# Interpolacja profili wysokościowych

Mateusz Buchajewicz

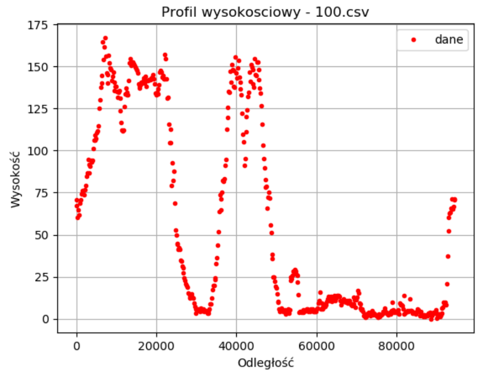
28.05.2019

## 1 Wprowadzenie

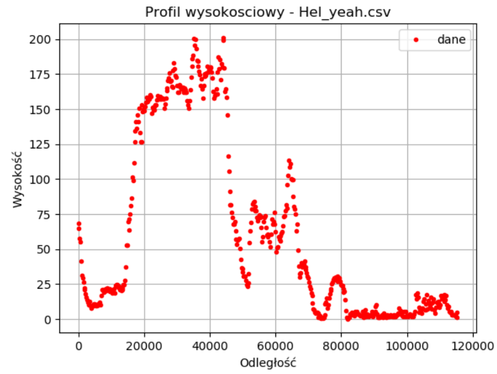
Celem projektu jest implementacja algorytmów służących do interpolacji profili wysokościowych. Dane wybrano z przykładowych, załączonych do instrukcji projektowych na portalu enauczanie. Do implementacji wykorzystano język Python.

## 2 Profile wysokościowe

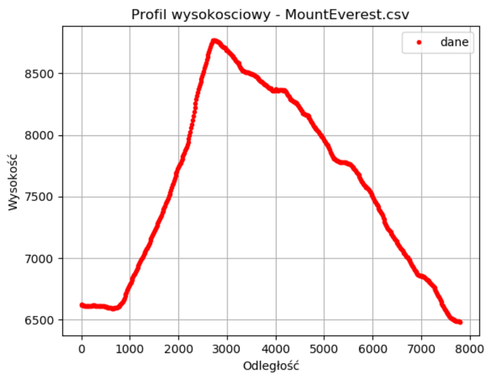
Na potrzeby projektu wykorzystano 5 różnych zestawów danych wejściowych, wszystkich zawierających różne profile wysokościowe.
Wybrane profile przedstawiono na poniższych wykresach:



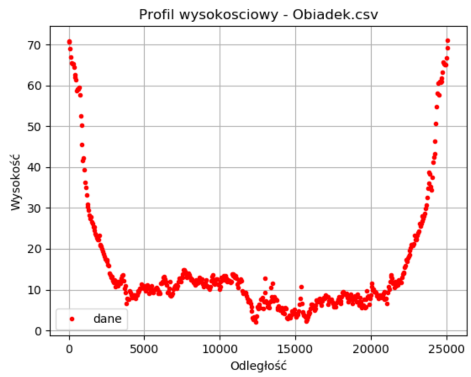

Rysunek 1: Profil wysokościowy trasy z pliku 100.csv



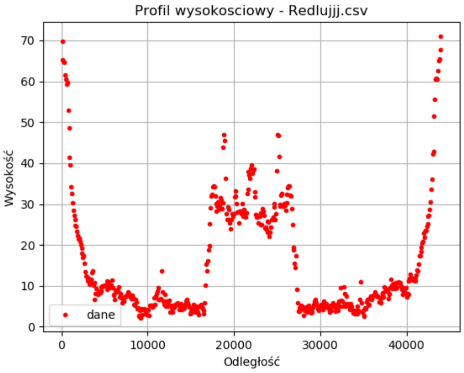

Rysunek 2: Profil wysokościowy trasy z pliku helyeah.csv




Rysunek 3: Profil wysokościowy trasy z pliku MountEverest.csv




Rysunek 4: Profil wysokościowy trasy z pliku Obiadek.csv




Rysunek 5: Profil wysokościowy trasy z pliku Redlujjj.csv

## 3 Interpolacja Langrange'a

Interpolacja Lagrange'a jest interpolacją globalną, czyli przybliża wykres funkcji dla wszystkich danych punktów jednocześnie.
W ogólności opiera się na wyznaczeniu zbioru funkcji, zwanego Bazą Lagrange'a.

