b$ (2) $a + b + c$

(3) $b^2 + a^2 - c^2$ (4) $b^2 - a^2$

4. जर $p = 3$, $q = 5$ असेल, तर खालील राशींच्या किमती काढा.

(1) $p^2 + q^2$ (2) $p^2 - 2pq + q^2$

(3) $qp + 3q$ (4) $p^2 + 2p + q$

16. बैजिक राशींची बेरीज व वजाबाकी

❋ उजळणी

1. पूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी.

(1) $9 + 5 = 14$	(2) $(-9) + (-5) = -14$
(3) $9 + (-5) = 4$	(4) $(-9) + 5 = -4$
(5) $9 - 5 = 4$	(6) $(-9) - 5 = -14$
(7) $9 - (-5) = 14$	(8) $(-9) - (-5) = -4$

2. $3x$ ही एकपदी आहे. येथे $3x = 3 \times x$.
3. $3x$ या एकपदीत 3 हा सहगुणक असून x हे चल आहे.
4. a, a^2, ab यांपैकी प्रत्येक एकपदीचा सहगुणक 1 आहे.
5. $2x + y$, $a^2 - b^2$, $3xy + ab$ यांपैकी प्रत्येक राशी द्विपदी आहे.
6. $2a + 3b - c$, $2x^2 - 5x - 12$, $abc + 2a - 3c$ यांपैकी प्रत्येक राशी त्रिपदी आहे.
7. पुढे दिलेल्या प्रत्येक गटात सरूप पदे आहेत.
   (1) $4c^2$, $-5c^2$, c^2 (2) xy , $7xy$, $-4xy$
8. पुढे दिलेल्या प्रत्येक गटात भिन्न रूप पदे आहेत.
   (1) $6a$, $-3a^2$, $4ab$ (2) p^2 , $-2pq$, q^2
9. $5x = x + x + x + x + x$
10. 7 या संख्येची विरुद्ध संख्या -7 आहे, तसेच -7 या संख्येची विरुद्ध संख्या 7 आहे.

बैजिक राशींची बेरीज : सरूप एकपदींची बेरीज

पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) $4y$ व $3y$ यांची बेरीज करा.

$4y$ व $3y$ ही सरूप पदे आहेत.

$4y = y + y + y + y$ व $3y = y + y + y$

$\therefore\ 4y + 3y = (y + y + y + y) + (y + y + y)$

$= 7y$

लक्षात घ्या, की $4y$ चा सहगुणक 4 व $3y$ चा सहगुणक 3 यांची बेरीज $4 + 3 = 7$ येते आणि $4y + 3y = 7y$.

सरूप पदांची बेरीज करताना त्या पदांच्या सहगुणकांची बेरीज करून त्यापुढे चल लिहितात.

उदा. (2) $6a^2b$ व $5ba^2$ यांची बेरीज करा.

$$6a^2b + 5ba^2 = 6a^2b + 5a^2b \quad (5ba^2 \text{ म्हणजेच } 5a^2b)$$
$$= (6 + 5)a^2b$$
$$= 11a^2b$$

उदा. (3) $(-2x^2y)$ व $9x^2y$ यांची बेरीज करा.

$$(-2x^2y) + 9x^2y = [(-2) + 9]x^2y$$
$$= 7x^2y$$

उदा. (4) $(-10abc) + (-3abc) = ?$

$$(-10abc) + (-3abc) = [(-10) + (-3)]abc$$
$$= (-13)\ abc$$
$$= -13abc$$

उदा. (5) $-3a$, $5a$ व $-8a$ यांची बेरीज करा. (उभी मांडणी करून)

उभी मांडणी	
$-3a$	-3 व 5 यांची बेरीज 2 आली.
$+\ 5a$	2 व -8 यांची बेरीज -6 आली.
$+\ -8a$	$\therefore$ दिलेल्या पदांची बेरीज $-6a$ आली.
$-6a$	

उदाहरणसंग्रह 54

1. दिलेल्या राशींची बेरीज करा. (आडवी मांडणी करून)

(1) $12c$, $7c$ (2) bc^2 , $11bc^2$ (3) $-xyz$, $2xyz$

(4) $-6a^2b^2$, $-4a^2b^2$ (5) $10p^2q$, $-qp^2$ (6) a^3 , $-14a^3$

2. उभी मांडणी करून दिलेल्या राशींची बेरीज करा.

(1) $11x$, $6x$, $-2x$ (2) $-y^2$, $13y^2$, $-5y^2$

(3) $4a^2bc$, $-9bca^2$, $14cba^2$ (4) $\frac{1}{2}\ ax^2$, $\frac{3}{2}ax^2$, $-2ax^2$

भिन्न रूप एकपदींची बेरीज

खालील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) $4a$ व $3b$ यांची बेरीज करा.

$4a$ व $3b$ ही भिन्न रूप पदे आहेत, म्हणून $4a$ व $3b$ यांची बेरीज करताना त्यांच्या सहगुणकांची बेरीज करता येत नाही.

$\therefore$ $4a$ व $3b$ यांची बेरीज $= 4a + 3b$

उदा. (2) $6x^2$ व $-y^2$ यांची बेरीज करा.

$6x^2$ व $-y^2$ ही भिन्न रूप पदे आहेत.

$\therefore$ $6x^2$ व $(-y^2)$ यांची बेरीज $= 6x^2 + (-y^2)$

$= 6x^2 - y^2$

उदा. (3) $12abc$, $8ab$ व $-7abc$ यांची बेरीज करा.

$12abc + 8ab - 7abc$

येथे $12abc$ व $(-7abc)$ ही सरूप पदे आहेत; परंतु $8ab$ हे भिन्न रूप पद आहे.

$\therefore$ $12abc$, $8ab$ व $-7abc$ यांपैकी सरूप पदे एकत्र लिहू.

$12abc + 8ab + (-7abc) = [12abc + (-7abc)] + 8ab$

$= 5abc + 8ab$

उदा. (4) $13a^2$, $-8b$, $-9a^2$, $5b$ यांची बेरीज करा.

$13a^2 + (-8b) + (-9a^2) + 5b$

$= [13a^2 + (-9a^2)] + [(-8b) + 5b]$ (सरूप पदे एकत्र लिहून)

$= 4a^2 + (-3b)$

$= 4a^2 - 3b$

उदाहरणसंग्रह 55

1. बेरीज करा.

(1) $15x$ व $7y$ (2) $23m^2n$ व $-9nm$ (3) $12a^2b$, $13ab^2$

(4) $5a^2$, $19b^2$, c^2 (5) $-6n$, $4m$, $-2n$ (6) $3ab$, $-4bc$, $2bc$

(7) $18d$, $10d^2$, $-8d$, d^2 (8) $11x^2$, $-21y^2$, $9x^2$, $11y^2$

(9) a , $2b$, $2c$, $-c$, $-b$, $3a$ (10) $3a$, $4a^3$, $-5a^2$

द्विपदी – त्रिपदी यांची बेरीज

खालील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) $6x + 3y$ व $5y + 4x$ यांची बेरीज आडव्या मांडणीत करा.

$(6x + 3y) + (5y + 4x)$

सरूप पदे एकत्र लिहू.

$(6x + 4x) + (3y + 5y)$

$= 10x + 8y$

उदा. (2) $x + y + 2z$, $2x - y + z$, $3x - 4z - 2y$ यांची बेरीज उभ्या मांडणीत करा.

सरूप पदे एकाखाली एक लिहू.

$$\begin{array}{rrrr} & x & + \ y & + \ 2z \\ + & 2x & - \ y & + \ z \\ + & 3x & - \ 2y & - \ 4z \\ \hline & 6x & - \ 2y & - \ z \end{array}$$

उदाहरणसंग्रह 56

1. बेरीज करा. (आडवी मांडणी करून)

(1) $9p + 7q$, $2p + 5q$ (2) $6m^2 + 7n^2$, $11n^2 + 4m^2$

(3) $3a^2 - 2b^2$, $5b^2 - a^2$ (4) $3b + 4c - d$, $2d - c + 7b$

(5) $x + y + 2z$, $2y + z + x$ (6) $2p + 3q + 4c$, $4q - 5p$

2. बेरीज करा. (उभी मांडणी करून)

(1) $xy + yz + zx$, $9zx + 7yz + 3yx$

(2) $2x + 3y$, $6x - 2y$, $-4x + 12y - z$

(3) $a^2b + b^2c + c^2a$, $10ac^2 + 2ba^2 - 16cb^2$

(4) $15mn - 6ab + 7abc$, $abc - 8nm + 20ba$

बैजिक राशींची वजाबाकी

आपणास माहीत आहे, की 'एका पूर्णांकातून दुसरा पूर्णांक वजा करणे म्हणजे पहिल्या पूर्णांकात दुसऱ्या पूर्णांकाची विरुद्ध संख्या मिळवणे होय.' जसे, 15 मधून 8 वजा करणे म्हणजे 15 मध्ये 8 ची विरुद्ध संख्या (– 8) मिळवणे.

$\therefore 15 - 8 = 15 + (-8) = 7$

तसेच $15 - (-8) = 15 + 8 = 23$

बैजिक पदांची वजाबाकी याप्रमाणेच होते.

एका बैजिक राशीतून दुसरी बैजिक राशी वजा करणे, म्हणजे त्या राशीत दुसऱ्या राशीची विरुद्ध राशी मिळवणे.

दिलेल्या राशीची विरुद्ध राशी मांडताना मूळ राशीत ज्या पदाचे चिन्ह धन (+) असते त्या पदाचे चिन्ह विरुद्ध राशीत ऋण (–) होते. याउलट मूळ राशीतील पदाचे चिन्ह ऋण (–) असेल तर विरुद्ध राशीत त्या पदाचे चिन्ह धन (+) होते.

पुढील सारणी अभ्यासा.

दिलेली राशी	विरुद्ध राशी
$7x^2$	$-7x^2$
$-7x^2$	$7x^2$
$4a - 3b$	$-4a + 3b$
$-3m^2 + 7m + 10$	$3m^2 - 7m - 10$

उदा. (1) $17x$ मधून $(-5x)$ वजा करा.

$17x$ मधून $(-5x)$ वजा करणे, म्हणजे $17x$ मध्ये $(-5x)$ ची विरुद्ध राशी $5x$ मिळवणे.

$\therefore 17x - (-5x)$

$= 17x + 5x$ ... ($-5x$ ची विरुद्ध राशी मिळवली.)

$= 22x$

उदा. (2) $9ab + 4c$ मधून $2ab - c$ वजा करा. (आडवी मांडणी)

$9ab + 4c$ मधून $2ab - c$ वजा करणे म्हणजेच $(2ab - c)$ ची विरुद्ध राशी $(-2ab + c)$ मिळवणे.

आडवी मांडणी

$(9ab + 4c) - (2ab - c)$

$= (9ab + 4c) + (-2ab + c)$ $(2ab - c)$ ची विरुद्ध राशी मिळवली.

$= (9ab - 2ab) + (4c + c)$ सरूप पदे एकत्र लिहिली.

$= 7ab + 5c$

उदा. (3) $7x + 2y^2$ मधून $- 4x + 2y^2$ वजा करा. (उभी मांडणी करून)

सरूप पदे एकाखाली एक लिहू.

$$\begin{array}{r} 7x + 2y^2 \\ - \quad - 4x + 2y^2 \\ \hline \end{array} \quad \text{म्हणजेच} \quad \begin{array}{r} 7x + 2y^2 \\ + \quad 4x - 2y^2 \\ \hline 11x + 0 \end{array}$$

एखादी बैजिक राशी वजा करणे, म्हणजे तिची विरुद्ध राशी मिळवणे.

येथे 2 व – 2 यांची बेरीज 0 येते, म्हणून $2y^2$ व $- 2y^2$ यांची बेरीज $0y^2$ येते.

$0y^2 = 0 \times y^2 = 0 \quad (\because 0 \times \text{कोणतीही संख्या} = 0)$

उदाहरणसंग्रह 57

1. वजाबाकी करा. (आडवी व उभी मांडणी करून)

(1) $(11x^2 + 12y) - (9x^2 - 7y)$

(2) $(17mn - 10ab) - (- 12ab + 8mn)$

(3) $(4x - 5y + 6z) - (3z + 4y - x)$

(4) $(7x^2 - 5z^2 + 11y^2) - (3y^2 - 4x^2 + 2z^2)$

(5) $(15x^2y^2 + 3y^2z^2 - 2z^2x^2) - (2z^2y^2 + 15x^2y^2)$

17. एकचल समीकरणे

समानता

5 + 7 चे सोपे रूप 12 येते. तसेच 3×4 हा गुणाकारही 12 येतो; म्हणजे 5 + 7 आणि 3×4 यांच्या किमती समान आहेत.

हेच आपण थोडक्यात '$5 + 7 = 3 \times 4$' असे लिहितो.

$5 + 7 = 3 \times 4$ या मांडणीत '=' चिन्हाच्या डाव्या आणि उजव्या बाजूच्या राशींच्या किमती समान आहेत. अशा मांडणीला **समानता** असे म्हणतात.

समानतेची आणखी काही उदाहरणे खाली दिली आहेत. त्यांतील '=' चिन्हाच्या दोन्ही बाजूंच्या राशींच्या किमती समान आहेत, हे पडताळून पाहा.

(1) $15 - 5 = 5 \times 2$ (2) $4 \times 5 = 12 + 8$

(3) $24 \div 6 = 7 - 3$ (4) $16 - 9 = 6 + 1$

उदाहरणसंग्रह 58

1. खालील प्रत्येक उदाहरणात चौकटीच्या डाव्या व उजव्या बाजूला दिलेल्या राशींच्या किमती काढा. त्यावरून योग्य चौकटीत '=' हे चिन्ह लिहा.

(1) $10 - 2 \ \square \ 4 \times 2$ (4) $7 \times 6 \ \square \ 22 + 20$

(2) $9 - 3 \ \square \ 18 \div 3$ (5) $2 \times 2 \times 2 \ \square \ 2 \times 3$

(3) $40 \div 5 \ \square \ 2 \times 3 - 1$ (6) $5 + \frac{14}{7} \ \square \ \frac{6}{2} + 3$

समानतेचे गुणधर्म

$5 + 7 = 3 \times 4$ ही समानता विचारात घेऊ.

या समानतेच्या डाव्या बाजूत कोणतीही एक संख्या मिळवू. समजा, 8 ही संख्या मिळवली, तर डाव्या बाजूची किंमत $(5 + 7) + 8$ म्हणजे 20 येईल. उजव्या बाजूत तीच, म्हणजे 8 ही संख्या मिळवल्यास उजव्या बाजूची किंमत $3 \times 4 + 8$, म्हणजे 20 हीच येईल.

समानतेच्या दोन्ही बाजूंत एकच संख्या मिळवली असता येणाऱ्या बेरजा समान असतात.

या गुणधर्माला **समानतेचा बेरीज गुणधर्म** म्हणतात.

आता $5 + 7 = 3 \times 4$ या समानतेच्या डाव्या व उजव्या बाजूला कोणत्याही एका संख्येने, समजा 6 ने गुणू.

$$6\ (5 + 7) = 6 \times 12 = 72$$
$$6 \times (3 \times 4) = 72$$
$$\therefore 6 \times (5 + 7) = 6 \times (3 \times 4)$$

समानतेच्या दोन्ही बाजूंना एकाच संख्येने गुणले असता येणारे गुणाकार समान असतात.

या गुणधर्माला **समानतेचा गुणाकार गुणधर्म** म्हणतात.

याप्रमाणेच असलेले समानतेचे आणखी दोन गुणधर्म तुम्ही पडताळून पाहा.

समानतेचा वजाबाकी गुणधर्म : समानतेच्या दोन्ही बाजूंतून एकच संख्या वजा केली असता येणाऱ्या वजाबाक्या समान असतात.

समानतेचा भागाकार गुणधर्म : समानतेच्या दोन्ही बाजूंना एकाच संख्येने भागले असता येणारे भागाकार समान असतात.

समानतेचे वरील सर्व गुणधर्म पुढे चिन्हांत मांडून दाखवले आहेत.

जर $a = b$ तर

(1) $a + c = b + c$ (समानतेचा बेरीज गुणधर्म)

(2) $a \times c = b \times c$ (समानतेचा गुणाकार गुणधर्म)

(3) $a - c = b - c$ (समानतेचा वजाबाकी गुणधर्म)

(4) $a \div c = b \div c$ (समानतेचा भागाकार गुणधर्म)

उदाहरणसंग्रह 59

1. पुढील प्रत्येकात समानतेचा कोणता गुणधर्म वापरला आहे, ते लिहा.

(1) $6 + 4 = 10 \quad \therefore 5\ (6 + 4) = 5 \times 10$

(2) $9 = 11 - 2 \quad \therefore 9 + 5 = (11 - 2) + 5$

(3) $2 \times 6 = 8 + 4 \quad \therefore \dfrac{2\times6}{2} = \dfrac{8}{2} + \dfrac{4}{2}$

(4) $5 + 4 = 18 \div 2 \quad \therefore (5 + 4) - 7 = (18 \div 2) - 7$

समीकरण

$(x + 5)$ या राशीमध्ये x हे चल आहे, म्हणजे x ही कोणतीही संख्या असू शकते. x ची किंमत जशी बदलेल, तशी $(x + 5)$ या राशीची किंमतही बदलते.

जसे, $x = 0$ असताना, $x + 5 = 0 + 5 = 5$

$x = 1$ असताना, $x + 5 = 1 + 5 = 6$

$x = 6$ असताना, $x + 5 = 6 + 5 = 11$ इत्यादी.

आता $x + 5 = 9$ या मांडणीचा विचार करू.

या मांडणीचा अर्थ, x या चलाच्या कोणत्या तरी किमतीने $(x + 5)$ ही बेरीज 9 येते, म्हणजेच x च्या कोणत्या तरी एका किमतीने '=' चिन्हाच्या दोन्ही बाजूंच्या किमती समान होतात असा आहे. अशा मांडणीला **समीकरण** म्हणतात.

$4 = 9 - x$; $3y = 18$; $6 = \frac{z}{5}$ ही आणखी काही समीकरणे आहेत.

उदाहरणसंग्रह 60

1. पुढीलपैकी समानता कोणत्या व समीकरणे कोणती हे ओळखा.

(1) $x - 2 = 7$ (2) $4x = 20$ (3) $2 = \frac{10}{5}$

(4) $2 = \frac{10}{x}$ (5) $18 = 10 + x$ (6) $9\,(8 - 3) = 9 \times 8 - 9 \times 3$

समीकरणाची उकल

समीकरणात x ; y , p , ... अशी अक्षरे चल म्हणून वापरलेली असतात. जसे, $4y = 12$ या समीकरणात y हे चल आहे.

$p + 5 = 11$ यामध्ये p हे चल आहे.

आता $4y = 12$ या समीकरणात y च्या कोणत्या किमतीमुळे '=' चिन्हाच्या दोन्ही बाजूंच्या किमती समान होतात, हे पाहू.

$y = 1$ असताना, $4y = 4 \times 1 = 4$

$y = 2$ असताना, $4y = 4 \times 2 = 8$

$y = 3$ असताना, $4y = 4 \times 3 = 12$

$\therefore$ $y = 3$ असेल तरच $4y$ आणि 12 या किमती समान होतात.

येथे y च्या 3 या किमतीला $4y = 12$ या समीकरणाची **उकल** म्हणतात.

चलाच्या ज्या किमतीने समीकरणातील '=' या चिन्हाच्या दोन्ही बाजूंच्या किमती समान होतात, त्या किमतीला समीकरणाची उकल म्हणतात.

'चलाच्या एखाद्या किमतीने समीकरणातील '=' या चिन्हाच्या दोन्ही बाजू समान होणे', यालाच **'चलाच्या त्या किमतीने समीकरणाचे समाधान होणे'**, असेही म्हणतात.

$p + 5 = 11$ यामध्ये p ची किंमत 6 असताना दोन्ही बाजू समान होतात. ($\because 6 + 5 = 11$)

$\therefore$ $p + 5 = 11$ या समीकरणाची उकल 6 ही आहे.

उदा. (1) $2x - 3 = 5$ या समीकरणाची 4 ही उकल आहे का, हे ठरवा.

$2x - 3 = 5$ या समीकरणात x या चलाची किंमत 4 देऊन डाव्या बाजूची किंमत काढू.

डावी बाजू $= 2x - 3 = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$.

उजवी बाजू $= 5$

x ला 4 ही किंमत देऊन दोन्ही बाजूंच्या किमती समान होतात.

$\therefore$ $2x - 3 = 5$ या समीकरणाची 4 ही उकल आहे.

उदा. (2) $12 = 5y + 4$ या समीकरणाची 2 ही उकल आहे का, हे ठरवा.

$12 = 5y + 4$ या समीकरणाची डावी बाजू 12 आहे.

उजव्या बाजूतील चलाला 2 ही किंमत देऊन त्या बाजूची किंमत काढू.

उजवी बाजू $= 5y + 4 = 5 \times 2 + 4 = 10 + 4 = 14$.

$\therefore$ y ला 2 ही किंमत देऊन डाव्या व उजव्या बाजूंच्या किमती समान येत नाहीत.

$\therefore$ $12 = 5y + 4$ या समीकरणाची 2 ही उकल नाही.

उदाहरणसंग्रह 61

1. पुढील प्रत्येक समीकरणापुढे कंसात दिलेली संख्या, त्या समीकरणाची उकल आहे का हे ठरवा.

(1) $5y = 16$ [8] (2) $5 = \frac{35}{x}$ [7] (3) $5 = \frac{x}{35}$ [7]

(4) $5m - 1 = 19$ [4] (5) $2p = p + 3$ [2] (6) $3t = 7t$ [0]

समीकरण सोडवणे

'दिलेल्या समीकरणाची उकल शोधणे' यालाच 'समीकरण सोडवणे' असे म्हणतात.

उदा. पुढे सोडवून दाखवलेली समीकरणे अभ्यासा.

(1) $5x = 20$ (2) $y - 7 = 4$ (3) $13 = 8 + m$ (4) $3 = \frac{x}{9}$

(1) $5x = 20$

x ला 1, 2, 3, ... अशा किमती देऊ. कोणती किंमत दिली असता $5x$ ची किंमत 20 येते, हे शोधू.

$x = 1$ असताना $5x = 5 \times 1 = 5$

$x = 2$ असताना $5x = 5 \times 2 = 10$

$x = 3$ असताना $5x = 5 \times 3 = 15$

$x = 4$ असताना $5x = 5 \times 4 = 20$

$\therefore$ $5x = 20$ या समीकरणाची उकल 4 ही आहे.

(2) $y - 7 = 4$

y च्या कोणत्या किमतीसाठी $(y - 7)$ ची किंमत 4 येते, हे पाहू.

$y = 8$ असताना $y - 7 = 8 - 7 = 1$

$y = 9$ असताना $y - 7 = 9 - 7 = 2$

$y = 10$ असताना $y - 7 = 10 - 7 = 3$

$y = 11$ असताना $y - 7 = 11 - 7 = 4$

$\therefore$ $y - 7 = 4$ या समीकरणाची उकल 11 ही आहे.

(y ची किंमत 7 पेक्षा मोठीच असली पाहिजे, हे लक्षात घेऊन y ला 8 पासून किमती देण्यास सुरुवात केली.)

(3) $13 = 8 + m$

m ची कोणती किंमत असताना $(8 + m)$ ची किंमत 13 येते, हे काढू.

$m = 1$ असताना $8 + m = 8 + 1 = 9$

$m = 2$ असताना $8 + m = 8 + 2 = 10$

$m = 3$ असताना $8 + m = 8 + 3 = 11$

$m = 4$ असताना $8 + m = 8 + 4 = 12$

$m = 5$ असताना $8 + m = 8 + 5 = 13$

$\therefore$ $13 = 8 + m$ या समीकरणाची उकल 5 ही आहे.

(4) $3 = \frac{x}{9}$

$x = 9$ असताना, $\frac{x}{9} = \frac{9}{9} = 1$

$x = 18$ असताना, $\frac{x}{9} = \frac{18}{9} = 2$

$x = 27$ असताना, $\frac{x}{9} = \frac{27}{9} = 3$

$\therefore 3 = \frac{x}{9}$ ची 27 ही उकल आहे.

(x ही 9 ची पट असली पाहिजे, हे लक्षात घेऊन x ला 9, 18, 27 या किमती दिल्या, हे समजून घ्या.)

उदाहरणसंग्रह 62

1. पुढील समीकरणे चलाला योग्य किमती देऊन सोडवा.

(1) $7x = 14$ (2) $x - 10 = 2$ (3) $p + 6 = 10$

(4) $5 = 7 - p$ (5) $18 = 13 + y$ (6) $\frac{x}{5} = 3$

(7) $4 = \frac{y}{10}$ (8) $16 = 2m$ (9) $\frac{16}{x} = 2$

(10) $2 + n = 8$ (11) $9 - x = 6$ (12) $y - 4 = 0$

समानतेचे गुणधर्म वापरून समीकरण सोडवणे

समीकरणातील चलाला 1, 2, 3, 4, ... अशा किमती देऊन त्याची उकल काढण्यास आपण शिकलो. आता समानतेच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून समीकरण कसे सोडवता येते, हे पाहू.

उदा. (1) सोडवा. $x - 7 = 18$

$x - 7 = 18$

$\therefore x - 7 + 7 = 18 + 7$ समानतेचा बेरीज गुणधर्म

$\therefore x + 0 = 25$ $\because (-7) + 7 = 0$ आणि $18 + 7 = 25$

$\therefore x = 25$ $\because$ कोणतीही संख्या $+ 0 =$ तीच संख्या

आता x ची किंमत 25 असेल, तर दोन्ही बाजू समान होतात.

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणाची 25 ही उकल आहे.

उदा. (2) सोडवा. $6x = 72$

$6x = 72$

$\therefore \frac{6x}{6} = \frac{72}{6}$ समानतेचा भागाकार गुणधर्म

$\therefore 1x = 12$ $\because \frac{6}{6} = 1$ आणि $\frac{72}{6} = 12$

$\therefore x = 12$ $\because 1 \times$ कोणतीही संख्या $=$ तीच संख्या

आता x ची किंमत 12 असेल, तर दोन्ही बाजू समान होतात.

$\therefore$ 12 ही दिलेल्या समीकरणाची उकल आहे.

उदा. (3) सोडवा. $27 = p + 9$

$27 = p + 9$

$\therefore 27 - 9 = p + 9 - 9$ समानतेचा वजाबाकी गुणधर्म

$\therefore 18 = p + 0$ $\because 27 - 9 = 18$ आणि $9 - 9 = 0$

$\therefore 18 = p$ कोणतीही संख्या $+ 0 =$ तीच संख्या

आता p ची किंमत 18 असताना दोन्ही बाजू समान होतात.

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणाची 18 ही उकल आहे.

उदा. (4) सोडवा. $4 = \frac{k}{13}$

$4 = \frac{k}{13}$

$\therefore 4 \times 13 = \frac{k}{13} \times 13$ समानतेचा गुणाकार गुणधर्म

$\therefore\ 52 = k \times 1 \qquad \because\ \frac{1}{13} \times 13 = 1$

$\therefore\ 52 = k \qquad \because$ कोणतीही संख्या $\times\ 1 =$ तीच संख्या

k ची किंमत 52 असताना दोन्ही बाजू समान होतात.

