Derivate

definizione di derivata

rette nel piano

$$ y = mx+q \qquad \text{oppure} \qquad x=a \qquad \text{rette verticali} $$

- m corrisponde al **coefficente angolare** ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$)
- $m = tan(\alpha)$ dove α è l'angolo tra $y=0$ e la retta
- q è l'**intercetta** (intersezione con l'asse $x=0$)

rette per un punto

dato il punto $P_0=(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le rette passanti per P_0 hanno equazione:

$$ y = m(x-x_0)+q \qquad \text{oppure} \qquad x=a \qquad \text{rette verticali} $$

retta per due punti

la retta passante per $P_0=(x_0, y_0)$ e per $P_1=(x_1, y_1)$ ha equazione:

$$ \begin{cases} y = m(x-x_0)+ y_0 x = x_0 \end{cases} $$

rapporto incrementale $$ r(x) = \frac{f(x)- f(x_0)}{x- x_0} $$

derivata di un punto

$h = x- x_0$ se $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$ **esiste finito** allora f è derivabile in x_0 e la derivata è:

$$ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} $$

derivate delle funzioni elementari

funzioni potenza

$f(x)$	$f'(x)$	Dominio di f'
c	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}$	
x^α	$\alpha x ^{\alpha - 1}$	

funzioni trigonometriche

$f(x)$	$f'(x)$	Dominio di f'
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)} = 1+tan^2(x)$	

funzioni esponenziali e logaritmiche

$f(x)$	$f'(x)$	Dominio di f'
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$log(a) \cdot a^x$	$\mathbb{R}$
$log(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$log_a(x)$	$\frac{1}{xlog(a)}$	$x > 0$

algebra delle derivate

date due funzioni f e g derivabili in x_0, allora:

- $f+g$ è derivabile in x_0: $D(f+g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $f \cdot g$ è derivabile in x_0: $D(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
- $\frac{f}{g}$ con $g(x_0) \not = 0$ è derivabile in x_0: $D(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
- $D(\alpha f + \beta g)(x_0)=f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

proprietà locali e teoremi sulle funzioni derivabili

proprietà locali

le proprietà locali riguradano l'andamento di una funzione in vicinanza (o in un intorno) di un punto x_0. Data la funzione $f: A \rarr \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, se esiste un intorno di x_0 si ha:

- se $x < x_0 \implies f(x) \lt f(x_0)$ allora f è **crescente** in x_0
- se $x < x_0 \implies f(x) \ge f(x_0)$ allora f è **decrescente** in x_0
- se $f(x_0) \ge f(x)$ allora x_0 è **masimo relativo**
- se $f(x_0) \le f(x)$ allora x_0 è **minimo relatico**

massimi, minimi relativi e punti di flesso

data f derivabile in x_0:

- se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$
- se $f'(x_0) = 0$ e f non è costante attorno a x_0 allora x_0 è **punto stazionario**
  - se $f(x)$ è crescente per $x \lt x_0$ e decrescente per $x \gt x_0$ allora x_0 è **massimo relativo**

  - se $f(x)$ è decrescente per $x \lt x_0$ e crescente per $x \gt x_0$ allora x_0 è **minimo relativo**
  - se $f(x)$ è crescente (o decrescente) sia per $x \lt x_0$ che per $x \gt x_0$ allora x_0 è **punto di flesso**

teorema di Weierstrass

sia $f: [a,b] \rarr \mathbb{R}$ allora esistono sicuramente i punti di **massimo** e **minimo**.

asintoti verticali, orizzontali e obliqui

asintoto verticale data la funzione $f : A \rarr \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per A, la retta $x=x_0$ è **asintoto verticale** per f se:

$$ \lim_{x \to x_0^-}f(x) = \pm \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0^+}f(x) = \pm \infty $$

asintoto orizzontale

data la funzione $f : A \rarr \mathbb{R}$, la retta $y = q$ è **asintoto orizzontale** per f se:

$$ \lim_{x \to +\infty}f(x) = q \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to -\infty}f(x) = q $$

asintoto obliquo

data la funzione $f : A \rarr \mathbb{R}$, la retta $y = mx + q$ è **asintoto obliquo** per f se:

$$ \lim_{x \to +\infty}(f(x) - mx - q) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to -\infty}(f(x) - mx - q) = 0 $$

come calcolare asintoto obliquo La retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per f se e solo se:

$$ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty}(f(x) - mx) = q $$

(la stessa procedura è valida per $x \to -\infty$)

teoremi fondamentali per le funzioni derivabili in un intervallo

teorema di Lagrange

sia $f: [a, b] \rarr \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile ib $]a,b[$ allora esiste un punto $c \in]a,b[$ tale che:

$$ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} $$

teorema di Rolle sia $f: [a, b] \rarr \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile ib $]a,b[$ tale che $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto $c \in]a,b[$ tale che: $f'(c) = 0$ questo teorema è una conseguenza diretta del *teorema di Lagrange*

teorema di de l'Hôpital

siano f e g definite e derivabili, allora:

- se $\lim_{x \to x_0}f(x) = \lim_{x \to x_0} = 0$ e se $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ allora:

$$ \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l \qquad(\text{vale anche per }l= \pm \infty) $$

- se $\lim_{x \to x_0}f(x) = \lim_{x \to x_0}g(x)= \infty$ e se $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ allora:

$$ \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l \qquad(\text{vale anche per }l= \pm \infty) $$