$$\Phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1}$$

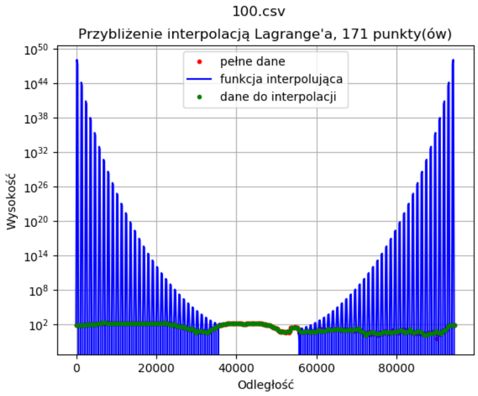
Następnie, aby obliczyć funkcję interpolacyjną F(x) należy wykonać operację:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi_i(x) \tag{2}$$

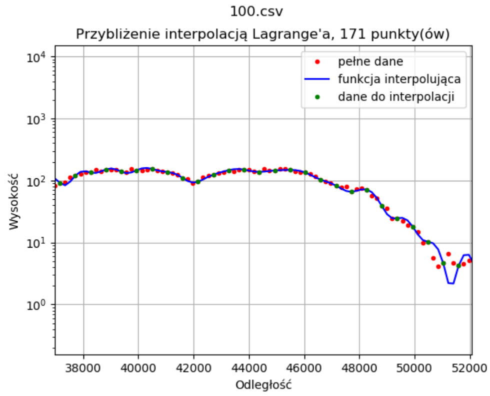
Gdzie $P_i = (x_i, y_i)$ oznacza punkt, na podstawie którego jest przeprowadzana interpolacja.

## 3.1 Metoda Lagrange'a a ilość punktów

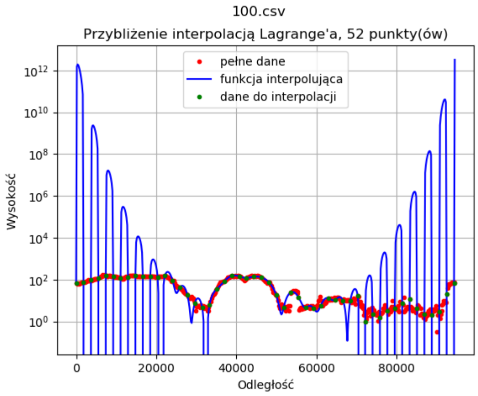
Wraz ze wzrostem liczby punktów interpolacyjnych wzrasta dokładność funkcji interpolacyjnej. Warto jednak zauważyć, że na zewnętrznych wierzchołkach pojawiają się oscylacje. Jest to efekt Rungego, który jest największą wadą tej metody interpolacyjnej. Tak więc metoda nie jest skuteczna w swojej domyślnej postaci, ponieważ gdy jest zbyt mało punktów jest ona niedokładna, a gdy zbyt wiele to pojawia się efekt Rungego. Można ulepszyć tę metodę, generując przybliżenia przedziałami.
Na poniższych wykresach przedstawiono efekty zastosowania metody interpolacyjnej Langrange'a.



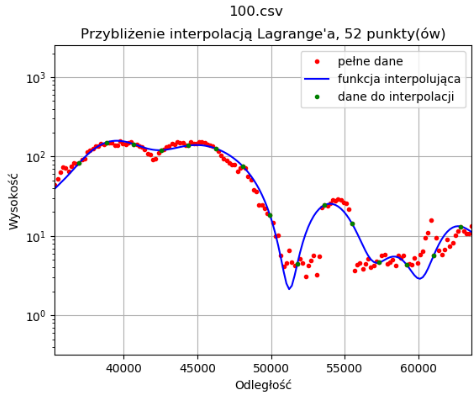

Rysunek 6: Wykres funkcji interpolowanej metodą Lagrange'a dla 171 punków.




Rysunek 7: Fragment przybliżenia funkcji interpolowanej metodą Lagrange'a dla 171 punktów



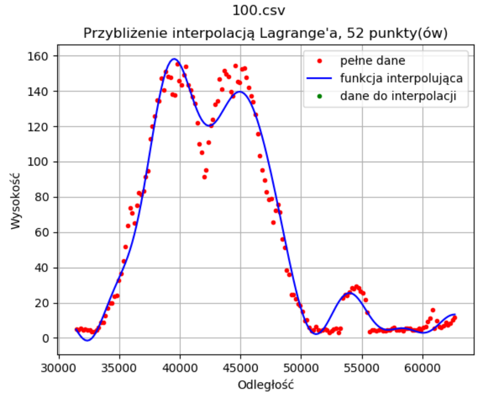

Rysunek 8: Wykres funkcji interpolowanej metodą Lagrange'a dla 52 punków.