$\therefore$ 52 ही दिलेल्या समीकरणाची उकल आहे.

उदाहरणसंग्रह 63

1. समानतेच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून खालील समीकरणे सोडवा.

(1) $m - 4 = 1$ (2) $p + 4 = 11$ (3) $3x = 54$

(4) $\frac{y}{5} = 6$ (5) $6 = k - 2$ (6) $25 = t + 16$

(7) $35 = 7y$ (8) $1 = \frac{x}{3}$ (9) $8 = z + 5$

(10) $n - 6 = 6$ (11) $18. = 3u$ (12) $\frac{y}{5} = 12$

18. शेकडेवारी

वर्तमानपत्रे, रेडिओ, दूरदर्शन इत्यादींमधून तुम्ही पुढील प्रकारच्या बातम्या वाचल्या किंवा ऐकल्या असतील.

अन्नधान्याच्या उत्पादनात 15 टक्के वाढ झाली.

पेट्रोलचा दर शेकडा 5 ने वाढला.

बँकेने व्याजाचा दर 1 टक्क्याने कमी केला.

यांमध्ये आलेल्या 'शेकडा' आणि 'टक्के' या शब्दांचा वापर व्यवहारात नेहमी केला जातो. या शब्दांचा अर्थ आपण समजून घेऊ आणि त्यांचा उपयोग कसा करतात, हे पाहू.

$\frac{62}{100}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{100}{100}$ ही गुणोत्तरे पाहा. येथे प्रत्येक गुणोत्तराचा छेद 100 आहे. अशा गुणोत्तराला शतमान म्हणतात. शतमान हे 'शेकडा' हा शब्द वापरून किंवा % हे चिन्ह वापरून लिहिण्याची पद्धत आहे.

$\frac{62}{100}$ हे 'शेकडा 62' किंवा '62 %' असे लिहितात. '62 %' याचे वाचन '62 टक्के' असे करतात.

त्याचप्रमाणे $\frac{75}{100}$ म्हणजे शेकडा 75 किंवा 75 %

$\frac{100}{100}$ म्हणजे शेकडा 100 किंवा 100 %

उदाहरणसंग्रह 64

1. पुढील गुणोत्तरे 'शेकडा' हा शब्द वापरून तसेच '%' या चिन्हाचा वापर करून लिहा.

(1) $\frac{25}{100}$ (2) $\frac{79}{100}$ (3) $\frac{1}{100}$ (4) $\frac{12}{100}$ (5) $\frac{50}{100}$

2. पुढील उदाहरणे छेद 100 असणाऱ्या गुणोत्तराच्या रूपात लिहा.

(1) शेकडा 17 (2) 55 % (3) शेकडा 10 (4) 98 %

अपूर्णांकाचे शेकड्यात रूपांतर

साध्या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच संख्येने गुणले किंवा भागले असता त्याच्याशी सममूल्य असणारा अपूर्णांक मिळतो, हे आपण शिकलो आहोत.

जसे, $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}$; $\frac{9}{4} = \frac{9 \times 3}{4 \times 3} = \frac{27}{12}$ इत्यादी.

याच गुणधर्माचा उपयोग करून, दिलेल्या साध्या अपूर्णांकाचे रूपांतर शेकड्यात करता येते. हे रूपांतर कसे करतात याचा अभ्यास पुढे सोडवून दिलेल्या उदाहरणांवरून करा.

उदा. पुढील अपूर्णांकांचे शेकड्यात रूपांतर करा.

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{5}{10}$ (3) $\frac{9}{25}$ (4) $\frac{140}{200}$

(1) $\frac{3}{4}$ या अपूर्णांकाचे शेकड्यात म्हणजे छेद 100 असणाऱ्या अपूर्णांकात रूपांतर करायचे आहे, म्हणून प्रथम पुढीलप्रमाणे मांडणी करू.

$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{100}$$

आता, 100 हा छेद 4 या छेदाच्या 25 पट आहे.

$\therefore$ $\frac{3}{4}$ या अपूर्णांकाच्या छेदाला व अंशाला 25 ने गुणू.

(1) $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}$ (शेकडा 75 = 75 %)

(2) $\frac{5}{10} = \frac{5 \times 10}{10 \times 10} = \frac{50}{100}$ (शेकडा 50 = 50 %)

(3) $\frac{9}{25} = \frac{9 \times 4}{25 \times 4} = \frac{36}{100}$ (शेकडा 36 किंवा 36 %)

(4) $\frac{140}{200} = \frac{140 \div 2}{200 \div 2} = \frac{70}{100}$ (शेकडा 70 किंवा 70 %)

उदाहरणसंग्रह 65

1. पुढील अपूर्णांकांचे शेकड्यात रूपांतर करा.

(1) $\frac{7}{20}$ (2) $\frac{43}{50}$ (3) $\frac{21}{300}$ (4) $\frac{120}{500}$ (5) $\frac{29}{25}$

दिलेला अपूर्णांक दशांशरूपात असेल, तर त्याचे रूपांतर शेकड्यात कसे करता येते, हे पुढील उदाहरणांवरून अभ्यासा.

उदा. पुढील दशांश अपूर्णांकांचे शेकड्यात रूपांतर करा.

(1) 0.52 (2) 0.05 (3) 0.25 (4) 0.4 (5) 0.67

(1) आपल्याला माहीत आहे, की 0.52 म्हणजे $\frac{52}{100}$.

$\therefore 0.52 = \frac{52}{100}$ (शेकडा 52 = 52 %)

(2) $0.05 = \frac{5}{100}$ (शेकडा 5 = 5 %)

(3) $0.25 = \frac{25}{100}$ (शेकडा 25 = 25 %)

(4) $0.4 = 0.40 = \frac{40}{100}$ (शेकडा 40 = 40 %)

(5) $0.67 = \frac{67}{100}$ (शेकडा 67 = 67%)

उदाहरणसंग्रह 66

1. पुढील दशांश अपूर्णांकांचे शेकड्यात रूपांतर करा.

(1) 0.76 (2) 0.65 (3) 0.18 (4) 0.08 (5) 0.01
(6) 0.5 (7) 0.9 (8) 0.75 (9) 0.50 (10) 0.060
(11) 0.600 (12) 0.400 (13) 0.83 (14) 0.10 (15) 1.0

दिलेल्या संख्येचा दिलेला शेकडा काढणे

तुम्हांला माहीत आहे, की '50 चा $\frac{1}{2}$' याचा अर्थ '50 × $\frac{1}{2}$' असा असतो.

$\therefore$ 50 चा $\frac{1}{2} = 50 \times \frac{1}{2} = 25$

त्याचप्रमाणे '70 चा शेकडा 50' याचा अर्थ '70 × $\frac{50}{100}$' असा होतो.

$\therefore$ 70 चा शेकडा $50 = 70 \times \frac{50}{100} = 70 \times \frac{1}{2} = 35$

($70 \times \frac{50}{100}$ चे सोपे रूप $\frac{70 \times 50}{100} = 35$ असेही काढता येईल.)

याप्रमाणे दिलेल्या संख्येचा दिलेला शेकडा काढण्याची रीत पुढील उदाहरणांवरून नीट अभ्यासा.

उदा. 1. किमती काढा.

(1) 150 चा शेकडा 64 **(2)** 740 चा 5 % **(3)** 3520 चा 15 %

(1) 150 चा शेकडा $64 = 150 \times \frac{64}{100} = \frac{150 \times 64}{100} = 96$

(2) 740 चा $5\% = 740 \times \frac{5}{100} = 740 \times \frac{1}{20} = 37$

(3) 3520 चा $15\% = 3520 \times \frac{15}{100} = \frac{3520 \times 15}{100} = 528$

उदा. 2. एका शाळेत शेकडा 40 मुली आहेत. जर त्या शाळेत विद्यार्थ्यांची एकूण संख्या 950 असेल, तर त्या शाळेतील मुलींची संख्या किती ?

950 चा शेकडा $40 = 950 \times \frac{40}{100} = \frac{950 \times 40}{100} = 380$

मुलींची संख्या 380

1. पुढील किमती काढा.

(1) 84 चा शेकडा 50 (2) 132 चा शेकडा 75

(3) 540 चा 15 % (4) 540 चा 90 %

(5) 55 चा 20 % (6) 60 चा 5 %

(7) 60 चा शेकडा 25 (8) 175 चा शेकडा 60

(9) 4800 चा शेकडा 7 (10) 25000 चा 3 %

2. परीक्षेत एकूण गुणांच्या किमान 35 % गुण मिळाल्यास विद्यार्थी उत्तीर्ण होतो, तर एकूण 800 गुणांच्या परीक्षेत किमान किती गुण मिळणारा विद्यार्थी उत्तीर्ण होईल ?

दिलेली संख्या दुसऱ्या संख्येच्या शेकडा किती हे काढणे.

परीक्षेत मिळालेले गुण शेकडा किती हे सांगताना तुम्ही ऐकले असेल, की अमीरला 72 % गुण मिळाले. मयूरी शेकडा 94 गुण मिळवून पहिली आली.

शेकडा गुण कसे काढतात, हे समजण्यासाठी पुढील उदाहरण अभ्यासा.

उदा. (1) अतुलला वार्षिक परीक्षेत 700 पैकी 476 गुण मिळाले, तर अतुलला 'शेकडा किती गुण मिळाले ?

'700 पैकी 476' हे $\frac{476}{700}$ असे लिहितात.

शेकडा गुण काढायचे, म्हणजेच $\frac{476}{700}$ चा छेद 100 करायचा.

छेद 100 येण्यासाठी अंशाला व छेदाला 7 ने भागावे लागेल.

$\frac{476}{700} = \frac{476 \div 7}{700 \div 7} = \frac{68}{100}$ = शेकडा 68

∴ अतुलला शेकडा 68 गुण मिळाले.

उदा. (2) 24 ही संख्या 60 च्या शेकडा किती आहे ?

$\frac{24}{60}$ चे छेद 100 असलेल्या अपूर्णांकात रूपांतर करायचे आहे.

येथे छेद 60 आहे. 100 ही संख्या 60 च्या पटीत नाही, म्हणून आपण $\frac{24}{60}$ चे संक्षिप्त रूप काढू.

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

आता 100 ही 5 ची 20 पट आहे, हे लक्षात घेऊन

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5} = \frac{2\times20}{5\times20} = \frac{40}{100} = \text{शेकडा } 40$$

$\therefore$ 24 ही संख्या 60 चा शेकडा 40 आहे.

उदाहरणसंग्रह 68

1. पुढे दिलेल्या संख्यांच्या प्रत्येक जोडीतील पहिली संख्या दुसरीच्या शेकडा किती आहे, हे काढा.

(1) 24, 50	(2) 16, 25	(3) 36, 25	(4) 13, 20
(5) 16, 200	(6) 160, 200	(7) 60, 200	(8) 7, 10
(9) 8, 5	(10) 222, 300	(11) 18, 60	(12) 280, 400

2. (1) एका परीक्षेत शकिलाला 1000 पैकी 760 गुण मिळाले, तर तिने किती टक्के गुण मिळवले ?

   (2) दीपावलीच्या काळात एका टपाल पेटीत जमा झालेल्या 625 पत्रांपैकी 75 शुभेच्छा पत्रे होती, तर शुभेच्छा पत्रांची संख्या एकूण पत्रांच्या किती टक्के होती ?

   (3) नामदेवने आपल्या 3 हेक्टर शेतापैकी 19,500 चौमी भागात ज्वारी पेरली, तर त्याने शेताच्या शेकडा किती भागात ज्वारी पेरली ?
   (1 हेक्टर = 10,000 चौमी)

19. सरळव्याज

घर किंवा शेत विकत घेणे, लग्नसमारंभ, उच्च शिक्षण अशा विविध कारणांनी लोकांना मोठ्या रकमेची गरज पडते. आपल्याजवळ मोठी रक्कम नसेल, तर सहकारी पतपेढी, बँका अशा संस्थांकडून मोठी रक्कम परत करण्याच्या अटीवर मिळू शकते. या रकमेला **कर्ज** म्हणतात.

त्याचप्रमाणे पतपेढीकडून किंवा बँकेकडून आपण घेतलेले कर्ज परत करताना घेतलेल्या रकमेपेक्षा काही जास्त रक्कम द्यावी लागते. त्या जास्त द्याव्या लागणाऱ्या रकमेला **सरळव्याज** म्हणतात.

समजा, बैलजोडी घेण्यासाठी सदाशिवरावांनी शेतकरी पतसंस्थेकडून 10,000 रुपये कर्ज म्हणून घेतले. दोन वर्षांनी कर्जाची रक्कम परत करताना त्यांनी पतसंस्थेला 12,000 रुपये दिले, म्हणजे 2000 रुपये जास्त दिले, म्हणजेच त्यांनी 2000 रुपये सरळव्याज दिले.

यापुढे **सरळव्याज** या शब्दासाठी आपण फक्त **व्याज** हा शब्द वापरू.

कर्ज म्हणून घेतलेल्या रकमेला **मुद्दल** असे म्हणतात. हे मुद्दल ज्या कालावधीसाठी वापरले जाते, त्या कालावधीला **मुदत** म्हणतात. वरील उदाहरणात मुद्दल 10,000 रुपये आणि मुदत 2 वर्षे आहे.

उदाहरणसंग्रह 69

1. पुढील उदाहरणांत मुद्दल, व्याज आणि मुदत किती आहे, हे सांगा.

(1) रेहमानभाई यांनी एका बँकेकडून 25,000 रुपये कर्ज म्हणून घेतले. तीन वर्षांनी त्यांनी बँकेला कर्ज आणि व्याज मिळून 32,500 रुपये दिले.

(2) मणीबेन यांनी महिला सहकारी सोसायटीकडून 8000 रुपये कर्जाऊ घेतले. सहा महिन्यांनी सोसायटीला त्यांनी कर्जफेड करताना एकूण 8480 रुपये परत केले.

(3) विठ्ठलपंतांनी घर घेण्यासाठी राष्ट्रीय बँकेकडून 6,00,000 रुपये कर्ज घेतले. पाच वर्षांनी त्यांनी कर्जमुक्त होण्यासाठी बँकेला एकूण 8,40,000 रुपये परत केले.

व्याजाचा दर

कर्जावर **किती व्याज द्यावे लागेल,** हे किती रक्कम कर्जाऊ घेतली यावर म्हणजे **मुद्दलावर** अवलंबून असते. तसेच ती रक्कम किती काळ वापरली यावर म्हणजे **मुदतीवर** अवलंबून असते.

व्याजाचा हिशोब करण्यासाठी, कर्ज देणाऱ्या संस्था, प्रत्येक वर्षासाठी (दर साल) प्रत्येक 100 रु. मुद्दलावर (दर शेकडा) किती रक्कम व्याज म्हणून द्यावी लागेल, हे सांगतात. त्यालाच **व्याजाचा दर** म्हणतात.

जसे, समृद्धी बँकेचा व्याजाचा दर द.सा.द.शे. (दर साल दर शेकडा) 10 आहे; याचा अर्थ, 'त्या बँकेकडून एखाद्याने एका वर्षासाठी 100 रु. कर्ज घेतले, तर वर्षअखेरीस त्याने बँकेला 10 रु. व्याज द्यावे,' असा होतो.

भैरवनाथ पतसंस्थेचा व्याजाचा दर द. सा. द. शे. 9 आहे; म्हणजे 'त्या पतसंस्थेकडून एखाद्याने 1 वर्षासाठी 100 रु. कर्जाऊ घेतले, तर वर्षअखेरीस त्याने पतसंस्थेला मुद्दल 100 रु. व व्याज म्हणून 9 रु. द्यावे', असा अर्थ होतो.

उदाहरणसंग्रह 70

तोंडी

1. खालील वाक्यांचे अर्थ स्पष्ट करून सांगा.
   (1) जिजामाता सहकारी पतसंस्थेचा व्याजदर द. सा. द. शे. 12 आहे.
   (2) राजगड सहकारी बँक द. सा. द. शे. 8 दराने शेतकऱ्यांना शेतीसाठी कर्ज देते.
   (3) सर्जेरावांनी शेतात विहीर खणण्यासाठी जिल्हा मध्यवर्ती बँकेकडून द. सा. द. शे. 10 दराने कर्ज घेतले.

मुदतीनुसार व्याज

ठराविक मुद्दलावर दोन वर्षांचे व्याज हे एक वर्षाच्या व्याजाच्या दुप्पट असणार. थोडक्यात, मुदत जितकी पट, तितके पट व्याज होणार.

उदा. (1) द. सा. द. शे. 14 दराने 100 रुपयांवर 3 वर्षांत किती व्याज होईल ?

व्याजाचा दर द. सा. द. शे. 14 आहे.

म्हणजे 100 रु. वर 1 वर्षात 14 रु. व्याज होईल.

$\therefore$ 100 रु. वर 3 वर्षांत $14 \times 3 = 42$ रु. व्याज होईल.

उदा. (2) व्याजाच्या काही दराने 10,000 रु. मुद्दलावर एक वर्षात 750 रु. व्याज होते, तर त्याच मुद्दलावर 4 वर्षांत किती व्याज होईल ?

मुद्दल तेच राहून मुदत चौपट झाली आहे.

∴ व्याजही चौपट होईल.

∴ 4 वर्षांचे व्याज 750 × 4 = 3000 रु. होईल.

उदाहरणसंग्रह 71

1. पुढील सारणीत व्याजाचा दर आणि मुदत दिली आहे. प्रत्येक बाबतीत 100 रुपयांवर व्याज किती होईल, हे काढा.

उदाहरणे	1	2	3	4	5	6
व्याजाचा दर (द.सा.द.शे.)	8	12	5	9	7	4
मुदत (वर्षे)	5	3	20	4	2	7

2. (1) व्याजाच्या काही दराने 12,000 रुपयांवर एक वर्षात 720 रुपये व्याज होते, तर त्याच रकमेचे 5 वर्षांत किती व्याज होईल ?

(2) द. सा. द. शे. 11 दराने 15,000 रु मुद्दलावर 2 वर्षांत 3,300 रु. व्याज होते, तर त्याच दराने त्याच मुद्दलावर 6 वर्षांचे व्याज किती होईल ?

मुद्दलानुसार व्याज

ठराविक मुदतीमध्ये मुद्दल जितके पट होईल, तितके पट व्याज होते.

उदा. (1) द. सा. द. शे. 10 दराने 2,000 रुपये मुद्दलावर एका वर्षाचे व्याज किती होईल ?

व्याजाचा दर द. सा. द. शे. 10 आहे.

म्हणजे 100 रु. मुद्दलावर 1 वर्षाचे व्याज 10 रु. होते.

मुद्दल 2,000 रु. म्हणजे 100 रु. च्या 20 पट.

मुदत 1 वर्षे, म्हणजे तेवढीच आहे.

∴ व्याज = 10 रु. च्या 20 पट = 10 × 20 = 200 रु. होईल.

उदा. (2) व्याजाच्या काही दराने 8000 रु. मुद्दलावर 3 वर्षांचे व्याज 640 रु. होते, तर त्याच दराने 40,000 रुपयांवर 3 वर्षांचे व्याज किती होईल ?

मुदत तीच आहे. ∴ जितके पट मुद्दल, तितके पट व्याज.

40,000 रु. हे 8000 रुपयांच्या 5 पट आहेत.

∴ व्याज 640 रुपयांच्या 5 पट होईल.

∴ व्याज $640 \times 5 = 3200$ रु. होईल.

उदाहरणसंग्रह 72

1. पुढील सारणीत व्याजाचा दर आणि मुद्दल दिले आहे. प्रत्येक बाबतीत 1 वर्षाचे व्याज किती होईल, ते काढा.

उदाहरणे	1	2	3	4	5	6
व्याजाचा दर (द.सा.द.शे.)	10	14	9	6	3	11
मुद्दल (रु.)	6,000	500	15,000	12,000	25,000	8,000

2. सोडवा.

(1) व्याजाच्या काही दराने 5,000 रु. मुद्दलावर 4 वर्षांत 1200 रु. व्याज होते, तर त्याच दराने त्याच मुदतीत 15,000 रु. मुद्दलाचे व्याज किती होईल ?

(2) व्याजाच्या काही दराने 18,000 रु. मुद्दलाचे 2 वर्षांचे व्याज 3,240 रु. होते, तर त्याच दराने त्याच मुदतीचे 6,000 रु. मुद्दलाचे व्याज किती होईल ?

मुद्दल आणि मुदतीनुसार व्याज

उदा. (1) द. सा. द. शे. 8 दराने 5,000 रु. मुद्दलाचे 3 वर्षांचे व्याज किती होईल ?

व्याजाचा दर द. सा. द. शे. 8 आहे, म्हणजे 100 रुपये मुद्दलाचे 1 वर्षाचे व्याज 8 रुपये होते.

प्रथम 5,000 रु. मुद्दलाचे 1 वर्षाचे व्याज काढू. 5,000 रु. हे 100 रुपयांच्या 50 पट आहेत.

∴ 5,000 रुपयांचे 1 वर्षाचे व्याज 8 रु. च्या 50 पट होईल.

∴ 5,000 रुपयांचे 1 वर्षाचे व्याज 8 × 50 = 400 रु.

आता 3 वर्षे ही मुदत 1 वर्ष मुदतीच्या तिप्पट आहे.

∴ 5,000 रुपयांचे 3 वर्षांचे व्याज 400 रुपयांच्या तिप्पट होईल.

∴ 5,000 रुपयांचे 3 वर्षांचे व्याज 400 × 3 = 1200 रु.

हे उदाहरण सोडवताना प्रथम मुद्दलाचा आणि नंतर मुदतीचा विचार केला. आधी मुदतीचा आणि नंतर मुद्दलाचा विचार करूनही या प्रकारचे उदाहरण सोडवता येते, हे पुढील उदाहरणावरून लक्षात घ्या.

उदा. (2) द. सा. द. शे. 12 दराने 14,000 रुपयांचे 3 वर्षांचे व्याज काढा.

व्याजाचा दर द. सा. द. शे. 12 आहे.

∴ 100 रु. मुद्दलाचे 1 वर्षाचे व्याज 12 रु. होते.

∴ 100 रु. मुद्दलाचे 3 वर्षांचे व्याज 36 रु. होते.

14,000 रु. हे 100 रुपयांच्या 140 पट आहेत.

∴ 14,000 रुपयांचे 3 वर्षांचे व्याज 36 × 140 = 5040 रु.

उदाहरणसंग्रह 73

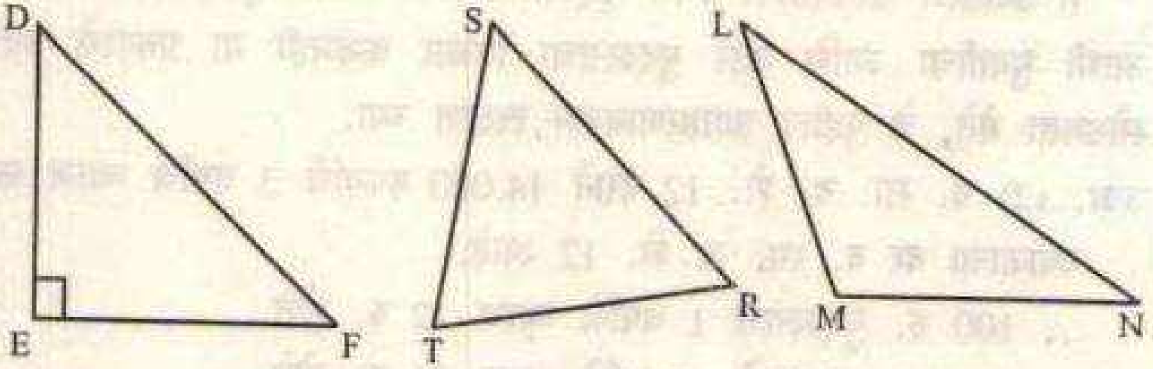
1. पुढील सारणीत मुद्दल, मुदत व व्याजाचा दर या बाबी दिल्या आहेत. त्यावरून व्याज काढा.

उदाहरणे	मुद्दल (रु.)	मुदत (वर्षे)	व्याजाचा दर (द. सा. द. शे.)
1.	400	5	6
2.	1,500	3	4
3.	15,000	4	8
4.	20,000	2	10
5.	3,500	6	5

20. त्रिकोण व त्रिकोणाचे प्रकार

उजळणी

त्रिकोणाच्या पुढील आकृत्यांचे निरीक्षण करून दिलेला तक्ता पूर्ण करा.



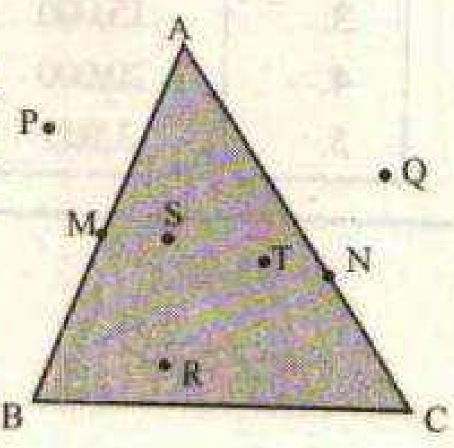
त्रिकोणाचे नाव	त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंची नावे	त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची नावे	त्रिकोणाच्या कोनांची नावे
Δ DEF			

त्रिकोणाच्या बाजू व त्रिकोणाचे कोन यांना **त्रिकोणाचे घटक** म्हणतात.

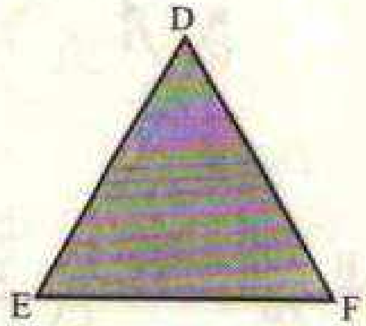
त्रिकोणाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग

त्रिकोण या आकृतीमुळे त्रिकोणाच्या प्रतलातील बिंदूंचे तीन भागांत विभाजन होते. प्रतलातील काही बिंदू त्रिकोणावर, काही बिंदू त्रिकोणाच्या अंतर्भागात व उरलेले बिंदू त्रिकोणाच्या बाह्यभागात असतात.

आकृतीत M व N हे बिंदू त्रिकोण ABC वर आहेत. बिंदू S, R व T त्रिकोण ABC च्या अंतर्भागात आहेत. बिंदू P व Q त्रिकोण ABC च्या बाह्यभागात आहेत.

