

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Năm học 2025 - 2026

CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

- 1) Cho $z = \sqrt[3]{xy}$, tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$.
- 2) $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
- 3) $z = \ln \tan \frac{x}{y}$
- 4) $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$
- 5) $f(x, y) = e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$.
- 6) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$.
- 7) $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$
- 8) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$
- 9) $u = x^{y^2z}$
- 10) Cho $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = e^{x+y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
- 11) Cho $z = \ln(3x + 2y - 1)$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{dz}{dt}$.
- 12) Cho $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, f là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$
- 13) Cho $z = f(xy + y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$.
- 14) Cho $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$.

Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

- 1) Tính $y'(x)$ biết $y = y(x)$ hàm ẩn xác định hệ thức: $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
- 2) Tính $y'(x)$, $y''(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

- 3) Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.
- 4) Tính z'_x, z'_y và dz biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi
- (a) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$. (e) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$
- (b) $\arctan z + z^2 = e^{xy}$ (f) $2x + 3y + z = e^{xyz}$.
- (c) $z - ye^{x/z} = 0$
- (d) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ (g) $xyz = \cos(x + y + z)$
- 5) Tính $y'(x), z'(x)$ biết $y = y(x), z = z(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$
- 6) Tính u'_x, u'_y biết $u = x^2 + y^2 + xyz$ và $z = z(x, y)$ xác định bởi $ze^z = ye^x + xe^y$.

Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

- 1) Cho hàm số $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

- 2) Cho $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh rằng: $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$.

- 3) Tính $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ biết $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

- 4) Tính z''_{xy} biết hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$.

- 5) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$.

- 6) Tính $d^2 f(1, 1)$, biết: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$.

- 7) Tính $d^2 f(0, 1)$, biết: $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.

- 8) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$ tại điểm $(1, 2)$.

- 9) Tìm $d^2 z$ biết:

(a) $z = x^2 \ln(x + y)$

(b) $z = \arctan \frac{y}{x}$

Bài 4. Cực trị của hàm nhiều biến

- 1) Tìm cực trị các hàm sau:

- (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ (f) $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$
 (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy.$ (g) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy).$
 (c) $f(x, y) = xy + 1000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ (h) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$
 (d) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ (i) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy).$
 (e) $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$

2) Tìm cực trị có điều kiện:

- (a) $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$
 (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
 (c) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$
 (d) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

3) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- (a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 1, y = 1, x + y = 1.$
 (b) $f(x, y) = xy$ trên miền $D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$
 (c) $z = 1 + xy - x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 1$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = x^2 + 5^y$.

- (A) $dz = 2xdx + 5^y \ln 5dy.$ (B) $dz = 2xdx + 5^y \ln ydy.$
 (C) $dz = 2xdx + 5^{y-1}dy.$ (D) $dz = 2xdx + 5^{y-1} \ln 5dy.$

Câu 2. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = \ln \sqrt{x - y}.$

- (A) $dz = \frac{dy - dx}{2(x - y)}.$ (B) $dz = \frac{dx - dy}{2(x - y)}.$ (C) $dz = \frac{dx - dy}{x - y}.$ (D) $dz = \frac{dy - dx}{x - y}.$

Câu 3. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = \arctan(x - y).$

- (A) $dz = \frac{dx + dy}{1 + (x - y)^2}.$ (B) $dz = \frac{dx - dy}{1 + (x - y)^2}.$
 (C) $dz = \frac{dy - dx}{1 + (x - y)^2}.$ (D) $dz = \frac{-dx - dy}{1 + (x - y)^2}.$

Câu 4. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = x^2 + 2xy + \sin(x^3y^5).$

- (A) $dz = [4x + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$
 (B) $dz = [2x + 2xy + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$
 (C) $dz = [2x + 2y + 3x^2 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$
 (D) $dz = [2x + 2y + 3x^2y^5 \cos(x^3y^5)] dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)] dy.$

Câu 5. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = x^3 + y^2 - 4xy$.

(A) $d^2z = 6xdx^2 - 8dxdy + 2dy^2$.

(B) $d^2z = 6xdx^2 - 4dxdy + 2dy^2$.

(C) $d^2z = 6xdx^2 + 8dxdy + 2dy^2$.

(D) $d^2z = 6xdx^2 + 4dxdy + 2dy^2$.

Câu 6. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = y \ln x$.

(A) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy + \frac{1}{x}dy^2$.

(B) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$.

(C) $d^2z = \frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$.

(D) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 - \frac{2}{x}dxdy$.

Câu 7. Đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $f(x, y) = e^x(-x + 3y)$ là

(A) $-e^x(-x + 3y)$.

(B) $3e^x(-x + 3y)$.

(C) $-e^x$.

(D) $3e^x$.

Câu 8. Vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = x^2 + x \cos y$ tại điểm $(1; 0)$ là

(A) $2dx - dy$.

(B) $2xdx - x \sin y dy$.

(C) 2 .

(D) $3dx$.

