

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.

Санкт-Петербург, 2023

Постановка задачи

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана на отрезке $x \in [a, b]$ и определена рядом своих точек (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, $a \leq x_i \leq b$

Основная задача **интерполяции** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

Определение 1. Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются **узлами интерполяции**. Точка, в которой нужно найти значение функции — **точкой интерполяции**.

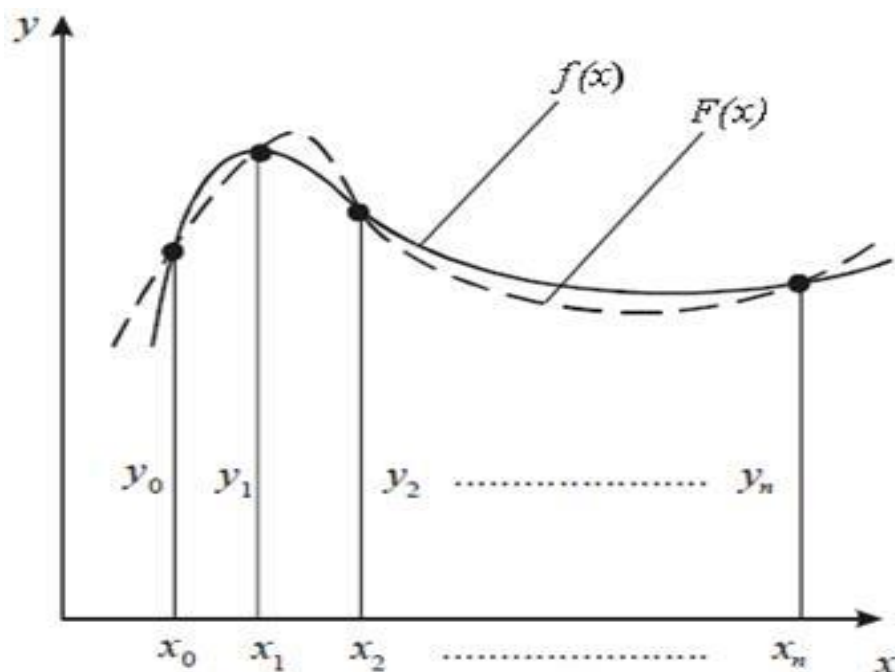
Требуется построить интерполирующую функцию $F(x)$, принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е. $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$.

Тогда, **условие интерполяции**: $F(x_i) = y_i$.

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых.

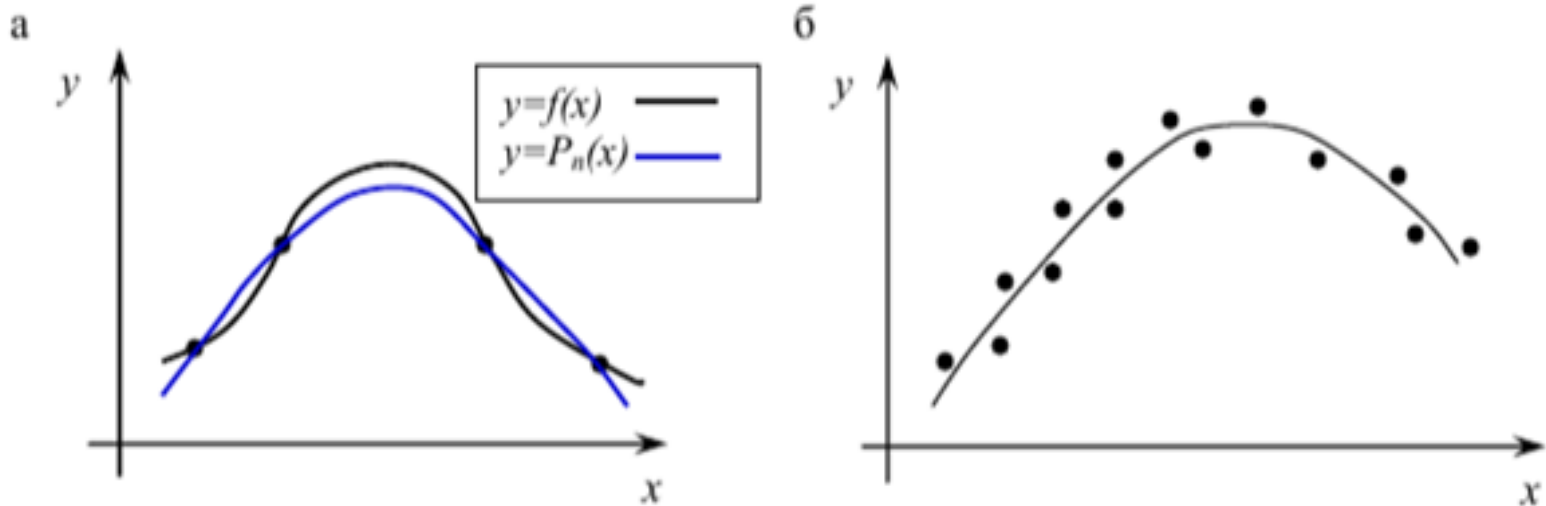
Геометрическая интерпретация

Определение 2. Процесс вычисления значений функции $F(x)$ в точках отличных от узлов интерполирования называется **интерполированием** функции $f(x)$. При этом различают **интерполирование** в узком смысле, когда x принадлежит интервалу $[x_0, x_n]$, и **экстраполирование**, когда x находится за пределами отрезка.