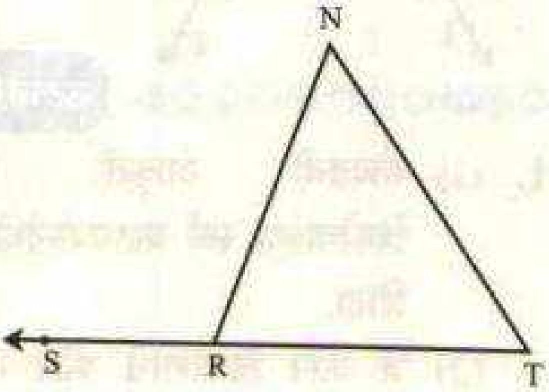


त्रिकोणी क्षेत्र



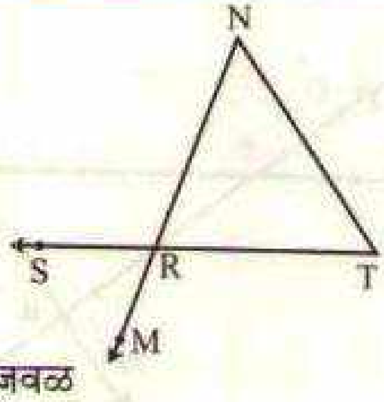
बाजूच्या आकृतीत Δ DEF चा अंतर्भाग छायांकित करून दाखवला आहे. Δ DEF व त्याचा अंतर्भाग मिळून त्रिकोणी क्षेत्र तयार होते.

त्रिकोणाचा बाह्यकोन



आकृतीत Δ NTR आहे. किरण TR काढला असता R या शिरोबिंदूजवळ $\angle$NRT व $\angle$NRS हे रेषीय जोडीतील कोन तयार होतात. $\angle$NRS हा Δ NTR चा बाह्यकोन आहे. $\angle$NRT हा Δ NTR चा आंतरकोन आहे.

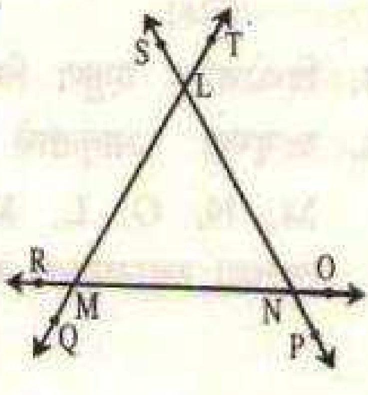
त्रिकोणाच्या कोनाशी रेषीय जोडी तयार करणाऱ्या कोनाला त्या त्रिकोणाचा बाह्यकोन म्हणतात.



सोबतच्या आकृतीत किरण NR काढला असता $\angle$TRM हा Δ NTR चा आणखी एक बाह्यकोन मिळतो, म्हणजेच Δ NTR च्या R या एकाच शिरोबिंदूजवळ दोन बाह्यकोन तयार होतील.

त्याचप्रमाणे Δ NTR च्या N व T या शिरोबिंदूंजवळ प्रत्येकी दोन बाह्यकोन तयार होतील.

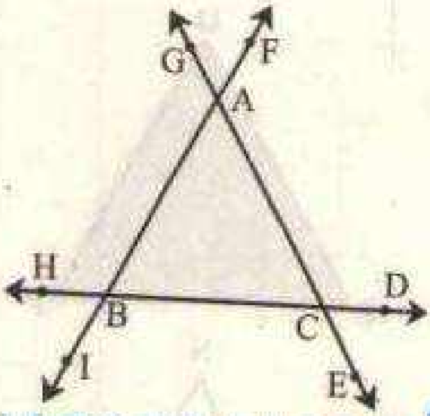
यावरून त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूजवळ दोन याप्रमाणे त्रिकोणाला एकूण सहा बाह्यकोन असतात.



बाजूच्या आकृतीत Δ LMN च्या एका शिरोबिंदूजवळील दोन बाह्यकोन लिहिले आहेत. राहिलेले बाह्यकोन लिहा.

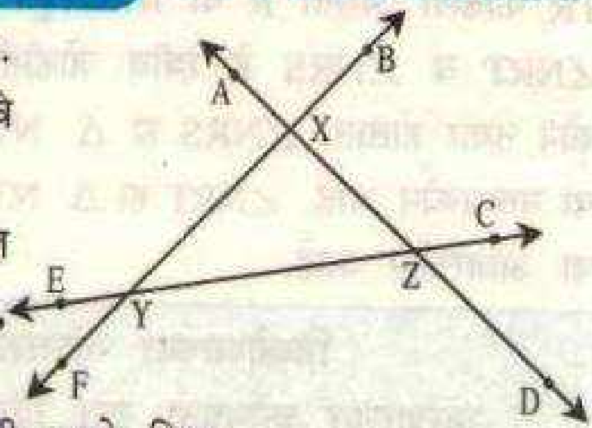
(1) $\angle$LNO, (2) $\angle$MNP (3) ....

(4) .... (5) .... (6) ....

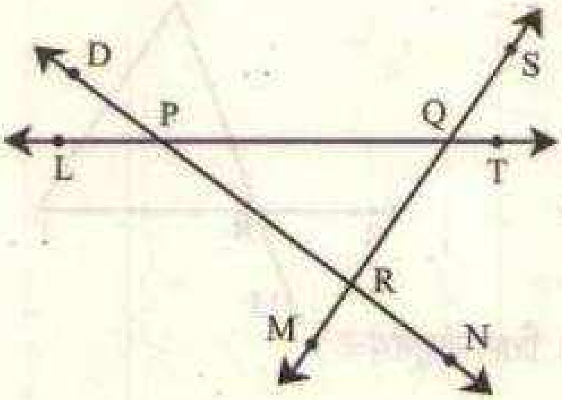


बाजूच्या आकृतीत ∠DCE, ∠HBI, ∠GAF, हे Δ ABC चे आंतरकोन तसेच बाह्यकोन नाहीत. हे कोन त्रिकोणाच्या कोनांचे विरुद्ध कोन आहेत.

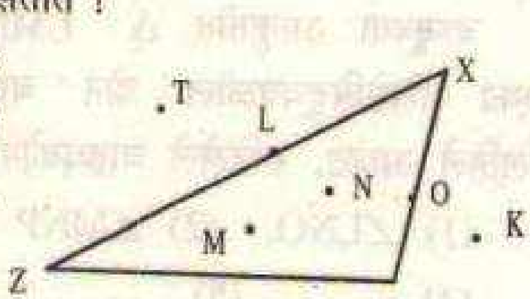
उदाहरणसंग्रह 74



1. (1) सोबतची आकृती पाहा. त्रिकोणाच्या सर्व बाह्यकोनांची नावे लिहा.
   (2) जे कोन त्रिकोणाचे कोन नाहीत आणि बाह्यकोनही नाहीत, अशा कोनांची नावे लिहा.
2. खालील आकृतीवरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

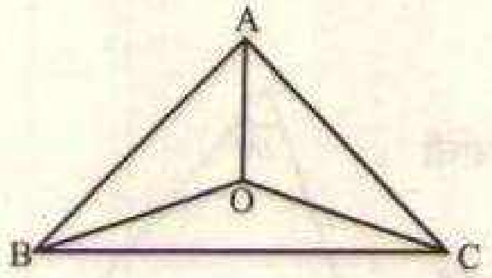


   (1) शिरोबिंदू P असलेल्या बाह्यकोनांची नावे लिहा.
   (2) ∠PRQ या कोनाशी रेषीय जोडी तयार करणाऱ्या कोनांची नावे लिहा.
   (3) ∠SQT हा Δ PQR चा बाह्यकोन आहे का ? सकारण लिहा.
   (4) बाह्यकोन PQS शी रेषीय जोडी तयार करणारा Δ PRQ चा कोन लिहा.
3. त्रिकोणाला एकूण किती बाह्यकोन असतात ?
4. बाजूच्या आकृतीचे निरीक्षण करून M, N, O, L, K T बिंदूंची नावे त्यांच्या स्थानानुसार योग्य स्तंभात लिहा.



Δ XYZ च्या अंतर्भागातील बिंदू	Δ XYZ वरील बिंदू	Δ XYZ च्या बाह्यभागातील बिंदू

5. सोबतची आकृती पाहून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) आकृतीतील सर्व त्रिकोणांची नावे लिहा.

(2) O हा शिरोबिंदू असलेल्या सर्व त्रिकोणांची नावे लिहा.

(3) A हा शिरोबिंदू असलेल्या सर्व त्रिकोणांची नावे लिहा.

6. पुढील सूचनांनुसार कृती करा.

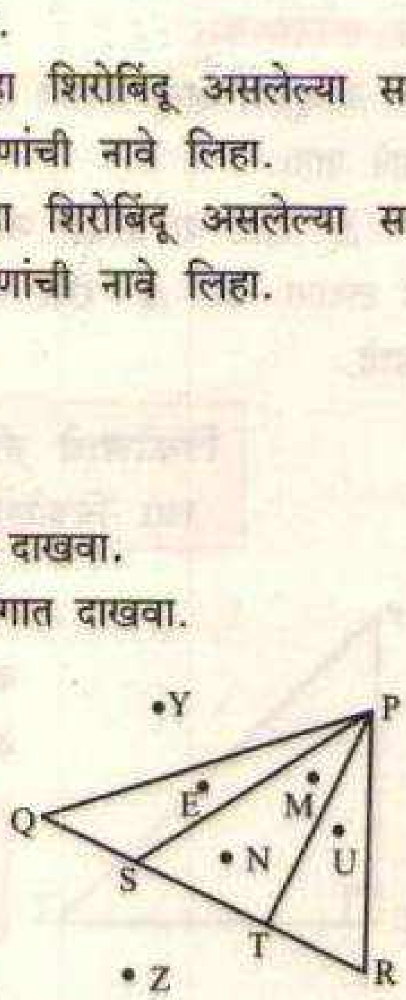
(1) Δ LMN काढा.

(2) Δ LMN वर D व S बिंदू दाखवा.

(3) Δ LMN च्या अंतर्भागात P व Q बिंदू दाखवा.

(4) बिंदू A व B हे Δ LMN च्या बाह्यभागात दाखवा.

7. सोबतच्या आकृतीवरून विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे द्या.



(1) बिंदू M व N हे ज्या त्रिकोणांच्या अंतर्भागात आहेत, अशा सर्व त्रिकोणांची नावे लिहा.

(2) E हा बिंदू ज्या त्रिकोणांच्या बाह्यभागात आहे, त्या त्रिकोणांची नावे लिहा.

(3) रेख PS ज्यांची सामाईक भुजा आहे असे त्रिकोण कोणते ?

(4) ∠PTR हा बाह्यकोन असणाऱ्या त्रिकोणांची नावे लिहा.

(5) बिंदू E, M, N हे कोणत्या त्रिकोणांच्या अंतर्भागात आहेत ?

(6) ∠PSQ हा बाह्यकोन असणारे त्रिकोण कोणते ?

(7) आकृतीत सर्व त्रिकोणांच्या बाह्यभागातील बिंदू कोणते ?

(8) Δ PQS च्या बाह्यभागात, परंतु Δ PTR च्या अंतर्भागात असणारे बिंदू कोणते ?

(9) Δ PST चे बाह्यकोन ओळखा व लिहा.

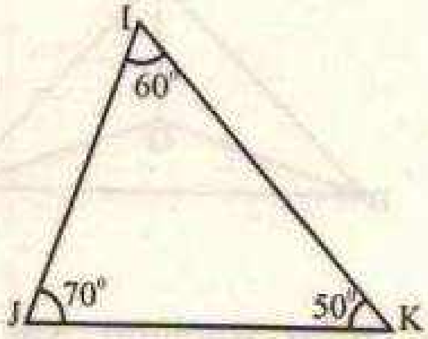
(10) $\angle PQS$ हा ज्या त्रिकोणांचा कोन आहे, अशा त्रिकोणांची यादी तयार करा.

(11) R हा शिरोबिंदू असणारे त्रिकोण कोणते ?

(12) कोणते बिंदू Δ PST च्या बाह्यभागात आहेत ?

त्रिकोणाचे प्रकार

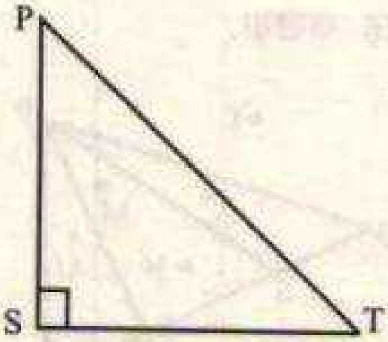
(1) कोनांवरून



बाजूच्या आकृतीवरून Δ IJK च्या कोनांची मापे पाहा.

Δ IJK चा प्रत्येक कोन हा लघुकोन आहे, हे लक्षात येते. Δ IJK हा लघुकोन त्रिकोण आहे.

त्रिकोणाचे तीनही कोन लघुकोन असतील, तर त्या त्रिकोणाला लघुकोन त्रिकोण म्हणतात.

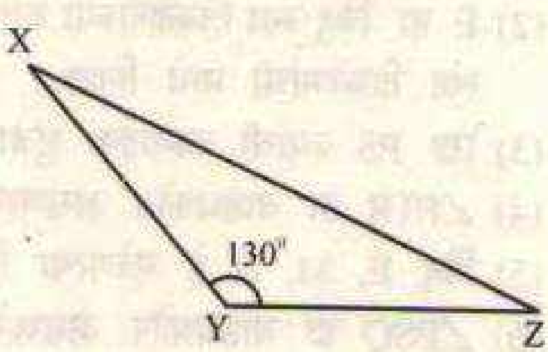


बाजूच्या आकृतीत Δ PST मध्ये $\angle PST$ हा काटकोन आहे. Δ PST हा काटकोन त्रिकोण आहे.

त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असेल, तर त्या त्रिकोणाला काटकोन त्रिकोण म्हणतात.

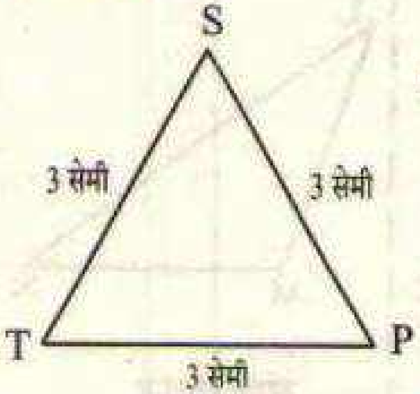
(iii) शेजारच्या आकृतीत Δ XYZ चा $\angle XYZ$ विशालकोन आहे.

Δ XYZ हा विशालकोन त्रिकोण आहे.



एक कोन विशालकोन असणाऱ्या त्रिकोणाला विशालकोन त्रिकोण म्हणतात.

(2) बाजूंवरून



दिलेल्या आकृतीत Δ STP च्या तीनही बाजू समान लांबीच्या आहेत.

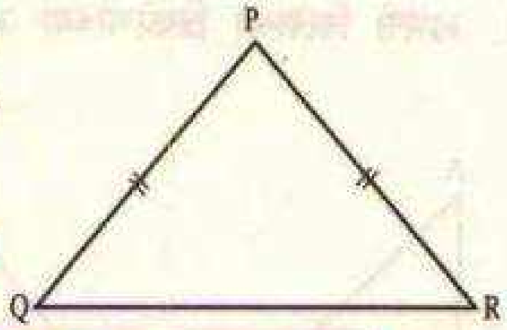
Δ STP हा **समभुज त्रिकोण** आहे.

त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंची लांबी समान असेल, तर त्या त्रिकोणाला समभुज त्रिकोण म्हणतात.

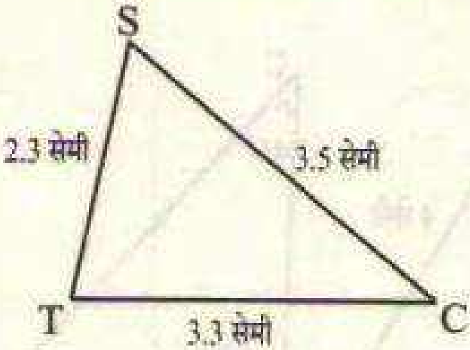
एखाद्या आकृतीच्या बाजूंवर सारख्या खुणा दाखवल्या असतील, तर त्या बाजू समान लांबीच्या असतात. (तसेच समान खुणा असलेल्या कोनांची मापे समान आहेत असे समजतात.)

बाजूच्या आकृतीत Δ PQR च्या बाजू PQ व बाजू PR यांची लांबी समान आहे, हे सारख्या खुणांवरून लक्षात येते.

Δ PQR हा **समद्‌विभुज त्रिकोण** आहे.



त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची लांबी समान असेल, तर अशा त्रिकोणास समद्‌विभुज त्रिकोण म्हणतात.

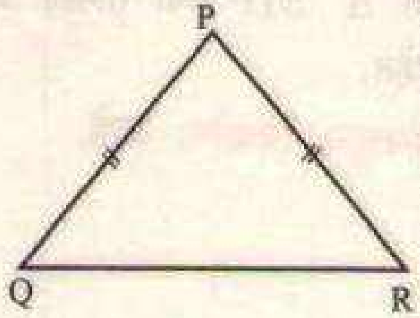


बाजूच्या आकृतीत Δ STC च्या बाजू भिन्न लांबीच्या आहेत.

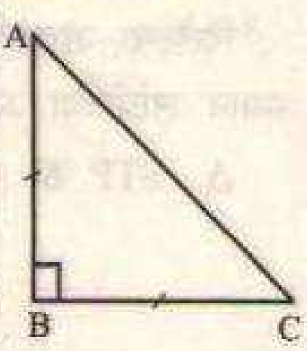
Δ STC हा **विषमभुज त्रिकोण** आहे.

तीनही बाजूंची लांबी वेगवेगळी असणाऱ्या त्रिकोणाला विषमभुज त्रिकोण म्हणतात.

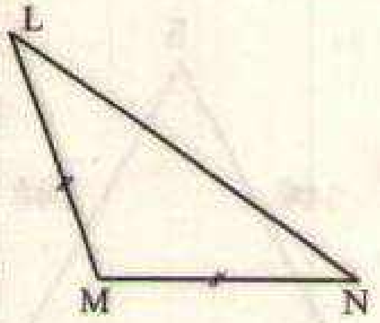
(3) कोन व बाजू यांचा विचार करून



समद्विभुज
लघुकोन त्रिकोण



समद्विभुज
काटकोन त्रिकोण

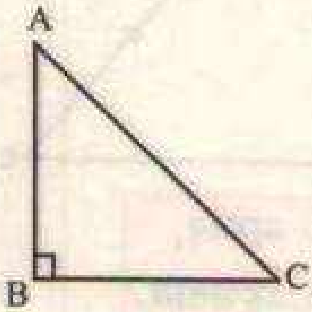


समद्विभुज
विशालकोन त्रिकोण

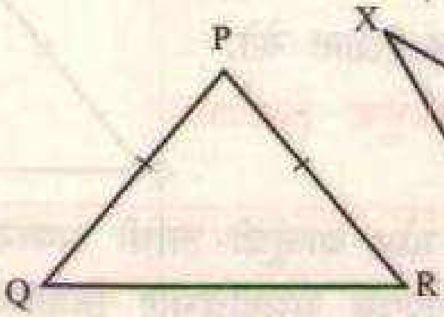
याप्रमाणे विषमभुज लघुकोन त्रिकोण, विषमभुज काटकोन त्रिकोण, विषमभुज विशालकोन त्रिकोण असेही प्रकार होतात.

उदाहरणसंग्रह 75

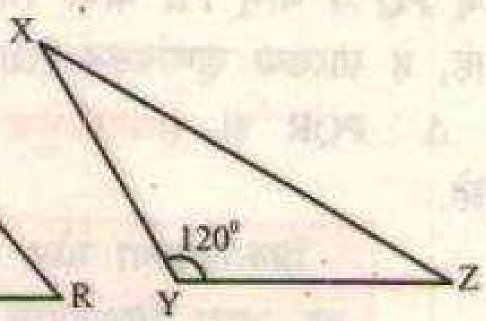
1. खाली दिलेल्या त्रिकोणांच्या आकृत्यांवरून प्रत्येक त्रिकोणाचा प्रकार लिहा.



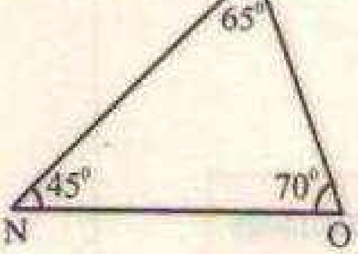
आ. 1



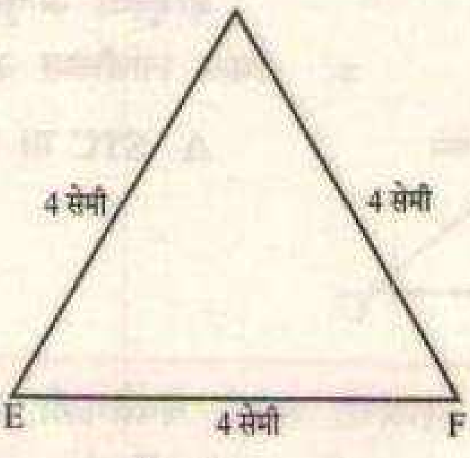
आ. 2



आ. 3



आ. 4



आ. 5

आ. 6

2. पुढील प्रत्येक उदाहरणात दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोणाचा प्रकार लिहा.

(1) Δ ABC मध्ये $m\angle A = 63^\circ$ आहे. $m\angle B = 52^\circ$ व $m\angle C = 65^\circ$

(2) Δ RST मध्ये रेख RS व रेख ST यांची लांबी समान आहे.

(3) Δ LMN मध्ये $\angle LNM$ हा काटकोन आहे.

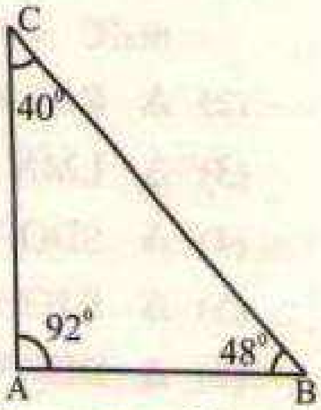
(4) Δ SDO मध्ये $\angle OSD$ चे माप 135° आहे.

(5) Δ RTO च्या तीनही बाजू समान लांबीच्या आहेत.

(6) Δ DEF च्या बाजू 5.3 सेमी, 4.2 सेमी व 6.6 सेमी लांबीच्या आहेत.

21. त्रिकोणाचे गुणधर्म

त्रिकोणाच्या तीन कोनांचा गुणधर्म



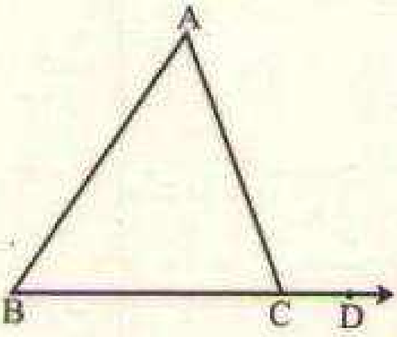
सोबतच्या आकृतीत Δ ABC दाखवला आहे. त्याच्या कोनांची मापे 48°, 40° व 92° आहेत.
या तीनही मापांची बेरीज, $48 + 40 + 92 = 180^\circ$ येते.

याप्रमाणे तुम्ही स्वत: निरनिराळे त्रिकोण काढा. प्रत्येकाच्या कोनांची मापे मोजून त्यांची बेरीज करा. प्रत्येक त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° येते, असे आढळून येईल.

कोणत्याही त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचा गुणधर्म

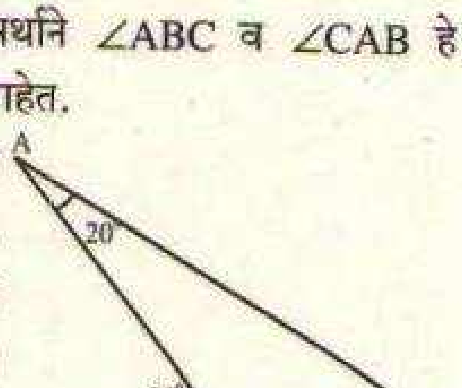
हा गुणधर्म समजण्यासाठी आपण प्रथम असंलग्न किंवा दूरस्थ आंतरकोन म्हणजे काय हे समजून घेऊ.



सोबत दिलेली आकृती पाहा.

येथे ∠ACD हा Δ ABC चा एक बाह्यकोन आहे.

∠ABC, ∠BCA व ∠CAB या आंतरकोनांपैकी ∠BCA हा बाह्यकोन ACD चा संलग्न कोन आहे; परंतु ∠ABC व ∠CAB हे मात्र बाह्यकोन ACD चे संलग्न कोन नाहीत. या अर्थाने ∠ABC व ∠CAB हे ∠ACD चे असंलग्न किंवा दूरस्थ आंतरकोन आहेत.



आता सोबतची आकृती पाहा. आकृतीत ∠ACD हा Δ ABC चा बाह्यकोन आहे. त्रिकोणाचे दूरस्थ आंतरकोन CAB व ABC आणि बाह्यकोन ACD यांची मापे मोजून लिहिली आहेत. या मापांवरून दिसते, की ∠A व ∠B यांच्या मापांची बेरीज $20 + 30 = 50^\circ$

बाह्यकोन ACD चे माप 50° आहे.

यावरून $m\angle A + m\angle B = m\angle ACD$

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे आहे.

या त्रिकोणाचा आणखी एक बाह्यकोन काढा. या बाह्यकोनाचे माप मोजा. त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज करा. तुम्हाला आढळेल, की त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप त्याच्या दूरस्थ (असंलग्न) आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढेच आहे.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाह्यकोनाचे माप त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

उदा. (1) आकृतीत $m\angle L = 55^\circ$, $m\angle P = 45^\circ$ आहे. $\angle LMN$ हा बाह्यकोन आहे, तर $\angle LMN$ चे माप किती ?

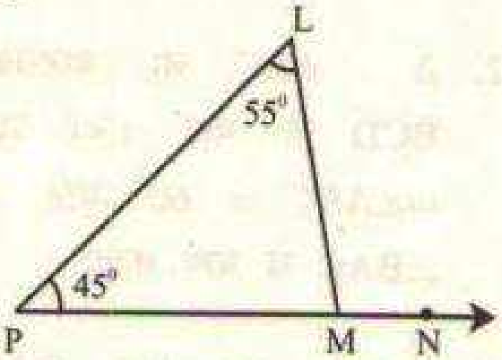
त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाच्या गुणधर्मावरून

$m\angle LMN = m\angle P + m\angle L$

$= 45 + 55$

$= 100$

$\therefore m\angle LMN = 100^\circ$



उदा. (2) आकृतीत दिलेल्या माहितीवरून $\angle I$ चे माप काढा.

