Модель хищник-жертва Даутова

Плотность опухолевых клеток определяется:

$$C = C_F - C_N + C_S \qquad (1.21)$$

Где C – опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности, C_S – опухолевые клетки на поверхности опухоли, C_N – опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами, C_F – опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами.

Предполагается, что шарообразная форма опухоли не меняется, так что

$$C_S = K_1 C^{2/3}, \qquad (1.2.2)$$

Где K_1 – постоянная, и что взаимодействие опухолевых клеток с лимфоцитами происходит только на поверхности опухоли. Считаем, что между количеством свободных и связанных лимфоцитами клеток опухоли выполняет соотношение

$$C_S - C_N = K_2 C_N L, \qquad (1.2.3)$$

Где L – свободные лимфоциты на поверхности опухоли

Тогда из этих соотношений имеем

$$C_F = \frac{C - K_1 K_2 L C^{2/3}}{1 + K_2 L}, \qquad (1.2.4)$$

$$C_N = \frac{K_1 C^{2/3}}{1 + K_2 L}, \qquad (1.2.5)$$

Показывает, что количество свободных опухолевых клеток на поверхности уменьшается с ростом количества лимфоцитов L

Переменные L и C можно взять за основные переменные модели, которая имеет следующий вид

$$L' = \left(-\lambda_1 + \frac{\alpha_1 C_N}{1 - \frac{L}{L_M}}\right) L,$$

$$C' = \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N L, (1.2.6)$$

Где λ_1 – уровень естественной смертности лимфоцитов $\frac{\alpha_1 C_N}{1 - \frac{L}{L_M}}$

стимуляция роста лимфоцитов из-за взаимодействия с опухолевыми клетками. $\lambda_2 C_F$ во втором уравнении описывает рост опухоли, который не подвергается атакам лимфоцитов, а $\alpha_2 C_N L$ учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения C_N и C_F можно переписать их в виде

$$x' = \left(-\lambda_1 + \beta_1 y^{\frac{2}{3}} \frac{1-\frac{x}{c}}{1+x}\right)x,$$

$$y' = \lambda_2 y - \frac{\beta_2 x y^{\frac{2}{3}}}{1+x}, \qquad (1.2.7)$$

Где $x = K_2 L, c = K_2 L_M, y = K_1 C, \lambda_1, \lambda_2, \beta_1, B_2$ положительные параметры. Так как x и y – размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c, так как L ограничено сверху величиной L_M – максимально возможной концентрацией лимфоцитов.

Решение ОДУ

Систему уравнений (1.2.7) решаем, используя метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. (Далее $y, x, f, g, k_i, l_i \in \mathbb{R}^n, a, t, h \in \mathbb{R}^1$)

$$y' = f(y, x), y(t_0) = y_{0,}$$

$$x' = g(y, x), x(t_0) = x_0, (1.3.1)$$

Приближенное значение в последующих точках вычисляем по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \qquad (1.3.2)$$

Вычисление нового значения:

$$k_1 = f(y_n, x_n),$$

$$l_1 = g(y_n, x_n),$$

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{h}{2}k_1, x_n + \frac{h}{2}l_1\right),$$

$$l_2 = g\left(y_n + \frac{h}{2}k_1, x_n + \frac{h}{2}l_1\right),$$

$$k_3 = f\left(y_n + \frac{h}{2}k_2, x_n + \frac{h}{2}l_2\right),$$

$$l_3 = g\left(y_n + \frac{h}{2}k_2, x_n + \frac{h}{2}l_2\right),$$

$$k_4 = f(y_n + hk_3, x_n + hl_3),$$

$$l_4 = g(y_n + hk_3, x_n + hl_3),$$

Где h – величина шага сетки по t

Этот метод имеет четвертый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

Результаты

Уравнения (1.2.7) дополняются начальными условиями:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0 \quad (1.4.1)$$

Нужно решить данную систему ОДУ для значений параметра $\beta_2 = 3; 3.48; 5$, и при помощи разработанной процедуры рассчитать динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$.

Приведем графики со следующими параметрами $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1, c = 3, t \in [0, 10]$.

Красной линией обозначен график зависимости лимфоцитов-хищников, а оранжевой-график зависимости опухоли-жертвы