Геометрически задача интерполирования функции означает построение кривой $y = F(x)$ проходящей через заданные точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

Геометрическая интерпретация



Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующего полинома (б) для точно заданной функции

Основная задача **интерполяции** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

Основная задача **аппроксимации** — построение эмпирической формулы, для которой $f(x_i) \approx \varphi(x_i)$.



Интерполяция функции

Наиболее распространены следующие виды *интерполяции*:

- **линейная интерполяция**, при которой промежуточная точка, расположенная между двумя узловыми точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) , лежит на отрезке прямой, соединяющей две ближайшие узловые точки;
- **квадратичная интерполяция**, при которой промежуточная точка между узловыми точками (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) лежит на отрезке параболы, соединяющей эти узловые точки;
- **полиномиальная интерполяция**, при которой промежуточные точки вычисляются как значение некоторого многочлена $P_n(x)$, причем $P_n(x_i) = f(x_i)$;
- **сплайновая интерполяция**, при которой промежуточные точки находятся с помощью отрезков полиномов невысокой степени, проходящих через узловые точки и поддерживающие определенные условия стыковки в концевых точках;

Интерполяция функции

Задача нахождения интерполяционной функции $F(x)$ имеет бесконечное число решений, так как через заданные точки x_i, y_i можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции.

Однако эта задача становится однозначно разрешимой, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям $P_n(x_i) = f(x_i)$:

$$F(x) = P_n(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

Определение 3. Алгебраический многочлен, удовлетворяющий условиям интерполяции, называется **интерполяционным многочленом**.

Интерполяция функции

В случае использования в качестве интерполирующей функции многочлена n -й степени $F(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ (требующий $n + 1$ узел интерполяции) задача интерполяция табличной функции имеет единственное решение, т.е.

коэффициенты a_0, \dots, a_n определяются единственным образом.

Можно составить систему из $n + 1$ линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_0, \dots, a_n . Матрица коэффициентов этой СЛАУ называется матрицей **Вандермонда**. Ее определитель не равен нулю, поскольку все значения узлов интерполяции различны между собой и ни одна из строк не является линейной комбинацией других строк

$$\begin{matrix} i=0 \\ i=1 \\ \dots \\ i=n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{array} \right.$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \neq 0$$



Интерполяция функции


Примечание. Вычисление коэффициентов полинома посредством решения системы в вычислительной практике *реализуется крайне редко*.

Причиной этого является плохая обусловленность матрицы Вандермонда, приводящая к заметному росту погрешности при выполнении условий интерполирования уже при сравнительно невысоких порядках полинома.

Вычислительные затраты реализации метода пропорциональны n^3 .


Интерполяция функции

Глобальная
интерполяция



Полином един для
всей области
интерполяции

Локальная
(кусочная)
интерполяция



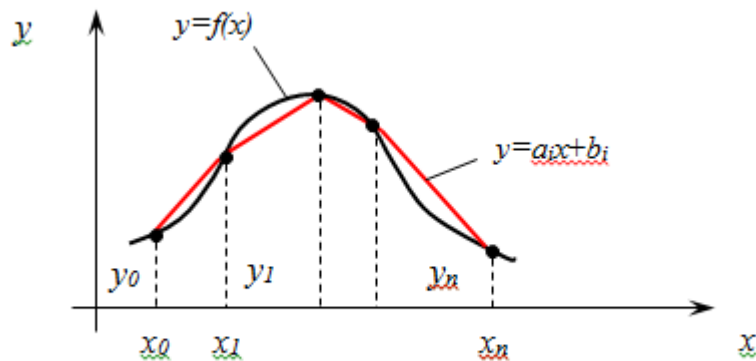
Между различными
узлами полиномы
различны



Линейная интерполяция

Линейная интерполяция является простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции. Она состоит в том, что заданные точки (x_i, y_i) , соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается к ломаной с вершинами в данных точках.

Уравнения каждого отрезка ломаной линии в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов (x_{i-1}, x_i) то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного полинома используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для i — го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i) , в виде:
$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$



$$y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (2)$$

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x , а затем подставить его в формулу (2) и найти приближенное значение функций в этой точке.

Квадратичная интерполяция

В случае **квадратичной интерполяции** в качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен.

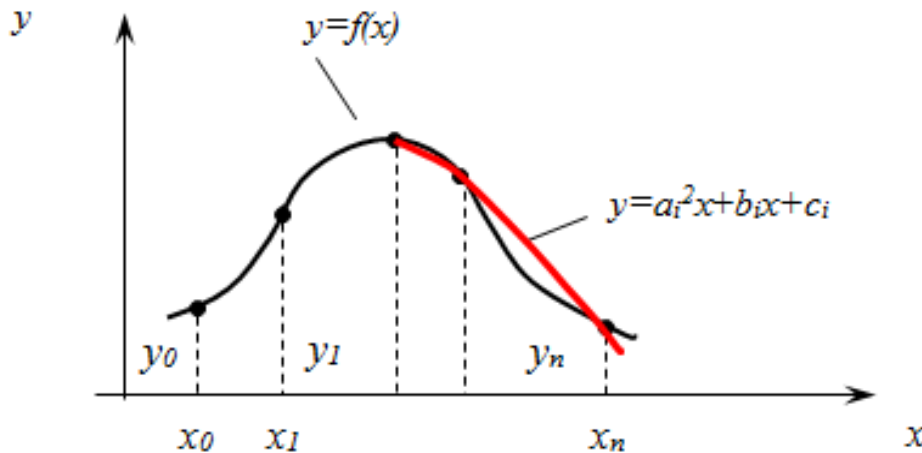
$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \quad (3)$$

Для определения неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы через три точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$. Эти условия можно записать в виде:

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i$$

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}$$



Интерполяция для любой точки $x \in [x_0, x_n]$ проводится по трем ближайшим ей узлам.

