Statistical learning

L'obiettivo è quell odi predire una risposta basandosi su una serie di variabili esplicative. Questo è un problema di **regressione** se la risposta è continua, oppure di **classificazione** se la risposta è categorica.

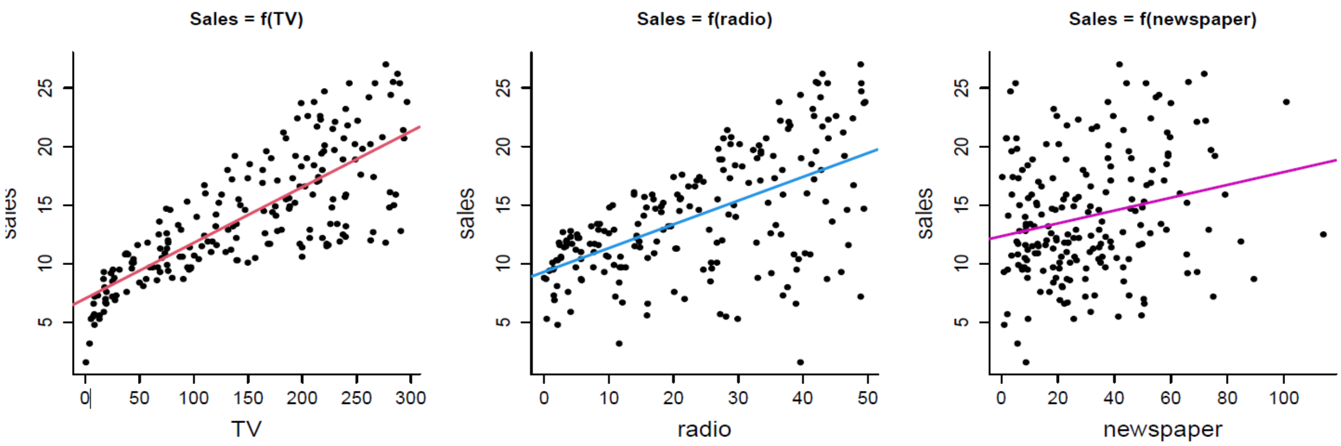
Si divide in due:

- **Supervised learning**: si hanno delle osservazioni $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ e si vuole individuare il valore di y essendo a conoscenza di x. Questo è un problema di **regressione** (o **predizione**) se la risposta è continua, oppure di **classificazione** se la risposta è discreta.

- **Unsupervised learning**: si hanno delle osservazioni $(x_1, \dots, x_n)$ e si vuole capire la struttura di x.

Notazione

Per spiegare la notazione faremo uso di un esempio. Supponiamo di voler capire come variano le vendite di una campagna pubblicitaria in base al luogo dove viene trasmessa (*TV*, *radio*, *newspaper*).



- Y: variabile **risposta** / **obiettivo** / **risultato** / **output** (in questo caso le vendite)
- $X_1, \dots, X_n$: variabili **caratteristiche** / **predittori** / **regressori** (in questo caso *TV*, *radio*, *newspaper*)
- X è il vettore che contiene le variabili caratteristiche (in questo caso $X = (X_1, X_2, X_3)$)
- Il nostro **modello** sarà quindi la funzione: (ϵ indica l'errore o discrepanze tra il modello e i dati reali) $$ Y = m(X) + \epsilon $$

In pratica, il nostro obiettivo è quello di trovare la funzione m (che in futuro indicheremo con $\hat{m}(X)$)che meglio approssima i dati reali.

