

BÀI TẬP GIẢI TÍCH (KINH TẾ)

Năm học 2025 - 2026

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ MỘT BIẾN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính giới hạn

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(1+x) - \pi}{x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 5} \right)^{2x^2 + x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x^2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \arctan x}{\pi} \right)^x$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan x)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+2x} - e^x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tan x}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^x$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{2x}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-5} \right)^{x^2}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{3x}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^2)^{\cot^2 x}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{4x}$$

Bài 2. Xét tính liên tục

$$1) f(x) = \begin{cases} \sin x \ln x & \text{với } x > 0 \\ a + x & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{với } x > 0 \\ a & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} & \text{nếu } x > \pi \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq \pi \end{cases}$$

Bài 3. Tích phân bất định

$$1) \int \frac{x + x^3}{1 + x^2 - x^4} dx$$

$$2) \int \frac{x^6}{x^2 + x - 2} dx$$

$$3) \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

$$4) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$$

$$5) \int \frac{2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$6) \int \frac{x}{x^8 - 1} dx$$

$$7) \int \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

$$8) \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}$$

$$9) \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$10) \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$11) \int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$

$$12) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}$$

$$13) \int \frac{x \cdot \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$14) \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$15) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$$

$$16) \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$$

$$17) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$$

$$18) \int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$$

$$19) \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

$$20) \int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

$$21) \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$$

$$22) \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$$

$$23) \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$28) \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}$$

$$24) \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

$$29) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+x}}$$

$$25) \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$$

$$30) \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$26) \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

$$31) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$$

$$27) \int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$$

$$32) \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$$

Bài 4. Tích phân xác định

$$1) \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$7) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$$

$$2) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$3) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$9) \int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \cdot dx$$

$$4) \int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$10) \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx$$

$$5) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{5x+1}} \cdot dx$$

$$11) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$$

$$6) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$12) \int_1^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

I. Giới hạn, liên tục của hàm một biến

Câu 1. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) $\frac{1}{4}$.

Câu 2. Tìm các giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ và $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

(A) $L_1 = \frac{3}{2}$ và $L_2 = \frac{1}{3}$. (B) $L_1 = 0$ và $L_2 = 1$. (C) $L_1 = \frac{1}{2}$ và $L_2 = 1$. (D) $L_1 = 1$ và $L_2 = \frac{1}{2}$.

Câu 3. Tìm các giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right)$ và $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right)$
 (A) $L_1 = -\infty, L_2 = 2.$ (B) $L_1 = 2, L_2 = +\infty.$ (C) $L_1 = 1, L_2 = 2.$ (D) $L_1 = 2, L_2 = 1.$

Câu 4. Tìm các giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2^x}{2 + 3^x} + \frac{\sin x}{x} \right)$ và $L_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + 2^x}{2 + 3^x} + \frac{\sin x}{x} \right)$
 (A) $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = 0.$ (B) $L_1 = \frac{3}{2}, L_2 = \frac{1}{3}.$ (C) $L_1 = 0, L_2 = 1.$ (D) $L_1 = 0, L_2 = \frac{1}{2}.$

Câu 5. Tìm các giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 7^x}{2 + 5^x} + x \sin \frac{1}{x} \right)$ và $L_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + 7^x}{2 + 5^x} + x \sin \frac{1}{x} \right)$
 (A) $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = 0.$ (B) $L_1 = +\infty, L_2 = \frac{3}{2}.$
 (C) $L_1 = \frac{3}{2}, L_2 = +\infty.$ (D) $L_1 = 1, L_2 = \frac{1}{2}.$

Câu 6. Tìm các giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + e^{\frac{1}{x}} + x \arctan \frac{1}{x} \right)$ và $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + e^{\frac{1}{x}} + x \arctan \frac{1}{x} \right)$

(A) $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = 0.$ (B) $L_1 = +\infty, L_2 = \frac{3}{2}.$
 (C) $L_1 = 1, L_2 = +\infty.$ (D) $L_1 = +\infty, L_2 = 1.$

Câu 7. Tìm các giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x})$ và $L_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x})$

(A) $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = 0.$ (B) $L_1 = +\infty, L_2 = \frac{3}{2}.$
 (C) $L_1 = 1, L_2 = -\infty.$ (D) $L_1 = 1, L_2 = \frac{1}{2}.$

Câu 8. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x)$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) $+\infty.$

Câu 9. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x})$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Câu 10. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 5} \right)^x$

(A) $e^3.$ (B) $e^4.$ (C) 1. (D) $e^{-6}.$

Câu 11. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

(A) $e^3.$ (B) $e^4.$ (C) $e.$ (D) $\sqrt[4]{e}.$

Câu 12. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$

(A) $e^{-6}.$ (B) $\frac{1}{\sqrt{e}}.$ (C) $e^4.$ (D) $\sqrt[4]{e}.$

Câu 13. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{2}{x^2}}$

(A) $e^{-9}.$ (B) $\frac{1}{\sqrt{e}}.$ (C) $e^4.$ (D) $\sqrt[4]{e}.$

Câu 14. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\cot x}$

(A) $e^{-9}.$ (B) $\frac{1}{\sqrt{e}}.$ (C) $e.$ (D) $\sqrt[4]{e}.$

Câu 15. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

(A) 1.