Локальная интерполяция

Пример 1. Найти приближенное значение функции $y = f(x)$ при $x = 0,35$ для заданной таблицы:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

1. Используем линейную интерполяцию. Значение $x=0,35$ находится между узлами $x_{i-1} = 0,3$ и $x_i = 0,4$. Тогда:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{5,44 - 3,79}{0,4 - 0,3} = 16,5$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 3,79 - 16,5 \cdot 0,3 = -1,16$$

$$y \approx 16,5x - 1,16 = 16,5 \cdot 0,35 - 1,16 = 4,615$$

2. Используем квадратичную интерполяцию. Составим систему уравнений для ближайших узлов к точке $x=0,35$: $x_{i-1} = 0,2$, $x_i = 0,3$, $x_{i+1} = 0,4$.

Соответственно $y_{i-1} = 2,38$, $y_i = 3,79$, $y_{i+1} = 5,44$.

$$0,2^2 a_i + 0,2 b_i + c_i = 2,38$$

$$0,3^2 a_i + 0,3 b_i + c_i = 3,79$$

$$0,4^2 a_i + 0,4 b_i + c_i = 5,44$$

В результате решения системы, получим: $a_i = 12$, $b_i = 8,1$, $c_i = 0,28$.

$$y \approx 12 \cdot 0,35^2 + 8,1 \cdot 0,35 + 0,28 = 4,585$$

Многочлен Лагранжа

Построим интерполяционный полином $L_n(x)$, степени не больше n и для которого выполнены условия $L_n(x_i) = y_i$ (4)

$$L_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

Лагранж предложил строить многочлен $L_n(x)$ в виде:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) \quad (5)$$

где $l_i(x)$ – полином степени n , который удовлетворяет условию:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = x_i \text{ (если } i = j) \\ 0, & \text{во всех других узлах (если } i \neq j) \end{cases} \quad (6)$$

Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i , то есть $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ – корни этого многочлена. Требование (6) совместно с выражением (5) обеспечивает выполнение условий (4).

Многочлен Лагранжа

Полиномы $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad (7)$$

Здесь в каждом полиноме $l_i(x)$ отсутствует скобка $(x - x_i)$, которой соответствует коэффициент c_i .

Найдем неизвестные коэффициенты $c_i, i = 0, 1, \dots, n$, называемые коэффициентами Лагранжа, используя условие: $L_n(x_i) = y_i$

При $x = x_0$ $L_n(x_0) = y_0$

$$L_n(x_0) = c_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n) = y_0$$

Следовательно, коэффициент c_0 вычисляется по следующей формуле:

$$c_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

При $x = x_1$ $L_n(x_1) = y_1$

$$L_n(x_1) = c_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n) = y_1$$

Следовательно, коэффициент c_1 вычисляется по следующей формуле:

$$c_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$



Многочлен Лагранжа

Значения остальных коэффициентов вычисляются аналогично:

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Тогда:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_3 - x_n)} \dots \dots$$



Многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (8)$$

Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях n ($n < 20$).

К недостаткам можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все **вычисления проводить заново**.



Многочлен Лагранжа

Линейная и квадратичная интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

При $n=1$ (два узла и первая степень многочлена):

$$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_1-x_0} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

При $n=2$ (три узла и вторая степень многочлена):

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Оценка погрешности

В точках, отличных от узлов, интерполяционный полином $P(x)$ отличается от значения функции $f(x)$ на величину **остаточного члена**: $R_n(x) = f(x) - P(x)$

Погрешность при использовании многочлена Лагранжа определяется формулой:

$$R_n(x) \leq \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)|$$
$$M^{(n+1)}(x) = \max_{x \in [x_0; x_n]} f^{(n+1)}(x)$$

Применение этой формулы затрудняется необходимостью вычисления константы $M^{(n+1)}$, ведь о функции $f(x)$ в общем случае неизвестно ничего, кроме таблицы. Для решения этой проблемы приходится привлекать дополнительные соображения, например, геометрические или физические, все, что известно о $f(x)$ в каждом конкретном случае.

Например, получили $R_n(x) \approx 0,000017$, т.е. интерполяционный многочлен дает четыре верных знака после запятой. Однако нужно учитывать погрешности табличных данных и вычислений многочлена, поэтому верных знаков, скорее всего, будет меньше.

