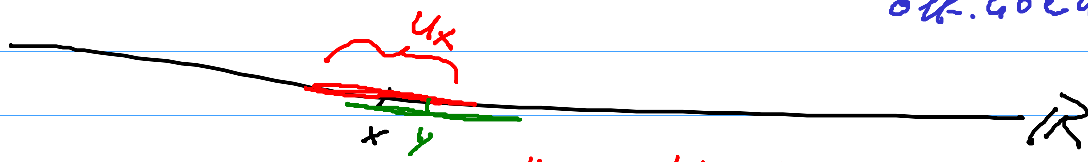
$$\Phi(x,y) : M \to M$$

$\underset{\in U_x}{y}$

$(U_x)_{x \in \mathbb{R}}$ off. Überd. von $\mathbb{R}$

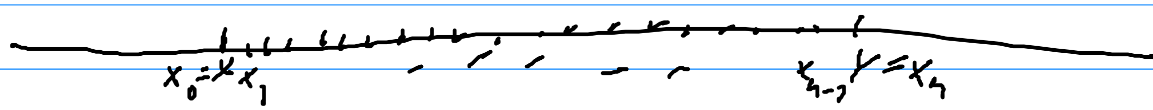


Falls $z \in U_x \cap U_y$ und $y \in U_x$

$\Phi(x,x) = id_M$ Gelte $\Phi(y,z) \circ \Phi(x,y) = \Phi(x,z)$ (*)

Dann kann Φ eindeutig zu einer globalen Abb. $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to M^M$ mit (*) für <u>alle</u> $x, y, z \in \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

$$M^M = \{ f \mid f : M \to M \}$$



$x_{i+1} \in U_{x_i}$ $\forall i$

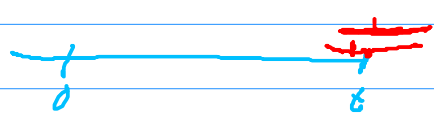
$$\Phi(x,y) := \Phi(x_{n-1}, x_n) \circ \dots \circ \Phi(x_0, x_1)$$

<u>Def:</u> $U \subseteq \mathbb{R}$ offen heißt ok, wenn es ein eind. $\Psi : U \times U \to M^M$ mit $\forall x, y, z \in U$ (* für Ψ) und $\Psi(x,y) = \Phi(x,y)$ für $y \in U_x$, $x, y \in U$ gibt.

<u>Lemma:</u> U ok $\wedge$ $x \in U \Rightarrow \underbrace{U \cup U_x}_{=:V}$ ok

<u>Beweis:</u> Seien $a, b \in U \cup U_x$. Ψ_U nach Vor. geg.

$$\Psi_V(a,b) := \begin{cases} \Psi_U(a,b), & a, b \in U \\ \Phi(x,b) \circ \Psi_U(a,x), & a \in U \wedge b \in U_x \\ \Phi(x,a) \circ \Psi_U(b,x), & b \in U \wedge a \in U_x \\ \Phi(a,b), & a, b \in U_x \end{cases}$$



$$\overleftarrow{S}_{0,A} = \Phi_A(1,0)\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

$$\overleftarrow{S}_{0,xA} = \underbrace{\Phi_A(x,y)}_{\in U(\mathcal{H})}\, \overleftarrow{S}_{yA}$$

$(U_x)_{x\in\mathbb{R}}$ Überdeckung von $\mathbb{R}$ mit offenen Intervallen $U_x \ni x$

$x\in U_y \Leftrightarrow y\in U_x$

Haben $\Phi_A(y,x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $y\in U_x$

mit $\Phi_A(x,x) = \mathrm{id}$, $\quad \Phi_A(z,y)\,\Phi_A(y,x) = \Phi_A(z,x)$ (*)

$\forall_x \forall_{y\in U_x}: \Phi_A(x,y) = \Phi_A(y,x)^{-1}$ $\quad$ falls $y\in U_x$, $z\in U_y\cap U_x$

Beh: $\exists$ Fortsetzung $\Psi_A : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to U(\mathcal{H})$

von $\Phi_A : \bigcup_{x\in\mathbb{R}} U_x\times\{x\} \to U(\mathcal{H})$

mit $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$: (*)

Haben $z_A(x,y)$ mit $\quad \overleftarrow{S}_{0,Ax} = z_A(x,y)\, \overleftarrow{S}_{0,Ay}\, \vec{S}_{Ay,Ax}$

für $x\in U_y$ $\quad \Phi_A(x,y) = z_A(x,y)\, \vec{S}_{Ay,Ax}$

modulo links-rechts-Verwechslung stimmt dann (*).