Câu 9. Các điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$ là

(A) $M_1(0; 0)$ và $M_2(-1; 2)$.

(B) $M_1(0; 0)$ và $M_2(-2; -2)$.

(C) $M_1(1; 1)$ và $M_2(2; 2)$.

(D) $M_1(1; -1)$ và $M_2(-1; 2)$.

Câu 10. Đạo hàm riêng theo biến z của hàm số $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz^2}$ là

(A) $\frac{-2xyz}{y^2 + x^2z^4}$.

(B) $\frac{xy}{z^2 + x^2z^4}$.

(C) $\frac{2xyz}{x^2 + z^2y^4}$.

(D) $\frac{-2xy^2}{x^2 + z^2y^4}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

(A) $f''_{xx}(1; 2) = \frac{8}{9}$.

(B) $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{5}{6}$.

(C) $f''_{xx}(1; 2) = \frac{3}{25}$.

(D) $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{4}{5}$.

Câu 12. Cho hàm ẩn hai biến $z = z(x, y)$ xác định bởi $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Đạo hàm riêng của $z(x, y)$ theo biến x bằng

(A) $\frac{xye^{\frac{z}{x}}}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$.

(B) $\frac{e^{\frac{z}{x}}}{x^2 - xye^{\frac{z}{x}}}$.

(C) $\frac{yze^{\frac{z}{x}}}{xye^{\frac{z}{x}} - x^2}$.

(D) $\frac{x}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$, $(x \geq 0, y \geq 0)$. Điểm cực tiểu $M(x_0; y_0)$ của hàm số có $x_0 - y_0$ bằng

(A) -2 .

(B) 3 .

(C) -3 .

(D) 2 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x, y) = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

(A) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$.

(B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$.

(C) Hàm f không có điểm dừng.

(D) Hàm f có một cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$ với $x > 0, y > 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

(A) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

(B) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

(C) Hàm f có 2 điểm dừng.

(D) Hàm f có 3 điểm dừng.

Câu 16. Cho hàm số $f(x, y) = 2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}$ với $x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi$. Hãy chọn khẳng định đúng.

(A) Hàm f đạt cực đại tại $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$.

(B) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$.

(C) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$.

(D) Hàm f có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Câu 17. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $(1; -1)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; -1)$.
(C) Hàm f có 2 cực trị. (D) Hàm f không có cực trị.

Câu 18. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \ln |1 + x^2 y|$ với điều kiện $x - y - 3 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực tiểu tại $(0; -3)$ và cực đại tại $(2; -1)$.
(B) Hàm f đạt cực đại tại $(0; -3)$ và tại $(2; -1)$.
(C) Hàm f đạt cực đại tại $(0; -3)$ và cực tiểu tại $(2; -1)$.
(D) Hàm f đạt cực tiểu tại $(0; -3)$ và tại $(2; -1)$.

Câu 19. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2(y - 1) - 3x + 2$ với điều kiện $x - y + 1 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$ và cực đại tại $(-1; 0)$.
(B) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$ và tại $(-1; 0)$.
(C) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$ và cực tiểu tại $(-1; 0)$.
(D) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$ và tại $(-1; 0)$.

Câu 20. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 3x + 4y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và cực đại tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
(B) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
(C) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và cực tiểu tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
(D) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $M(1; 0)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $M(1; 0)$.
(C) Hàm f có một cực đại và một cực tiểu. (D) Hàm f không có cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $(0; 0)$.
(B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(2; 0)$ và tại $(-2; 0)$.
(C) Hàm f chỉ có đúng hai điểm dừng.
(D) Hàm f đạt cực đại tại $(2; 0)$ và tại $(-2; 0)$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - 2x + 5$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $M(0; 0)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0; 0)$.
(C) Hàm f có một điểm dừng. (D) Hàm f có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 24. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(0; 0)$.
 Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0; 0)$.
 Ⓒ Hàm f không có cực trị.
 Ⓓ Hàm f không có điểm dừng.

Câu 25. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(2; 1)$.
 Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(2; 1)$.
 Ⓒ Hàm f có đúng 2 điểm dừng.
 Ⓓ Hàm f có đúng 4 điểm dừng.

Câu 26. Cho hàm số $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x + 32y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(1; 2)$.
 Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(1; 2)$.
 Ⓒ Hàm f không có cực trị.
 Ⓓ Hàm f không có điểm dừng.

CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN NHIỀU LỚP

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các tích phân hai lớp sau:

- a) $I = \iint_D (x - y) dx dy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 2 - x^2$
- b) $I = \iint_D (x^2 + 2y) dx dy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$.
- c) $I = \iint_D (x + y) dx dy$; D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 0$, $x + y = 2$, $x + y = 4$.
- d) $I = \iint_D (x^3 + 4y) dx dy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = 0$; $x = \sqrt{y}$; $y = 2 - x$.
- e) $I = \iint_D xy dx dy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 1$, $x^2 + y^2 = 2x$.
- f) $I = \iint_D (3x + 4y) dx dy$, D là tam giác OBC , $O(0, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(2, 0)$.
- g) $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 2$, $xy = 1$, $y = x$.
- h) $I = \iint_D xy dx dy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$
- i) $I = \iint_D x^2 y dx dy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 1$
- j) $I = \iint_D (x + 2y) dx dy$, D là tam giác ABC , với $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(4, -2)$.