त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

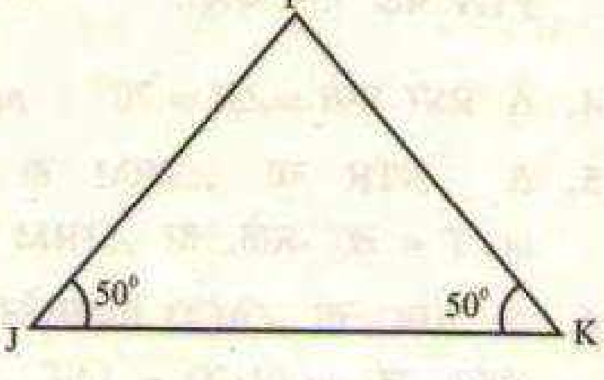
$\therefore m\angle I + m\angle J + m\angle K = 180$

$\therefore m\angle I + 50 + 50 = 180$

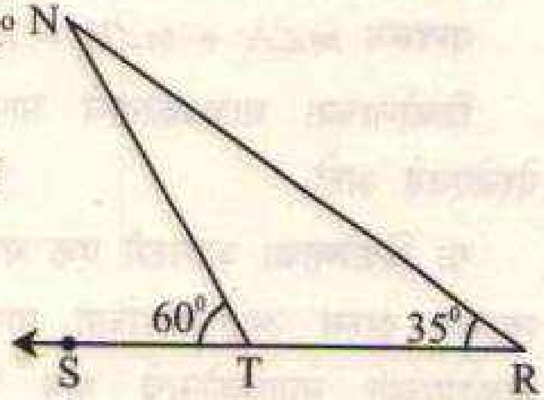
$\therefore m\angle I + 100 = 180$

$\therefore m\angle I = 80$

$\therefore \angle I$ चे माप 80° आहे.



उदा. (3) आकृतीत Δ NTR चा बाह्यकोन NTS चे माप 60° आहे. $\angle R$ चे माप 35° आहे, तर $\angle N$ चे माप काढा.



त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाच्या गुणधर्मावरून

$m\angle N + m\angle R = m\angle NTS$

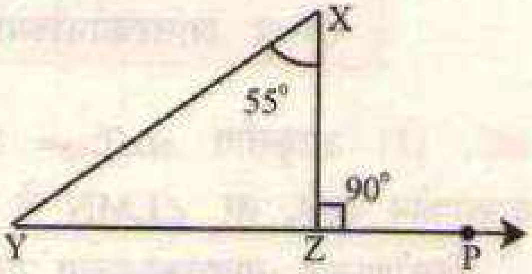
$\therefore m\angle N + 35 = 60$

$\therefore m\angle N = 25$

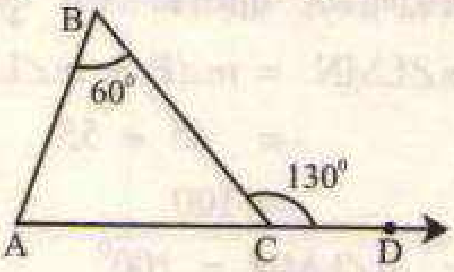
$\therefore \angle N$ चे माप 25° आहे.

उदाहरणसंग्रह 76

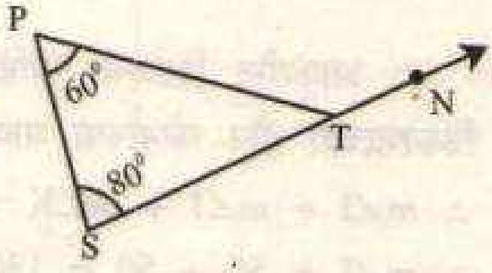
1. Δ XZY चा बाह्यकोन XZP चे माप 90° आहे. $\angle YXZ$ चे माप 55° आहे, तर $\angle XYZ$ चे माप काढा.



2. Δ ABC चा बाह्यकोन BCD चे माप 130° आहे. $m\angle ABC = 60^\circ$ आहे, तर $\angle BAC$ चे माप काढा.

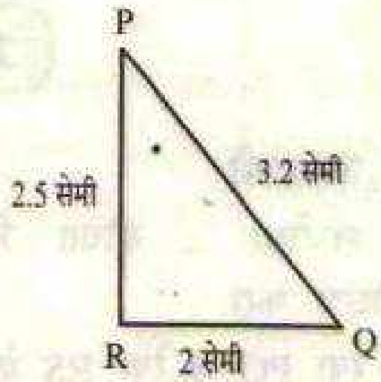


3. बाजूच्या आकृतीत दिलेल्या माहितीवरून $\angle PTS$ चे माप काढा. तसेच बाह्यकोन PTN चेही माप काढा.



4. Δ RST मध्ये $m\angle R = 70^\circ$, $m\angle S = 30^\circ$ आहे. तर $\angle T$ चे माप काढा.
5. Δ NTR चा $\angle TRM$ हा बाह्यकोन आहे. $m\angle N = 30^\circ$, $m\angle T = 80^\circ$ आहे, तर $\angle TRM$ चे माप काढा.
6. Δ ABC चा $\angle ACD$ बाह्यकोन आहे. $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. जर $m\angle ACD = 140^\circ$, तर $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे काढा.

त्रिकोणाच्या बाजूंसंबंधी गुणधर्म



सोबतची आकृती Δ PQR ची आहे. Δ PQR च्या बाजू PQ, बाजू QR आणि बाजू PR यांची लांबी मोजून पुढील तक्त्यात लिहिली आहे.

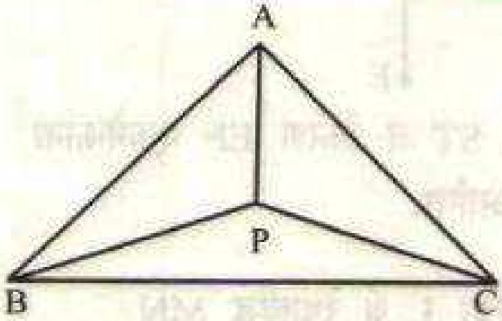
1 त्रिकोणाचे नाव	2 एका बाजूची लांबी सेमी	3 दुसऱ्या बाजूची लांबी सेमी	4 तिसऱ्या बाजूची लांबी सेमी	5 पहिल्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज सेमी	6 रकाना 4 व 5 तुलना सेमी
Δ PQR	l (QR) = 2	l (PR) = 2.5	l (PQ) = 3.2	4.5	4.5 > 3.2
	l (PR) = 2.5	l (PQ) = 3.2	l (QR) = 2	5.7	5.7 > 2
	l (PQ) = 3.2	l (QR) = 2	l (PR) = 2.5	5.2	5.2 > 2.5

तक्त्यातील स्तंभ क्रमांक 5 व 6 वरून त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त आहे, असे दिसते.

त्याचप्रमाणे Δ EFG, Δ HKI, Δ ANT हे त्रिकोण काढा. त्यांच्या प्रत्येक बाजूची लांबी मोजा आणि वरीलप्रमाणे तक्ते करून ते पूर्ण करा व निष्कर्ष काढा.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते.

उदाहरणसंग्रह 77



1. शेजारील आकृतीच्या आधारे पुढील विधाने पूर्ण करा.

(1) l (AP) + l (BP) > -------

(2) l (AP) + l (CP) ------- l (AC)

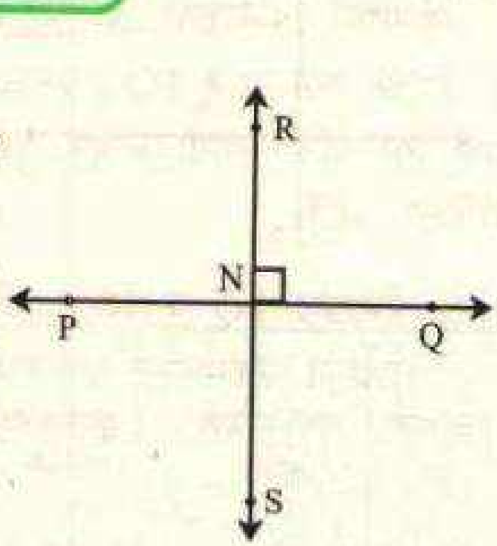
(3) ------- + l (CP) > l (BC)

(4) l (AB) + ------- > l (BC)

22. भौमितिक रचना

✱ उजळणी

लंबरेषा : सोबत दिलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करा.



रेषा PQ व रेषा RS एकमेकींना N बिंदूत छेदतात. छेदनबिंदू N पाशी $\angle RNQ$, $\angle RNP$, $\angle PNS$ व $\angle SNQ$ असे चार काटकोन तयार होतात.

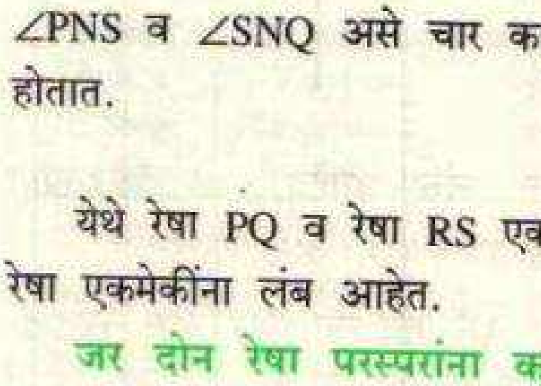
येथे रेषा PQ व रेषा RS एकमेकांशी काटकोन करून छेदतात, म्हणून या रेषा एकमेकींना लंब आहेत.

जर दोन रेषा परस्परांना काटकोनात छेदत असतील, तर त्या रेषा परस्परांना लंब आहेत असे म्हणतात.

लंबरेषाखंड व लंबकिरण

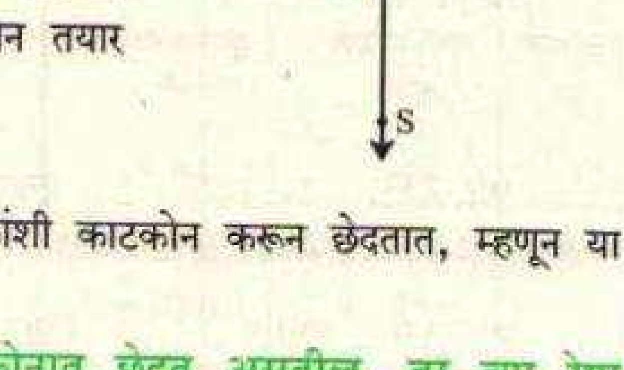
ज्याप्रमाणे दोन रेषा एकमेकींना लंब असतात त्याचप्रमाणे दोन रेषाखंड किंवा दोन किरण देखील एकमेकांना लंब असतात, हे खालील आकृत्यांवरून तुमच्या लक्षात येईल.

(1)



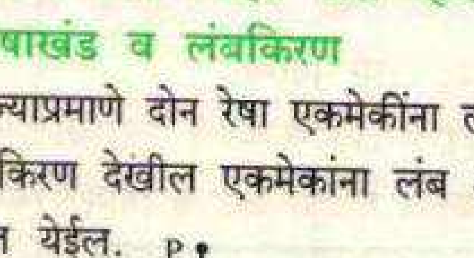
रेख AB व रेख PQ एकमेकांना लंब आहेत.

(2)



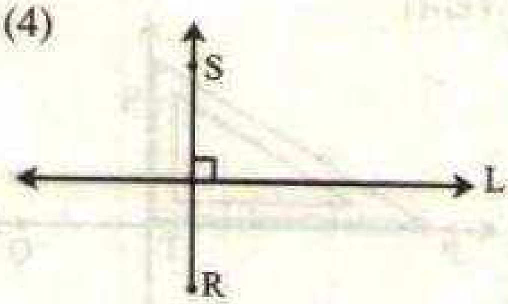
किरण ST व किरण EF एकमेकांना लंब आहेत.

(3)



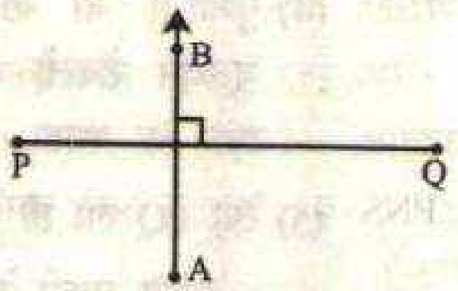
रेषा L व रेषाखंड MN एकमेकांना लंब आहेत.

(4)



रेषा L व किरण RS एकमेकांना लंब आहेत.

(5) रेषाखंड PQ व किरण AB हे देखील एकमेकांना लंब आहेत.



'रेषा AB व रेषा CD एकमेकींना लंब आहेत,' हे थोडक्यात 'रेषा AB ⊥ रेषा CD' किंवा 'रेषा CD ⊥ रेषा AB' असे लिहितात.

'रेषा AB ⊥ रेषा CD' याचे वाचन 'रेषा AB लंब रेषा CD' असे करतात.

तसेच 'किरण PQ ⊥ रेख ST' याचे वाचन 'किरण PQ लंब रेख ST' असे करतात.

उदाहरणसंग्रह 78

1. खाली दिलेली विधाने चिन्ह वापरून लिहा.
   (1) रेख MR लंब किरण ST
   (2) रेषा LM लंब रेख PQ
   (3) रेषा HP लंब किरण OK
   (4) रेख KG लंब रेख VJ
   (5) रेषा AD लंब रेषा EF

रचना 1 : दिलेल्या रेषेला रेषेबाहेरील बिंदूतून लंबरेषा काढणे.

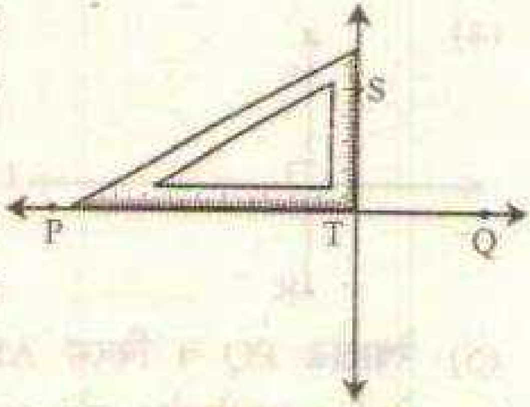
उदा. : रेषा PQ काढा. रेषेबाहेर S बिंदू घ्या. S बिंदूतून PQ वर लंब काढा.

पद्धत 1. गुण्याचा उपयोग करून

कृती : (1) रेषा PQ काढा.

(2) PQ रेषेबाहेर कोठेही S बिंदू घ्या.

(3) गुण्याची काटकोन करणारी एक बाजू रेषा PQ शी आणि दुसरी बाजू S बिंदूशी जुळवून ठेवा.



(4) गुण्याची जी बाजू S बिंदूशी जुळवून ठेवली त्या बाजूलगत एक रेषा काढा.

(5) रेषा PQ ला ही रेषा ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूला T हे नाव द्या.

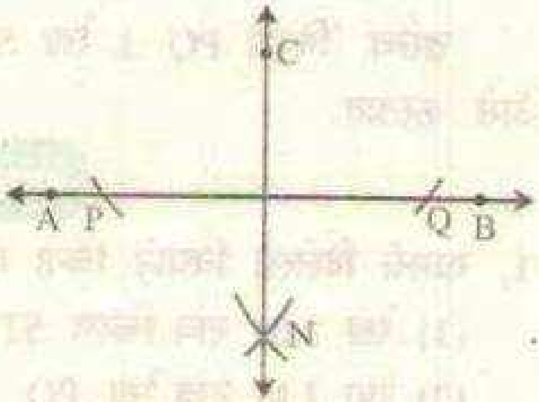
• अशा प्रकारे रेषा ST ⊥ रेषा PQ तयार होईल.

पद्धत 2. कंपासचा उपयोग करून

उदा. रेषा AB ला रेषेबाहेरील C बिंदूतून लंबरेषा काढा.

कृती : (1) रेषा AB काढा.

(2) AB रेषेबाहेर कोठेही C बिंदू घ्या.



(3) कंपासमध्ये सोईस्कर अंतर घ्या.

(4) कंपासचे अणकुचीदार टोक C वर ठेवा आणि रेषा AB ला छेदतील असे दोन कंस काढा. हे कंस रेषा AB ला ज्या बिंदूत छेदतील, त्या बिंदूंना Q व P ही नावे द्या.

(5) कंपासमध्ये घेतलेले अंतर कायम ठेवा. कंपासचे टोक आधी P वर व नंतर Q वर ठेवून रेषा AB च्या ज्या अंगास बिंदू C असेल त्याच्या विरुद्ध अंगास एकमेकांना छेदणारे दोन कंस काढा. या कंसांच्या छेदनबिंदूस N हे नाव द्या.

(6) बिंदू C व बिंदू N मधून जाणारी रेषा CN काढा.

• अशा प्रकारे रेषा CN ⊥ रेषा AB तयार होईल.

1. रेषा XY काढा. रेषेबाहेर S बिंदू घ्या. गुण्याचा वापर करून बिंदू S मधून जाणारी रेषा XY ला लंबरेषा काढा.
2. रेषा AB काढा. रेषेबाहेर कोठेही C बिंदू घ्या. कंपासचा वापर करून बिंदू C मधून जाणारी रेषा AB ला लंबरेषा काढा.

रचना 2 : दिलेल्या रेषेला त्या रेषेवरील बिंदूतून लंबरेषा काढणे

उदा. : रेषा AB काढा. त्या रेषेवर कोठेही C बिंदू घ्या. C बिंदूतून रेषा AB ला लंबरेषा काढा.

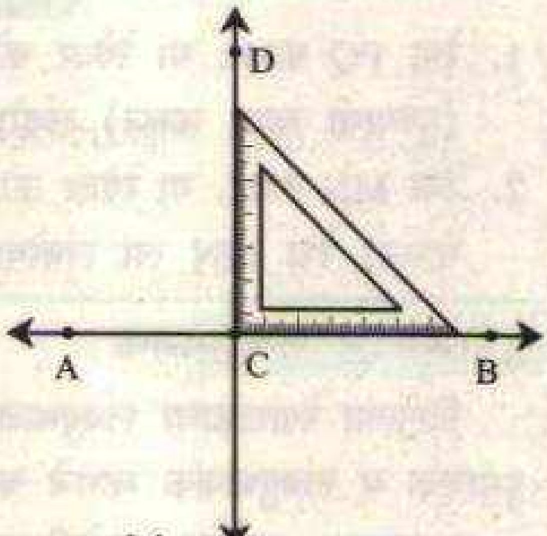
पद्धत 1. गुण्याचा उपयोग करून

कृती :

(1) रेषा AB काढा.

(2) रेषा AB वर कोठेही C बिंदू घ्या.

(3) गुण्याची काटकोन करणारी एक बाजू रेषा AB शी जुळवून ठेवा. गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या दोन्ही बाजू ज्या टोकावर मिळतात ते टोक C बिंदूशी जुळवा.



(4) गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या दुसऱ्या बाजूलगत C मधून जाणारी रेषा CD काढा.

• अशा प्रकारे रेषा CD ⊥ रेषा AB तयार होईल.

पद्धत 2. कंपासचा उपयोग करून

कृती :

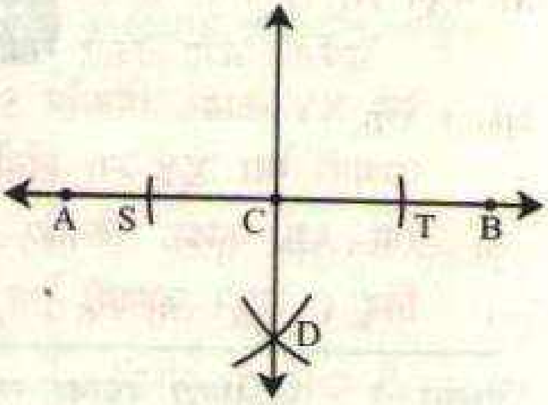
(1) रेषा AB काढा.

(2) रेषा AB वर कोठेही बिंदू C घ्या.

(3) कंपासमध्ये सोईस्कर अंतर घ्या.

(4) बिंदू C वर कंपासचे अणकुचीदार टोक ठेवा आणि C बिंदूच्या दोन्ही बाजूंना

रेषा AB ला छेदणारे दोन कंस काढा. हे कंस AB रेषेला ज्या दोन बिंदूंत छेदतील त्या बिंदूंना S व T ही नावे द्या.



(5) बिंदू S व बिंदू T यांमधील अंतराच्या निम्म्यापेक्षा जास्त अंतर अंदाजाने कंपासमध्ये घ्या.

(6) प्रथम बिंदू S वर व नंतर बिंदू T वर कंपासचे टोक ठेवून रेषा AB च्या एका अंगास एकमेकांना छेदणारे दोन कंस काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे या कंसांच्या छेदनबिंदूला D हे नाव द्या.

(7) रेषा CD काढा.

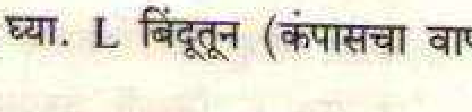
- अशा प्रकारे रेषा CD ⊥ रेषा AB तयार होईल.

उदाहरणसंग्रह 80

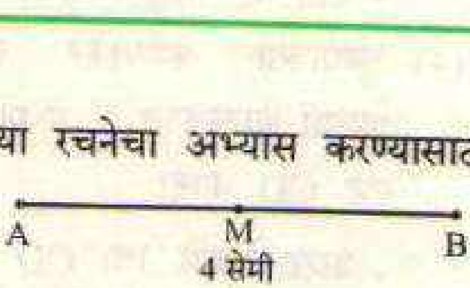
1. रेषा PQ काढा. या रेषेवर कोठेही R बिंदू घ्या. R बिंदूतून रेषा PQ ला (गुण्याचा वापर करून) लंबरेषा काढा.
2. रेषा MN काढा. या रेषेवर कोठेही L बिंदू घ्या. L बिंदूतून (कंपासचा वापर करून) रेषा MN ला लंबरेषा काढा.

दुभाजक व लंबदुभाजक

दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे, या रचनेचा अभ्यास करण्यासाठी दुभाजक व लंबदुभाजक म्हणजे काय हे पाहू.



दुभाजक : सोबत 4 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढला आहे. या रेषाखंडावर बिंदू M असा आहे, की
रेख AM ची लांबी = रेख MB ची लांबी = 2 सेमी. येथे M हा रेषाखंड AB चा मध्यबिंदू आहे, म्हणजेच बिंदू M हा



रेख AB ला **दुभागतो**. रेषाखंडाचे दोन समान लांबीचे भाग करणे म्हणजेच **'रेषाखंड दुभागणे'** होय. वरील आकृतीत रेषाखंड AB चा मध्यबिंदू

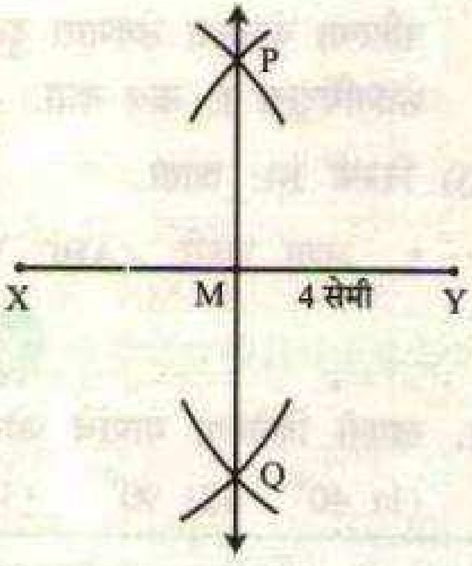
M मधून N, L व P या रेषा काढल्या आहेत. या सर्व रेषा रेषाखंड AB च्या दुभाजक आहेत. अशा प्रकारे रेख AB चे असंख्य दुभाजक काढता येतील, हे लक्षात घ्या.

लंबदुभाजक : वरील आकृतीत रेषाखंड AB ला N, L व P यांपैकी कोणत्या रेषा लंब आहेत, हे गुण्याचा वापर करून ठरवा. असे दिसून येईल, की रेषा L ⊥ रेख AB तसेच रेषा L ही रेख AB चा दुभाजक देखील आहे, म्हणून रेषा L ही रेख AB ची लंबदुभाजक आहे. यावरून कोणत्याही रेषाखंडाचा दुभाजक त्या रेषाखंडाला लंब असेल तर त्याला लंबदुभाजक म्हणतात. लक्षात घ्या, की एका रेषाखंडाला असंख्य दुभाजक असतात, पण लंबदुभाजक मात्र एकच असतो.

रचना 3 : दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.

उदा. 4 सेमी लांबीच्या रेषाखंड XY चा लंबदुभाजक काढा.

कृती :



(1) 4 सेमी लांबीचा रेषाखंड XY काढा.

(2) कंपासमध्ये रेख XY च्या लांबीच्या निम्म्यापेक्षा जास्त (म्हणजे येथे 2 सेमीपेक्षा जास्त) अंतर घ्या.

(3) बिंदू X ला केंद्र घेऊन रेख XY च्या दोन्ही अंगास एकेक कंस काढा.

(4) कंपासमध्ये तेच अंतर ठेवून व बिंदू Y ला केंद्र घेऊन रेख XY च्या दोन्ही अंगास, आधी काढलेल्या कंसांना छेदणारे एकेक कंस काढा. छेदनबिंदूंना P व Q नावे द्या.

(5) रेषा PQ काढा.

- अशा प्रकारे रेख XY चा लंबदुभाजक PQ तयार होईल.

उदाहरणसंग्रह 81

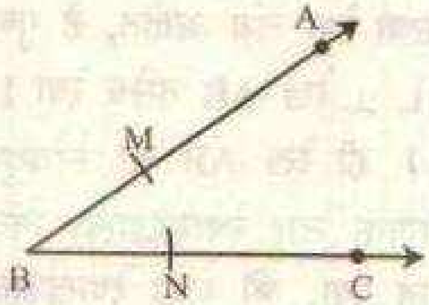
1. खाली दिलेल्या लांबीचे रेषाखंड काढून त्यांचे लंबदुभाजक काढा.

(1) 8 सेमी (2) 6.5 सेमी (3) 7 सेमी (4) 5.7 सेमी (5) 9.2 सेमी

रचना 4 : दिलेला कोन दुभागणे.

उदा. : कोणत्याही मापाचा $\angle ABC$ काढा. कंपास व पट्टीच्या साहाय्याने $\angle ABC$ चा दुभाजक काढा.

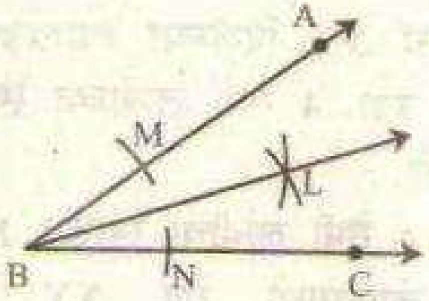
कृती :



(1) कोणत्याही मापाचा $\angle ABC$ काढा.

(2) कंपासचे अणकुचीदार टोक B बिंदूवर ठेवा.

(3) दोन्ही टोकांत योग्य अंतर घेऊन एक कंस काढा. हा कंस किरण BA व किरण BC यांना ज्या बिंदूंत छेदेल त्या बिंदूंना अनुक्रमे M व N नावे द्या.



(4) कंपासमध्ये तेच अंतर ठेवून व बिंदू M केंद्र घेऊन एक कंस व नंतर बिंदू N केंद्र घेऊन पहिल्या कंसाला छेदणारा दुसरा कंस काढा. छेदनबिंदूला L नाव द्या.

(5) किरण BL काढा.

- अशा प्रकारे $\angle ABC$ चा कोनदुभाजक किरण BL तयार होईल.

उदाहरणसंग्रह 82

1. खाली दिलेल्या मापांचे कोन काढा. प्रत्येक कोनाचा दुभाजक काढा.
   (1) 40° (2) 90° (3) 120° (4) 55° (5) 105° (6) 146°

रचना 5 : दिलेल्या कोनाएवढा कोन काढणे.