Многочлен Лагранжа

Пример 2. Найти приближенное значение функции $y = f(x)$ при $x=0,35$ для заданной таблицы с помощью многочлена Лагранжа.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,4)(0,35 - 0,5)}{(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,3)(0,1 - 0,4)(0,1 - 0,5)} \\ = 0,0234375 * y_0 = 0,0234375 * 1,25 = 0,029297$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,4)(0,35 - 0,5)}{(0,2 - 0,1)(0,2 - 0,3)(0,2 - 0,4)(0,2 - 0,5)} \\ = (-0,15625) * y_1 = (-0,15625) * 2,38 = -0,37187$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,4)(0,35 - 0,5)}{(0,3 - 0,1)(0,3 - 0,2)(0,3 - 0,4)(0,3 - 0,5)} \\ = 0,703125 * y_2 = 0,703125 * 3,79 = 2,66485$$



Многочлен Лагранжа

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,5)}{(0,4 - 0,1)(0,4 - 0,2)(0,4 - 0,3)(0,4 - 0,5)}$$

$$= 0,46875 * y_3 = 0,46875 * 5,44 = 2,55$$

$$l_4(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,4)}{(0,5 - 0,1)(0,5 - 0,2)(0,5 - 0,3)(0,5 - 0,4)}$$

$$= -0,0390625 * y_4 = -0,0390625 * 7,14 = -0,27891$$

$$L_4(0,35) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) + l_4(x) = 4,59336$$

Пример 3. Построить многочлен Лагранжа, если функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

n=3

$$L_3(x) = 0 \cdot \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 3)(1 - 4)} + 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{(2 - 1)(2 - 3)(2 - 4)} + 5 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{(3 - 1)(3 - 2)(3 - 4)} +$$

$$7 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3)} = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5$$



Многочлен Лагранжа

Пример 4: Вычислить, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, $\sqrt{105}$ и оценить погрешность.

Решение: Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$

x	100	121	144
y	10	11	12

$n = 2$

$$L_2(x) = 10 \cdot \frac{(105 - 121)(105 - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)} + 11 \cdot \frac{(105 - 100)(105 - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)} + 12 \cdot \frac{(105 - 100)(105 - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)} = 10,245624$$

Оценим $R_2(x)$:

$$R_2(x) \leq \frac{\max_{x \in [x_0; x_n]} f'''(x)}{(3)!} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad y'' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

$$\max_{x \in [100; 144]} y'''(x) = \left| \frac{3}{8\sqrt{100^5}} \right| = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

$$R_2(x) < \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} |(105 - 100)(105 - 121)(105 - 144)| \approx 1,95 \cdot 10^{-3}$$

Многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

При построении интерполяционного полинома в форме Ньютона используется понятие **разделенной разности**.

Разделенные разности применяются для функций, заданных на неравномерной сетке (**неравноотстоящие узлы**).

Разделенные разности (или разностные отношения) **нулевого порядка** совпадают со значениями функции в узлах: $f(x_i) = y_i$.

Определение. **Разделенные разности первого порядка** называют величины (определяются через разделенные разности нулевого порядка):

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Разделенные разности второго порядка называют величины (определяются через разделенные разности первого порядка):

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$
$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Многочлен Ньютона

Разделенные разности k -го порядка определяются через разделенные разности порядка $k - 1$:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Они определяются рекуррентно, начиная с первого порядка.

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \quad (9)$$

Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Для повышения точности интерполяции в сумму могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

Многочлен Ньютона

Пример 5. Используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов найти приближенное значение функции **для $x=0,22$** . При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды, используя различные узлы.

x	0,15	0,2	0,33	0,47	0,62
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение: Вычисления произведем по формуле:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Для вычисления значение функции при $x=0,22$ за x_0 возьмем сначала 0,15, затем 0,2.

Для $x_0 = 0,15$

$$f(x_0, x_1) = \frac{2,38 - 1,25}{0,2 - 0,15} = 22,6$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3,79 - 2,38}{0,33 - 0,2} = 10,846$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{10,846 - 22,6}{0,33 - 0,15} = -65,3$$

$$y(0,22) = 1,25 + 22,6 \cdot (0,22 - 0,15) - 65,3 \cdot (0,22 - 0,15) \cdot (0,22 - 0,2) = 2,74058$$

Многочлен Ньютона

Для $x_0 = 0,2$:

$$f(x_0, x_1) = \frac{3,79 - 2,38}{0,33 - 0,2} = 10,846$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5,44 - 3,79}{0,47 - 0,33} = 11,786$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{11,786 - 10,846}{0,47 - 0,2} = 3,482$$

$$\begin{aligned} y(0,22) &= 2,38 + 10,846 \cdot (0,22 - 0,2) + 3,482 \cdot (0,22 - 0,2) \cdot (0,22 - 0,33) \\ &= 2,58926 \end{aligned}$$

$$\text{Принимаем } y(0,22) = \frac{2,74058 + 2,58926}{2} = 2,66492.$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n называются равноотстоящими, если: $x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$, где h - шаг интерполирования, $x_i = x_0 + ih$.

Конечные разности применяются для функций, заданных на равномерной сетке.

Конечные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах: $f(x_i) = y_i$.

Конечными разностями первого порядка называют величины:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Конечными разностями второго порядка называют величины:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Конечными разностями k-го порядка называют величины:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \dots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Аналогично для любого k можно записать:

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0$$

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - ky_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i$$

Используя конечные разности, можно определить y_k :

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона.

Этот многочлен запишем в виде:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (*)$$

Условие интерполяции $N_n(x_i) = y_i$ используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N_n(x_0) = a_0 = y_0$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1h = y_1$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1h + 2a_1h^2 = y_2$$

.....

Найдем отсюда коэффициенты a_0, a_1, a_2 :

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Общая формула имеет вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Подставляя эти выражения в (*), получим:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед**:

$$N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для $x_0 \leq x \leq x_1$. При этом за x_0 может приниматься любой узел интерполяции x_k . Например, для $x_1 \leq x \leq x_2$, вместо x_0 надо взять значение x_1 . Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$N_n(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_i \quad (*)$$

Интерполяционную формулу (*) обычно используют для вычислений значений функции в точках левой половины отрезка.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад**:

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Экстраполирование функции

При **экстраполировании** для отыскания значений функции для $x < x_0$ используется первый интерполяционный многочлен Ньютона. В этом случае $t \leq 0$ и говорят, что первая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования назад**.

