矩阵分析与应用

Matrix Analysis and Applications

Baobin Li

Email: libb@ucas.ac.cn

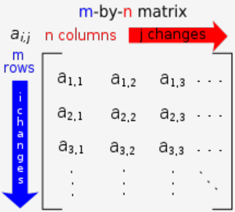
School of Computer and Control

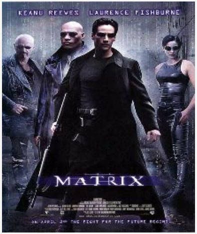
University of Chinese Academy of Sciences

简介

Matrix

- In mathematics, a matrix (plural matrices) is a rectangular array of numbers, symbols, or expressions, arranged in rows and columns. (WIKI)
- A matrix is a concise and useful way of uniquely representing and working with linear transformations. In particular, every linear transformation can be represented by a matrix, and every matrix corresponds to a unique linear transformation. (WOLFRAM Mathworld)
- [数] 矩阵； 模型； [生物][地质] 基质； 母体； 子宫； [地质] 脉石
- The Matrix: 黑客帝国





发展历史

- The earliest record related to the matrix is found in the ancient Chinese book Chiu-chang Suan-shu – 《九章算术》.

Three sheafs of a good crop, two sheafs of a mediocre crop, and one sheaf of a bad crop are sold for 39 dou. Two sheafs of good, three mediocre, and one bad are sold for 34 dou; and one good, two mediocre, and three bad are sold for 26 dou. What is the price received for each sheaf of a good crop, each sheaf of a mediocre crop, and each sheaf of a bad crop?

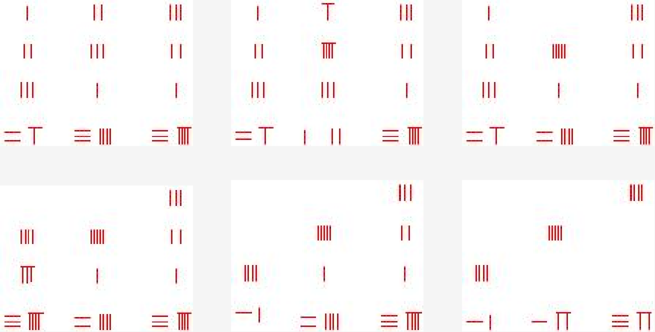
今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

- **Solution:** Set

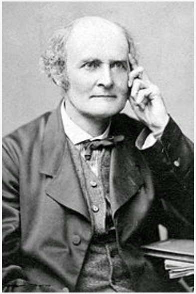
$$x: \quad good \quad crop, \qquad y: \quad mediocre \quad crop, \qquad z: \quad bad \quad crop,$$

- This problem would be formulated as three equations in three unknowns by writing

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 39,\\
2x + 3y + z &= 34,\\
x + 2y + 3z &= 26.
\end{aligned}
$$



- 《九章算术》, 300 BC—AD 200;
- 日本数学家关孝和（1683年）与微积分的发现者之一戈特弗里德.威廉.莱布尼茨（1693年）近乎同时独立地建立了行列式论;
- 1750年，加百列.克莱姆发现了克莱姆法则;
- 奥古斯丁.路易.柯西是最早将行列式排成方阵并将其元素用双重下标表示，并在行列式的框架中证明了实对称矩阵特征根为实数的结论;
- 詹姆斯.约瑟夫.西尔维斯特将数以行和列的形式作出的矩形排列作为研究对象，并首次使用“Matrix”一词;
- 阿瑟.凯莱被公认为矩阵论的奠基人.他从1858年开始，发表了《矩阵论的研究报告》等一系列关于矩阵的专门论文，研究了矩阵的运算律、矩阵的逆以及转置和特征多项式方程. 凯莱还提出了凯莱-哈密尔顿定理，并验证了3×3矩阵的情况;



凯莱-哈密尔顿定理

若$\mathbf{A}_{n\times n}$的特征多项式为$f(\lambda)$, 则$f(\mathbf{A})=0$.

- 哈密尔顿证明了4×4矩阵的情况, 而一般情况下的证明是弗罗贝尼乌斯于1898年给出的;
- 1878年, 在引进不变因子、初等因子等概念的同时, 弗罗贝尼乌斯给出了正交矩阵、相似矩阵和合同矩阵的概念;
- 矩阵理论在19世纪沿着两个方向发展, 分别是作为抽象代数结构和作为代数工具描述几何空间的线性变换;
- 无限维矩阵的研究始于1884年. 庞加莱在两篇不严谨地使用了无限维矩阵和行列式理论的文章后开始了对这一方面的专门研究;
- 1906年, 希尔伯特引入无限二次型（相当于无限维矩阵）对积分方程进行研究, 极大地促进了无限维矩阵的研究;
- 在此基础上, 施密茨、赫林格和特普利茨发展出算子理论, 而无限维矩阵成为了研究函数空间算子的有力工具.

应用领域

矩阵是高等代数学中的常见工具，也常见于统计分析等应用数学学科中，其在许多领域都应用广泛!

- 数学分析:
  - 在多元函数微积分学中，对二阶偏导数存在的函数f，定义其海森矩阵:

    $$H(f)(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]$$

    海森矩阵给出了函数在某一点的变化率方面的信息.
  - 矩阵在多元函数微积分中的另一个应用是雅可比矩阵. 函数$f: \quad R^m \longrightarrow R^n$ 在x存在一阶偏导数，定义雅可比矩阵:

    $$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

    可以用于判断局部反函数的存在性.
  - 偏微分方程理论中，二阶拟线性偏微分方程可以根据最高次偏导项系数构成的矩阵的正定性分类.假设有一个二阶拟线性偏微分方程:

    $$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf = g$$

记矩阵$\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$，如果矩阵$\mathbf{A}$是正定或负定矩阵，那么就称方程为椭圆形偏微分方程；如果$\mathbf{A}$不可逆，为抛物形偏微分方程；其它情况下称为超双曲形偏微分方程.