उदा. : $\angle ABC$ एवढा $\angle PQR$ काढा.

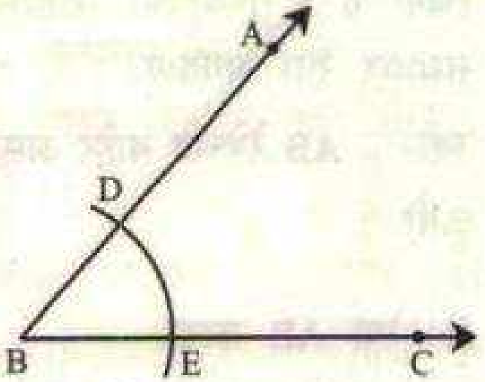
सोबतच्या आकृतीत दिलेला $\angle ABC$ पाहा.

कृती :

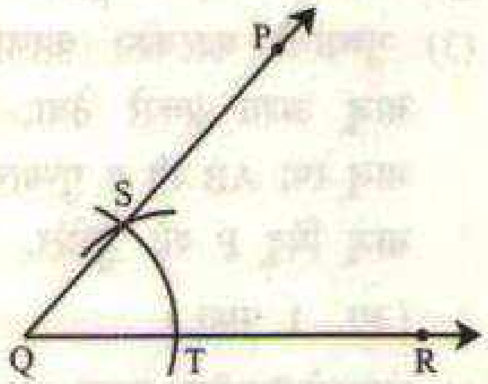
(1) किरण QR काढा.

(2) कंपासमध्ये सोईस्कर अंतर घ्या.

(3) कंपासचे टोक $\angle ABC$ च्या बिंदू B वर ठेवा आणि किरण BA व किरण BC यांना छेदणारा कंस काढून या छेदनबिंदूंना D व E नावे द्या.



(4) कंपासमध्ये घेतलेले अंतर कायम ठेवा. बिंदू Q वर कंपासचे टोक ठेवून एक कंस काढा. हा कंस रेषा QR ला ज्या बिंदूत छेदेल त्या बिंदूस T नाव द्या.



(5) आता कंपासचे टोक E बिंदूवर ठेवून कंपासमधील पेन्सिलीचे टोक D वर पडेल इतके अंतर कंपासमध्ये घ्या.

(6) कंपासचे टोक T वर ठेवा आणि पूर्वी काढलेल्या कंसाला छेदणारा दुसरा कंस काढा. दोन्ही कंसांच्या छेदनबिंदूस S नाव द्या.

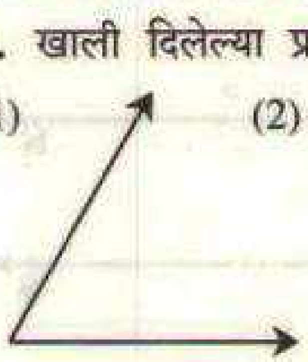
(7) किरण QS काढा. या किरणावर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे P बिंदू घ्या.

- अशा प्रकारे, दिलेल्या $\angle ABC$ एवढा $\angle PQR$ तयार होईल.

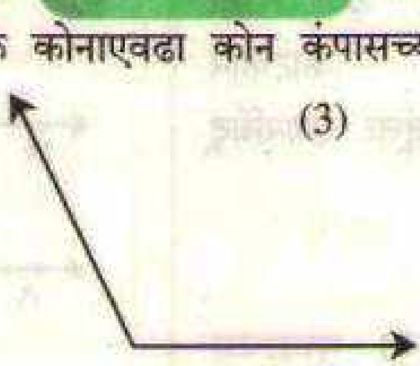
उदाहरणसंग्रह 83

1. खाली दिलेल्या प्रत्येक कोनाएवढा कोन कंपासच्या साहाय्याने काढा.

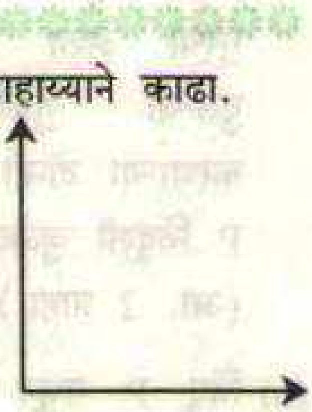
(1)



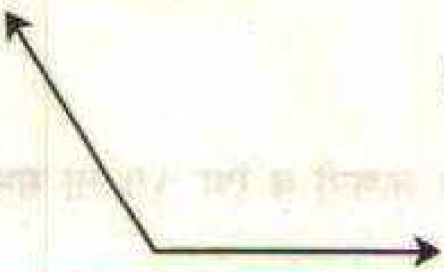
(2)



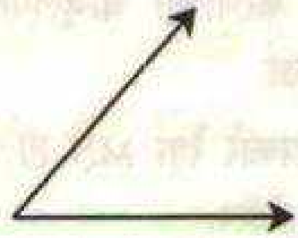
(3)



(4)



(5)



रचना 6 : गुण्यांच्या साहाय्याने दिलेल्या रेषेला त्या रेषेबाहेरील बिंदूतून समांतर रेषा काढणे.

उदा. : AB रेषेच्या बाहेर असलेल्या P बिंदूतून रेषा AB ला समांतर रेषा काढा.

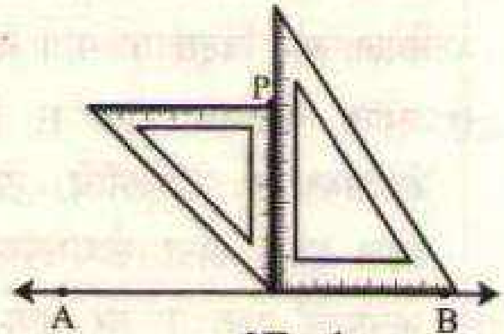
कृती :

(1) रेषा AB काढा.

(2) AB रेषेबाहेर P बिंदू घ्या.

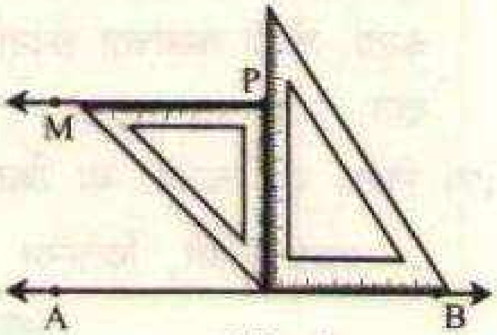
(3) गुण्याची काटकोन करणारी एक बाजू अशा प्रकारे ठेवा, की ही बाजू रेषा AB शी व गुण्याची दुसरी बाजू बिंदू P शी जुळेल.

(आ. 1 पाहा.)



आ. 1

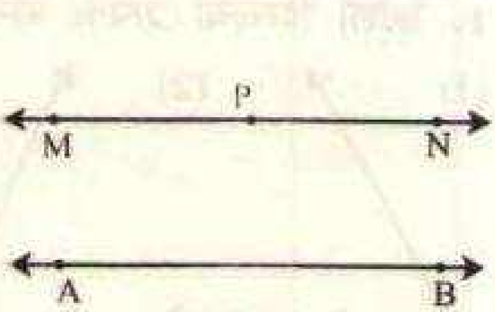
(4) कंपासपेटीमधील दुसरा गुण्या घ्या. या गुण्याची काटकोन करणारी एक बाजू पहिल्या गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूस जुळेल अशा प्रकारे ठेवा.



आ. 2

(5) पहिला गुण्या न हालवता दुसरा गुण्या अशा प्रकारे ठेवा, की दुसऱ्या गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या दोन्ही बाजूंचा छेदनबिंदू P बिंदूशी जुळेल.

(आ. 2 पाहा.)



(6) बिंदू P मधून दुसऱ्या गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूलगत रेषा MN काढा.

- अशा प्रकारे रेषा MN ही P बिंदूतून जाणारी व रेषा AB ला समांतर रेषा तयार होईल.

रचना 7 : दोन रेषाखंडांच्या लांबींच्या बेरजेएवढ्या लांबीचा रेषाखंड कर्कटकाच्या साहाय्याने काढणे.

उदा. : रेख MN व रेख CD काढा. यांच्या लांबींच्या बेरजेएवढी लांबी असणारा रेषाखंड कर्कटकाच्या साहाय्याने काढा.

कृती :

प्रथम रेख MN व रेख CD काढा. या दोन रेषाखंडांच्या लांबीच्या बेरजेएवढ्या लांबीचा रेषाखंड काढायचा आहे.

(1) प्रथम रेषा L काढून तिच्यावर P बिंदू घ्या.

(2) कर्कटकाच्या दोन्ही टोकांत रेख MN च्या लांबीएवढे अंतर घ्या.

(3) कर्कटकाच्या टोकांतील अंतर न बदलता त्याचे एक टोक P वर ठेवा व त्याचे दुसरे टोक रेषेवर जेथे पडेल तेथे Q नाव द्या.

(4) कर्कटकाच्या दोन्ही टोकांत रेख CD च्या लांबीएवढे अंतर घ्या.

(5) कर्कटकाच्या टोकांतील अंतर न बदलता त्याचे एक टोक Q वर ठेवा. Q च्या ज्या बाजूस P नाही, त्या बाजूस कर्कटकाचे दुसरे टोक रेषा L वर ठेवा. त्या बिंदूस R नाव द्या.

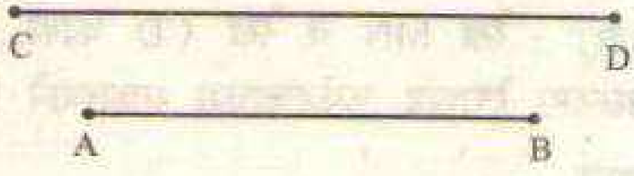
- अशा प्रकारे रेख MN व रेख CD यांच्या लांबींच्या बेरजेएवढी लांबी असलेला रेख PR तयार होईल.

रचना 8 : दोन रेषाखंडांच्या लांबींच्या वजाबाकीएवढी लांबी असणारा रेषाखंड कर्कटकाच्या साहाय्याने काढणे.

उदा. : रेख AB व रेख CD काढा. त्यांच्या लांबींच्या वजाबाकीएवढी लांबी असणारा रेषाखंड काढा.

कृती :

(1) रेख AB व रेख CD हे असमान लांबीचे रेषाखंड काढा.

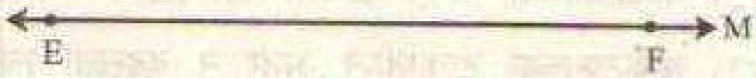


(2) एक रेषा M काढा.

(3) रेषा M वर E बिंदू घ्या.

(4) दिलेल्या रेख AB व रेख CD पैकी ज्या रेषाखंडाची लांबी जास्त असेल, त्याच्या लांबीएवढे अंतर कर्कटकाच्या दोन्ही टोकांत घ्या. येथे रेख CD ची लांबी ही रेख AB च्या लांबीपेक्षा जास्त दिसते, म्हणून प्रथम रेख CD च्या लांबीइतके अंतर कर्कटकाच्या टोकांत घ्या.

(5) कर्कटकाच्या टोकांतील अंतर न बदलता त्याचे एक टोक बिंदू E वर ठेवा व दुसरे टोक रेषा M वर जेथे पडेल तेथे F नाव द्या.



(6) नंतर कर्कटकाच्या टोकांत रेख AB च्या लांबीएवढे अंतर घ्या.

(7) कर्कटकाचे एक टोक बिंदू F वर ठेवा आणि बिंदू F च्या ज्या बाजूस बिंदू E असेल त्याच बाजूस कर्कटकाचे दुसरे टोक रेषा M वर ठेवा. हे टोक जेथे पडेल तेथे H नाव द्या.

- अशा प्रकारे रेख CD व रेख AB यांच्या लांबींच्या वजाबाकीएवढी लांबी असलेला रेख EH तयार होईल.

उदाहरणसंग्रह 84

1. रेषा XY काढा. या रेषेबाहेर कोठेही बिंदू R घ्या. बिंदू R मधून जाणारी रेषा XY ला समांतर रेषा ST काढा.
2. रेख ST व रेख KL काढा. या दोन्ही रेषाखंडांच्या लांबींच्या बेरजेएवढा रेख DE काढा.
3. रेख ST व रेख PQ असमान लांबींचे काढा. त्यांच्या लांबींच्या वजाबाकीएवढी लांबी असलेला रेख MN काढा.

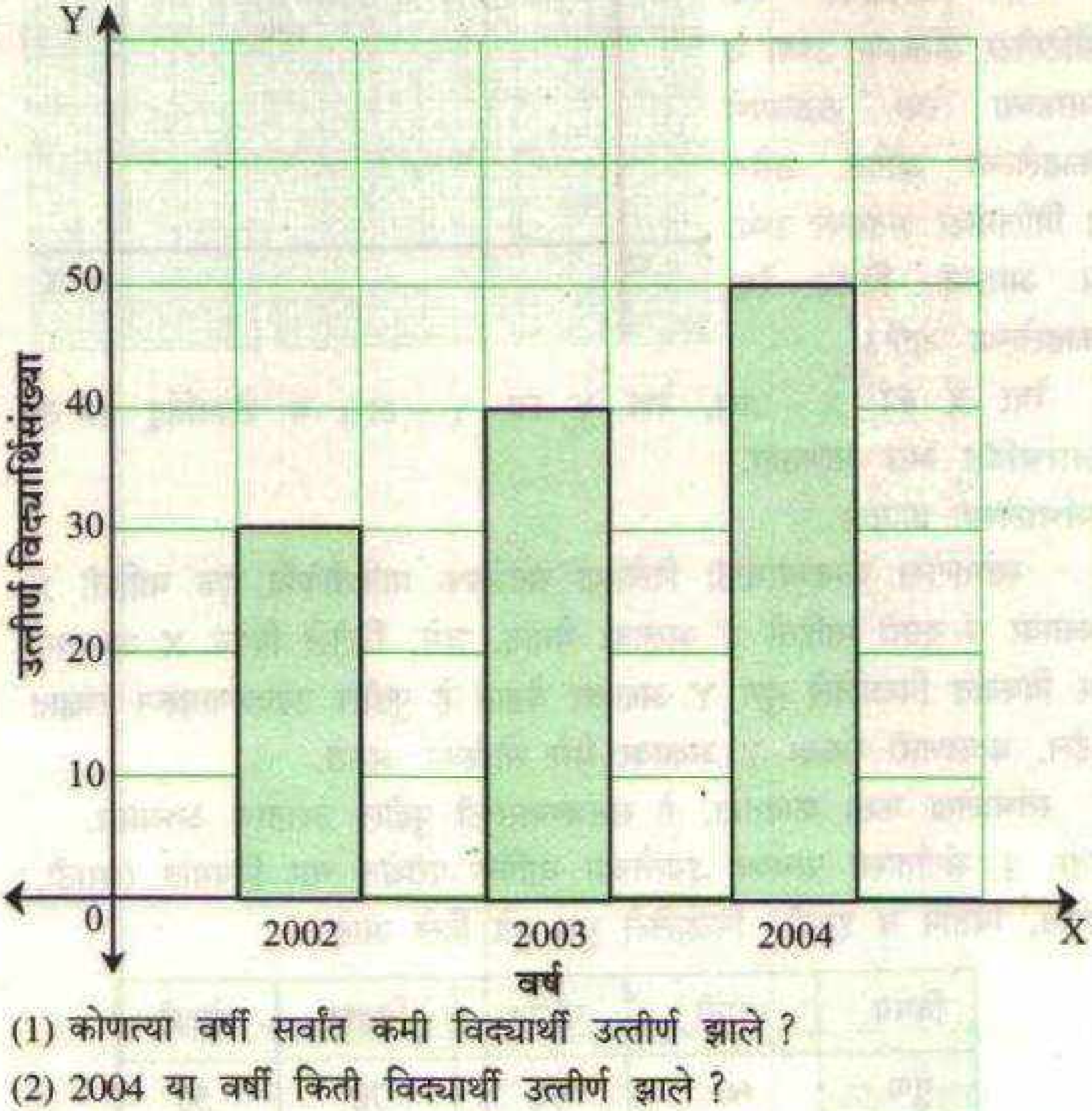
23. स्तंभालेख

उजळणी

पाचव्या इयत्तेत आपण काही स्तंभचित्रांचा अभ्यास केला आहे.

उदा. नूतन विद्यालयाच्या 2002 ते 2004 या वर्षांत गणित प्रावीण्य परीक्षेत उत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या खालील स्तंभचित्रात दाखवली आहे.

स्तंभचित्राचे निरीक्षण करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) कोणत्या वर्षी सर्वांत कमी विद्यार्थी उत्तीर्ण झाले ?

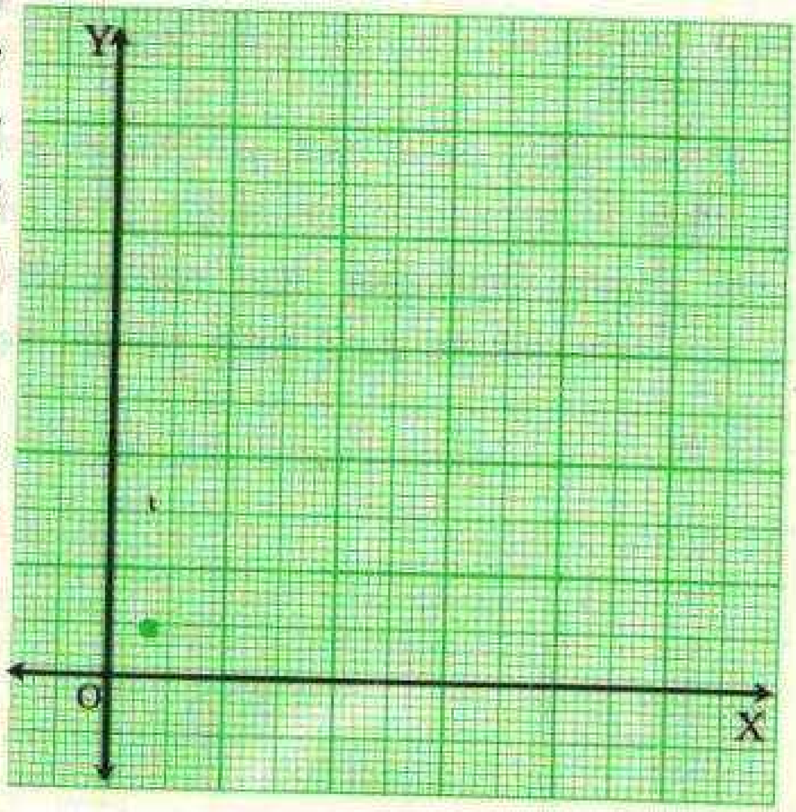
(2) 2004 या वर्षी किती विद्यार्थी उत्तीर्ण झाले ?

(3) 2003 या वर्षी उत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांपेक्षा 2004 या वर्षी किती जास्त विद्यार्थी उत्तीर्ण झाले ?

आलेख कागदाची ओळख

स्तंभचित्र सहजपणे काढता यावे, यासाठी आलेख कागदाचा उपयोग करतात आणि त्यावर काढलेल्या स्तंभचित्राला स्तंभालेख देखील म्हणतात.

या कागदावर एक सेंटिमीटर अंतरावर उभ्या व आडव्या रेषा ठळकपणे काढलेल्या आहेत. तसेच 1 मिलिमीटर अंतरावर उभ्या व आडव्या फिकट रेषा काढलेल्या आहेत.



रेषा X ला **X – अक्ष**, रेषा Y ला **Y – अक्ष** व छेदनबिंदू **O** ला **आरंभबिंदू** असे म्हणतात.

स्तंभालेख काढणे

स्तंभालेख काढण्यासाठी दिलेल्या सांख्यिक माहितीपैकी एक माहिती X अक्षावर व दुसरी माहिती Y अक्षावर घेतात. जसे, दिलेले विषय X अक्षावर, तर विषयांत मिळालेले गुण Y अक्षावर घेतात हे पुढील उदाहरणावरून लक्षात येईल. बदलणारी संख्या Y अक्षावर घेणे सोईस्कर असते.

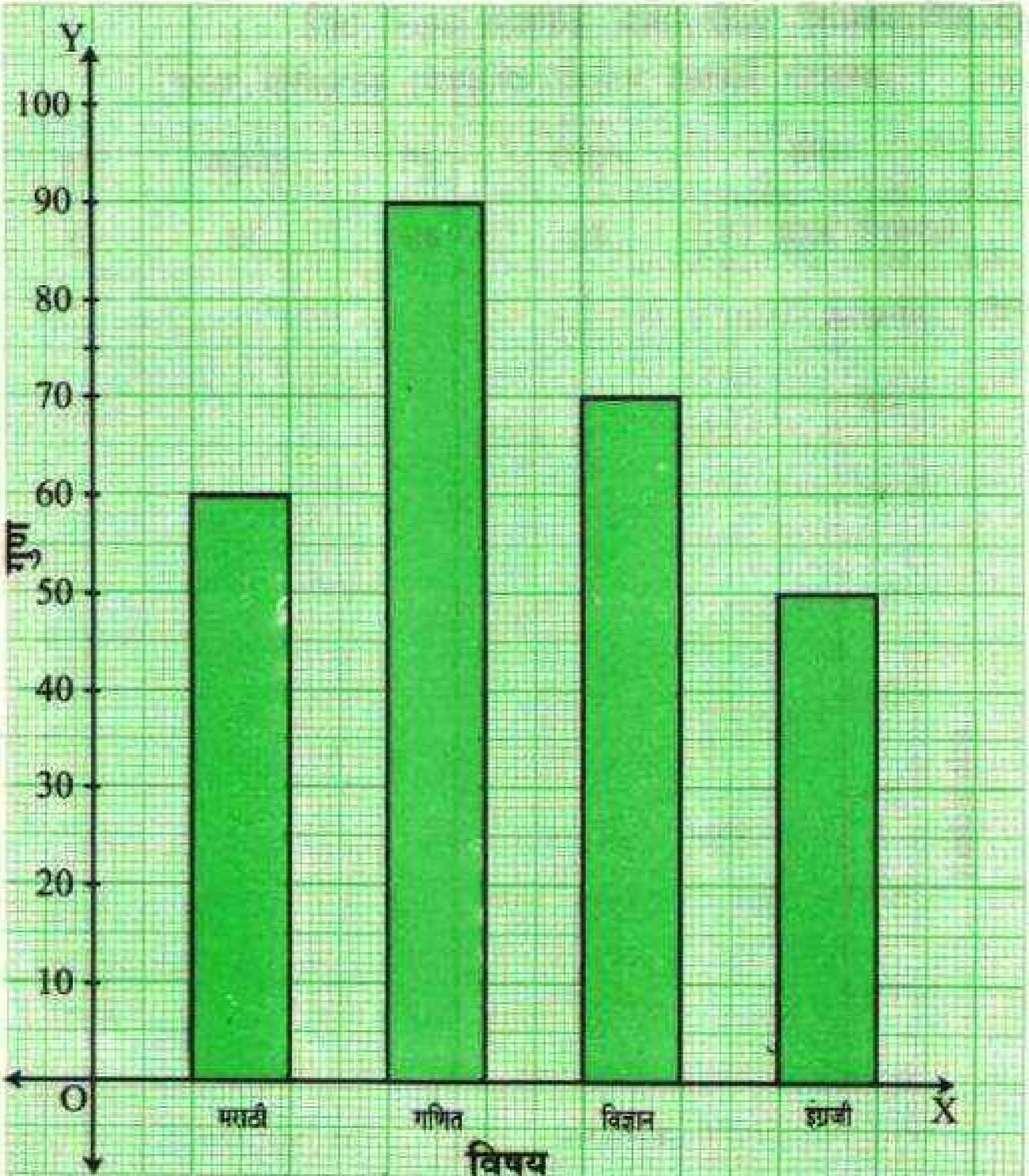
स्तंभालेख कसा काढतात, हे समजण्यासाठी पुढील उदाहरण अभ्यासा.

उदा. 1. संगीताला पाचव्या इयत्तेच्या वार्षिक परीक्षेत चार विषयांत (मराठी, गणित, विज्ञान व इंग्रजी) मिळालेले गुण पुढे दिले आहेत.

विषय	मराठी	गणित	विज्ञान	इंग्रजी
गुण	60	90	70	50

येथे गुण Y अक्षावर व विषय X अक्षावर घेतले आहेत.

उदाहरणात दिलेल्या माहितीचा स्तंभालेख सोबत काढून दाखवला आहे. त्याचे निरीक्षण करा. या स्तंभालेखात पुढील बाबी लक्षात येतील.



(1) X अक्षावर विषयांची नावे लिहिताना प्रत्येक दोन विषयांत समान अंतर ठेवले आहे.

(2) Y अक्षावर गुण लिहिताना प्रत्येक सेंटिमीटर अंतरावर 0, 10, 20, -----, 90 याप्रमाणे गुण लिहिले आहेत.

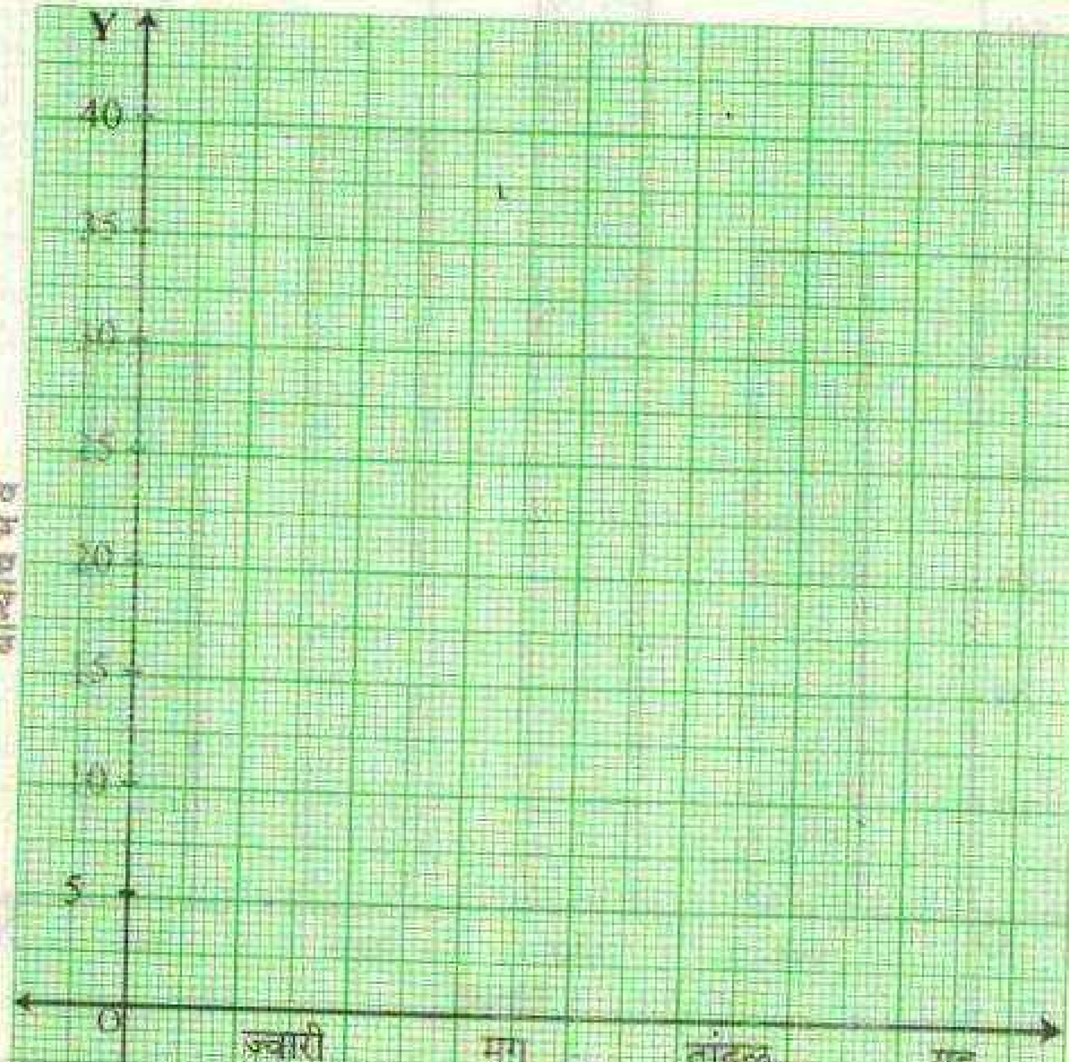
(3) मराठी विषयात 60 गुण मिळाले, म्हणून मराठी विषयाचा स्तंभ 6 सेमी उंचीचा घेण्यात आला आहे.