При отыскании значений функции для $x > x_n$ используется второй интерполяционный многочлен Ньютона.

В этом случае $t \geq 0$ и говорят, что вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования вперед**.

Замечание. При экстраполировании получаются бóльшие погрешности, чем при интерполировании. Поэтому пределы его применения ограничены. Тем не менее, экстраполирование можно проводить в узких пределах, например в пределах шага h .

В более далеких точках можно получить неверные значения y .

Формула Лагранжа применяется в обоих случаях.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности функций удобно располагать в таблице (чтобы нагляднее понимать какие конечные разности надо вычислять):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$				
x_5	y_5	Δy_5					
x_6	y_6						

Если $x_0 \leq x \leq x_1$, то при использовании **первой интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

$\Delta y_i,$ $i = 0, \dots, 5$	$\Delta^2 y_i,$ $i = 0, \dots, 4$	$\Delta^3 y_i,$ $i = 0, \dots, 3$	$\Delta^4 y_i,$ $i = 0, \dots, 2$	$\Delta^5 y_i,$ $i = 0, 1$	$\Delta^6 y_i,$ $i = 0$
------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------	----------------------------

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \\ \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i; \quad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \\ t &= (x - x_0)/h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_6(x) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \\ &\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \Delta^5 y_0 + \\ &\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!} \Delta^6 y_0\end{aligned}$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$...	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		\ddots	
x_2	y_2				$\Delta^n y_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
				\ddots	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-1}$		
		Δy_{n-1}			
x_n	y_n				



Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Если $x_1 \leq x \leq x_2$, можно также использовать предыдущую формулу.

Но, для увеличения точности вычислений, рекомендуется взять вместо x_0 значение x_1 и тогда при использовании **первой интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

$$t = (x - x_1)/h$$

$\Delta y_i,$ $i = 1, \dots, 5$	$\Delta^2 y_i,$ $i = 1, \dots, 4$	$\Delta^3 y_i,$ $i = 1, \dots, 3$	$\Delta^4 y_i,$ $i = 1, 2$	$\Delta^5 y_i,$ $i = 1$
------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------	----------------------------

$$\begin{aligned} N_n(x) &= y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_1 \\ &+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \Delta^5 y_1 \end{aligned}$$

Количество слагаемых в этом случае уменьшается на единицу!

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для интерполирования назад все то же самое, только считаем с конца!!!!

$$\begin{aligned} N_6(x) &= y_6 + t\Delta y_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_3 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_2 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}\Delta^5 y_1 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{6!}\Delta^6 y_0 \end{aligned}$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Пример 6. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона найти приближенное значение функции для $x=0,15$, $x=0,22$ и $x=0,47$ по заданной таблице.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение:

№	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1	1,25	$\Delta y_0 = 1,13$	$\Delta^2 y_0 = 0,28$	$\Delta^3 y_0 = -0,04$	$\Delta^4 y_0 = -0,15$
1	0,2	2,38	$\Delta y_1 = 1,41$	$\Delta^2 y_1 = 0,24$	$\Delta^3 y_1 = -0,19$	
2	0,3	3,79	$\Delta y_2 = 1,65$	$\Delta^2 y_2 = 0,05$		
3	0,4	5,44	$\Delta y_3 = 1,7$			
4	0,5	7,14				

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед, т.к. $x=0,15$ $x=0,22$ лежат в левой половине отрезка.

$$\text{Для } x=0,15: \quad t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,15-0,1}{0,1} = 0,5$$

$$N_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$y(0,15)$$

$$\approx 1,25 + 0,5 \cdot 1,13 + \frac{0,5(-0,5)}{2} \cdot 0,28 + \frac{0,5(-0,5)(-1,5)}{6} \cdot (-0,04) + \frac{0,5(-0,5)(-1,5)(-2,5)}{24} \cdot (-0,15) \approx 1,78336$$

$$\text{Для } x=0,22: \quad t = \frac{(x-x_1)}{h} = \frac{0,22-0,2}{0,1} = 0,2$$

$$N_3(x) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1$$

$$y(0,22) \approx 2,38 + 0,2 \cdot 1,41 + \frac{0,2(-0,8)}{2} \cdot 0,24 + \frac{0,2(-0,8)(-1,8)}{6} \cdot (-0,19) \approx 2,63368$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад, т.к. $x=0,47$ лежит в второй половине отрезка.

$$\text{Для } x=0,47: \quad t = \frac{(x-x_n)}{h} = \frac{0,47-0,5}{0,1} = -0,3$$

$$\begin{aligned} N_4(x) &= y_4 + t\Delta y_3 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0,47) &= 7,14 - 0,3 \cdot 1,7 + \frac{-0,3(-0,3+1)}{2!}0,05 + \frac{-0,3(-0,3+1)(-0,3+2)}{3!}(-0,19) \\ &+ \frac{-0,3(-0,3+1)(-0,3+2)(-0,3+3)}{4!}(-0,15) \approx 6,64208 \end{aligned}$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Пример 7. Построить многочлен Ньютона, если функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

$n=3, h=1$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	0	3	-1	1
2	3	2	0	
3	5	2		
4	7			

$$\begin{aligned} N_3(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \\ &= 0 + 3(x - 1) + \frac{-1}{2} (x - 1)(x - 2) + \frac{1}{6} (x - 1)(x - 2)(x - 3) = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5 \end{aligned}$$

Погрешность интерполяционного полинома Ньютона

Погрешность интерполяции по формуле Ньютона оценивается также, как и при использовании многочлена Лагранжа, т.е. по формуле:

$$R_n(x) \leq \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)|$$

$$M^{(n+1)}(x) = \max_{x \in [x_0; x_n]} f^{n+1}(x)$$

Однако, оценить производную высокого порядка часто бывает трудно, а порой и невозможно. Поэтому на практике пользуются следующим правилом: степень интерполяционного полинома должна совпадать с порядком практически постоянных конечных разностей.

