

# 认知建模基础：第二次作业

截止日期：2024 年 3 月 20 日

**习题 Q1** (线索整合, cue combination). 对于某种刺激  $\omega$ , 假定其信息由两条感觉通路  $s_1, s_2$  **独立** 表征, 分别满足

$$s_1 \sim \mathcal{N}(\omega, \sigma_1^2), s_2 \sim \mathcal{N}(\omega, \sigma_2^2),$$

其中  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  表示均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$  的正态分布. 当  $s_1, s_2$  不一致时, 观测者可以整合信息得到最理想的估计.

- (a) 令  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , 假设某次观测值为  $s_1 = -1, s_2 = 1$ . 画出似然函数  $L(\omega)$  的图像, 并基于 MLE 确定刺激  $\omega$  的值.
- (b) 令  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , 假设某次观测值为  $s_1 = -1$ . 画出 MLE 所得刺激  $\omega$  的值随  $s_2$  变化的图像,  $s_2 \in [-2, 2]$ . 通过自举 (bootstrap) 抽样方法, 分别计算  $s_2 = 0, 1, 2$  时参数估计的 95% 置信区间, 以误差线的形式在图中标注. (抽样各进行 1000 次)
- (c) 令  $\sigma_1 = 1$ , 假设某次观测值为  $s_1 = -1, s_2 = 1$ . 画出 MLE 所得刺激  $\omega$  的值随  $\sigma_2$  变化的图像, 简述其特征与认知意义,  $\sigma_2 \in [0.25, 4]$ .

**习题 Q2** (Rescorla–Wagner 法则). 有研究者尝试结合单电极记录的实验手段研究了猕猴的经典条件反射建立过程. 通过初步数据分析, 他们发现实验中记录的神经元很可能编码了 Rescorla–Wagner 法则中的预测误差, 见数据文件 `L02Q2.csv`. 数据文件中, 各列含义分别为试次编号, 刺激的有无, 奖励的有无, 以及试次内动作电位的发放次数.

现假定神经元在试次内发放动作电位的次数服从 Poisson 分布, 分布参数为  $\lambda = \max\{0.1, 3 + 3\delta\}$ , 权重在试次结束后更新.

- (a) 利用数据拟合模型中的学习率参数.

(b) 画出刺激序列, 预测误差与权重  $w$  的变化过程.

**习题 Q3** (心理物理与模型比较). 在二项迫选的心理物理实验中, 研究者常用 S 型曲线拟合被试行为数据, 比如以下的 Logistic 形式:

$$\text{H1: } p(c_t = 1|I) = p_g + (1 - p_g)\sigma(b(I - a)) = p_g + \frac{1 - p_g}{1 + e^{b(a-I)}}.$$

其中  $I$  为刺激水平,  $c_t = 1$  表示正确反应,  $c_t = 0$  表示错误反应,  $p(c_t = 1|I)$  为刺激水平对应的正确反应概率,  $a, b$  调节曲线形态,  $p_g$  刻画猜测水平.

(a) 令  $p_g = 0.2$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1.2$ , 为  $I \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  的每个刺激水平各生成 500 个试次的虚拟行为数据.

(b) 利用 (a) 的数据拟合参数, 并通过非参数化自举 (nonparametric bootstrap) 抽样报告置信区间. (抽样进行 1000 次, 注意参数取值范围)

实际上, 可供选择的函数并不唯一. 取标准正态分布的累积密度函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

那么  $p(c_t = 1|I) = p_g + (1 - p_g)\Phi(b(I - a))$  会有非常相似的表现. 将  $a = 0.0$  设为定值, 考虑自由参数减少为 2 个的模型:

$$\text{H2: } p(c_t = 1|I) = p_g + (1 - p_g)\Phi(bI).$$

(c) 在 H1 和 (a) 的参数设定下, 为每个刺激水平生成各 40 个, 160 个, 和 640 个试次的数据, 在三种样本量下, 比较 H1 的拟合结果和真实参数, 计算 H1 和 H2 的  $\Delta\text{AIC}$ . 将这一过程重复 200 次, 计算 H1 优胜的比例, 据此简述数据量对模型拟合和模型比较的影响.

(d) 在 H1 和 (a) 的参数设定下, 为每个刺激水平生成各 10 个试次的数据, 如是重复生成 10 组, 然后基于留一交叉验证法 (leave-one-out cross validation) 比较 H1 和 H2 的拟合结果. 类似地, 将这一过程重复 200 次, 计算 H1 优胜的比例.