- 用数值方法解偏微分方程时更需要用到矩阵，一个重要的方法是有限元方法，在求解各种物理中遇到的偏微分方程时广泛使用.在满足一定的条件下，近似解将随着网格趋于精细而弱收敛到精确解.

概率论与统计:

- 概率论中常用到随机矩阵，即行向量是概率向量的矩阵．随机矩阵可用来定义有限概率空间中的马尔可夫链.
- 统计学中也会用到各种不同的矩阵.
  - 描述统计学中常常需要用矩阵的形式来描述数据样本，显得更为紧凑.
  - 几个随机变量的协方差矩阵表示它们之间的协方差关系，在某种程度上表示了它们相互间的关联程度.
  - 线性回归中的最小二乘法分析.
  - 另一种随机矩阵（random matrix）是指每个元素都是随机变量的矩阵，这些随机变量可以都遵循同一个分布，或各自遵循不同的分布。一个常见的例子是全部元素都是相互独立的标准正态分布随机变量的随机矩阵。这种随机矩阵在数论和物理中也有应用.

- **物理学:**
  - 对称性及线性变换在现代物理学中有着重要的角色.
    - 例如，在量子场论中，基本粒子是由狭义相对论的洛伦兹群所表示.
    - 盖尔曼矩阵，这种矩阵也被用作SU(3)规范群，是量子色动力学的基础.
    - 卡比博-小林-益川矩阵（CKM矩阵）：在弱相互作用中重要的基本夸克态，与指定粒子间不同质量的夸克态不一样，但两者却是成线性关系，而CKM矩阵所表达的就是这一点
  - 量子态的线性组合.
    - 1925年海森堡提出第一个量子力学模型时，使用了无限维矩阵来表示理论中作用在量子态上的算子.
    - 密度矩阵就是用来刻画量子系统中“纯”量子态的线性组合表示的“混合”量子态.
    - S矩阵:当粒子在加速器中发生碰撞时，用于记录所有可能粒子间相互作用.
  - 简正模式.
    - 求解物理学中线性耦合调和系统最优方法是将运动方程对应矩阵的特征向量求出（通过对角化等方式），称为系统的简正模式
    - 描述力学振动或电路振荡时，也需要使用简正模式求解.
  - 几何光学. 例如：光线传输矩阵，折射矩阵和平移矩阵等等。

- **化学:**
  - 矩阵应用在使用量子理论讨论分子键和光谱;
  - 例如：解罗特汉方程时用重叠矩阵和福柯矩阵来得到哈特里－福克方法中的分子轨道.
- **博弈论和经济学:**
  - 用收益矩阵来表示两个博弈对象在各种决策方式下的收益.
- **电子学:**
  - 传统的网目分析或节点分析会获得一个线性方程组，这可以以矩阵来表示与计算.
  - 很多种电子元件的电路行为可以用矩阵来描述.

设定A 为输入向量，其两个分量为输入电压v_1 与输入电流i_1 。设定B 为输出向量，其两个分量为输出电压v_2与输出电流i_2. 这电子元件的电路行为可以描述为$B = H \cdot A$; 其中H 是2×2矩阵，内有一个阻抗元素h_{12} 、一个导纳元素h_{21} 、两个无量纲元素h_{11} 与h_{22}. 这样，电路的计算可以约化为矩阵计算.

- **计算机科学:**
  - 信号处理
    - 信号表示、信号编解码;
    - 信号滤波、分解、压缩、除噪等。
  - 图像处理
    - 图像表示为$n \times n$的矩阵, 矩阵中每一个元素代表着一个像素值;
    - 图像分解、重构、压缩编码、提取特征等等;
    - 视频处理分析.
  - 计算机图形学
    - 三维图形借助矩阵表示;
    - 三维图形借助仿射矩阵完成相关坐标的变换;
    - 投影矩阵实现三维对象在特定二维屏幕上的显示.
  - 计算机网络
    - 图论中可以用矩阵描述一个有限图, 这个矩阵叫做相关矩阵的邻接矩阵, 记录了图的每两个顶点之间是否有边连接.
    - 在研究互联网等复杂网络的时候, 邻接矩阵常常会是稀疏矩阵.网络理论中有专门研究稀疏矩阵的方面.
  - ....

课程主要内容

- 1.线性方程组
  - 高斯消去法和矩阵初等变换
  - 齐次方程与非齐次方程
- 2.矩阵代数
  - 矩阵加法和减法
  - 矩阵乘法
  - 矩阵的逆
- 3.向量空间
  - 空间和子空间
  - 四个基本子空间
  - 线性无关
  - 基和维数
  - Rank
- 4.线性变换
  - 线性变换定义
  - 基变换
  - 相似变换
  - 不变子空间
- 5.模和内积
  - 向量和矩阵的模
  - 内积空间
  - 正交矩阵和酉矩阵
  - 离散Fourier变换
  - 正交分解和SVD分解
  - 正交投影
- 6.行列式
  - 行列式定义
  - 行列式的性质
- 7.特征值和特征向量
  - 正规矩阵
  - 正定矩阵