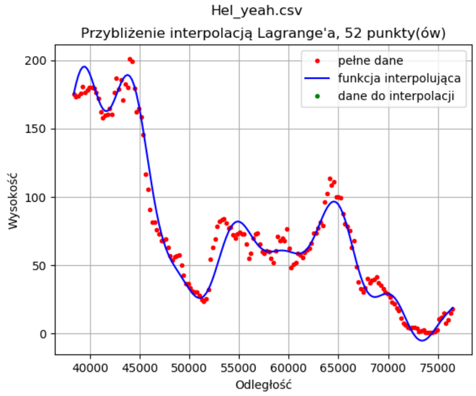

Rysunek 9: Fragment wykresu funkcji interpolowanej metodą Lagrange'a dla 52 punków.

## 3.2 Metoda interpolacji Lagrange'a a różne trasy

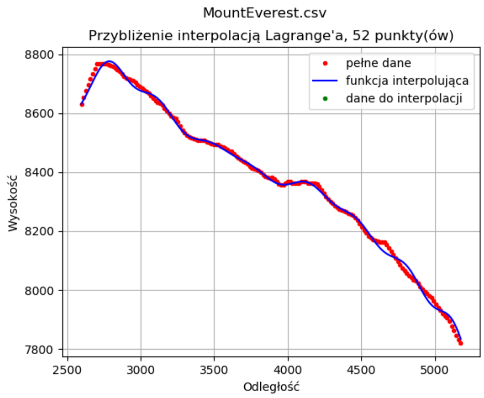
Metoda interpolacji Lagrange'a jest skuteczna, gdy kolejne punkty układają się w funkcję, której pierwsza pochodna nie zmienia często swojego znaku. Natomiast gdy interpolowana funkcja oscyluje wokół danej wartości, interpolacja metodą Lagrange'a jest mniej skuteczna. Na poniższych wykresach przedstawiono fragmenty interpolacji funkcji za pomocą metody Lagrange'a dla różnych tras:



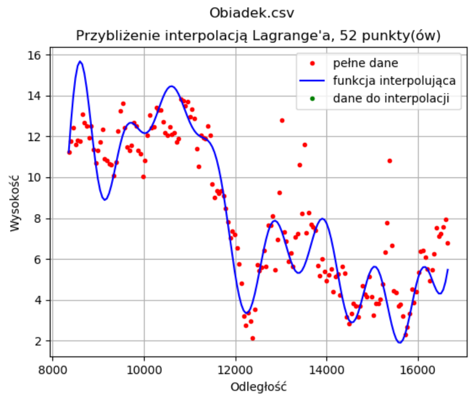

Rysunek 10: Wykres interpolacji splajanami dla trasy 100.csv



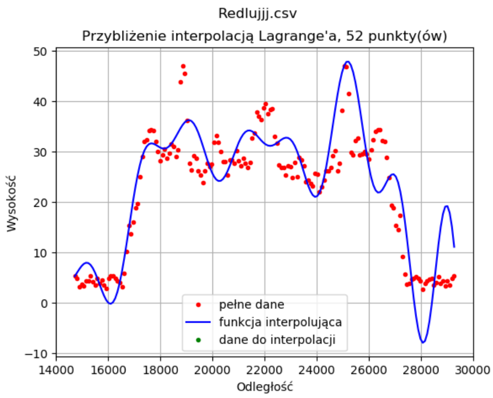

Rysunek 11: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla trasy hellyeah.csv.




Rysunek 12: Wykres interpolacji splajanami dla trasy MountEverest.csv




Rysunek 13: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla trasy Obiadek.csv




Rysunek 14: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla trasy Redlujjj.csv

# 4 Interpolacja splajnami

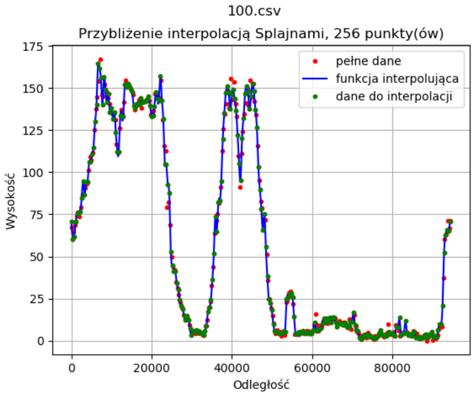
Interpolacja splajnami polega na wyznaczaniu wielomianów n-tego stopnia na przedziałach pomiędzy punktami wybranymi do interpolacji. W tym przypadku wyznaczane są wielomiany 3-ego stopnia.
Metoda polega na wyznaczeniu układu $4(n-1)$ równań, gdzie $n$ jest liczbą wybranych punktów.
Zakładamy, że pomiędzy punktami $x_i$ oraz $x_{i+1}$ istnieje wielomian $S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$.
Wtedy możemy wyznaczyć następujące równania:

- $S_i(x_i) = f(x_i)$ - $(n-1)$ równań
- $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ - $(n-1)$ równań
- $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ - $(n-2)$ równania
- $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$ - $(n-2)$ równania
- $S_0'(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$ - (2) równania

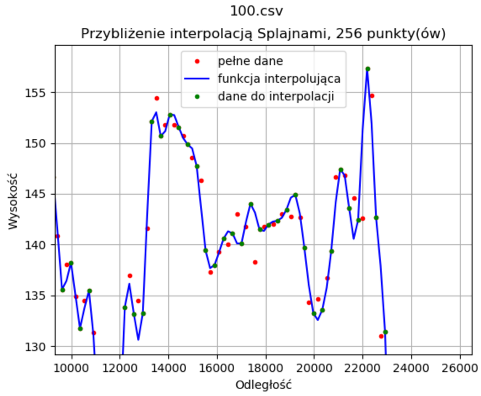
Łącznie $4(n-1)$ równań.
Mamy $(n-1)$ przedziałów, więc musimy wyznaczyć $4(n-1)$ współczynników.
Powyższy układ równań możemy przedstawić w podstaci **Ax=b**. Rozwiązanie tego równania, po odpowiednim przestawieniu wierszy, jest przeprowadzane za pomocą faktoryzacji LU. W ten sposób wyznaczone jest $(n-1)$ wielomianów, pomiędzy $n$ punktami.

## 4.1 Interpolacja splajnami a ilość punktów interpolacyjnych

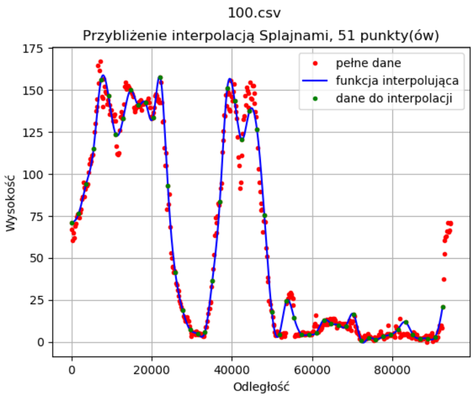
Wraz ze wzrostem liczby punktów wykorzystywanych do interpolacji rośnie dokładność przybliżenia, ale rosną też rozmiary macierzy oraz czas wykonywania obliczeń. Dla przykładu, Na poniższych wykresach przedstawiono przybliżenia funkcji dla 256 i 52 punktów (dla pliku 100.csv):



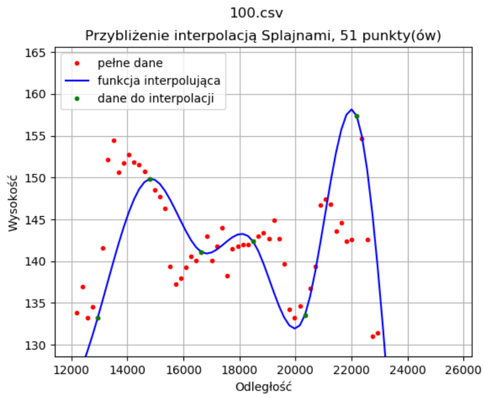

Rysunek 15: Wykres interpolacji splajanami dla 256 punktów.




Rysunek 16: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla 256 punktów.



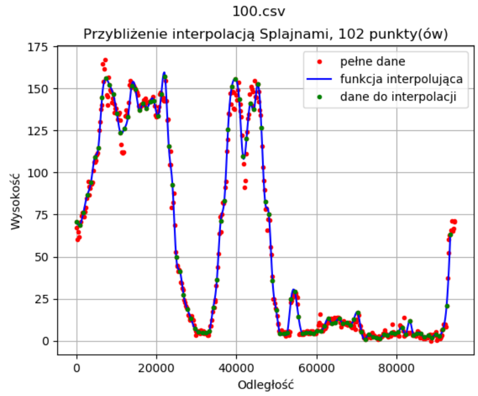

Rysunek 17: Wykres interpolacji splajanami dla 52 punktów.