I motivi per cui stimeremo m sono:

- predizioni
- inferenza (interpretazione dei dati)

Predizioni vs inferenza

- **Predizioni**: capire le possibiltà che un determinato evento succeda o meno

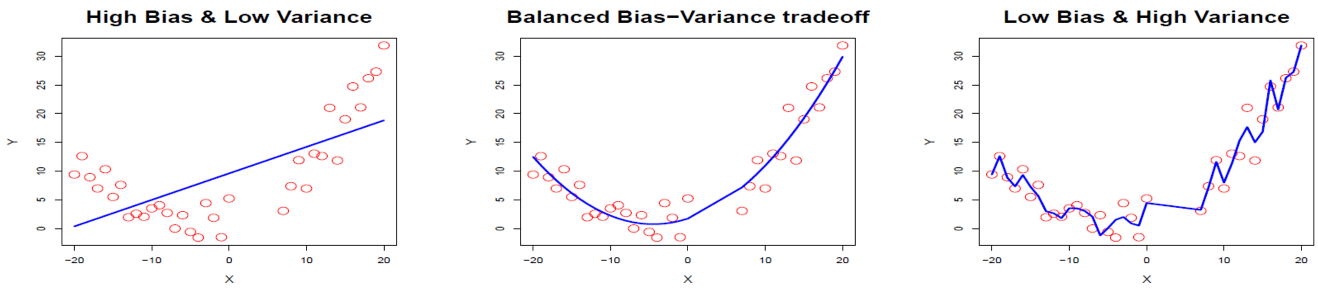
- **Inferenza**: determinare il motivo per cui un determinato evento succederà o meno

Generalità

Quando costruiamo un modello $\hat{m}$ vogliamo che sia **flessibile** (ovvero che si adatti bene ai dati) ma che allo stesso tempo sia **semplice** (ovvero che sia facile da interpretare). Un modello deve essere il più **bilanciato** possibile, non deve **sottostimare** ne **sovrastimare** i dati.

Compromesso tra bias e varianza (bias-variance tradeoff)

Il **bias** è l'errore che si commette quando si approssima un problema complesso con un modello semplice. Un modello con un alto bias tenderà a sottostimare i dati. La **varianza** è l'errore che si commette quando si approssima un problema semplice con un modello complesso. Un modello con una alta varianza tenderà a sovrastimare i dati.



Compromesso tra interpretabilità e flessibiltià (interpretability-flexibility tradeoff)

Possiamo costrutire sia modelli che sono molto flessibili ma poco interpretabili, sia modelli che sono poco flessibili ma molto interpretabili. Un modello flessibile è un modello che si adatta bene ai dati, mentre un modello interpretabile è un modello che è facile da interpretare.

Preferiremo modelli più strutturati rispetto a modelli più flessibili.

Probabilità base

Di seguito una sere di definizioni sulla probabilità di base

- **Valore atteso** : Il valore atteso di una variabile casuale X è la media dei valori che X può assumere, pesati per la probabilità che essi si verifichino.

- **Varianza**: La varianza di una variabile casuale X è una misura della sua dispersione. È definita come la media dei quadrati delle differenze tra il valore atteso di X e i valori che X può assumere, pesati per la probabilità che essi si verifichino.

- **Covarianza**: La covarianza è una misura della relazione lineare tra due variabili casuali. È definita come la media dei prodotti delle differenze tra il valore atteso di X e i valori che X può assumere, pesati per la probabilità che essi si verifichino.

Il predittore lineare ottimale

$$ \beta_0 = E[Y] - \beta_1 E[X] $$

- β_0, l'intercetta ottimale, obbliga la retta a passare per il la media di Y quando $X = 0$
- $\beta_1 = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)}$
- L'**inclinazione** aumenta all'aumentare di $Cov(X,Y)$ e diminuisce all'aumentare di $Var(X)$
- I valori attesi $$ e $$ non hanno alcun ruolo all'interno della formula, l'unica cosa che conta sono $Cov(X,Y)$ e $Var(X)$, le quali non cambiano se si aggiungono / sottraggono costanti

Concludiamo quindi che $\beta_0 + \beta_1 x$ rappresentano la **retta di regressione ottimale** (o *predittore lineare ottimale*)

Covaianza e correlazione empiriche

Con il termine **empirico** intendiamo che stiamo lavorando con un campione di dati **reali**, **NON** con dati **teorici**.

