Algebra Basic Definitions

Riccardo Finotello

- **Semigroup** $(\mathrm{G}, \cdot) \longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\ +)$, $(\mathbb{Z},\ \min)$:
  i) G is a *set*,
  ii) $\cdot\colon \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G},\ (g, h) \mapsto l \ \mid\ (g \cdot h) \cdot l = g \cdot (h \cdot l) \quad \forall g, h, l \in \mathrm{G}$.
- **Monoid** $(\mathrm{M}, \cdot) \longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{N},\ +)\,, (\mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\ \cdot)$:
  i) M is a *semigroup*,
  ii) $\exists\, \mathbb{1}_M \ \mid\ m \cdot \mathbb{1}_M = \mathbb{1}_M \cdot m = m \quad \forall m \in \mathrm{M}$.
- **Group** $(\mathbb{G}, \cdot) \longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{Z}_n,\ \cdot)$, $(\mathrm{S}_n,\ \cdot)$, $(\mathrm{SO}\,(n)\,,\ \cdot)$:
  i) $\mathbb{G}$ is a *monoid*,
  ii) $\forall g \in \mathbb{G}\ \exists\, g^{-1} \in \mathbb{G} \ \mid\ g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}_{\mathbb{G}}$.
- **Ring** $(\mathbb{R},\ +,\ \cdot) \longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{Z},\ +,\ \cdot)$, $\mathrm{End}\,(\mathbb{G})$ where $\mathbb{G}$ is an *abelian group*:
  i) $(\mathbb{R},\ +)$ is an *abelian group* (i.e. $g + h = h + g \quad \forall g, h \in \mathbb{R}$),
  ii) $(\mathbb{R},\ \cdot)$ is a *monoid*,
  iii) $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t \quad \forall r, s, t \in \mathbb{R}$,
  iv) $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \quad \forall r, s, t \in \mathbb{R}$.
- **Division ring** $(\mathrm{R},\ +,\ \cdot) \longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{H},\ +,\ \cdot)$:
  i) $(\mathrm{R},\ +,\ \cdot)$ is a *ring*,
  ii) $\forall r \in \mathrm{R}\ \exists\, r^{-1} \in \mathrm{R} \ \mid\ r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = \mathbb{1}_{\mathrm{R}}$.
- **Field** $(\mathbb{F},\ +,\ \cdot) \longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$:
  i) $(\mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ is a *commutative ring* (i.e. $f \cdot g = g \cdot f \quad \forall f, g \in \mathbb{F}$),
  ii) $\exists\, \mathbb{1}_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F} \ \mid\ \mathbb{1}_{\mathbb{F}} \cdot f = f \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{F}} = f \quad \forall f \in \mathbb{F}$.
- R**-module** M $\longrightarrow$ e.g.: $\mathrm{C}^\infty\,(\mathrm{M})$-module of $X \in \Gamma\,(\mathrm{M},\ \mathrm{TM})$:
  i) $(\mathrm{M},\ +)$ is an *abelian group*,
  ii) $(\mathrm{R},\ +,\ \cdot)$ is a *ring*,
  iii) $\cdot\colon \mathrm{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M},\ (r, m) \mapsto r \cdot m \ \mid\ r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n \quad \forall r \in \mathrm{R},\ \forall m, n \in \mathrm{M}$,
  iv) $\cdot\colon \mathrm{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M},\ (r, m) \mapsto r \cdot m \ \mid\ (r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m \quad \forall r, s \in \mathrm{R},\ \forall m \in \mathrm{M}$,
  v) $\cdot\colon \mathrm{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M},\ (r, m) \mapsto r \cdot m \ \mid\ (r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m) \quad \forall r, s \in \mathrm{R},\ \forall m \in \mathrm{M}$,
  vi) $\cdot\colon \mathrm{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M},\ (r, m) \mapsto r \cdot m \ \mid\ \mathbb{1}_{\mathrm{R}} \cdot m = m \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{R}} = m\ \forall m \in \mathrm{M}$.
- $\mathbb{F}$**-vector space** V $\longrightarrow$ e.g.: $(\mathbb{R}^n,\ +,\ \cdot)$
  i) V is a $\mathbb{F}$-*module*,
  ii) $\mathbb{F}$ is a *field*.