Bài 2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến:

a) $I = \iint_D (x^3 - y^3) dx dy$; D giới hạn bởi $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = 1$, $x - y = -1$.

b) $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$; D giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = x$, $y = -x$.

c) $I = \iint_D (1 + xy) dx dy$; với $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$

d) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $D = \{x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$

e) $I = \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$; trong đó $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$.

Bài 3. Tính các tích phân ba lớp sau:

a) $I = \iiint_V x dx dy dz$; V là tứ diện được giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $I = \iiint_V (z + x^2 + y^2) dx dy dz$; V được giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.

c) $I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$; V giới hạn bởi $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$; trong đó $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$

e) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$; trong đó $V = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho miền D được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

Tích phân $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ được đưa về tích phân lặp là

Ⓐ $I = \int_3^5 dy \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dx.$

Ⓑ $I = \int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dy.$

Ⓒ $I = \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} dy \int_3^5 f(x, y) dx.$

Ⓓ $I = \int_3^5 dy \int_{\frac{3x+4}{2}}^{\frac{3x+1}{2}} f(x, y) dx.$

Câu 2. Miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x + y \leq 0 \right\}$ được viết lại trong tọa độ cực là:

- Ⓐ $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}.$
 Ⓑ $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}.$
 Ⓒ $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}; 0 \leq r \leq -2 \sin \varphi \right\}.$
 Ⓓ $D_{r\varphi} = \left\{ (\varphi, r) \mid -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}; -2 \sin \varphi \leq r \leq 0 \right\}.$

Câu 3. Cho miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4y \right\}$. Tích phân hai lớp $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ được viết lại trong tọa độ cực là

- Ⓐ $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$ Ⓑ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$
 Ⓒ $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$ Ⓓ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$

Câu 4. Giá trị của tích phân $I = 2 \int_0^1 dy \int_0^y e^{x+y} dx$ là

- Ⓐ $I = e^2 - 1.$ Ⓑ $I = e^2 - 2e + 1.$ Ⓒ $I = e^2 + 2e + 1.$ Ⓓ $I = e^2 + 2e = 1.$

Câu 5. Giá trị của tích phân $I = \int_0^2 dx \int_0^{\ln x} 6xe^y dy$ là

- Ⓐ $I = 4.$ Ⓑ $I = 5.$ Ⓒ $I = 6.$ Ⓓ $I = 7.$

Câu 6. Cho miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \right\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D \frac{4xdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ là

- Ⓐ $I = 2\pi.$ Ⓑ $I = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) 2\pi.$ Ⓒ $I = 2\pi\sqrt{2}.$ Ⓓ $I = (\sqrt{2} - 1) 2\pi.$

Câu 7. Cho miền phẳng $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \right\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D x^2 y^3 dx dy$ là

- Ⓐ $I = \frac{2\pi}{15}.$ Ⓑ $I = \frac{4\pi}{15}.$ Ⓒ $I = \frac{2}{105}.$ Ⓓ $I = \frac{4}{105}.$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z + 1 = 0$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_\Omega dx dy dz$ được đưa về tích phân lặp là

- Ⓐ $I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$ Ⓑ $I = \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^0 dx \int_{-1-x-y}^0 f(x, y, z) dz.$
 Ⓒ $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$ Ⓓ $I = \int_{-1}^0 dx \int_{-1-y}^0 dy \int_{-1-x-y}^0 f(x, y, z) dz.$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 4$ và $z = x^2 + y^2$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ được viết trong tọa độ trụ là

(A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^4 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$
 (B) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_{r^2}^4 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$
 (C) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_4^{r^2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$
 (D) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r dr \int_4^{r^2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = 1$ và $x^2 + y^2 + 2y = 0$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ được viết trong tọa độ trụ là

(A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{-2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$
 (B) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{-2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$
 (C) $I = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$
 (D) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz.$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho khối $\Omega = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ được viết trong tọa độ cầu là

(A) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^4 r f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.$
 (B) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^4 r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.$
 (C) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 f(r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta) dr.$
 (D) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.$

Câu 12. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{y^2} dz$

(A) $I = \frac{1}{12}.$
 (B) $I = \frac{1}{6}.$
 (C) $I = \frac{1}{3}.$
 (D) $I = \frac{1}{2}.$

Câu 13. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ là

(A) $I = \frac{2\pi}{3}.$
 (B) $I = \frac{\pi}{3}.$
 (C) $I = \frac{4\pi}{3}.$
 (D) $I = \frac{\pi}{2}.$

Câu 14. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y = 1\}$. Giá trị của tích phân $I = \iint_D 2y dx dy$ là

