Limiti

Data una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A. Diremo che $l \in \mathbb{R}$ è il limit per x tendente a x_0 se è possibile trovare un intorno I_{x_0} tale che i valori della funzione calcolati nel'intorno I_{x_0} cadono nell'intorno U_l

$$ \lim_{x\to x_0}f(x) = l $$

teorema dell'unicità del limite

Se l_1 e l_2 con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

$$ lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \land \quad lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 $$

allora deve essere $l_1 = l_2$ cioè il limite è **unico**.

limiti infiniti

- $lim_{x \to -\infty} f(x) = l; \qquad lim_{x \to +\infty} f(x) = l; \qquad (lim_{x \to \infty} f(x) = l)$
- $lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty; \qquad lim_{x \to x_0}; \qquad lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
- $lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty; \qquad lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty; \qquad lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

limite destro e sinistro

se $lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora deve valere:

$$ lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \land \qquad lim_{x \to x_0^+} f(x) = l $$

teorema confronto (carabinieri)

Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ allora, il teorema di carabinieri garantisce che:

- se $lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $lim_{x \to x_0} h(x) = l$ allora vale $lim_{x \to x_0} g(x) = l$
- se $lim_{x \to x_0} f(x) = + \infty$ allora $lim_{x \to x_0} g(x) = + \infty$
- se $lim_{x \to x_0} h(x) = - \infty$ allora $lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

algebrea dei limiti

limite della somma

Se $lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$ allora vale

$$ lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m $$

Più in generale:

	$m \in \mathbb{R}$	**$m = +\infty$**	**$m = -\infty$**
$l \in \mathbb{R}$	$l+m$	$l = +\infty$	$l = -\infty$

	$m \in \mathbb{R}$	**$m = +\infty$**	**$m = -\infty$**
$l = +\infty$	$l = +\infty$	$l = -\infty$	$f.i.$
$l = -\infty$	$l = -\infty$	$f.i.$	$l = -\infty$

limite del prodotto

Se $lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $lim_{x \to} g(x) = m \in \mathbb{R}$ allora vale

$$ lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m $$

Più in generale:

	$m < 0$	**$m = 0$**	**$m > 0$**	**$m = +\infty$**	**$m = - \infty$**
$l < 0$	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	$f.i.$	$f.i.$
$l > 0$	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l = -\infty$	$+\infty$	$f.i.$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

limite del quoziente

Se $lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora vale:

$$ lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l} $$

	$m < 0$	**$m = 0^\pm$**	**$m > 0$**	**$m = +\infty$**	**$m = - \infty$**
$l < 0$	l / m	$\pm \infty$	l / m	0	0
$l = 0$	0	$f.i.$	0	0	0
$l > 0$	l / m	$\pm \infty$	l / m	0	0
$l = +\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$	$+\infty$	$f.i.$	$f.i.$
$l = -\infty$	$+\infty$	$\mp \infty$	$-\infty$	$f.i.$	$f.i.$

Funzioni continue

definizione

Sia la funzione $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- se x_0 è un **punto di accumulazione** per A allora diremo che f è **continua** in x_0
- se $x_0 \in A$ è un punto isolato di A, allora f è continua anche in x_0
- diremo che f è **continua** se è continua in ogni punto del suo dominio

operazioni tra funzioni continue

Date due funzioni $f, g: A \to \mathbb{R}$, allora

- $h = f + g$ è continua
- $h = f \cdot g$ è continua
- $h = \frac{f}{g}$ è continua
- $g = |f|$ è continua

limiti importanti delle funzioni elementari

$$ \lim_{x \to x_0} x^a = \begin{cases} 0 & \text{se} \ a > 0 \ +\infty & \text{se} \ a < 0 \end{cases} $$

$$ \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} n \text{pari} 0 & \text{s} 0 < a < 1 \end{cases} $$

$$ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se} n \text{pari} -\infty & \text{se} n \text{dispari} \end{cases} $$

$$ \lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} -\infty & \text{se} a > 1 0 & \text{se} 0 < a < 1 \end{cases} $$

$$ \lim_{x\to +\infty} x^a= \begin{cases} +\infty & \text{se} \ a > 0 \ 0 & \text{se} \ a < 0 \end{cases} $$

definizione

$$ |x-x_0| < \delta \qquad \text{da cui otteniamo} \qquad |f(x) - l| < \epsilon $$

procedura

tramite un esempio: sia $\lim_{x\to-2}x^2=4$ i passaggi sono:

- trovare $|x^2 -4| < \epsilon$
- per la proprietà del valore assoluto abbiamo $-\epsilon < |x^2-4| < \epsilon$
- isolando la x otteniamo $\sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$
- a questo punto ci interessa trovare $|x-2| < \delta$
- sottraiamo 2 ai due membri $\sqrt{4-\epsilon}-2 < x-2 < \sqrt{4+\epsilon}-2$
- ricomponiamo il valore assoluto e troviamo la soluzione $|x-2| < \sqrt{4-\epsilon} -2$

limiti infiniti

quando abbiamo limiti per $x \to \pm \infty$ non possiamo verificare tramite $\epsilon - \delta$ ma dobbiamo considerare intorno di $\pm \infty$

procedura

sia $\lim_{x \to +\infty}\frac{x+1}{x}=1$ i passaggi sono:

- dobbiamo trovare M

limiti notevoli

funzione continua

- se $x_0 \in A$ è un **punto di accumulazione** di A diremo che f è **continua** in x_0
- se $x_0 \in A$ è un **punto isolato** di A allora f è continua anche in x_0
- f è **continua** se + continua in ogni punto del suo dominio

alcune proprietà

date due funzioni continue $f,g : A \rightarrow \mathbb{R}$ allora

- $h = f + g$ è continua
- $h = f \cdot g$ è continua
- $h = \frac{f}{g}$ è continua
- $h = |f|$ è continua
- se una funzione è **monotona** (sempre crescente o sempre decrescente) allora la sua **inversa** è continua
- Le funzioni **elementari** $y=x^a, y=a^x, y=\log_{a}x, sin(x), cos(x), tan(x)$ sono **continue**

teoremi fondamentali

teorema degli zeri

Siano $a < b$ e $f \ : \ [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua* tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$, cioè tale che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto. Allora esiste almeno un punto $c \in [a;b]$ tale che $f(c) = 0$

teorema dei valori intermedi

Sia $f \ : \ [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua*. Allora l'immagine Imf è un **intervallo** e f assume tutti i valori all'interno di quell'intervallo.

teorema di Weierstrass

Se f è una funzione continua in un insieme A chiuso e limitato, allora assume massimo e minimo in A, ovvero, esistono un punto c e un punto d di A tali che:

- $f(c)$ sia il massimo dell'immagine di f: $f(c) = \max_{x \in A} f(x)$

- $f(d)$ sia il minimo dell'immagine di f: $f(d) = \min_{x \in A} f(x)$

limiti notevoli

tipi di forme indeterminate

- $[\infty - \infty], \ [0 \cdot \infty], \ [\frac{\infty}{\infty}], \ [\frac{0}{0}]$
- 1^∞
- $[0^0]$
- $[\infty^0]$

limiti notevoli

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$: prestare attenzionec he x sia in *radianti* e $x \to 0$ e **NON** $x \to \infty$

- $\lim_{x \to \pm \infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$: e corrisponde al numero di **Neplero** e vale $e \approx 2.71828$
- $\lim_{x \to + \infty}\frac{log (x)}{x} = 0$