Sei V ein Intervall, das eine Vereinigung von endlich vielen U_x ist.

Induktionsannahme: $\varphi_A|_{V\times V}$ sei gegeben & erfülle (*) auf $V\times V\times V$. Nehmen ein $z\in\mathbb{R}$ mit $U_z\cap V\neq\emptyset$. Ziel: setze $\varphi_A|_{V\times V}$ auf $V'\times V'$ fort, wobei $V'=V\cup U_x$.

Def: $\varphi_A'(x,y):=\begin{cases}\varphi_A(x,y) & \text{falls } x,y\in V\\ \Phi_A(x,y) & \text{falls } x,y\in U_z\\ \Phi_A(x,t)\varphi_A(t,y) & \text{falls } y\in V,\ x\in U_z\text{, wobei } t\in V\cap U_z \text{ bel.}\\ \varphi_A(x,t)\,\Phi_A(t,y), & \text{falls } y\in U_z,\ x\in V\end{cases}$

ist wohldef(!) obwohl Fälle nicht disjunkt. (verwendet I.A.)

(**) Beh: hängt nicht von der Wahl von t ab.

$$\Phi_A(x,y):=\Phi_A(x,z)\,\Phi_A(y,z)^{-1}\text{ für } x,y\in U_z$$

$$\Phi_A(x,z)\Phi_A(y,z)^{-1}\overset{?}{=}\Phi_A(x,u)\,\Phi_A(y,u)^{-1}$$

Def. für z:

$$\text{HA: } 0=\frac{d}{d\varepsilon}\Big[\Gamma(tA, A, (t+\varepsilon)A)\,z(tA,(1+\varepsilon)A)\Big]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\frac{d}{dx}\log Z(tA, xA) = \left(-\frac{d}{dx}\log\Gamma(tA, yA, xA)\right)_{y=x}$$

wohldefiniert, also nicht von der Wahl von A abh.

$(t,x,x)\in\operatorname{dom}\Gamma \Leftrightarrow (t,t,x)\in\operatorname{dom}\Gamma$ (in $\mathbb{R}A$)

$$\bar{S}_{t,x} = \Gamma(t,y,x)\,\bar{S}_{t,y}\,\bar{S}_{y,x}$$

lasse A weg. Ablest

$$\operatorname{dom}\Gamma = \{(t,y,x)\in \cancel{\mathbb{R}^3}\ (\mathbb{R}A)^3 \mid (t,y),(y,x),(t,x)\in\operatorname{dom}\bar{S}\}$$

$(y,x)\in\operatorname{dom}\bar{S} \Leftrightarrow (x,y)\in\operatorname{dom}\bar{S}$

$\operatorname{dom} Z = \operatorname{dom}\bar{S}$

$\phi(x,y) := Z(x,y)\,\bar{S}_{x,y}$ für $x,y\in\operatorname{dom}\bar{S}$

Für x,y,t mit $(x,y),(y,t),(t,x)\in\operatorname{dom}\bar{S}$ gilt

(*) $\phi(x,y)\,\phi(y,t) = \phi(x,t)$

$\Leftrightarrow Z(x,y)\,\bar{S}_{xy}\;Z(y,t)\,\bar{S}_{yt} = Z(x,t)\,\bar{S}_{xt}$

$\Leftrightarrow Z(x,y)\,Z(y,t) = Z(x,t)\,\Gamma(x,y,t)$

Markus hat nachgerechnet, dass das lokal stimmt, d.h. für $x,y,t\in\operatorname{dom}\Gamma$.