(A) $I = \frac{8}{5}.$
 (B) $I = \frac{4}{3}.$
 (C) $I = \frac{2}{3}.$
 (D) $I = \frac{1}{5}.$

Câu 15. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$. Tích phân hai lớp $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được đưa về tích phân lặp là

Ⓐ $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x, y) dx.$

Ⓑ $I = \int_0^1 dy \int_0^{x^3} f(x, y) dx.$

Ⓒ $I = \int_0^1 dy \int_1^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$

Ⓓ $I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

Câu 16. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Tích phân hai lớp $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

được đưa về tích phân lặp là

Ⓐ $I = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

Ⓑ $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

Ⓒ $I = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

Ⓓ $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = 1$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Giá trị của tích phân $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ là

Ⓐ $I = 2\pi.$

Ⓑ $I = \pi.$

Ⓒ $I = 3\pi.$

Ⓓ $I = 4\pi.$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = 3$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Giá trị của tích phân $I = \iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2} + 1) dx dy dz$ là

Ⓐ $I = \frac{84\pi}{3}.$

Ⓑ $I = \frac{80\pi}{3}.$

Ⓒ $I = \frac{4\pi}{3}.$

Ⓓ $I = \frac{8\pi}{3}.$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho khối $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$. Tích phân ba lớp $I =$

$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ được viết trong tọa độ cầu là

Ⓐ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$

Ⓑ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r dr.$

Ⓒ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r dr.$

Ⓓ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$

Câu 20. Cho miền D được giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$. Tích phân bội hai

$I = \iint_D dx dy$ có giá trị là

Ⓐ $I = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Ⓑ $I = \frac{5}{12}.$

Ⓒ $I = \frac{5}{6}.$

Ⓓ $I = \frac{5}{3}.$

Câu 21. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$. Tích phân bội hai $I = \iint_D xy dx dy$ có giá trị là

(A) $I = 32$. (B) $I = 64$. (C) $I = 90$. (D) $I = 120$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho khối $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Giá trị của tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} 24xy^2z^3$ là

(A) $I = 1$. (B) $I = 2$. (C) $I = 3$. (D) $I = 4$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho khối Ω được giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = 1$. Giá trị của tích phân ba lớp $I = \iiint_{\Omega} 2z dx dy dz$ là

(A) $I = \frac{\pi}{2}$. (B) $I = \frac{3\pi}{2}$. (C) $I = 2\pi$. (D) $I = \pi$.

Câu 24. Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 2 - x$. Tích phân bội hai $I = \iint_D (x - y) dx dy$ có giá trị là

(A) $I = \frac{189}{20}$. (B) $I = -\frac{189}{20}$. (C) $I = -\frac{81}{20}$. (D) $I = \frac{81}{20}$.

Câu 25. Cho miền phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$. Tích phân bội hai $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + x) dx dy$ được viết lại trong tọa độ cực là

(A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r^2 d\varphi$. (B) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r^2 d\varphi$.

(C) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r d\varphi$. (D) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos\varphi) r d\varphi$.

CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính tích phân đường loại 1

a) $I = \int_{\widetilde{AB}} x^2 ds$, \widetilde{AB} là cung $y = \ln x$ và $A(1, 0)$, $B(e, 1)$.

b) $I = \int_{\widetilde{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, \widetilde{OA} là đoạn thẳng nối gốc $O(0, 0)$ với điểm $A(1, 2)$.

c) $I = \int_L (x^2 + y^2) ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$.

d) $I = \int_L (x + y)ds; \quad L : x^2 + y^2 = ax, \quad a > 0$

e) $I = \int_L (x + y + z)ds; \quad L$ là đường cong $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

f) $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds; \quad C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0$

g) $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds; \quad C : x^2 + y^2 = 2y.$

Bài 2. Tính tích phân đường loại 2

a) $I = \int_L ye^{xy}dx + x^4e^{xy}dy; \quad$ trong đó $L: y = x^2$ đi từ $A(0,0) \rightarrow B(1,1).$

b) $I = \int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}; \quad$ trong đó: $L : \begin{cases} x = R \cos^3 t \\ y = R \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$

c) $I = \oint_L |x|dx + |y|dy; \quad L$ là đường gấp khúc nối các điểm $A(1,0) \rightarrow B(0,2) \rightarrow C(-1,0) \rightarrow D(0,-2) \rightarrow A(1,0).$

d) $I = \oint_{L^+} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy, \quad L$ là biên của tam giác $\triangle LMN, \quad L(1,1), \quad M(2,2), \quad N(1,3).$

e) $I = \oint_{L^+} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy; \quad$ trong đó $L: x^2 + y^2 = ax, \quad a > 0.$

f) $I = \int_{(2,1)}^{(4,3)} e^{xy}(1 + xy)dx + x^2e^{xy}dy.$

g) $I = \oint_{L^+} (-x^2y)dx + xy^2dy; \quad L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

h) $I = \oint_{L^+} \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}; \quad L : x^2 + y^2 = 4.$

i) $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)dx + (x - y)dy.$

j) $I = \int_L (x + y + z)dx - xdy + xydz; \quad$ trong đó L là đoạn thẳng đi từ $A(1,2,3)$ đến $B(2,4,5).$