(4) याच पद्धतीने इतर विषयांत मिळालेल्या गुणांनुसार प्रत्येक स्तंभाची उंची घेण्यात आली आहे.

(5) सर्व स्तंभांची जाडी समान ठेवण्यात आली आहे.

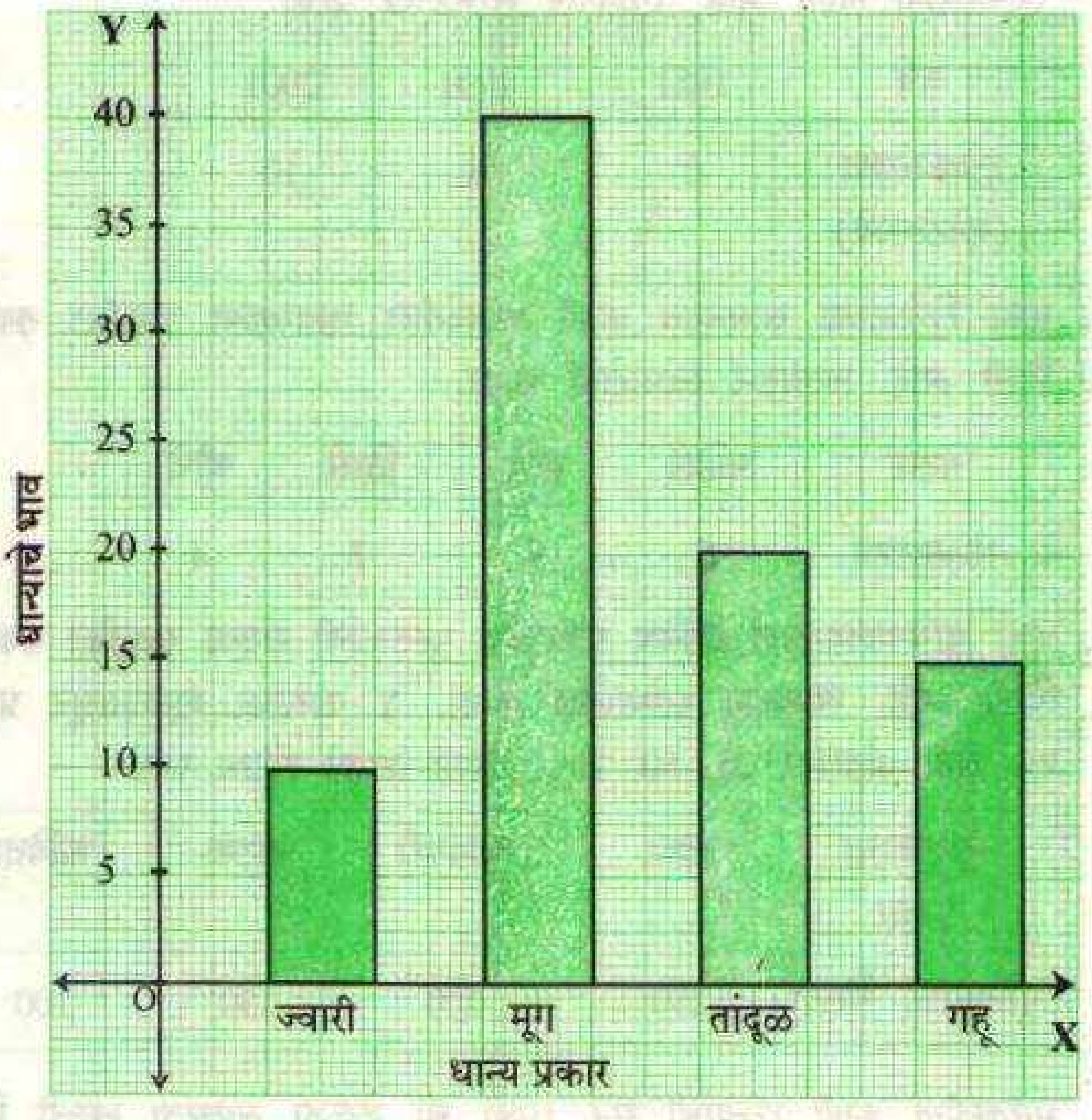
उदा. 2. तक्त्यात दिलेली माहिती दर्शवणारा स्तंभालेख काढा.

धान्य	ज्वारी	मूग	तांदूळ	गहू
धान्याचे भाव (रु.)	10	40	20	15



(1) उदाहरणात धान्याचे एकूण चार प्रकार आहेत. दोन स्तंभांमध्ये एक सेमी अंतर ठेवायचे आहे. त्यासाठी X अक्षावर आरंभबिंदूपासून एकूण आठ खुणा केल्या आणि आरंभबिंदूपासून एक सेमी अंतरावर एकानंतर एक धान्यांची नावे लिहिली.

(2) उदाहरणात दिलेले धान्याचे भाव लक्षात घेऊन Y अक्षावर आरंभबिंदूपासून एक सेमी अंतराने 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 या संख्या लिहिल्या.



(3) X अक्षावरील धान्याचा प्रकार व Y अक्षावरील धान्याचा भाव विचारात घेऊन X अक्षावर प्रत्येक धान्यप्रकारासाठी विशिष्ट उंचीचे स्तंभ काढले. स्तंभ आकर्षक दिसण्यासाठी ते छायांकित केले आहेत. अशा प्रकारे वरील उदाहरणातील माहिती दर्शवणारा स्तंभालेख तयार झाला.

उदाहरणसंग्रह 85

1. पुढील तक्त्यात निरनिराळ्या वर्षी केलेल्या जनगणनेनुसार महाराष्ट्राची लोकसंख्या दिली आहे. त्यावरून स्तंभालेख काढा.

वर्षे	1981	1991	2001
लोकसंख्या (कोटीमध्ये)	6	8	10

2. एका क्रिकेटच्या सामन्यात काही षटकांतील धावसंख्या खालील तक्त्यात दिली आहे. त्यावरून स्तंभालेख काढा.

षटक	पहिले	दुसरे	तिसरे	चौथे
धावसंख्या	6	8	7	4

3. एका वाचनालयातील विविध प्रकारच्या पुस्तकांची संख्या खालील तक्त्यात दिली आहे. त्यावरून स्तंभालेख काढा. Y अक्षावर शून्यापासून प्रत्येक एक सेमी अंतरावर 25, 50, 75,... अशा क्रमाने संख्या घ्या.

पुस्तकाचा प्रकार	कथा	कादंबरी	नाटक	कविता
पुस्तकांची संख्या	250	200	150	100

4. भारतातील काही राज्यांची सन 1981 ची शेकडा साक्षरता खाली दिली आहे. त्यावरून स्तंभालेख काढा.

राज्य	महाराष्ट्र	गोवा	गुजरात	आंध्रप्रदेश
साक्षरता (शेकडा)	45	65	40	60

5. पंकज, धीरज व नीरज या कंपन्यांच्या दुचाकी वाहनांची एक लीटर पेट्रोलमध्ये वाहन किती अंतर जाते, अशी क्षमता दिली आहे. त्यावरून स्तंभालेख काढा.

कंपनीचे नाव	पंकज	धीरज	नीरज
एक लीटरमधील क्षमता (किमीमध्ये)	60	80	50

6. वडगावमध्ये सन 2006 यावर्षी पुढील सारणीत दर्शवल्याप्रमाणे पाऊस पडला. त्यावरून स्तंभालेख काढा.

महिना	जून	जुलै	ऑगस्ट	सप्टेंबर
पाऊस (सेमी)	5	20	15	10

24. क्षेत्रफळ

❋ उजळणी

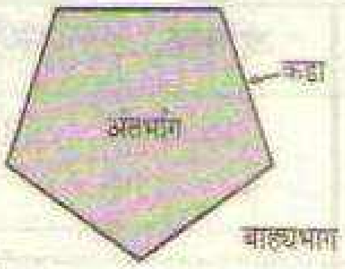
मागील इयत्तेत आयत, चौरस यांचे क्षेत्रफळ आलेख कागदाच्या साहाय्याने कसे काढतात, हे आपण शिकलो आहोत.

आयत, चौरस, त्रिकोण इत्यादी बंदिस्त आकृत्या आहेत.

बंद आकृतीचे प्रामुख्याने तीन भाग पडतात.

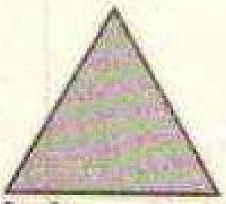
(1) त्या आकृतीची कडा (2) आकृतीचा आतील भाग (अंतर्भाग)

(3) आकृतीचा बाहेरील भाग (बाह्यभाग)

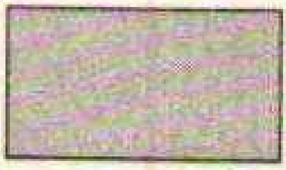


खालील बंदिस्त आकृत्या पाहा. आकृत्यांचा अंतर्भाग छायांकित केला आहे.

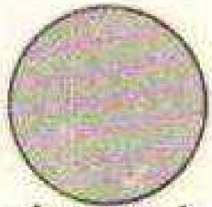
आकृतीचा अंतर्भाग व तिची कडा, दोन्ही मिळून तयार होणारा भाग म्हणजेच आकृतीचे क्षेत्र.



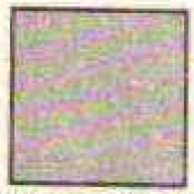
त्रिकोणाकृती क्षेत्र



आयताकृती क्षेत्र



वर्तुळाकृती क्षेत्र



चौरसाकृती क्षेत्र

आकृतीने सपाट पृष्ठभागावरील व्यापलेली जागा, म्हणजेच त्या आकृतीचे **क्षेत्र** होय. या क्षेत्राचे माप म्हणजेच त्याचे **क्षेत्रफळ** होय.

थोडक्यात, जेव्हा फक्त कडेच्या लांबीशी संबंधित उदाहरण सोडवायचे असेल तेव्हा परिमिती काढावी लागेल. उदा., कुंपणाची लांबी, धावलेले अंतर, फेरे इत्यादी. जेव्हा संपूर्ण पृष्ठभागाचे माप लक्षात घ्यावे लागते, तेव्हा क्षेत्रफळ काढावे लागते. उदा., फरशी बसवणे, मुरूम पसरणे, शेतात पेरणी करणे, सतरंजी घालणे, छताला किंवा भिंतीला रंग लावणे इत्यादी.

क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आपण पाचव्या इयत्तेत दोन सूत्रे वापरली आहेत.
जर आयताची लांबी = l, रुंदी = b व चौरसाची बाजू = x असेल,

तर आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी = $l \times b$

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू = बाजू^{2} = x^2

उदा. (1) आयत ABCD ची लांबी 15 सेमी व रुंदी 8.5 सेमी असल्यास आयत ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

दिलेल्या बाबी : आयताची लांबी (l) = 15 सेमी

आयताची रुंदी (b) = 8.5 सेमी

आयताचे क्षेत्रफळ = $l \times b$

= 15 × 8.5

= 127.5 चौसेमी

उदा. (2) 37 मी बाजू असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ काढा.

दिलेल्या बाबी : चौरसाची बाजू (x) = 37 मी

चौरसाचे क्षेत्रफळ = x^2

= 37^2

= 37 × 37

= 1369 चौमी

उदाहरणसंग्रह ८६

1. आयताची लांबी व रुंदी दिली आहे. सूत्राचा उपयोग करून आयताचे क्षेत्रफळ काढा.

   (1) 12 सेमी, 10 सेमी (2) 40 मी, 15 मी (3) 15 सेमी, 8 सेमी
   (4) 25 मी, 11 मी (5) 13 सेमी, 9 सेमी (6) 12.5 मी, 10 मी

2. चौरसाच्या बाजूची लांबी दिली आहे. सूत्राचा उपयोग करून चौरसाचे क्षेत्रफळ काढा.

   (1) 6 सेमी (2) 9 सेमी (3) 11 मी (4) 10 सेमी (5) 23 सेमी
   (6) 1.2 मी (7) 3.5 मी (8) 3.1 मी (9) 0.5 मी (10) 2.7 सेमी

शाब्दिक उदाहरणे

उदा. (1) 5 मी लांब व 3 मी रुंद असलेल्या खोलीला फरशी बसवायची आहे. त्यासाठी 25 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाकृती आकाराच्या किती फरश्या लागतील ?

दिलेल्या बाबी : खोलीची लांबी $(l) = 5$ मी
खोलीची रुंदी $(b) = 3$ मी
फरशीची बाजू $(x) = 25$ सेमी

विचारलेल्या बाबी : फरश्यांची संख्या

काय करावे लागेल : फरश्यांची संख्या काढण्यासाठी, खोलीचे क्षेत्रफळ व एका फरशीचे क्षेत्रफळ काढावे लागेल आणि खोलीच्या क्षेत्रफळाला एका फरशीच्या क्षेत्रफळाने भागावे लागेल. फरशीची बाजू सेंटिमीटर या एककात आहे, म्हणून खोलीची लांबी व रुंदी आपण सेंटिमीटर या एककात काढू.

रीत

खोलीचे क्षेत्रफळ $= l \times b$

खोलीची लांबी, $l = 5$ मी $= 500$ सेमी

खोलीची रुंदी, $b = 3$ मी $= 300$ सेमी

$\therefore$ खोलीचे क्षेत्रफळ $= 500 \times 300$

$= 150000$ चौसेमी

एका चौरसाकृती फरशीचे क्षेत्रफळ $= x \times x$

$= 25 \times 25$

$= 625$ चौसेमी

$$\text{फरश्यांची संख्या} = \frac{\text{खोलीचे क्षेत्रफळ}}{\text{एका फरशीचे क्षेत्रफळ}}$$

$$= \frac{150000}{625}$$

$$= 240$$

दिलेल्या खोलीसाठी 240 फरश्या लागतील.

उदा. (2) रंग देण्याचा खर्च प्रत्येक चौरस मीटरला 26.50 रु. आहे. 6 मी लांबी व 3 मी रुंदी असणाऱ्या आयताकार छताला रंग लावण्याचा खर्च काढा.

दिलेल्या बाबी : आयताकार छताची लांबी (l) = 6 मी

छताची रुंदी (b) = 3 मी

रंग देण्याचा खर्च प्रत्येक चौरस मीटरला 26.50 रु.

विचारलेल्या बाबी : छताला रंग लावण्याचा खर्च

काय करावे लागेल : छताला रंग लावण्याचा खर्च काढण्यासाठी छताचे क्षेत्रफळ काढून त्या क्षेत्रफळाला प्रति चौरस मीटरला येणाऱ्या खर्चाने गुणावे लागेल.

रीत

छताचे क्षेत्रफळ $= l \times b$

$= 6 \times 3$

= 18 चौमी

दर चौरस मीटरला येणारा खर्च = 26.50 रु.

18 चौरस मीटरला येणारा खर्च $= 26.50 \times 18$

= 477.00 रु.

छताला रंग लावण्याचा खर्च 477 रु. येईल.

उदाहरणसंग्रह 87

1. आयताकार वाफ्याची लांबी 5 मी व रुंदी 3 मी आहे, तर वाफ्याचे क्षेत्रफळ काढा.
2. एका बागेची लांबी 12 मी व रुंदी 9 मी आहे, तर बागेचे क्षेत्रफळ काढा.
3. खोलीची रुंदी 5 मी व लांबी 5.2 मी आहे, तर खोलीची पूर्ण जमीन झाकण्यासाठी लागणाऱ्या सतरंजीचे क्षेत्रफळ काढा.
4. एक चौरस मीटर भूखंडाची किंमत 600 रु. असल्यास 35 मी लांब व 20 मी रुंद अशा आयताकार भूखंडाची किंमत काढा.
5. एका चौरसाकार मैदानाची प्रत्येक बाजू 100 मी आहे. मैदान सपाट करण्याचा खर्च दर चौरस मीटरला 5 रुपये आहे, तर मैदान सपाट करण्यास किती खर्च येईल ?

6. भिंतीला रंग लावण्याचा खर्च दर चौरस मीटरला 15 रु. आहे, तर 5 मी लांब व 3 मी उंच भिंतीला रंग लावण्यास किती खर्च येईल ?

7. रतनलालला शेताचे दोन समान भाग करायचे आहेत. शेताची लांबी 160 मी व रुंदी 120 मी आहे, तर प्रत्येक भागाचे क्षेत्रफळ किती ?

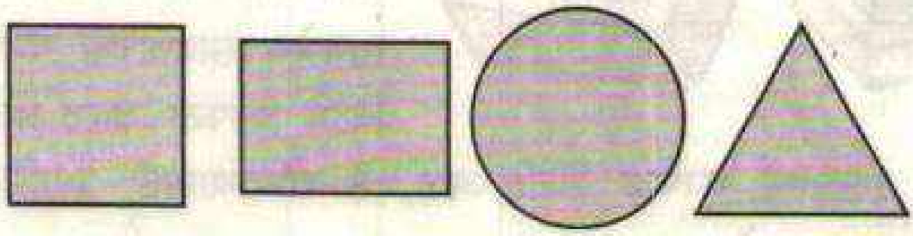
8. एका चौरसाकृती दिवाणखान्याची बाजू 6 मी लांबीची आहे. त्या दिवाणखान्यात जमिनीवर सतरंजी घालायची आहे. दर चौरस मीटरला 40 रु. प्रमाणे सतरंजीची किंमत किती होईल ?

9. प्लायवुडचा भाव दर चौरस मीटरला 100 रु. असल्यास 2.5 मी लांब व 1 मी रुंद प्लायवुडची किंमत किती ?

10. 25 मी लांब व 15 मी रुंद असलेल्या सभागृहात एका बाजूला 10 मी लांबीचा व 4 मी रुंदीचा ओटा घातला आहे. ओटा सोडून उरलेल्या सभागृहाचे क्षेत्रफळ काढा.

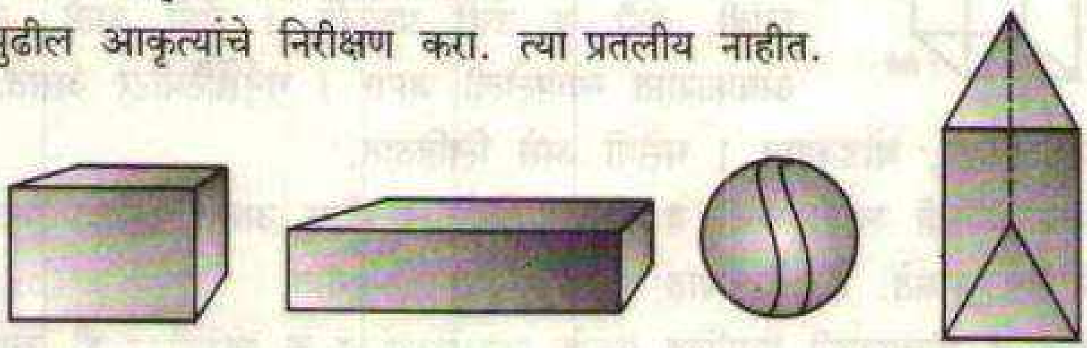
11. खेळाचे एक मैदान 120 मी लांब व 52 मी रुंद आहे. दुसरे मैदान 110 मी लांब व 62 मी रुंद आहे, तर कोणते मैदान मोठे आहे ?

25. घनफळ



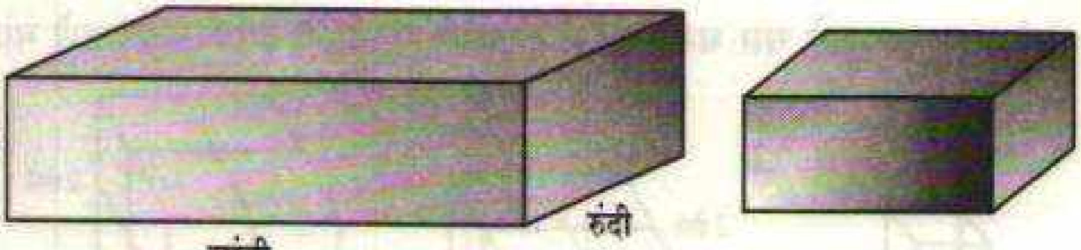
वरील प्रत्येक आकृती प्रतलातील काही जागा व्यापते. त्या व्यापलेल्या जागेच्या मापाला आपण क्षेत्रफळ म्हणतो. क्षेत्रफळ चौरस एककात मोजतात. वरील सर्व आकृत्या प्रतलीय आहेत.

पुढील आकृत्यांचे निरीक्षण करा. त्या प्रतलीय नाहीत.

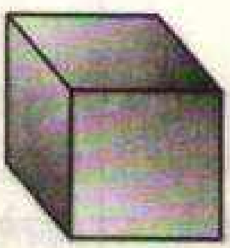


वरील सर्व आकृत्या अवकाशातील काही जागा व्यापतात.

वस्तूने अवकाशातील व्यापलेल्या जागेच्या मापाला **घनफळ** म्हणतात.



वरील दोन आकृत्यांना इष्टिकाचिती असे म्हणतात. कंपासपेटी, डस्टर, पुस्तक ही इष्टिकाचितीची काही उदाहरणे तुमच्या परिचयाची आहेत.

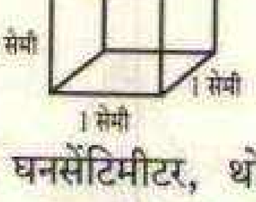


सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी, उंची समान असते, तेव्हा तिला **घन** म्हणतात.

साबणापेक्षा विटेने अवकाशात व्यापलेली जागा जास्त आहे, म्हणजेच साबणाच्या घनफळापेक्षा विटेचे घनफळ जास्त आहे.

प्रत्येक आकृतीचे घनफळ किती आहे, हे शोधण्यासाठी प्रमाणित एकक असणे आवश्यक आहे.

घनफळाचे प्रमाणित एकक



सोबत दिलेली घनाची आकृती पाहा. या घनाची लांबी, रुंदी व उंची प्रत्येकी 1 सेमी आहे. त्याने अवकाशात व्यापलेली जागा 1 घनसेंटिमीटर असते. 1 घनसेंटिमीटर, थोडक्यात 1 घसेमी असे लिहितात.

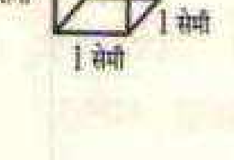
ज्या घनाची लांबी, रुंदी व उंची प्रत्येकी 1 मीटर असते, त्याचे घनफळ 1 घनमीटर असते. हे थोडक्यात 1 घमी असे लिहितात.

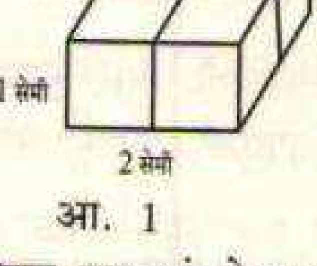
घनफळ मोजण्याची प्रमाणित एकके घनसेंटिमीटर व घनमीटर ही आहेत.

घनाचे घनफळ काढण्याचे सूत्र

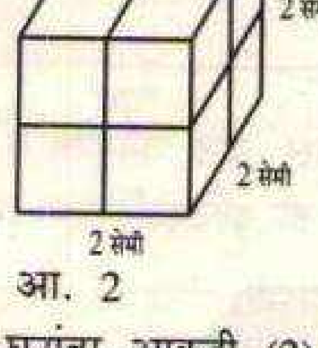
कृती 1

1 सेमी बाजू असणारे चार घन घ्या. ते आकृती (1) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे मांडा.





आ. 1



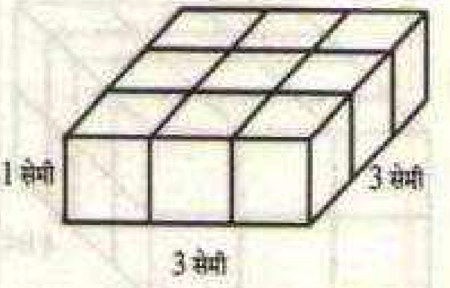
आ. 2

पुन्हा असे चार घन घेऊन त्या मांडलेल्या चार घनांवर आकृती (2) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रचा. आता या सगळ्यांचा मिळून एक नवीन घन तयार झाला. त्याची लांबी, रुंदी, उंची प्रत्येकी 2 सेमी आहे. येथे 1 घसेमी घनफळाचे एकूण 8 घन वापरले आहेत, म्हणून या नवीन घनाचे घनफळ 8 घसेमी आहे.

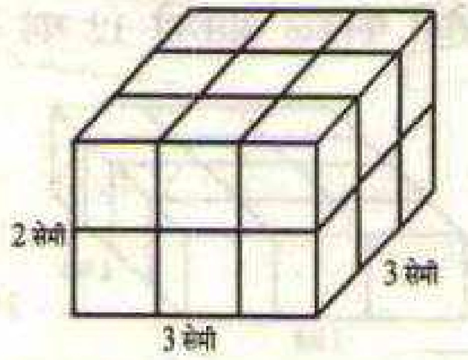
$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ हे लक्षात घ्या.

कृती 2

1 घसेमी घनफळ असणारे 9 घन आकृती (1) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे मांडा.

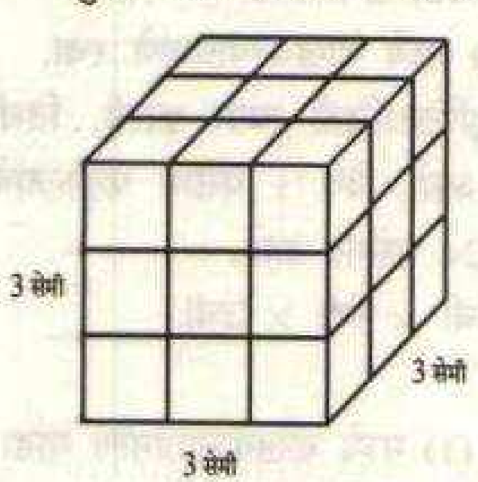


आ. 1



आ. 2

पुन्हा असे 9 घन घ्या. ते आकृती (2) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रचा.



