Rozwiązywanie układów równań liniowych

Mateusz Buchajewicz

20.04.2018

1 Wprowadzenie

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) i bezpośrednich (Gaussa) rozwiązywania układów równań liniowych. Do implementacji wykorzystano język Python.

2 Zadanie A

Celem zadania było utworzenie układu równań:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Dla numeru indeksu 171619 otrzymujemy a1 = 6 i N = 54.
Macierz **A** dla powyższych danych wygląda w ten sposób:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Natomiast wektor **b** jest obliczany ze wzoru $\mathbf{b_i} = sin(i * (f + 1))$, co dla $f = 9$ daje następujący wektor:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.54402 & 0.91295 & -0.98803 & \dots & -0.99780 & 0.80112 \end{bmatrix}^T$$

3 Zadanie B

W ramach tego zadania rozwiązano powyższy układ równań za pomocą metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla.

Metoda	Czas (s)	Liczba iteracji
Jacobiego	0.1027	67
Gaussa-Seidla	0.0618	40

Iterację przeprowadzano, dopóki norma z wektora residuum była niemniejsza niż 10^{-9}.

4 Zadanie C

W ramach tego zadania utworzono macierz **C** podobnie jak w zadaniu 1, przy czym a1 = 3.
Macierz **C** wygląda w ten sposób:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Próby obliczenia układu równań $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ za pomocą powyższych metod iteracyjncyh kończyły się pythonowym błędem "*OverflowError - Result too large*" (odpowiednio po 1280 iteracjach metodą Jacobiego i 619 metodą Gaussa-Seidla), z czego wnioskuję, że te metody iteracyjne dla takich wartości nie zbiegają się.

5 Zadanie D

W ramach tego zadania rozwiązano powyższy układ równań za pomocą metody bezpośreniej: faktoryzacji LU. W tym przypadku norma z residuum wyniosła około $1.8956 * 10^{-15}$, co oznacza wysoką dokładność wykonanych obliczeń.

6 Zadanie E

W ramach tego zadania utworzono wykres zależności czasu od ilości iteracji dla powyższych metod. Zależność została przedstawiona na poniższym wykresie:

Rysunek 1: wykres zależności czasu od ilości iteracji dla metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i LU

7 Zadanie F

Oczekiwanie na wygenrowanie wykresu, wtedy będą wnioski.