Bài 3. Tính tích phân mặt loại 1

- a) $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$; S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.
- b) $I = \iint_S (x^2 + z^2) dS$; trong đó S là phần mặt $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, $z \geq 1$.
- c) $I = \iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$; S là phần mặt $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
- d) $\iint_S xyz dS$, S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ giới hạn bởi $z = 1$.
- e) $I = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$; trong đó S là phần mặt $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Bài 4. Tính tích phân mặt loại 2

- a) $I = \iint_S z dx dy$; S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z \geq 0$.
- b) $I = \iint_S yz dx dy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
- c) $I = \iint_S y^2 dx dz + z^2 dx dy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường cong C có phương trình tham số $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$. Giá trị của tích phân $I = \int_C x^2 ds$ là

- (A) $I = 2\pi$. (B) $I = 4\pi$. (C) $I = 6\pi$. (D) $I = 8\pi$.

Câu 2. Cho đường cong L là đoạn thẳng nối điểm $A(0, 2)$ và điểm $B(-2, -3)$. Giá trị của tích phân $I = \int_L (x^2 - y) ds$ là

- (A) $I = \frac{13}{6} \sqrt{29}$. (B) $I = \frac{13}{8} \sqrt{29}$. (C) $I = \frac{11}{6} \sqrt{29}$. (D) $I = \frac{11}{8} \sqrt{29}$.

Câu 3. Cho đường cong \widetilde{OA} có phương trình $y = x^2$ nối điểm $O(0, 0)$ và điểm $A(-2, 4)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{OA}} \frac{3y}{\sqrt{4x^2 + 1}} ds$ là

- (A) $I = 12$. (B) $I = -12$. (C) $I = -8$. (D) $I = 8$.

Câu 4. Cho đường tròn C có phương trình $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Giá trị của tích phân $I = \int_C (x^2 + y^2) ds$ là

- (A) $I = 4\pi\sqrt{2}$. (B) $I = 4\pi$. (C) $I = 8\pi$. (D) $I = 8\pi\sqrt{2}$.

Câu 5. Một dây thép có dạng đoạn thẳng trong mặt phẳng Oxy nối điểm $A(1, 1)$ và điểm $B(3, -5)$ với hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y) = (x - y)^2$. Khối lượng của dây thép đã cho là

- (A) $m = \frac{16}{3}\sqrt{10}$. (B) $m = \frac{32}{3}\sqrt{10}$. (C) $m = \frac{125}{3}\sqrt{10}$. (D) $m = \frac{128}{3}\sqrt{10}$.

Câu 6. Một dây thép có dạng parabol $y = x^2$ trong mặt phẳng Oxy nối điểm $O(0, 0)$ và điểm $A(1, 1)$ với hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y) = x\sqrt{1 + 4y}$. Khối lượng của dây thép đã cho là

- (A) $m = \frac{3}{4}$. (B) $m = \frac{4}{3}$. (C) $m = \frac{3}{2}$. (D) $m = \frac{2}{3}$.

Câu 7. Cho đường cong \widetilde{AB} có phương trình tham số $x = t^2$, $y = 4 - t$ với $A(0, 4)$ và $B(4, 6)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{AB}} x dx + (x - y) dy$ là

- (A) $I = \frac{2}{3}$. (B) $I = -\frac{2}{3}$. (C) $I = \frac{34}{3}$. (D) $I = -\frac{34}{3}$.

Câu 8. Tích phân không phụ thuộc vào các đường trơn từng khúc nối hai điểm A và B là

- (A) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x) dx + (y^4 + 2y - x) dy$.
 (B) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x - 1) dx + (y^4 + 6x^2y^2 - 1) dy$.
 (C) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x) dx - (y^4 + 2y - x) dy$.
 (D) $I = \int_{\widetilde{AB}} (4xy^3 + 2x - 1) dx - (y^4 + 6x^2y^2 - 1) dy$.

Câu 9. Cho đường cong \widetilde{AB} có phương trình $y = \ln x$ với $A(1, 0)$ và $B(e, 1)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{AB}} 5x^4y^5 dx + 5x^5y^4 dy$ là

- (A) $I = 0$. (B) $I = -e^3$. (C) $I = e^5$. (D) $I = -e^5$.

Câu 10. Cho đường cong \widetilde{AB} có phương trình $y = x^3 - 3x + 2$ với $A(1, 0)$ và $B(0, 2)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\widetilde{AB}} e^y dx + xe^y dy$ là

- (A) $I = 1$. (B) $I = -1$. (C) $I = e$. (D) $I = -e$.