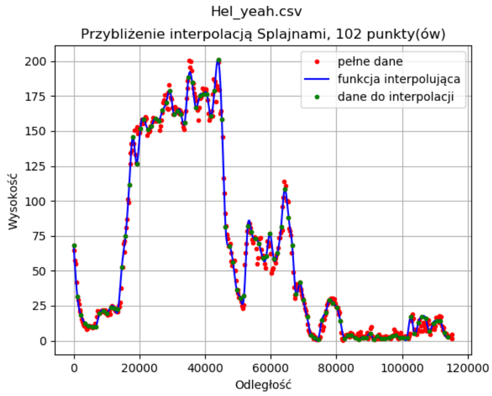

Rysunek 18: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla 52 punktów.

## 4.2 Interpolacja splajnami a różne typy danych

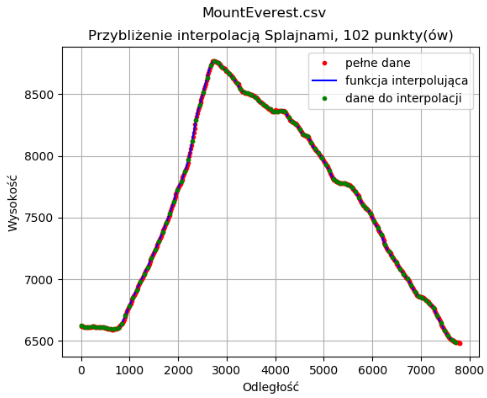
Metoda interpolacji splajnami sprawdza się najlepiej, gdy interpolowana funkcja przypomina funkcję wielomianową. Tak więc dla trasy Mount Everest, gdzie profil początkowo gwałtownie rośnie, po czym gwałtownie maleje przybliżenie jest bardzo dokładne na całym profilu. Natomiast w sytuacji, gdy wartości przybliżanej funkcji zmieniają się losowo, bądź pojawiają się ”skoki”, to funkcja interpolacyjna nie jest dokładna, co można zaobserwować na wykresie trasy Redlujjj. Wykresy interpolacji dla różnych rodzajó tras (wszystkie z wykorzystaniem 102 punktów) przedstawiono poniżej:



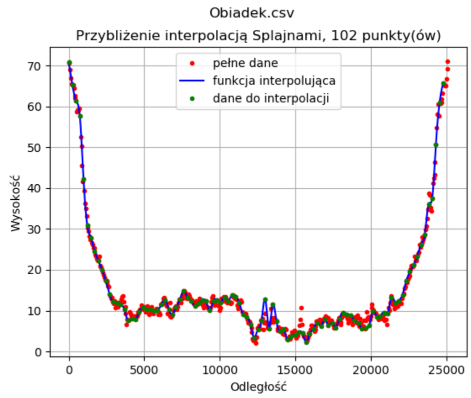

Rysunek 19: Wykres interpolacji splajanami dla trasy 100.csv



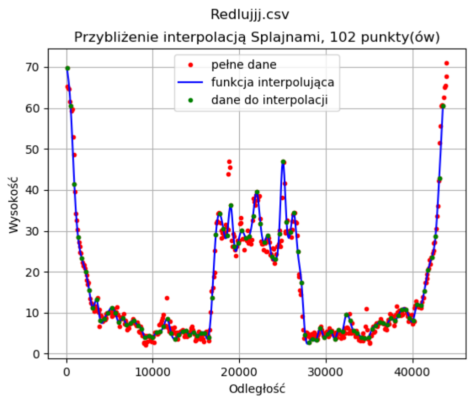

Rysunek 20: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla trasy hellyeah.csv.




Rysunek 21: Wykres interpolacji splajanami dla trasy MountEverest.csv




Rysunek 22: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla trasy Obiadek.csv




Rysunek 23: Fragment wykresu interpolacji splajanami dla trasy Redlujjj.csv

## 5 Podsumowanie i wnioski

Metoda interpolacji Lagrange'a wyznacza przybliżenia szybciej niż metoda interpolacji splajanami oraz ma mniejsze zapotrzebowanie pamięciowe. Jest jednak podatna na tzw. Efekt Rungego, czyli znaczące oscylacje w wierzchołkach zewnętrznych, przy dokłądnej interpolacji wierzchołków wewnętrznych. Zbyt wiele punktów interpolacyjnych powoduje efekt Rungego, zbyt mała niedokładną interpolację.
Metoda interpolacji splajnami wymaga wyznaczenia układu równań oraz obliczenia go, przez co wymaga większych zasobów pamięciowych i czasowych. Nie jest jednak podatna na efekt Rungego.
Podsumowując, metoda interpolacji splajnami nadaje się lepiej do interpolacji profili wysokościowych niż metoda interpolacji Lagrange'a.