Covarianza

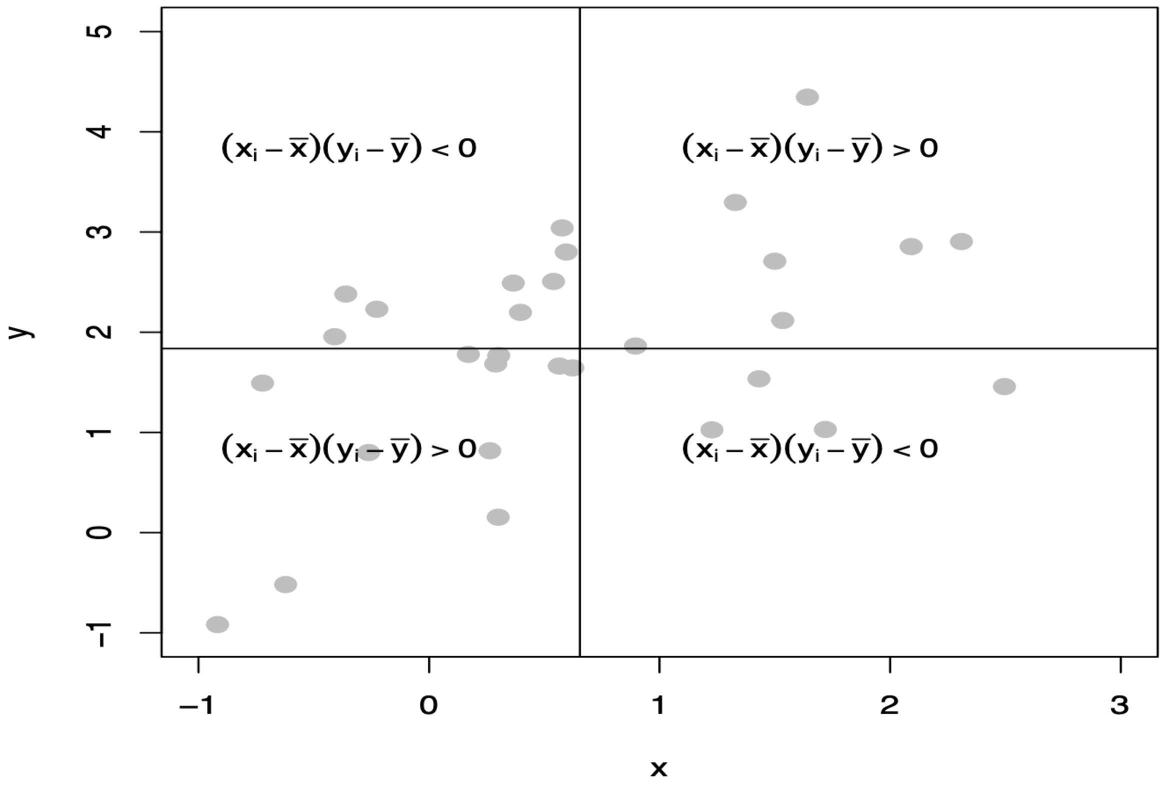
$$ c_{XY} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^nx_iy_i - n\bar{x}\bar{y}) $$

- c_{XY} è la covarianza empirica tra X e Y
- n è il numero di osservazioni
- $\bar{x}$ è la media (campionaria) di X
- $\bar{y}$ è la media (campionaria) di Y

Correlazione (indice di Pearson)

$$ r_{XY} = \frac{c_{XY}}{s_xs_y} $$

- r_{XY} è la correlazione empirica tra X e Y
- s_x è la deviazione standard (campionaria) di X
- s_y è la deviazione standard (campionaria) di Y
- r_{XY} restituisce un valore compreso tra -1 e 1



In base al valore dell'indice di Person possiamo capire dove si trova la concentrazione.