Câu 11. Công sinh ra khi lực $\vec{F}(x, y) = 3x^2\vec{i} + 2y\vec{j}$ tác động lên chất điểm $M(x, y)$ làm dịch chuyển từ điểm $A(2, 4)$ đến điểm $B(-1, 1)$ trên đường cong $C: y = x^2$ là

- (A) $W = -24$. (B) $W = 24$. (C) $W = -12$. (D) $W = 12$.

Câu 12. Công sinh ra khi lực $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - xy\vec{j} - xyz\vec{k}$ tác động lên chất điểm $M(x, y, z)$ làm dịch chuyển từ điểm $A(1, 1, -1)$ đến điểm $B(1, 0, 0)$ trên đường cong $C: x = 1, y = t^2, z = -t$ là

(A) $W = -\frac{1}{4}$. (B) $W = \frac{1}{4}$. (C) $W = \frac{3}{4}$. (D) $W = -\frac{3}{4}$.

Câu 13. Cho tích phân $I = \iint_S x dS$, trong đó S là hình $\triangle ABC$ với $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

Giá trị của tích phân I là

(A) $I = \frac{\sqrt{21}}{3}$. (B) $I = \frac{\sqrt{21}}{4}$. (C) $I = \frac{\sqrt{21}}{5}$. (D) $I = \frac{\sqrt{21}}{6}$.

Câu 14. Cho S là phần mặt parabolic có phương trình $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 4$. Giá trị của tích phân $I = \iint_S z dS$ là

(A) $I = \frac{391\sqrt{17} + 1}{120}\pi$. (B) $I = \frac{391\sqrt{17}}{120}\pi$. (C) $I = \frac{391\sqrt{17} + 1}{60}\pi$. (D) $I = \frac{391\sqrt{17}}{60}\pi$.

Câu 15. Diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm phía dưới mặt phẳng $z = 1$ là

(A) $S = 4\pi\sqrt{2}$. (B) $S = 3\pi\sqrt{2}$. (C) $S = 2\pi\sqrt{2}$. (D) $S = \pi\sqrt{2}$.

Câu 16. Diện tích của phần mặt parabolic $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2y = 0$ được tính theo công thức

(A) $S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+r^2}dr$. (B) $S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+4r^2}dr$.
 (C) $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\sqrt{1+8r^2}dr$. (D) $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} r\sqrt{1+16r^2}dr$.

Câu 17. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S x dx dy - y dz dx + z dy dz$ với S là một phần mặt phía trên của mặt phẳng $x + 2y - 2z = 0$ có biểu diễn thành tích phân mặt loại một là

(A) $I = \frac{1}{3} \iint_S (x - 2y - 2z) dS$. (B) $I = -\frac{1}{3} \iint_S (2x - 2y + z) dS$.
 (C) $I = -\frac{1}{3} \iint_S (x - 2y - 2z) dS$. (D) $I = \frac{1}{3} \iint_S (2x + 2y - z) dS$.

Câu 18. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S dx dy$ với S là một phần mặt phía dưới của mặt phẳng $z = 2$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, có giá trị là

(A) $I = \pi$. (B) $I = -\pi$. (C) $I = 2\pi$. (D) $I = -2\pi$.

Câu 19. Tích phân mặt loại hai $I = 12 \iint_S x dx dy$ với S là một phần mặt phía trên của mặt phẳng $z = 2$ được giới hạn bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x + y \leq 1$ có giá trị là

(A) $I = 1$. (B) $I = 4$. (C) $I = 2$. (D) $I = 3$.

Câu 20. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S 4y^2 z dx dy + x^2 y dx dz + x^3 dy dz$, với S là mặt biên ngoài của vật thể được giới hạn bởi $z = 2$, $z = 0$ và $x^2 + y^2 = 1$, có giá trị là

(A) $I = \pi$. (B) $I = 2\pi$. (C) $I = 4\pi$. (D) $I = 8\pi$.

Câu 21. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S x^2 z dx dy + x z^2 dy dz + \frac{y^3}{3} dz dx$, với S là mặt biên ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, có giá trị là

(A) $I = \frac{\pi}{5}$. (B) $I = \frac{2\pi}{5}$. (C) $I = \frac{3\pi}{5}$. (D) $I = \frac{4\pi}{5}$.

Câu 22. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S 3x dy dz + 2z dz dx + dx dy$, với S là mặt biên ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, có giá trị là

(A) $I = \pi$. (B) $I = 2\pi$. (C) $I = 4\pi$. (D) $I = 8\pi$.

Câu 23. Tích phân mặt loại hai $I = \iint_S x^2 dy dz + z^2 dx dy$, với S là mặt biên ngoài của vật thể bị chặn được giới hạn bởi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = 1$, có giá trị là

(A) $I = \frac{\pi}{2}$. (B) $I = \frac{3\pi}{4}$. (C) $I = \frac{2\pi}{3}$. (D) $I = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 24. Cho S là một phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$ có hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Khối lượng của S là

(A) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. (B) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. (C) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. (D) $m = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Câu 25. Cho S là một phần của mặt parabolic $z = x^2 + y^2$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 4$ có hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z}$. Khối lượng của S được tính theo công thức

(A) $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(1 + 4r^2) dr$. (B) $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr$.