Тогда оценка погрешности для первой интерполяционной формулы Ньютона находится по формуле:

$$R_n(x) \leq \left| \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!} \right| \Delta^{n+1} y_0 \quad t = \frac{x-x_0}{h}$$

Оценка погрешности для второй интерполяционной формулы Ньютона находится по формуле:

$$R_n(x) \leq \left| \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} \right| \Delta^{n+1} y_n \quad t = \frac{x-x_n}{h}$$



Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Узлы располагаются слева и справа от центральной точки a . Пусть требуется найти приближенное значение функции f в точке x между a и $a+h$: $a < x < a+h$.

Таким образом, поставлена интерполяции табличной функции в середине таблицы.

Идея: выражают входящие в интерполяционный многочлен Ньютона (9) разделенные разности через конечные с заменой переменной:

$$t = \frac{(x - x_0)}{h} = \frac{(x - a)}{h} \Rightarrow x = a + th$$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

i	x_i	y_i
$n - 1$	$a + (-1)^n \left[\frac{n}{2} \right] h$	$y_{(-1)^n \left[\frac{n}{2} \right]}$
\vdots	\vdots	\vdots
6	$a - 3h$	y_{-3}
4	$a - 2h$	y_{-2}
2	$a - h$	y_{-1}
0	a	y_0
1	$a + h$	y_1
3	$a + 2h$	y_2
5	$a + 3h$	y_3
\vdots	\vdots	\vdots
n	$a + (-1)^{n+1} \left[\frac{n+1}{2} \right] h$	$y_{(-1)^{n+1} \left[\frac{n+1}{2} \right]}$



Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Первая интерполяционная формула Гаусса ($x > a$)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} \\ &+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots \\ &+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$



Интерполяционные многочлены Гаусса

Вторая интерполяционная формула Гаусса ($x < a$)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} \\ &+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} \\ &+ \frac{(t+n)(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)\dots(t-n)$$

Интерполяционные формулы Гаусса

Пример 8. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса найти приближенное значение функции для $x=0,32$, $x=0,28$ по заданной таблице.

1 формула Гаусса (выделено желтым)

2 формула Гаусса (выделено зеленым)

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_{-2} = 0,1$	$y_{-2} = 1,25$	$\Delta y_{-2} = 1,13$	$\Delta^2 y_{-2} = 0,28$	$\Delta^3 y_{-2} = -0,04$	$\Delta^4 y_{-2} = -0,15$
$x_{-1} = 0,2$	$y_{-1} = 2,38$	$\Delta y_{-1} = 1,41$	$\Delta^2 y_{-1} = 0,24$	$\Delta^3 y_{-1} = -0,19$	
$x_0 = 0,3$	$y_0 = 3,79$	$\Delta y_0 = 1,65$	$\Delta^2 y_0 = 0,05$		
$x_1 = 0,4$	$y_1 = 5,44$	$\Delta y_1 = 1,7$			
$x_2 = 0,5$	$y_2 = 7,14$				

Интерполяционные многочлены Гаусса

1 формула Гаусса (выделено желтым):

$$t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,32-0,3}{0,1} = 0,2$$

$$P_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$y(0,32) \approx 3,79 + 0,2 \cdot 1,65 + \frac{0,2 \cdot (-0,8)}{2} \cdot 0,24 + \frac{0,2 \cdot 1,2 \cdot (-0,8)}{6} \cdot (-0,19) + \frac{0,2 \cdot 1,2 \cdot (-0,8)(-1,8)}{24} \cdot (-0,15) \approx 4,10472$$

2 формула Гаусса (выделено зеленым):

$$t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,28-0,3}{0,1} = -0,2$$

$$P_4(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$y(0,28) \approx 3,79 - 0,2 \cdot 1,41 + \frac{-0,2 \cdot 0,8}{2} \cdot 0,24 + \frac{-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2)}{6} \cdot (-0,04) + \frac{-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2) \cdot 1,8}{24} \cdot (-0,15) \approx 3,48536$$



Интерполяционный многочлен Стирлинга

Формула Стирлинга представляет собой среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса. Применяется для интерполирования при значениях t , близких к 0. На практике ее используют при $|t| \leq 0,25$. Строится по нечетному числу узлов

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= y_0 + t \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{t^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{t^2(t^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} \\
 &+ \dots + \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \\
 &+ \frac{t^2(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}
 \end{aligned}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx h^{2n+1} \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - n^2)$$

Интерполяционный многочлен Бесселя

Формула Бесселя применяется для интерполирования при значениях t , близких к 0,5. На практике ее используют при $0,25 \leq |t| \leq 0,75$.

