



Câu 1. Phân tích SVD của ma trận A , $U\Sigma V^T$, trong đó $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9.$$

Chứng minh rằng f là hàm lồi chặt và tìm điểm cực tiểu toàn cục duy nhất của f .

Câu 3. Cho bảng số:

x	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0.5	2.5	0.6	3.3	0.7	3.8	0.8

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm dạng $f(x) = A\sqrt{x+1} + Bx$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Câu 4. Gọi X là tỷ lệ thời gian một sinh viên được chọn ngẫu nhiên phân bổ để làm bài kiểm tra năng khiếu nhất định, X có hàm mật độ:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

với $\theta > -1$. Một mẫu 10 sinh viên được khảo sát với thời gian như sau:

$x_1 = 0.92; x_2 = 0.79; x_3 = 0.90; x_4 = 0.65; x_5 = 0.86; x_6 = 0.47; x_7 = 0.73; x_8 = 0.97; x_9 = 0.94; \text{ và } x_{10} = 0.77.$

Sử dụng dữ liệu trên ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE.

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu trong khi làm bài thi.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.



Câu 1. Chéo hóa trực giao ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Câu 2. Xét hàm lỗi (loss function) của mô hình hồi quy tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2$, biết A là ma trận cỡ $m \times n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng

- (a) f là hàm lỗi khả vi;
- (b) Nêu thuật toán lặp gradient đối với hàm lỗi này.

Câu 3. Giả sử x_i là nhiệt độ của mẫu thứ i và y_i là độ bền tương ứng của một loại hợp kim nhất định được sản xuất ở các nhiệt độ khác nhau, các giá trị quan sát được cho trong bảng

x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	40	41	43	42	44	42	43	42

Hãy sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu tìm các tham số chưa biết nếu x và y thỏa $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

Câu 4. Giả sử X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x, \lambda, \theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$$

Với một mẫu 10 giá trị quan sát sau: 3.11, 0.64, 2.55, 2.20, 5.44, 3.42, 10.39, 8.93, 17.82 và 1.30, hãy ước lượng hai tham số λ, θ bằng phương pháp MLE.

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu trong khi làm bài thi.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.