(C) $m = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r(1 + 4r^2) dr$. (D) $m = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr$.

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình tách biến

(1) $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$

(3) $y' = (x + y + 1)^2$

(2) $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$

(4) $y' = \cos(x - y - 1)$

Bài 2 . Giải các phương trình đẳng cấp

(1) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

(4) $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$

(2) $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$

(5) $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$

(3) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$

(6) $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

(1) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

(4) $(x^2 + y)dx = xdy$

(2) $y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, \quad y(2) = 1.$

(5) $(y + \ln x)dx - xdy = 0$

(3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(6) $y' \cos y + \sin y = x$

Bài 4. Giải các phương trình Bernoulli

(1) $y' - 2xy = 3x^3y^2$

(4) $xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$

(2) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

(5) $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$

(3) $y' + 2y = y^2e^x$

(6) $xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

(1) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0; \quad y(0) = 0.$

(3) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

(2) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(4) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

Bài 6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

(1) $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$

(7) $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$

(2) $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$

(8) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$

(3) $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

(9) $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$

(4) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$

(10) $y'' + y = 4xe^x$

(5) $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2;$

(11) $y'' + y = 6 \sin x$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

(12) $y'' - 2y' + y = xe^x$

(6) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},$

(13) $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$

$y(2) = y'(2) = 0$

(14) $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình vi phân $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ có nghiệm tổng quát là

(A) $y = C - \sin(\arctan x).$

(B) $y = \sin(C - \arctan x).$

(C) $y = \sin C - \sin(\arctan x).$

(D) $y = \arctan(C - \sin x).$

Câu 2. Phương trình vi phân $x(y^2 + 1)dx = y(x^2 + 1)dy$ có nghiệm tổng quát là

(A) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C.$

(B) $(x^2 + 1) + (y^2 + 1) = C.$

(C) $(y^2 + 1) = (x^2 + 1) + C.$

(D) $y^2 = C(x^2 + 1) - 1.$

Câu 3. Phương trình vi phân $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$ với điều kiện $y(1) = 1$ có nghiệm là

- (A) $x^2 = ye^{2-x-y}$. (B) $y^2 = xe^{2-x-y}$. (C) $x^2y = e^{2-x-y}$. (D) xy^2ye^{2-x-y} .

Câu 4. Phương trình vi phân $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

- (A) $e^y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. (B) $e^x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$.
(C) $e^y = \tan\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$. (D) $e^x = \tan\left(e^y + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

Câu 5. Phương trình vi phân $y \ln^3 y + \sqrt{x+1}y' = 0$ với điều kiện $y(0) = e$ có nghiệm là

- (A) $\ln^2 y = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}$. (B) $2\ln^2 y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 1$.
(C) $\frac{1}{2\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}$. (D) $\frac{1}{\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - 1$.

Câu 6. Phương trình vi phân $(xy' - y) \arctan \frac{y}{x} = x$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$. (B) $x^2 + y^2 = Ce^{2\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$.
(C) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} + \arctan \frac{y}{x}}$. (D) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x}}$.

Câu 7. Phương trình vi phân $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$ với điều kiện $y(1) = \frac{\pi}{2}$ có nghiệm là

- (A) $1 - \cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right)$. (B) $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right) - 1$.
(C) $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right) + 1$. (D) $\cos \frac{y}{x} - 1 = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Câu 8. Phương trình vi phân $xy' = y + x$ với điều kiện $y(1) = 2$ có nghiệm là

- (A) $y = x(\ln x + 2x)$. (B) $y = x \ln x + 2$. (C) $y = 2(\ln x + x)$. (D) $y = x(\ln x + 2)$.

Câu 9. Phương trình vi phân $xy' = 2y - 2\sqrt{xy}$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C + \sqrt{x}$. (B) $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C - \sqrt{x}$.
(C) $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C\sqrt{x}$. (D) $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C\sqrt{x}$.

Câu 10. Phương trình vi phân $(2xy + \sin y) dx + (x^2 + x \cos y) dy = 0$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $x^2y + x \sin y = C$. (B) $x^2y + x \cos y = C$.
(C) $2x^2y + x \sin y + xy = C$. (D) $x^2y + 2x \sin y = C$.

Câu 11. Phương trình vi phân $(e^{x+y} + 3x^2) dx + (e^{x+y} + 4y^3) dy = 0$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

- (A) $y^3 + x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$. (B) $y^4 + x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$.
(C) $y^3 - x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$. (D) $y^4 - x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$.

Câu 12. Phương trình vi phân $xy' - y = x^2 \cos x$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + C$. (B) $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + Cx$.
(C) $y = x \sin x + C$. (D) $y = x \sin x + Cx$.