Строится по четному числу узлов

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{t(t-1) \Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2!} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2) \Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{4!} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t+3) \Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{6!} + \dots \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2) \dots (t-n)(t+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} \\
 &+ \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2) \dots (t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n}
 \end{aligned}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx h^{2n+1} \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - n^2)(t - n - 1)$$



Интерполяционный многочлен Бесселя

Формула Бесселя при $t = 0,5$

(формула интерполирования на середину):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1))^2}{2^{2n}(2n)!} \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} \end{aligned}$$

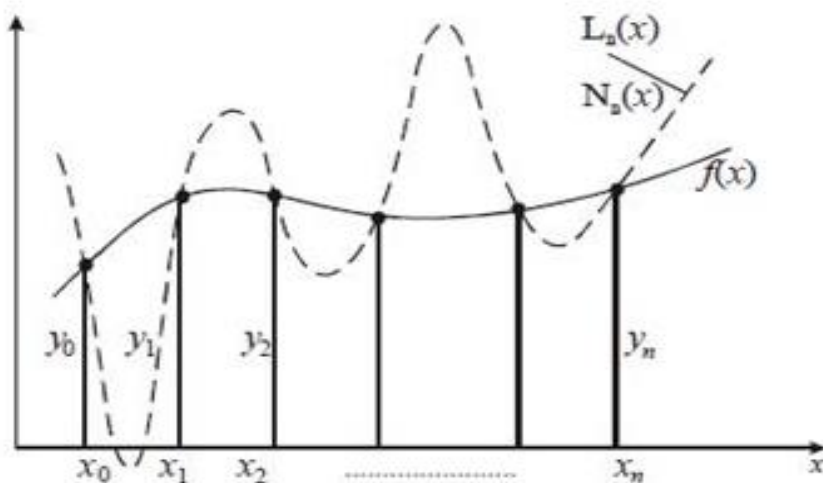
Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx (-1)^{n+1} h^{2n+2} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1))^2}{2^{2n+2}(2n+2)!}$$

Сплайн-интерполяция

Глобальная интерполяция, когда интерполяционный полином строится сразу по всем узлам интерполяции, становится практически непригодна при $n > 10$, поскольку:

- при вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления
- интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию
- задача интерполяции может быть плохо обусловлена (проявление колебательных свойств многочлена)

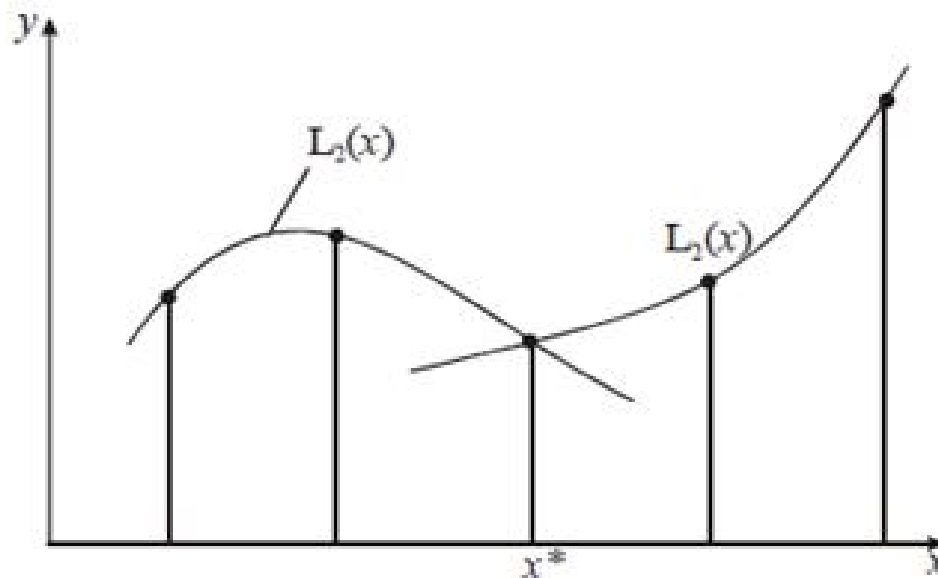


Сплайн-интерполяция

Можно применить *локальную интерполяцию*.

Отрезок, на котором определена функция, можно разбить на участки, содержащие малое число экспериментальных точек, и для каждого из них построить интерполяционные полиномы. Обычно полиномиальную интерполяцию осуществляют максимум по 5-7 узлам.

Однако в этом случае аппроксимирующая функция будет иметь точки, где производная не является непрерывной, т. е. график функции будет содержать точки “излома” - точка x^* .



Сплайн-интерполяция

Альтернатива глобальной интерполяции

Пусть на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ функция $P(x)$ является некоторым многочленом $S_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.

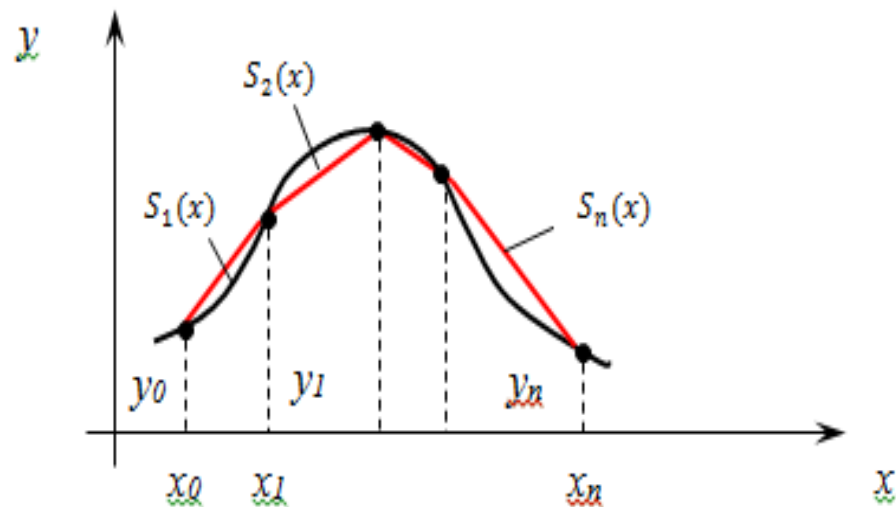
В такой постановке задача имеет множество решений.