आता रचलेल्या घनांवर पुन्हा 9 घन घेऊन आकृती (3) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रचा. या सगळ्यांचा मिळून एक नवीन घन तयार झाला.

त्याची लांबी, रुंदी, उंची प्रत्येकी 3 सेमी आहे. येथे 1 घसेमी घनफळाचे एकूण 27 घन वापरले आहेत, म्हणून या नवीन घनाचे घनफळ 27 घसेमी आहे.

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ हे लक्षात घ्या.

वरील दोन्ही कृतींवरून असे लक्षात येते, की

घनाचे घनफळ = बाजू × बाजू × बाजू = बाजू^{3}

घनाची बाजू l असल्यास त्याचे घनफळ = l^3

उदाहरणसंग्रह 88

1. घनाच्या बाजू खालीलप्रमाणे असताना घनफळ काढा.

   (1) 2 मी (2) 5 मी (3) 8 सेमी (4) 4 सेमी (5) 10 सेमी

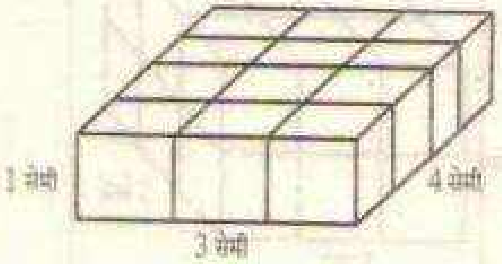
2. खोलीची प्रत्येक बाजू 4 मी असल्यास तिच्यात किती घनमीटर हवा असेल ?

3. 2 सेमी बाजूचे किती घनाकार ठोकळे एकमेकांवर रचून 20 सेमी बाजू असणारा घन तयार होईल ?

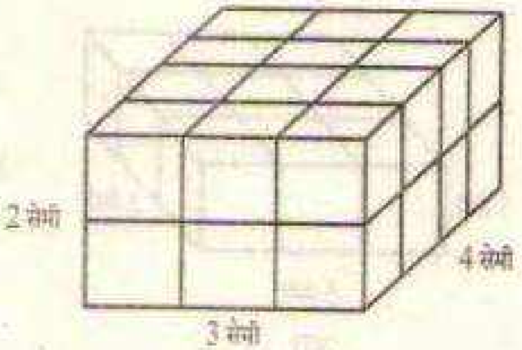
इष्टिकाचितीचे घनफळ

कृती 1

1 घसेमी घनफळ असणारे 12 घन आकृती (1) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे मांडा.



आ. 1



आ. 2

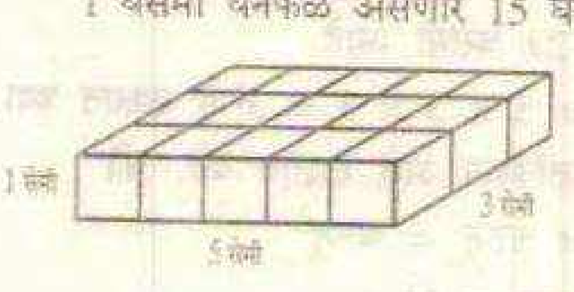
पुन्हा असे 12 घन घ्या व ते आकृती (2) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रचा.

आता या सगळ्यांची मिळून एक नवीन इष्टिकाचिती तयार झाली. तिची लांबी 4 सेमी, रुंदी 3 सेमी व उंची 2 सेमी आहे. येथे 1 घसेमी घनफळाचे 24 घन वापरले आहेत, म्हणून तिचे घनफळ 24 घसेमी आहे.

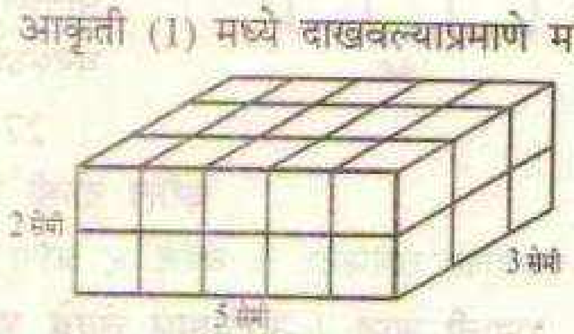
लक्षात घ्या, $24 = 4 \times 3 \times 2$ = लांबी $\times$ रुंदी $\times$ उंची

कृती 2

1 घसेमी घनफळ असणारे 15 घन आकृती (1) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे मांडा.



आ. 1



आ. 2

पुन्हा असे 15 घन घेऊन त्या मांडलेल्या 15 घनांवर आकृती (2) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रचा. या सगळ्यांची मिळून एक नवीन इष्टिकाचिती तयार झाली.

तिची लांबी 5 सेमी, रुंदी 3 सेमी व उंची 2 सेमी आहे. येथे 1 घसेमी घनफळाचे 30 घन वापरले आहेत, म्हणून तिचे घनफळ 30 घसेमी आहे.

लक्षात घ्या, $30 = 5 \times 3 \times 2$ = लांबी $\times$ रुंदी $\times$ उंची

कृती 1 व 2 वरून असे लक्षात येते, की इष्टिकाचितीची लांबी l, रुंदी b व उंची h असल्यास इष्टिकाचितीचे घनफळ $= l \times b \times h$

उदा. (1) एका इष्टिकाचितीची लांबी 6 सेमी, रुंदी 4 सेमी व उंची 3 सेमी असल्यास तिचे घनफळ किती ?

$$\text{इष्टिकाचितीचे घनफळ} = l \times b \times h$$
$$= 6 \times 4 \times 3$$
$$= 72 \text{ घसेमी}$$

उदा. (2) एका विटेची लांबी 20 सेमी, रुंदी 10.5 सेमी व उंची 8 सेमी असल्यास तिचे घनफळ किती ?

$$\text{विटेचे घनफळ} = \text{इष्टिकाचितीचे घनफळ}$$
$$= l \times b \times h$$
$$= 20 \times 10.5 \times 8$$
$$= 20 \times 84.0$$
$$= 1680.0 \text{ घसेमी}$$

उदा. (3) इष्टिकाचिती साबणाचे घनफळ 150 घसेमी आहे. त्याची लांबी 10 सेमी आणि रुंदी 5 सेमी आहे, तर उंची किती आहे ?

$$\text{इष्टिकाचितीचे घनफळ} = l \times b \times h$$
$$150 = 10 \times 5 \times h$$
$$150 = 50 \times h$$
$$3 = h$$

साबणाची उंची = 3 सेमी

उदा. (4) 5 मी लांब, 2.5 मी उंच व 0.5 मी रुंदी असलेली भिंत बांधायची आहे. यासाठी 25 सेमी लांबी, 10 सेमी रुंदी व 10 सेमी उंचीच्या किती विटा लागतील ?

भिंतीची लांबी 5 मी म्हणजे 500 सेमी

उंची 2.5 मी म्हणजे 250 सेमी

रुंदी 0.5 मी म्हणजे 50 सेमी

$$\therefore \text{भिंतीचे घनफळ} = l \times b \times h$$
$$= 500 \times 50 \times 250$$

$$\text{एका विटेचे घनफळ} = l \times b \times h$$
$$= 25 \times 10 \times 10$$

विटांची संख्या काढण्यासाठी भिंतीच्या घनफळास एका विटेच्या घनफळाने भागावे लागेल.

$$\therefore \text{ विटांची संख्या } = \frac{500\times 250\times 50}{25\times 10\times 10} = 2500$$

स्वाध्याय ? ४७

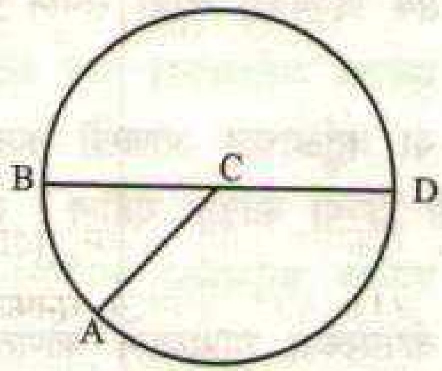
1. रिकाम्या जागा भरून पुढील विधाने पूर्ण करा.
   (1) इष्टिकाचितीचे घनफळ = ______ × ______ × ______
   (2) एका इष्टिकाचिती आकाराच्या डब्यात 40 घन तंतोतंत मावले आहेत. घनाची प्रत्येक बाजू 1 सेमी आहे, तर डब्याचे घनफळ = ______
2. एका काडीपेटीची लांबी 5 सेमी, रुंदी 3 सेमी व उंची 1 सेमी असल्यास तिचे घनफळ किती ?
3. पाण्याच्या टाकीची लांबी 5 मी, रुंदी 3 मी व उंची 1 मी आहे, तर तिचे घनफळ किती ?
4. 5 मी लांब, 2.5 मी रुंद व 1.5 मी खोल खड्डा खणल्यास त्यातून किती घनमीटर माती निघेल ?
5. 1 घमी म्हणजे किती घनसेंटिमीटर ?
6. पावसाचे पाणी साठवण्यासाठी एका वसाहतीत 2.5 मी लांब, 2 मी रुंद व 3 मी उंच मापाची पत्र्याची टाकी तयार करून घेतली, तर त्या टाकीत किती घमी पाणी मावेल ?
7. किसनने 2 मी लांब, 1.2 मी रुंद व 1.8 मी उंच धान्याची कोठी तयार करून घेतली, तर कोठीचे घनफळ किती ?
8. 4 मी लांबी, 3 मी उंची व 0.4 मी रुंदी असलेली एक भिंत बांधायची आहे. ही भिंत बांधण्यासाठी 20 सेमी लांबी, 12 सेमी रुंदी व 10 सेमी उंचीच्या किती विटा लागतील ?

26. वर्तुळ

उजळणी

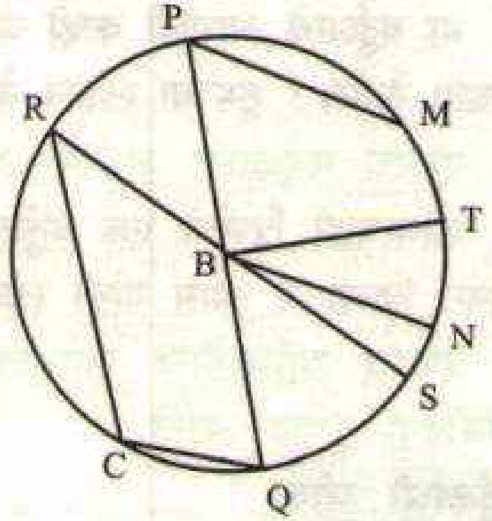
सोबत दिलेली वर्तुळाची आकृती पाहा.

या वर्तुळाचे केंद्र C असून त्याची रेख CA ही त्रिज्या व रेख BD हा व्यास आहे. व्यासाची लांबी ही त्रिज्येच्या लांबीच्या दुप्पट असते. कंपासच्या मदतीने दिलेल्या त्रिज्येचे वर्तुळ काढता येते.



उदाहरणसंग्रह 90

1. B केंद्र असलेल्या वर्तुळाची सोबतची आकृती पाहा व पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) आकृतीमधील सर्व त्रिज्या व व्यास यांची नावे लिहा.

(2) वर्तुळावरील सर्व बिंदूंची नावे लिहा.

(3) खालील विधाने बरोबर आहेत, की चूक हे पुढील कंसात लिहा.

(a) रेख PM हा व्यास आहे. (   )

(b) रेख RS व्यास आहे. (   )

(c) रेख CQ त्रिज्या आहे. (   )

(d) रेख RC व्यास नाही. (   )

2. खाली काही वर्तुळांच्या त्रिज्या दिल्या आहेत. त्यांचे व्यास किती ?

(1) 7 सेमी (2) 5 सेमी (3) 2 मी (4) 2.5 सेमी

3. खाली दिलेल्या त्रिज्यांची वर्तुळे कंपासच्या साहाय्याने काढा.

(1) 4 सेमी (2) 5 सेमी (3) 3.5 सेमी (4) 4.5 सेमी (5) 2 सेमी

त्रिज्या व व्यास यांचे गुणधर्म

कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळाच्या पाच-सहा त्रिज्या काढा. कर्कटकाच्या साहाय्याने या त्रिज्यांची लांबी मोजा. असे दिसून येईल, की या सर्व त्रिज्यांची लांबी समान आहे.

- **एकाच वर्तुळाच्या सर्व त्रिज्या समान लांबीच्या असतात.**

या वर्तुळाच्या आणखी काही त्रिज्या काढा. या वर्तुळात जास्तीत जास्त किती त्रिज्या काढता येतील ? तुमच्या लक्षात येईल, की

- **एकाच वर्तुळाला असंख्य त्रिज्या असतात.**

कंपासच्या साहाय्याने कोणत्याही त्रिज्येचे आणखी एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळात पाच-सहा व्यास काढा.

कर्कटक वापरून या सर्व व्यासांची लांबी मोजा. असे दिसून येईल, की या सर्व व्यासांची लांबी समान आहे.

- **एकाच वर्तुळाचे सर्व व्यास समान लांबीचे असतात.**

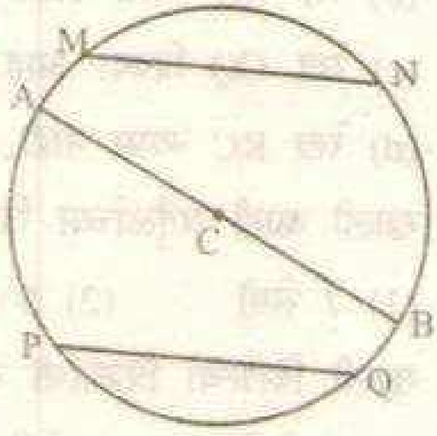
या वर्तुळाचे आणखी काही व्यास काढा. असे जास्तीत जास्त किती व्यास काढता येतील ? तुमच्या लक्षात येईल, की असे असंख्य व्यास काढता येतील.

- **एकाच वर्तुळाला असंख्य व्यास असतात.**

कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळात काही त्रिज्या व व्यास काढा. त्रिज्या व व्यास यांची लांबी मोजा. असे आढळून येते, की

एकाच वर्तुळातील व्यासाची लांबी ही त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या लांबीच्या दुप्पट असते.

वर्तुळाची जीवा



सोबत दिलेल्या वर्तुळाची आकृती पाहा. या वर्तुळाचे केंद्र C आहे. वर्तुळावर M, A, P, Q, B व N बिंदू आहेत.

M व N या दोन्ही बिंदूंना जोडणारा रेषाखंड MN आहे.

A व B बिंदूंना जोडणारा रेषाखंड AB आहे.

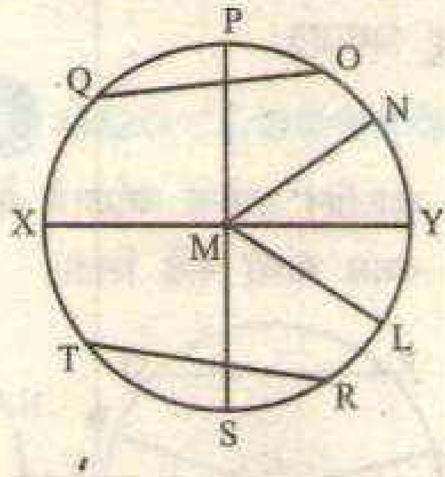
P व Q बिंदूंना जोडणारा रेषाखंड PQ आहे. रेख MN, रेख AB व रेख PQ या सर्व वर्तुळाच्या **जीवा** आहेत.

वर्तुळावरील कोणत्याही दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडास जीवा म्हणतात.

येथे जीवा AB अशी आहे, की ती वर्तुळकेंद्र C मधून जाते, म्हणून जीवा AB ही वर्तुळाचा व्यासदेखील आहे. जीवा MN व जीवा PQ या वर्तुळ-केंद्रातून जात नाहीत, म्हणून त्या व्यास नाहीत.

- वहीत अशाच प्रकारची आकृती काढा. सर्व जीवांची लांबी मोजा. असे दिसून येते, की **व्यास ही सर्वांत जास्त लांबीची जीवा असते.**
- कोणत्याही त्रिज्येचे वर्तुळ वहीत काढा. त्या वर्तुळात काही जीवा काढा. त्या वर्तुळात जास्तीत जास्त किती जीवा काढता येतील ? तुमच्या लक्षात येईल, की **एकाच वर्तुळाला असंख्य जीवा असतात.**

उदा. सोबतच्या आकृतीमधील वर्तुळकेंद्र, त्रिज्या, जीवा व व्यास यांची नावे लिहा.



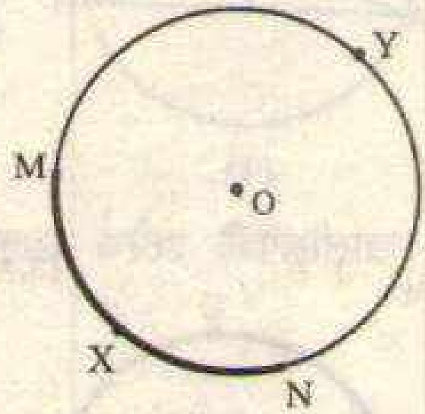
वर्तुळकेंद्र : बिंदू M

त्रिज्या : रेख MN, रेख ML, रेख MY
रेख MX, रेख MP, रेख MS,

जीवा : रेख QO, रेख TR, रेख PS,
रेख XY

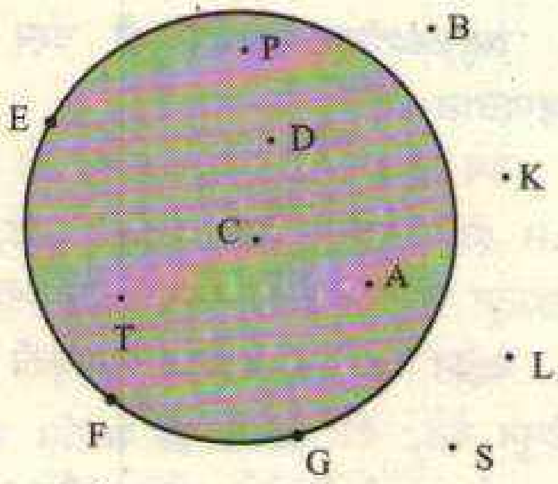
व्यास : रेख XY, रेख PS

वर्तुळकंस



सोबत दिलेली वर्तुळाची आकृती पाहा. या वर्तुळावर M व N हे दोन बिंदू घेतले आहेत. या दोन बिंदूंमुळे वर्तुळाचे दोन भाग झाले आहेत. प्रत्येक भागास **वर्तुळकंस** किंवा **कंस** म्हणतात. येथे दोन कंस झाले आहेत. 'कंस MN' या नावाने यांपैकी नेमका कोणता कंस हे स्पष्ट होत नाही. ते स्पष्ट होण्यासाठी प्रत्येक कंसावर आणखी एक बिंदू घेतला आहे. येथे बिंदू X एका कंसावर व बिंदू Y दुसऱ्या कंसावर घेतला आहे. त्या बिंदूंचा वापर करून कंसाला तीन अक्षरी नाव देता येते. येथे कंस MXN किंवा कंस NXM व कंस MYN किंवा कंस NYM हे दोन कंस आहेत.

वर्तुळाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग



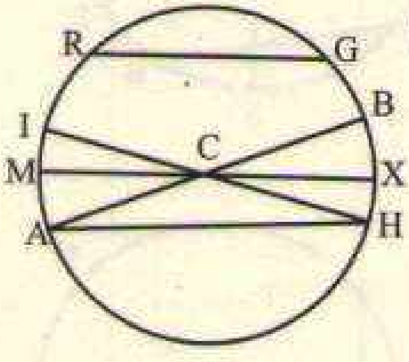
शेजारील C केंद्र असलेले वर्तुळ पाहा. येथे आकृतीमधील E, F व G हे बिंदू वर्तुळावर आहेत. छायांकित केलेल्या भागास वर्तुळाचा **अंतर्भाग** म्हणतात. येथे P, D, T, C, व A हे बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात आहेत.

जो भाग छायांकित केलेला नाही, त्यास वर्तुळाचा **बाह्यभाग** म्हणतात. येथे B, K, L व S हे बिंदू वर्तुळाच्या बाह्यभागात आहेत.

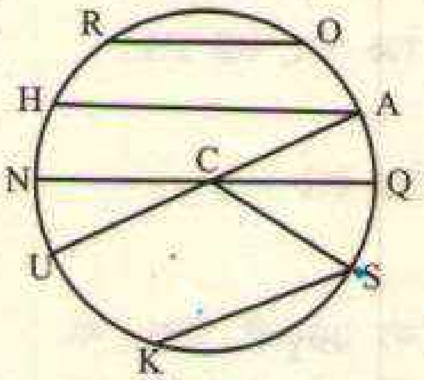
वर्तुळाच्या अंतर्भागात, वर्तुळावर, तसेच वर्तुळाच्या बाह्यभागात असंख्य बिंदू असतात.

उदाहरणसंग्रह 91

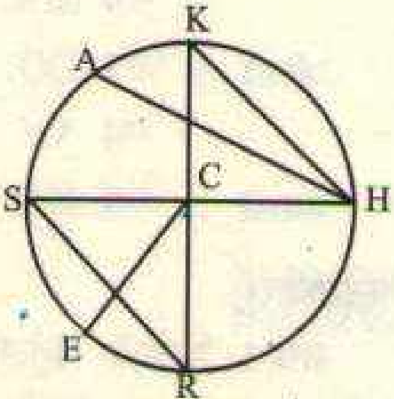
1. खालील प्रत्येक वर्तुळाचे केंद्र C आहे. प्रत्येक वर्तुळाची त्रिज्या, जीवा व व्यास यांची नावे लिहा.



(1)

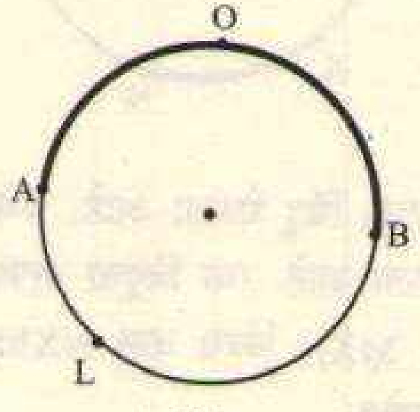


(2)

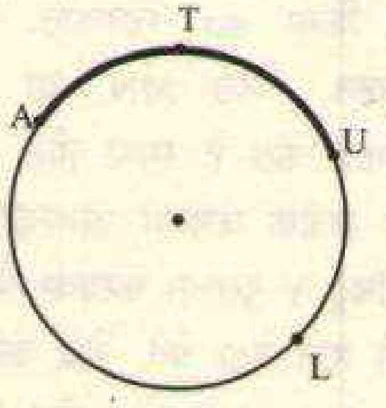


(3)

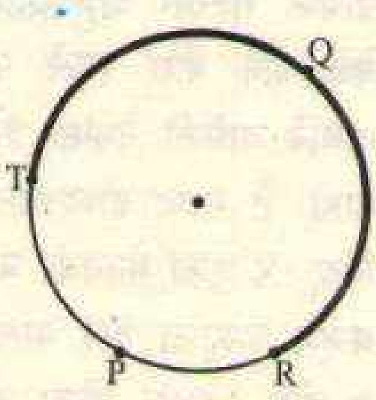
2. खालीलपैकी प्रत्येक आकृतीमधील कंसांची नावे लिहा.



(1)

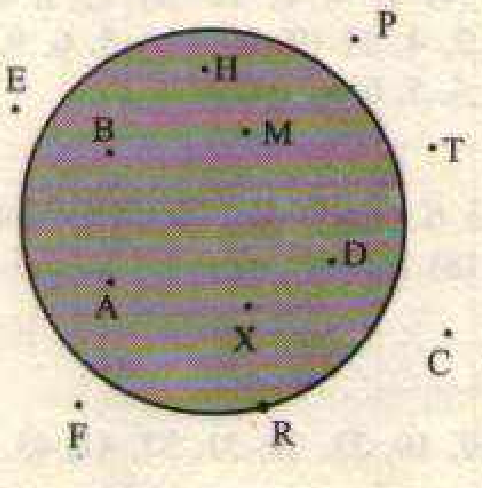


(2)

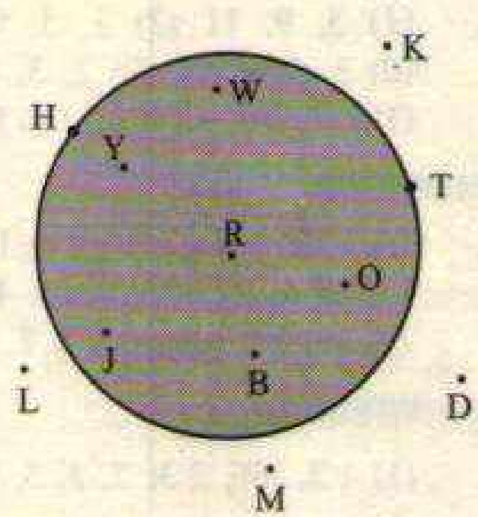


(3)

3. खालील प्रत्येक वर्तुळाच्या अंतर्भागातील, बाह्यभागातील व वर्तुळावरील बिंदूंची नावे लिहा.



(1)



(2)

उत्तर सूची

उदाहरणसंग्रह 1

1. (1) 3, 9, 11 (2) 3, 5, 9 (3) 3, 9 (4) 2, 4, 5, 10 (5) 2, 3, 6, 9 (6) 3, 5, 9, 11 (7) 2, 3, 4, 6, 9 (8) 2, 4, 11 (9) 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 (10) 2, 3, 4, 6, 9 (11) 3, 9 (12) 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11

उदाहरणसंग्रह 2

1. (1) 1, 2, 3, 6 (2) 1, 3, 5, 15 (3) 1, 2, 3, 6, 9, 18 (4) 1, 23 (5) 1, 2, 4, 7, 14, 28 (6) 1, 3, 5, 9, 15, 45 (7) 1, 71 (8) 1, 5, 17, 85 (9) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 (10) 1, 7, 13, 91

उदाहरणसंग्रह 3

1. (1) 1 **2.** एक, 2 **3.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. एकूणसंख्या 25 **4.** (1) संयुक्त (2) मूळ (3) मूळ (4) संयुक्त (5) मूळ (6) संयुक्त (7) संयुक्त (8) मूळ (9) संयुक्त (10) संयुक्त (11) संयुक्त (12) संयुक्त (13) संयुक्त (14) मूळ (15) मूळ **5.** 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. **6.** नाही. $21 = 7 \times 3$. 21 ने भाग जात नाही कारण 7 ने भाग जात नाही. **7.** 101, 997.