Câu 13. Phương trình vi phân $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y^4 = \frac{1}{x^3(C - e^{-x})}$. (B) $y^4 = \frac{1}{x^2(C - e^{-x})}$.
(C) $y^4 = \frac{1}{x^3(C + e^x)}$. (D) $y^4 = \frac{1}{x^2(C + e^x)}$.

Câu 14. Phương trình vi phân $y' + \frac{4}{x}y = \frac{3}{x^4}$ với điều kiện $y(1) = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{3(x-1)}{x^4}$. Ⓑ $y = \frac{3(1-x)}{x^4}$. Ⓒ $y = \frac{3(x-1)}{x^5}$. Ⓓ $y = \frac{3(1-x)}{x^5}$.

Câu 15. Phương trình vi phân $\sqrt{1-x^2}y' + y = \arcsin x$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \arcsin x + e^{\arcsin x} - 1$. Ⓑ $y = \arcsin x + e^{-\arcsin x} - 1$.
Ⓒ $y = \arcsin x - e^{\arcsin x} + 1$. Ⓓ $y = \arcsin x - e^{-\arcsin x} + 1$.

Câu 16. Phương trình vi phân $y'' - 4y' + 3y = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Ⓑ $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
Ⓒ $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Ⓓ $y = C_1x^3 + C_2x$.

Câu 17. Phương trình vi phân $y'' + 2y' + 2y = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Ⓑ $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
Ⓒ $y = e^x (C_1 \cos(-x) + C_2 \sin(-x))$. Ⓓ $y = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$.

Câu 18. Phương trình vi phân $y'' + 3y' = 0$ với điều kiện $y(0) = 1$ và $y'(0) = 2$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{1}{2} (5 - 3e^{3x})$. Ⓑ $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{3x})$. Ⓒ $y = \frac{1}{2} (5 - 3e^{-3x})$. Ⓓ $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{-3x})$.

Câu 19. Phương trình vi phân $y'' + 9y = 0$ với điều kiện $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x - \sin 3x)$. Ⓑ $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x + \sin 3x)$.
Ⓒ $y = \frac{6 - \sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x$. Ⓓ $y = \frac{6 + \sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x$.

Câu 20. Phương trình vi phân $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$ với điều kiện $y(0) = 3$ và $y'(0) = 9$ có nghiệm là

Ⓐ $y = e^{5x} + e^{3x} + e^x$. Ⓑ $y = 2e^{5x} + e^{3x} - e^x$.
Ⓒ $y = \frac{1}{8} (e^{5x} + 22e^{3x} + e^x)$. Ⓓ $y = \frac{1}{2} (-e^{5x} + 5e^{3x} + 2e^x)$.

Câu 21. Phương trình vi phân $y'' - 6y' + 5 = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1e^x + C_2e^{5x} - x$. Ⓑ $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + x + 1$.
Ⓒ $y = C_1 + C_2e^{6x} - \frac{5}{6}x$. Ⓓ $y = C_1 + C_2e^{6x} + \frac{5}{6}x$.

Câu 22. Phương trình vi phân $y'' + 4y + 4 = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1 + C_2e^{-4x} - 1$. Ⓑ $y = C_1 + C_2 \cos 2x - 1$.
Ⓒ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 1$. Ⓓ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1$.

Câu 23. Phương trình vi phân $y'' + 2y' - 3y = e^x \cos x + 3xe^x \sin x$ có dạng nghiệm riêng là

Ⓐ $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$. Ⓑ $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$.
Ⓒ $y^* = e^x (A \cos x + B \sin x)$. Ⓓ $y^* = xe^x (A \cos x + B \sin x)$.

Câu 24. Phương trình vi phân $y'' - 2y' + 2y = e^x [(x^2 + 1) \cos x + x \sin x]$ có dạng nghiệm riêng là

Ⓐ $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$.

Ⓑ $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x].$

Ⓒ $y^* = e^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x].$

Ⓓ $y^* = xe^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x].$

Câu 25. Phương trình vi phân $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x).$

Ⓑ $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x).$

Ⓒ $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x).$

Ⓓ $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x).$

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 1

1. A	2. B	3. B	4. C	5. A	6. B	7. D	8. D	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. C	15. A	16. C	17. B	18. B	19. A	20. C
21. B	22. B	23. C	24. B	25. D	26. C				

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 2

1. B	2. C	3. A	4. B	5. A	6. A	7. A	8. D	9. A	10. B
11. D	12. A	13. A	14. A	15. A	16. C	17. A	18. A	19. C	20. B
21. A	22. A	23. D	24. B	25. A					

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 3

1. B	2. C	3. D	4. B	5. D	6. C	7. A	8. B	9. C	10. B
11. B	12. C	13. A	14. C	15. D	16. B	17. C	18. B	19. C	20. C
21. D	22. C	23. A	24. A	25. A					

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 4

1. B	2. D	3. A	4. C	5. C	6. B	7. D	8. D	9. D	10. A
11. B	12. D	13. C	14. A	15. B	16. A	17. B	18. D	19. B	20. C
21. D	22. C	23. A	24. D	25. B					