Temi d'esame di elettrodinamica

Eugenio Thieme

12 settembre 2016

Indice

Disclaimer **5**

09/07/2012 **7**

Esercizio 3 7

Disclaimer

Questa è una raccolta di esercizi svolti tratti da temi d'esame del corso di elettrodinamica classica tenuto presso il cdl di fisica dell'Università degli Studi di Milano. Essendo stati svolti da me senza correzione da parte di terzi, ed essendo stati trascritti in LaTeXesclusivamente per facilitare la revisione personale (ovvero, da parte mia) di concetti e modi operandi, non hanno la pretesa di correttezza nè tantomeno di completezza. La risoluzione dei temi d'esame fino al 2013 è stata pesantemente aiutata dalla versione di Giuliano Giudici già esistente.

TRY THIS AT HOME! Qualsiasi segnalazione di errori è benvenuta e può essere fatta tramite *pull request* su github.com/theugen/elettrodinamica.

09/07/2012

Esercizio 3

Si mostri che l'accelerazione di una particella di massa m e carica q che si muove con velocità **v** sotto l'azione dei campi elettromagnetici **E** e **B** può essere scritta come

$$\bar{a} = \frac{q}{m}\sqrt{1-\beta^2}[\bar{E} + \bar{\beta}\wedge\bar{B} - \bar{\beta}(\bar{\beta}\cdot\bar{E})] \tag{1}$$

Non ho informazioni sulla mutua disposizione dei campi elettromagnetici, provo a ragionare in termini più generali.

$$\frac{dp^\mu}{dt} = m\begin{pmatrix} \dot{\gamma}c \\ \dot{\gamma}\bar{v} + \gamma\dot{\bar{v}} \end{pmatrix} = F^\mu = \begin{pmatrix} q\bar{\beta}\cdot\bar{E} \\ q(\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Conoscendo la definizione di γ posso ricavare β invertendo la relazione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta = \pm\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \tag{3}$$

Calcolo $\dot{\gamma}$ dalla componente temporale del quadrivettore:

$$\dot{\gamma} = \frac{q\bar{\beta}\cdot\bar{E}}{mc} \tag{4}$$

Ora, uguagliando le componenti spaziali dei quadrivettori, posso ricavare l'accelerazione:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} = \bar{a} = \frac{q(\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B})}{m\gamma} - \dot{\gamma}\bar{v} = \frac{q(\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B})}{m\gamma} - \frac{q\bar{\beta}\cdot\bar{E}}{mc}\cdot\frac{c\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\gamma} = \\ = \frac{q(\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B})}{m\gamma} - \frac{q\bar{\beta}\cdot\bar{E}\sqrt{1-\gamma^2}}{m\gamma^2} = \frac{q}{m\gamma}[\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B} - \bar{\beta}\cdot\bar{E}\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}] = \\ = \frac{q}{m\gamma}[\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B} - \bar{\beta}(\bar{\beta}\cdot\bar{E})] = \frac{q\sqrt{1-\beta^2}}{m}[\bar{E}+\bar{\beta}\wedge\bar{B} - \bar{\beta}(\bar{\beta}\cdot\bar{E})] \end{aligned} \tag{5}$$

dove nell'ultimo passaggio ho usato il fatto che $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2}$.

04/02/2015

Esercizio 3

Nel sistema di riferimento K del laboratorio sono presenti un campo elettrico costante ed uniforme $\bar{E} = E\hat{e}_y$ ed un campo magnetico costante ed uniforme $\bar{B} = \frac{5}{3}E\hat{e}_z$. Una particella di carica q e massa m parte da ferma dall'origine all'istante t=0. Calcolare dopo quanto tempo la particella passa nuovamente per un punto dell'asse x.

Sono nel caso di campi $\bar{E}$, $\bar{B}$ entrambi non nulli, costanti, uniformi, ortogonali tra loro. Essendo B>E, posso mettermi in un sistema di riferimento K' in cui $\bar{E}' = 0$ facendo un boost con una velocità $\bar{v}$ giacente nel piano ortogonale a quello identificato da $\bar{E}$ e $\bar{B}$:

$$\bar{v} = c\frac{\bar{E} \wedge \bar{B}}{B^2} \tag{6}$$

$$\begin{cases} E'_{\parallel} & = E_{\parallel} = 0 \\ B'_{\parallel} & = B_{\parallel} = 0 \\ E'_{\perp} & = \gamma(\bar{E} + \bar{\beta} \wedge \bar{B}) = \gamma(\bar{E} + \frac{\bar{E}\wedge\bar{B}\wedge\bar{B}}{B^2}) = \gamma(\bar{E} - \bar{E}) = 0 \\ B'_{\perp} & = \gamma(\bar{B} - \frac{\bar{E}\wedge\bar{B}\wedge\bar{E}}{B^2}) = \frac{\bar{B}}{\gamma} = (\frac{B^2-E^2}{B^2})^{\frac{1}{2}}\bar{B} \end{cases} \tag{7}$$

Nel sistema di riferimento in movimento ho solo campo magnetico e vedo la carica muoversi nel piano con velocità $-\bar{v}$ lungo x.