उदाहरणसंग्रह 4

1. 3, 5 ; 5, 7 ; 11, 13 ; 17, 19 ; 29, 31 ; 41, 43 ; 59, 61 ; 71, 73

2. 27, 35 ; 4, 5 ; 17, 19 ; 21, 16

उदाहरणसंग्रह 5

1. (1) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ (2) $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
(3) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 11$ (4) $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ (5) $5 \times 5 \times 37$
(6) $5 \times 11 \times 13$ (7) $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 17$ (8) $11 \times 19 \times 41$

उदाहरणसंग्रह 6

1. (1) 2 (2) 3 (3) 6 (4) 15 (5) 10 (6) 14 (7) 30 (8) 24

उदाहरणसंग्रह 7

1. (1) 10 (2) 14 (3) 15 (4) 72 (5) 58 (6) 25 (7) 3 (8) 7 (9) 1 (10) 21 (11) 45 (12) 1

2. (1) 12 (2) 15 (3) 9 (4) 23 (5) 11 (6) 18

उदाहरणसंग्रह 8

1. (1) 12 (2) 30 (3) 24 (4) 36 (5) 28 (6) 195

2. (1) 63 (2) 44 (3) 210 **3.** (1) 30 (2) 48 (3) 102

उदाहरणसंग्रह 9

1. (1) 24 (2) 120 (3) 60 (4) 180 (5) 180 (6) 180 (7) 195 (8) 3528 (9) 1365 (10) 990 (11) 12600 (12) 4320
2. (1) 50, 750 (2) 96, 192 (3) 1, 1184 (4) 44, 264 (5) 45, 2025 (6) 1, 82110

उदाहरणसंग्रह 10

1. (1) 24 (2) 1280 (3) 80 (4) 80 (5) 10 (6) 56 (7) 180 (8) 120 (9) 9 (10) 225 (11) 293 (12) 1940 (13) 78 (14) 54 (15) 2
2. (1) $18 \div (6 + 3)$ (2) $4 \times (13 + 2) + 40$ (3) $(100 + 20) \div 5$ (4) $100 \div (20 \div 5)$ (5) $13 - (9 + 2)$ (6) $30 - (10 - 10)$ (7) $(30 - 10) \div 10$ (8) $50 - (35 + 15)$

उदाहरणसंग्रह 11

1. (1) $x - 5$ (2) $5 - x$ (3) $x + 6$ (4) $\frac{x}{24}$ (5) $\frac{24}{x}$ (6) $4x$ (7) $4x$ (8) x (9) $10x$ (10) $\frac{100}{x}$ किग्रॅ

उदाहरणसंग्रह 12

1. (1) आयताची परिमिती $= 2l + 2b$ (2) चौरसाची परिमिती $= 4a$ (3) त्रिकोणाची परिमिती $= a + b + c$ (4) $p = s - c$
2. (1) $a \times b = b \times a$ (2) $n \times 1 = n$

उदाहरणसंग्रह 13

1. (1) रेख LM, रेख MN, रेख NO (2) रेख OT, रेख OY, रेख TY, रेख OZ, रेषा WV, किरण OX, किरण OV, किरण ZX, किरण OW

उदाहरणसंग्रह 14

1. एकरेषीय बिंदू : X, Y, Z नैकरेषीय बिंदू : T, Y, Z
2. T बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा काढता येतील. 3. तीन रेषा काढता येतील.
4. S व R या दोन बिंदूंना सामावणारी एक आणि एकच रेषा काढता येईल.
5. एकरेषीय बिंदू : L, M, K ; B, M, D
   नैकरेषीय बिंदू : L, M, B ; K, M, B ; K, L, B ; L, M, D ; K, M, D ; K, L, D ; B, L, D ; B, K, D

उदाहरणसंग्रह 15

1. (1) रेषा PQ, रेषा QR, रेषा QS (2) रेषा PS, रेषा SR, रेषा QS
2. (1) (B, C, D) (2) (A, B, C) , (A, C, D) , (A, B, C, D) , (A, B, D)
   (3) रेषा AB, रेषा AC, रेषा AD. संपातबिंदू : A

उदाहरणसंग्रह 16

1. (1) $\angle UVW$ (2) $\angle PQR$
2. (1) $m\angle XYZ = 49^\circ$, $m\angle UVW = 90^\circ$ (2) $m\angle ABC = 25^\circ$, $m\angle PQR = 107^\circ$
3.

आकृती	कोनावरील बिंदू	कोनाच्या अंतर्भागातील बिंदू	कोनाच्या बाह्यभागातील बिंदू
(1)	S, X, N, U, T	L, W	A, P
(2)	E, F, G	Z, M	A, Y, V

उदाहरणसंग्रह 17

1. (1) 53° (2) 42° (3) 35° (4) 11° (5) 22° (6) 80° (7) 65° (8) 50° (9) 1° (10) 73°
2. (1) 115° (2) 156° (3) 90° (4) 133° (5) 101° (6) 122° (7) 26° (8) 55° (9) 40° (10) 15°
3. कोटिकोनांच्या जोड्या : 26° , 64° ; 50° , 40° ; 45° , 45° ; 35° , 55°
   पूरककोनांच्या जोड्या : 69° , 111° ; 90° , 90° ; 163° , 17° ; 168° , 12°
4. (1) 60° (2) 120° (3) 120°
5. (1) $\angle AOD$ (2) 120° (3) $\angle BOD$ आणि $\angle AOC$
   (4) 60° (5) 30° (6) 60° (7) $\angle BOC$, $\angle AOD$
6.

दिलेला कोन	60°	45°	78°	10°	25°	80°	37°
कोटिकोन	30°	45°	12°	80°	65°	10°	53°

7.

दिलेला कोन	32°	90°	110°	137°	165°	129°	65°
पूरककोन	148°	90°	70°	43°	15°	51°	115°

8. (1) 53° (2) 70° (3) 48° (4) 45°

उदाहरणसंग्रह 18

1. आ. (1) मध्ये कारण रेषा Z दोन भिन्न बिंदूत छेदते.
2. संगतकोनांच्या जोड्या : $\angle KGB$ व $\angle GMP$, $\angle BGM$ व $\angle PMT$
   $\angle KGS$ व $\angle GMV$, $\angle SGM$ व $\angle VMT$
   व्युत्क्रमकोनांच्या जोड्या : $\angle SGM$ व $\angle GMP$, $\angle BGM$ व $\angle GMV$
   आंतरकोनांच्या जोड्या : $\angle BGM$ व $\angle GMP$, $\angle SGM$ व $\angle VMG$

3. (1) $m\angle MGK = 85^\circ$ (2) $m\angle VHD = 95^\circ$ (3) $m\angle PHG = 95^\circ$ (4) $m\angle HGS = 85^\circ$

4. (1) $m\angle EFB = 70^\circ$ (2) $m\angle GFY = 70^\circ$ (3) $m\angle BCG = 55^\circ$

उदाहरणसंग्रह 19

1. (1) $273 + 100 = 373$ (2) $800 + 593 = 1393$
   (3) $150 + 650 = 800$ (4) $5450 + 2950 = 8400$

2. (1) $48 \times 10 = 480$ (2) $90 \times 67 = 6030$ (3) $100 \times 213 = 21300$
   (4) $3109 \times 100 = 310900$ (5) $1000 \times 568 = 568000$ (6) $400 \times 408 = 163200$

उदाहरणसंग्रह 20

1. (1) $9 \times 3 + 9 \times 14$ (2) $25 \times 23 + 25 \times 16$ (3) $20 \times 58 + 20 \times 109$

2. (1) $15\,(3 + 7)$ (2) $9\,(38 + 12)$ (3) $125\,(69 + 31)$

3. (1) 450 (2) 12,500 (3) 2,97,000 (4) 4,050

4. (1) 2,601 (2) 5,625 (3) 10,404

उदाहरणसंग्रह 21

1.

क्रमांक	घातांक रूप	गुणाकार रूप	पाया	घातांक
(1)	1^3	$1 \times 1 \times 1$	1	3
(2)	3^7	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3	7
(3)	7^9	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	7	9
(4)	2^6	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2	6
(5)	3^4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	3	4
(6)	4^3	$4 \times 4 \times 4$	4	3
(7)	2^8	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2	8
(8)	15^2	15×15	15	2
(9)	3	3	3	1
(10)	10^5	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10	5

2. (1) 6^4 (2) 2^4 (3) 7^2 (4) 3^5 (5) 6^3 (6) 9^3

3. (1) $11 \times 11 \times 11 \times 11$ (2) 6×6 (3) $10 \times 10 \times 10 \times 10$
   (4) $5 \times 5 \times 5$ (5) $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$

उदाहरणसंग्रह 22

1. (1) 729 (2) 216 (3) 64 (4) 1 (5) 625 (6) 64 (7) 1,00,000
   (8) 1,00,00,000 (9) 2401 (10) 64

उदाहरणसंग्रह 23

1. (1) 5^3 (2) 2^5 (3) 5^4 (4) 3^5 (5) 10^2 (6) 10^7 (7) 9^2 (8) 3^4

उदाहरणसंग्रह 24

1. (1) 25 (2) 100 (3) 256 (4) 625 (5) 12,100

उदाहरणसंग्रह 25

1. (1) 36 (2) 121 (3) 196
(4) 4225 (5) 3025 (6) 324
(7) 4489 (8) 11,881 (9) 14,641
(10) 12,544 (11) 8281 (12) 40,000

उदाहरणसंग्रह 26

1. (1) 7,225 (2) 3,025 (3) 5,625 (4) 9,025 (5) 13,225 (6) 42,025
(7) 34,225 (8) 11,025

उदाहरणसंग्रह 27

1. (1) 21 (2) 24 (3) 55 (4) 88 (5) 102
(6) 108 (7) 125 (8) 105 (9) 121 (10) 99

उदाहरणसंग्रह 28

1. (1) 48.382 (2) 26.69 (3) 2516.3 (4) 546.068 (5) 16062.8
(6) 7.5276 (7) 3278.1001 (8) 91.48 (9) 1309.4
(10) 39.93 (11) 20.8495 (12) 1522.6624

उदाहरणसंग्रह 29

1. (1) 3.29 (2) 290.57 (3) 1610.9852 (4) 366.133 (5) 184.72
(6) 103.9 (7) 10.39 (8) 9.513 (9) 3.171 (10) 4.24
(11) 0.727 (12) 0.05604

उदाहरणसंग्रह 30

1. (1) 6.9 (2) 62.1 (3) 690 (4) 435.2 (5) 199
(6) 1.99 (7) 43.25 (8) 180 (9) 1962
(10) 66.66 (11) 256.5 (12) 305.5

उदाहरणसंग्रह 31

1. (1) 10:9 ; 9:10 (2) 7:22 ; 22:7 (3) 2:5 ; 5:2
(4) 7:11 ; 11:7 (5) 13:17 ; 17:13
2. (1) सातास नऊ (2) दहास सहा (3) तिसास दहा (4) पाचास वीस (5) एकास चार
3. (1) 5:2 (2) 1:3 (3) 5:9 (4) 2:5 (5) 2:1 (6) 1:5 (7) 7:9 (8) 1:2

उदाहरणसंग्रह 32

1. 4:3 **2.** 5:3

3. (1) 1:4 (2) 9:10 (3) 5:3 (4) 1:2 (5) 5:3 (6) 1:4

4. (1) 3:8 (2) 5:1 (3) 5:3 (4) 1:4

उदाहरणसंग्रह 33

1. 12 **2.** 36 **3.** 6

उदाहरणसंग्रह 34

1. (1) आहेत (2) आहेत (3) नाहीत **2.** (1) 3 (2) 40 (3) 4 (4) 6

उदाहरणसंग्रह 35

1. 85 रु. **2.** 225 रु. **3.** 5250 रु. **4.** 5600 किमी **5.** 625 ग्रॅम **6.** 8 किमी

उदाहरणसंग्रह 36

1.

क्रमांक	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
नफा(रु.)	40	–	45	–	820	150	–
तोटा (रु.)	–	50	–	20	–	–	80

उदाहरणसंग्रह 37

1. 45 रु. नफा **2.** 10 रु. तोटा **3.** 2.50 रु. नफा

4. 50 रु. नफा **5.** 84 रु **6.** 144 रु

उदाहरणसंग्रह 38

1. 160 रु. **2.** 3 रु. **3.** 3,87,500 रु. **4.** 110 रु.

उदाहरणसंग्रह 39

1. (1) 30 सेमी (2) 18.4 मी (3) 21.4 सेमी **2.** 48 सेमी **3.** 20 सेमी **4.** 20.3 मी

उदाहरणसंग्रह 40

1. 50 मी **2.** 6 मी **3.** 1060 मीं **4.** 750 रु **5.** 17 मी

उदाहरणसंग्रह 41

1. 15 सेमी **2.** 20 सेमी **3.** 24 मी **4.** 20 सेमी **5.** 20 मी **6.** 4 मी **7.** 40 सेमी

उदाहरणसंग्रह 42

1. (1) + 2 (2) – 6 (3) – 10 (4) 0 (5) + 18 (6) – 23

2. (1) ऋण नऊ (2) धन पाच (3) ऋण अठ्ठावीस (4) ऋण शंभर (5) धन एक्याऐंशी

(6) ऋण चार (7) ऋण एक (8) धन एक (9) धन बाहत्तर
(10) ऋण अठ्ठेचाळीस (11) धन पासष्ट (12) ऋण पंचाण्णव

3. 0 च्या डावीकडील संख्या : – 9, – 28, – 100, – 4, – 1, – 48, – 95

0 च्या उजवीकडील संख्या : + 5, + 81, + 1, + 72, + 65

4. (1) 0 (2) + 1 (3) G (4) J (5) – 2 (6) + 2

5.

उदाहरणसंग्रह 43

1. (1) < (2) < (3) > (4) < (5) > (6) <
(7) > (8) < (9) > (10) < (11) < (12) <

2. (1) + 5, + 6, + 7 (2) – 4, – 5, – 6, – 7, – 8
(3) – 3, – 2, – 1, 0, + 1 (4) – 8 (7) + 7

3. पूर्णांक संख्यासमूहातील सर्वांत लहान आणि सर्वांत मोठी संख्या लिहिता येत नाही.

उदाहरणसंग्रह 44

1. (1) 38 (2) 23 (3) 0 (4) 5 (5) 14

2. (प्रथम मोठी किंमत, नंतर फरक, या क्रमाने)
(1) 8, 2 (2) 8, 2 (3) 11, 9 (4) 20, 5 (5) 45, 10
(6) 45, 13 (7) दोन्ही किमती समान, 0 (8) 4, 4

3. (1) – 2 (2) 2 (3) + 22 (4) – 22 (5) + 15 (6) – 15
(7) – 59 (8) + 59 (9) – 50 (10) – 4 (11) + 50 (12) + 4
(13) – 8 (14) – 20 (15) – 20 (16) + 20 (17) + 20 (18) + 19
(19) + 19 (20) 0 (21) 0 (22) 0 (23) 0 (24) 0

उदाहरणसंग्रह 45

1. (1) – 5 (2) + 2 (3) + 15 (4) – 27 (5) – 10

उदाहरणसंग्रह 46

1. (1) 13 मधून – 8 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 13 मध्ये – 8 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(2) – 4 मधून – 11 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे – 4 मध्ये – 11 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(3) 6 मधून – 6 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 6 मध्ये – 6 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(4) 9 मधून 9 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 9 मध्ये 9 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(5) – 5 मधून – 5 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे – 5 मध्ये – 5 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(6) 14 मधून 0 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 14 मध्ये 0 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(7) 0 मधून 14 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 0 मध्ये 14 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(8) 0 मधून – 14 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 0 मध्ये – 14 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

(9) 20 मधून 12 ही संख्या वजा करणे, म्हणजे 20 मध्ये 12 ची विरूद्ध संख्या मिळविणे.

2. (1) 3 (2) – 3 (3) 13 (4) – 13 (5) – 7
(6) 7 (7) – 25 (8) 25 (9) 10 (10) – 10
(11) 0 (12) 0 (13) 7 (14) 74 (15) – 34
(16) 14 (17) 85 (18) 35 (19) 100 (20) – 54

उदाहरणसंग्रह 47

1. (1) – 36 (2) – 24 (3) 75 (4) 280 (5) 76 (6) – 915

2. (1) 3 (2) 19 (3) 15 (4) 15 (5) 6 (6) – 3 (7) – 6

उदाहरणसंग्रह 48

1. (1) – 2 (2) 170 (3) 40 (4) – 5 (5) 0 (6) – 2

उदाहरणसंग्रह 49

1. (1) – 11 (2) – 2 (3) 25 (4) 3

2. (1) 11 (2) 11 (3) – 18 (4) – 18 (5) – 80
(6) – 80 (7) 77 (8) 52 (9) – 25

3. (1) – 90 (2) – 90 (3) – 192 (4) – 192 (5) 8 (6) 8 (7) – 9 (8) – 9

4. (1) – 8 (2) – 8 (3) 15 (4) 15

उदाहरणसंग्रह 50

1.

क्रमांक	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
सहगुणक	15	1	$\frac{25}{7}$	$\frac{1}{2}$	– 9	– 5
चल	p	y	x	p	a, x	b

उदाहरणसंग्रह 51

1. (1) $5x, -8x$; $-7y, 6y, -y$; $-3m, m$; $2z, 5z$
(2) $4x^2, -10x^2$; $-7y^3, -y^3, 5y^3$
(3) $2x^2yz, 7yzx^2$; $xyz^2, -6xyz^2$; $xzy, -xyz$

उदाहरणसंग्रह 52

1. (1) त्रिपदी (2) एकपदी (3) द्विपदी (4) त्रिपदी (5) एकपदी
(6) एकपदी (7) एकपदी (8) द्विपदी (9) त्रिपदी

उदाहरणसंग्रह 53

1. (1) 1 (2) 3 (3) 1 (4) 36 (5) 18 (6) 15
2. (1) 12 (2) 9 (3) 54 (4) 48 (5) 15
3. (1) 26 (2) 5 (3) 21 (4) 7 **4.** (1) 34 (2) 4 (3) 30 (4) 20

उदाहरणसंग्रह 54

1. (1) $19c$ (2) $12bc^2$ (3) xyz (4) $-10a^2b^2$ (5) $9p^2q$ (6) $-13a^3$
2. (1) $15x$ (2) $7y^2$ (3) $9a^2bc$ (4) 0

उदाहरणसंग्रह 55

1. (1) $15x + 7y$ (2) $23m^2n - 9nm$ (3) $12a^2b + 13ab^2$ (4) $5a^2 + 19b^2 + c^2$
(5) $4m - 8n$ (6) $3ab - 2bc$ (7) $11d^2 + 10d$ (8) $20x^2 - 10y^2$ (9) $4a + b + c$
(10) $4a^3 - 5a^2 + 3a$

उदाहरणसंग्रह 56

1. (1) $11p + 12q$ (2) $10m^2 + 18n^2$ (3) $2a^2 + 3b^2$
(4) $10b + 3c + d$ (5) $2x + 3y + 3z$ (6) $-3p + 7q + 4c$
2. (1) $4xy + 8yz + 10zx$ (2) $4x + 13y - z$
(3) $3a^2b - 15b^2c + 11c^2a$ (4) $7mn + 14ab + 8abc$

उदाहरणसंग्रह 57

1. (1) $2x^2 + 19y$ (2) $9mn + 2ab$ (3) $5x - 9y + 3z$
(4) $11x^2 + 8y^2 - 7z^2$ (5) $y^2z^2 - 2z^2x^2$

उदाहरणसंग्रह 58

1. उदा. क्र. (1) , (2) व (4) मधील चौकटींत '=' हे चिन्ह येईल.

उदाहरणसंग्रह 59

1. (1) गुणाकार गुणधर्म (2) बेरीज गुणधर्म (3) भागाकार गुणधर्म (4) वजाबाकी गुणधर्म

उदाहरणसंग्रह 60

1. (1) समीकरण (2) समीकरण (3) समानता (4) समीकरण (5) समीकरण (6) समानता

(2) मुद्दल = 8,000 रु., व्याज = 480 रु., मुदत = 6 महिने

(3) मुद्दल = 6,00,000 रु., व्याज = 2,40,000 रु., मुदत = 5 वर्ष

उदाहरणसंग्रह 70

1. (1) जिजामाता सहकारी पतसंस्थेकडून एखाद्याने 1 वर्षासाठी 100 रु. कर्जाऊ घेतले. तर वर्षाअखेरीस त्याने त्या पतसंस्थेला व्याज म्हणून 12 रुपये द्यावेत.

(2) राजगड सहकारी बँकेकडून एखाद्या शेतकऱ्याने 1 वर्षासाठी 100 रु. कर्जाऊ घेतले. तर वर्षाअखेरीस त्याने त्या बँकेला व्याज म्हणून 8 रुपये द्यावेत.

(3) जिल्हा मध्यवर्ती बँकेकडून सर्जेरावांनी 1 वर्षासाठी 100 रु. कर्जाऊ घेतले, तर वर्षाअखेरीस त्यांनी त्या बँकेला व्याज म्हणून 10 रुपये द्यावेत.

उदाहरणसंग्रह 71

1. (1) 40 (2) 36 (3) 100 (4) 36 (5) 14 (6) 28 **2.** (1) 3,600 रु. (2) 9,900 रु.

उदाहरणसंग्रह 72

1. (1) 600 रु. (2) 70 रु. (3) 1350 रु. (4) 720 रु. (5) 750 रु. (6) 880 रु.
2. (1) 3,600 रु. (2) 1,080 रु.

उदाहरणसंग्रह 73

1. (1) 120 रु. (2) 180 रु. (3) 4800 रु. (4) 4000 रु. (5) 1050 रु.

उदाहरणसंग्रह 74

1. (1) $\angle AXY$, $\angle BXZ$, $\angle CZX$, $\angle DZY$, $\angle FYZ$, $\angle EYX$
   (2) $\angle AXB$, $\angle EYF$, $\angle CZD$
2. (1) $\angle DPQ$ व $\angle LPR$ (2) $\angle PRM$ व $\angle QRN$
   (3) नाही, कारण तो कोन त्रिकोणाच्या कोनाशी रेषीय जोडी तयार करीत नाही.
   (4) $\angle PQR$ **3.** सहा

4.

ΔXYZ च्या अंतर्भागातील बिंदू	ΔXYZ वरील बिंदू	ΔXYZ च्या बाह्यभागातील बिंदू
M, N	L, O	T, K

5. (1) ΔABC, ΔABO, ΔACO, ΔBOC (2) ΔOAC, ΔOAB, ΔOBC
   (3) ΔAOB, ΔAOC, ΔABC
7. (1) ΔPQR, ΔPQT, ΔPRS, ΔPST (2) ΔPST, ΔPSR, ΔPTR
   (3) ΔPSQ व ΔPST, (4) ΔPTS, ΔPTQ

(5) Δ PQT , Δ PQR

(6) Δ PST, Δ PSR

(7) बिंदू Y, Z

(8) बिंदू U

(9) ∠PSQ व ∠PTR

(10) Δ PQS, Δ PQT, Δ PQR

(11) Δ PQR, Δ PSR, Δ PTR

(12) बिंदू Y, E, U, Z, Q, R

उदाहरणसंग्रह 75

1. आ. 1 काटकोन त्रिकोण
आ. 2 समद्विभुज त्रिकोण
आ. 3 विशालकोन त्रिकोण
आ. 4 लघुकोन त्रिकोण
आ. 5 समभुज त्रिकोण
आ. 6 विशालकोन त्रिकोण

2. (1) लघुकोन त्रिकोण (2) समद्विभुज त्रिकोण (3) काटकोन त्रिकोण
(4) विशालकोन त्रिकोण (5) समभुज त्रिकोण (6) विषमभुज त्रिकोण

उदाहरणसंग्रह 76

1. 35° **2.** 70° **3.** 40°, 140° **4.** 80° **5.** 110° **6.** 70°, 70°

उदाहरणसंग्रह 77

1. (1) l (AB) (2) > (3) l (BP) (4) l (AC)

उदाहरणसंग्रह 78

1. (1) रेख MR ⊥ किरण ST
(2) रेषा LM ⊥ रेख PQ
(3) रेषा HP ⊥ किरण OK
(4) रेख KG ⊥ रेख VJ
(5) रेषा AD ⊥ रेषा EF

उदाहरणसंग्रह 86

1. (1) 120 चौसेमी (2) 600 चौमी (3) 120 चौसेमी
(4) 275 चौमी (5) 117 चौसेमी (6) 125 चौमी

2. (1) 36 चौसेमी (2) 81 चौसेमी (3) 121 चौमी (4) 100 चौसेमी (5) 529 चौसेमी
(6) 1.44 चौमी (7) 12.25 चौमी (8) 9.61 चौमी (9) 0.25 चौमी (10) 7.29 चौसेमी

उदाहरणसंग्रह 87

1. 15 चौमी **2.** 108 चौमी **3.** 26 चौमी **4.** 4,20,000 रु. **5.** 50,000 रु. **6.** 225 रु.
7. 9,600 चौमी **8.** 1440 रु. **9.** 250 रु. **10.** 335 चौमी **11.** दुसरे मैदान

उदाहरणसंग्रह 88

1. (1) 8 घमी (2) 125 घमी (3) 512 घसेमी (4) 64 घसेमी (5) 1000 घसेमी

2. 64 घमी **3.** 1000 ठोकळे

उदाहरणसंग्रह 89

1. (1) लांबी, रुंदी, उंची (2) 40 घसेमी **2.** 15 घसेमी **3.** 15 घमी **4.** 18.75 घमी
5. 1000000 घसेमी **6.** 15 घमी **7.** 4.32 घमी **8.** 2000 विटा

उदाहरणसंग्रह 90

1. (1) त्रिज्या : रेख BP, रेख BT, रेख BN, रेख BS, रेख BQ, रेख BR
   व्यास : रेख PQ, रेख RS (2) बिंदू : R, P, M, T, N, S, Q, C
   (3) (a) चूक (b) बरोबर (c) चूक (d) बरोबर
2. (1) 14 सेमी (2) 10 सेमी (3) 4 मी (4) 5 सेमी

उदाहरणसंग्रह 91

1. (1) त्रिज्या : रेख CB , रेख CX , रेख CH , रेख CI , रेख CM , रेख CA
   जीवा : रेख RG , रेख AB , रेख IH , रेख MX , रेख AH
   व्यास : रेख AB , रेख MX , रेख IH
   (2) त्रिज्या : रेख CA , रेख CQ , रेख CS , रेख CU , रेख CN
   जीवा : रेख RO , रेख AH , रेख AU , रेख NQ , रेख KS
   व्यास : रेख AU , रेख NQ
   (3) त्रिज्या : रेख CH , रेख CK , रेख CS , रेख CE , रेख CR
   जीवा : रेख KH , रेख AH , रेख KR , रेख SH , रेख SR
   व्यास : रेख RK , रेख SH
2. (1) कंस AOB व कंस ALB
   (2) कंस ATU व कंस ALU
   (3) कंस TQR व कंस TPR
3. (1) वर्तुळाच्या अंतर्भागातील बिंदू : A, B, H, M, X, D
   वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू : P, T, C, F, E
   वर्तुळावरील बिंदू : R
   (1) वर्तुळाच्या अंतर्भागातील बिंदू : B, J, R, O, Y, W
   वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू : L, M, D, K
   वर्तुळावरील बिंदू : H, T