Übungsaufgaben

Aufgabe1-1

Lyapunovs direct method

$\dot{x} = -f(x)$, $f(x>0)>0$, $f(x=0)=0$, $f(x<0)<0$

$$V(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi \quad >0 \ \forall x_{\neq 0}, \ 0 \text{ für } x=0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\,\dot{x} = (f(x)-f(0)) \cdot -f(x) = -f(x)^2 \quad <0 \ \forall x \text{ außer } x=0$$

$\Rightarrow$ asymptotisch stabil

Aufgabe1-2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) \\ x_1 - x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \ , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = [x_1 \quad x_2]$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) \\ x_1 - x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2) \end{bmatrix} = -2x_1^2 - \cancel{x_2 x_1} - x_1^2(x_1^2+x_2^2) + \cancel{x_2 x_1} - x_2^2 - x_2^2(x_1^2+x_2^2)$$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} < 0 \ \forall \underline{x} \neq \underline{0}$, $\frac{dV}{dt} = 0$ für $\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ asympt. stabil (Krasovsky - LaSalle)

Aufgabe 2-1

Backstepping controller

$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2$

$\dot{x}_2 = u$

1.) $\dot{x}_1 \overset{!}{=} v = -q(x_1)$ mit fiktivem Input $\mu(x_1) = -q_1(x) - x_1^3$

$\hookrightarrow V_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 \Rightarrow \dot{V}(x) = x_1 \cdot \dot{x}_1 = -x_1 q_1(x) = -Q_1(x)$

2.) $z = x_2 - \mu(x_1)$, $\dot{z} = u - \frac{\partial \mu(x_1)}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 = u - \frac{\partial \mu(x_1)}{\partial x_1} \cdot (x_1^3 + z + \mu(x_1))$

$V_2(z) = \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow \dot{V}(z) = z\,\dot{z}$

3.) $W = V_1(x) + V_2(z)$, $\frac{dW}{dt} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + z \cdot \dot{z} = x_1(x_1^3 + (z + \mu(x_1))) + z\left(u - \frac{\partial \mu(x_1)}{\partial x_1}(x_1^3 + z + \mu(x_1))\right)$

$$= \underbrace{x_1(x_1^3 + \mu(x_1))}_{-x_1 q_1(x)} + \underbrace{z\left(x_1 + u - \frac{\partial \mu(x_1)}{\partial x_1}(x_1^3 + z + \mu(x_1)\right)}_{-z \cdot q_2(z)}$$

4.) u so wählen, dass Term in Klammer $-q_2(z)$ entspricht. z.B $q_2(z) = k_2 z$

$$\Rightarrow u + x_1 - \frac{\partial \mu(x_1)}{\partial x_1}(x_1^3 + z + \mu(x_1)) \overset{!}{=} -k_2 \cdot z$$

$$\Rightarrow u = \frac{\partial \mu(x_1)}{\partial x_1}(x_1^3 + z + \mu(x_1)) - x_1 - k_2(x_2 - \mu(x_1))$$

mit $q(x_1) = k \cdot x_1 \Rightarrow \mu(x_1) = -k_1 x_1 - x_1^3$

$\Rightarrow \frac{\mu(x_1)}{dx_1} = -k_1 - 3x_1^2$

und resubst. $z + \mu(x_1)$ zu x_2

$\Rightarrow u = (-k_1 - 3x_1^3)(x_1^2 + x_2) - x_1 - k_2(x_2 - (-k_1 x_1 - x_1^3))$

Aufgabe 3-1

$m\ddot{x} + d\dot{x} + k(x)x = F \quad , m, d > 0$ input $u = F$ output $y = \dot{x} = x_2$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{F - k(x_1)x_1 - dx_2}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-k(x)x_1 - dx_2}{m} \end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$y = x_2$

$S(x) = \frac{1}{2} m x_2^2 + \int_0^{x_1} k(\xi)\xi \, d\xi \qquad S(x) > 0 \qquad$ (since $x_1 > 0$)

passive: $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx}\dot{x} = \begin{bmatrix} k(x_1)x_1 & mx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ (u - k(x_1)x_1 - d\dot{x}_2)\frac{1}{m} \end{bmatrix}$

$= x_2 k(x_1)x_1 + x_2(u - k(x_1)x_1 - dx_2)$

$= x_2(k(x_1)x_1 + u - k(x_1) \cdot x_1 - dx_2)$

$= x_2(u - dx_2) = y(u - dy)$

$= yu - dy^2 \leq yu \Rightarrow$ passive   question (strictly passive?)

$\Rightarrow u = -k_c \cdot x_2 = -k_c y$

$\rightarrow$ take $S(x)$ as Lyapunov candidate

$\rightarrow \frac{dS}{dt} = yu - dy^2 = -k_c y^2 - dy^2$

$= \underbrace{-(k_c + d)y^2}_{>0 \text{ für } k_c > -d}$

$\Rightarrow$ System converges into largest subset (Kras.-Lasalle)

$\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{dV}{dt} = 0\}$

$\hookrightarrow$ nur 0 für $y = x_2 = 0$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u - k(x_1)x_1 - dx_2}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-k_c x_2 - k(x_1)x_1 - dx_2}{m} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1(x_1)}{m} x_1 \overset{!}{=} 0 \boxed{\Rightarrow x_1 = 0} \end{matrix}$$

pos. invariant

$\Rightarrow$ passive + zero-state observable

Aufgabe 4-1

$\dot{x} = x^3 + (x^2 + \sin(x) + 1{,}5)u$

1. GAS if $\alpha_1(x) < V(x) < \alpha_2(x) \quad , \quad \alpha \in K_\infty$

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha_3(|x|) + \alpha_4(|u|) \quad \longrightarrow u = k(x)$$

2. take $V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = x^4 + (x^3 + x\sin(x) + 1{,}5)u \overset{!}{\leq} -\alpha(|x|)$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{-\alpha(|x|) - x^4}{x^2 + x\sin(x) + 1{,}5} = k(x)$$

3. With disturbance : $\dot{x} = x^3 + (x^2 + \sin(x) + 1{,}5)(u + d)$

$$u = \tilde{k}(x) = k(x) - \nabla V \,(x^2 + \sin(x) + 1{,}5) \qquad \text{mit } \nabla V = x$$

$$= \frac{-\alpha(|x|) - x^4}{x^3 + x\sin(x) + 1{,}5} - x\,(x^2 + \sin(x) + 1{,}5)$$