(braucht Dgl. & Tetraederregel für Γ)

Beweis von (**):

$$\phi(x,t)\psi(t,y) \overset{?}{=} \phi(x,s)\,\psi(s,y)$$

wenn $x,t,s \in U_z$, $t,s,y \in V$

$$\overset{?}{\Leftrightarrow} \underbrace{\phi(x,s)^{-1}\phi(x,t)}_{\substack{=\phi(s,t) \\ \text{wegen (*) auf} \\ \text{dom}(z)}} = \underbrace{\psi(s,y)\,\psi(t,y)^{-1}}_{\substack{=\psi(s,t) \\ \text{wegen Indukt.} \\ \text{annahme 3.(*)}}}$$

$\Leftrightarrow$ True. Damit ist (**) gezeigt.

<u>Induktionsannahme</u>

Sei V Vereinigung von endlich vielen Intervallen $U_x = \{y \mid (y,x) \in \text{dom}\,\overline{S}\}$.

V sei zusammenhängend.

Sei $\psi : V \times V \to U(\mathcal{X})$ gegeben mit

1. $\psi(x,y) = \phi(x,y)$, falls $(x,y) \in \text{dom}\,\overline{S}$
2. $\psi(x,x) = id$ für $x \in V$.
3. $(*)_V$: $\forall x,y,t \in V$: $\psi(x,y)\psi(y,t) = \psi(x,t)$

φ' erfüllt (*) auf $V' \times V' \times V'$:

$\varphi'(x,y)\,\varphi'(y,t) = \varphi'(x,t)$

exemplarisch

$t, x \in U_{z}, y \in$

Wohldefiniertheit von $\bar{S}_{\vartheta, A}$ unter Skalierung von A:

$z = e^{i\vartheta}$ $\quad$ $\operatorname{dom}\vartheta = \operatorname{dom} z = \operatorname{dom}\bar{S}$

Frage: Sinnvolle Wahl für $\operatorname{dom}\bar{S}$?

Wollen:
1) $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (sA, tA') \in \operatorname{dom}\bar{S}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist offen für alle $A, A' \in \vartheta$

2) Symmetrie: $(A, A') \in \operatorname{dom}\bar{S} \Leftrightarrow (A', A) \in \operatorname{dom}\bar{S}$

3) Sternförmigkeit $(A, tA) \in \operatorname{dom}\bar{S}$
$\Rightarrow \forall s \in \underbrace{[1,t]}_{\text{zu lesen als } [t,1] \text{ für } t<1} : (A, sA) \in \operatorname{dom}\bar{S}$

0) $\{(A,A) \mid A \in \vartheta\} \subseteq \operatorname{dom}\bar{S}$.

4) $\operatorname{dom}\bar{S} \subseteq \{(A,B) \in \vartheta \mid P_- S_{AB} P_- \text{ invertierbar}\}$

"Übung" sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ offen

$\mathcal{O} \supseteq \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} =: \Delta$

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{O}' \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{O}' \supseteq \Delta$, $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$

mit Analoga von 2), 3).

?

$$\mathcal{O}' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \{x\} \times [x,y],\ [x,y] \times \{y\} \subseteq \mathcal{O} \cap \mathcal{O}^{-1}\},$$

wobei $\mathcal{O}^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{O}\}$

$\mathcal{O}'$ ist offen mit Markus' Distanzargument (Randabstand nimmt auf Kompaktum sein Minimum an)

$$\operatorname{Dom} \bar{S} = \{(A,B) \in \mathcal{V} \mid P_- S_{AB} P_- \text{ invertierbar}\}$$

ursprünglicher "großer" Domain

Für jeden endlich dim. Teilraum $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ gilt: $\operatorname{Dom} \bar{S} \cap (\mathcal{W} \times \mathcal{W})$ offen in $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$

$$\operatorname{dom} \bar{S} := \{(A,B) \in \operatorname{Dom} \bar{S} \mid \{A,B\} \times [A,B] \subseteq \operatorname{Dom} \bar{S} \cap (\operatorname{Dom} \bar{S})^{-1}\}$$