Единственность решения можно обеспечить, потребовав от функции $P(x)$ некоторой гладкости в местах стыков функций $S_i(x)$, то есть в узлах интерполяции.

Кусочно-линейная интерполяция.

На каждом отрезке функция аппроксимируется линейно.

Дополнительных условий не требуется, условия гладкости на $P(x)$ в данном случае не налагаются.



Сплайн-интерполяция

Наиболее широко применяемым является вариант, в котором между любыми двумя точками строится многочлен n -й степени.

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_{ik} x^k, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

который в узлах интерполяции принимает значения интерполируемой функции и непрерывен вместе со своими $(n - 1)$ производными. Такой кусочно-непрерывный интерполяционный многочлен называется **сплайном**.

Сплайном степени n называется функция $S_n(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. Функция $S_n(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0; x_n]$ вместе со всеми своими производными: $S_n^{(1)}(x) S_n^{(2)}(x) \dots S_n^{(p)}(x)$ до некоторого порядка p ;
2. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ функция $S_{n,i}(x)$ является многочленом $P_{n,i}(x)$ степени n .

Характеристики сплайна:

1. Степень сплайна – максимальная из степеней использованных полиномов.
2. Гладкость сплайна – максимальный порядок непрерывной производной.
3. Дефект сплайна – разность между степенью сплайна и его гладкостью.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1
Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1

Слайн-интерполяция

Наибольшее распространение на практике получили сплайны $S_3(x)$ 3-й степени – кубические сплайны.

Кубическим интерполяционным сплайном называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом интервале $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени;
2. функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные $S'(x)$, $S''(x)$ непрерывны на отрезке $[x_0; x_n]$ (гладкость = 2).

Кубический сплайн является многочленом третьей степени, который для i -го участка записывается так:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $S_i(x)$ в окрестности точки x_i . Поскольку $S_i(x)$ — кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что:

$$a_i = S_i(x_i) \quad b_i = S'_i(x_i) \quad c_i = S''_i(x_i) \quad d_i = S'''_i(x_i)$$

Сплайн-интерполяция

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех n элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений.

Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции $S(x)$ через заданные точки:

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

$$S(x_i) = y_i$$

Часть дополняет условиями непрерывности сплайна и непрерывности первой и второй производных в узлах интерполяции:

$$S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$$

$$S'_i(x_{i-1}) = S'_{i-1}(x_{i-1})$$

$$S''_i(x_{i-1}) = S''_{i-1}(x_{i-1})$$

И добавляют граничные условия:

$$S''(x_0) = 0 \quad S''(x_n) = 0$$

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) = c_i + 3d_i h_i$$

Сплайн-интерполяция

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i

$$h_i = (x - x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n.$$

$$a_{i-1} = S_{i-1}(x_{i-1}) = S_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + c_i(x_{i-1} - x_i)^2 + d_i(x_{i-1} - x_i)^3 = a_i - b_i h_i + c_i h_i^2 - d_i h_i^3 \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Выразим условия непрерывности первой и второй производной:

$$b_{i-1} = S'_{i-1}(x_{i-1}) = S'_i(x_{i-1}) = b_i + 2c_i(x_{i-1} - x_i) + 3d_i(x_{i-1} - x_i)^2 = b_i - 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$c_{i-1} = S''_{i-1}(x_{i-1}) = S''_i(x_{i-1}) = 2c_i + 6d_i(x_{i-1} - x_i) = c_i - 3d_i h_i \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Выразим условия интерполирования:

$$a_i = S_i(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Для x_0 имеем:

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + c_1(x_0 - x_1)^2 + d_1(x_0 - x_1)^3$$

Для краевых условий:

$$c_1 - d_1 h_1 = S''_1(x_0) = 0$$

$$c_n = S''_n(x_n) = 0$$

Сплайн-интерполяция

Полученную систему линейных уравнений можно упростить до системы уравнений с трехдиагональной матрицей, которую решают методом прогонки (модификация метода Гаусса для частного случая разреженных систем). В результате серии упрощений получится система относительно только значений c_1, \dots, c_{n-1}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ h_1 & \delta_1 & h_2 & & & & \\ & h_2 & \delta_2 & h_3 & & & \\ & & h_3 & \delta_3 & h_4 & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & h_{n-1} & \delta_{n-1} & h_n \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dots \\ \varepsilon_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} a_i &= f_i, \\ b_i &= \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} + \frac{2 \cdot c_i + c_{i-1}}{3} \cdot h_i, \\ d_i &= \frac{c_i - c_{i-1}}{3 \cdot h_i}, \end{aligned}$$

где: $\delta_i = 2 \cdot (h_i + h_{i+1})$, $\varepsilon_i = 3 \cdot \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right)$, $i \in [1, n - 1]$.