(B) $\frac{1}{9}$.

(C) 3.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 16. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(m+e^x)}{x}$, $m > 0$

(A) m .

(B) $2m$.

(C) $-m$.

(D) 0.

Câu 17. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan^4 x)}{x^2 \sin^2 x}$

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) $+\infty$.

Câu 18. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$

(A) $\ln \frac{5}{4}$.

(B) $\ln \frac{4}{5}$.

(C) $\ln 5$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 19. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x-1}} \right)$

(A) 1.

(B) -1.

(C) 2.

(D) 0.

Câu 20. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} \right)$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) $-\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

Câu 21. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$.

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 22. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(m+e^x)}{x}$, $m > 0$.

(A) m .

(B) 1.

(C) $-m$.

(D) 0.

Câu 23. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(x-1)^{n-1}}$, $n \geq 2$.

(A) $\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

(B) $\frac{(-1)^n}{n!}$.

(C) $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

(D) $\frac{1}{n!}$.

Câu 24. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{mx} - 1}{x \ln x}$.

(A) $2m$.

(B) m .

(C) $-m$.

(D) $m+1$.

Câu 25. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x + \sin^2 x}{4x + \arcsin^2 x + x^2}$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) -1.

(D) 0.

Câu 26. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ m, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

(A) $m = 1$.

(B) $m = 2$.

(C) $m = 3$.

(D) $m = 0$.

Câu 27. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1+2m, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 3$. Ⓓ Không tồn tại m .

Câu 28. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi - \pi x)}{x^2 - 1}, & \text{nếu } x < 1 \\ \frac{x^2 + 3x + m}{x^2 + 1}, & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = \pi - 4$. Ⓓ $m = -\pi - 4$.

Câu 29. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{nếu } x < 1 \\ \frac{x^2 + 3x + m}{x^2 + 1}, & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = \pi - 4$. Ⓓ $m = -\pi - 4$.

Câu 30. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x + 2 \tan^2 x}{x^2}, & \text{nếu } x < 0 \\ \cos^2 x + 2m, & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

- Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = 3$.

Câu 31. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x \arcsin x}{\ln(1+x^2)}, & \text{nếu } x \in (-1; 1) \setminus \{0\} \\ 1 + 3m, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

- Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = 3$.

Câu 32. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 + 2m, & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 3$. Ⓓ Không tồn tại m .

Câu 33. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \tan^4 x)}{x \sin x}, & \text{nếu } x \in (-1; 1) \setminus \{0\} \\ m, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 0$. Ⓓ Không tồn tại m .

Câu 34. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x}{x}, & \text{nếu } x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\} \\ m, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

- Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ Không tồn tại m .

II. Đạo hàm của hàm một biến

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$.

- Ⓐ $f'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$. Ⓑ $f'(x) = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x}$.
Ⓒ $f'(x) = \frac{e^x(-\sin x + \cos x)}{\sin^2 x}$. Ⓓ $f'(x) = \frac{e^x}{\cos x}$.

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = (1+x)^x, x > 1$.

- Ⓐ $f'(x) = (1+x)^x \left[\ln(1+x) + \frac{x}{x+1} \right]$. Ⓑ $f'(x) = (1+x)^x \left[\ln(1+x) - \frac{x}{x+1} \right]$.

Ⓒ $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$.

Ⓓ $f'(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$.

Câu 37. Tính vi phân của hàm $y = (3x)^x$.

Ⓐ $dy = (3x)^x (\ln 3x + 3) dx$.

Ⓑ $dy = (\ln 3x + 1) dx$.

Ⓒ $dy = (3x)^x (\ln 3x + 1) dx$.

Ⓓ $dy = (\ln 3x + 3) dx$.

Câu 38. Tính vi phân dy của hàm $y = \arctan\left(\frac{\ln x}{3}\right)$.

Ⓐ $dy = -\frac{3}{x(9 + \ln^2 x)} dx$.

Ⓑ $dy = \frac{3}{x(1 + \ln^2 x)} dx$.

Ⓒ $dy = \frac{1}{x(9 + \ln^2 x)} dx$.

Ⓓ $dy = \frac{3}{x(9 + \ln^2 x)} dx$.

Câu 39. Tính vi phân cấp 2 của hàm $y = \ln(1+x^2)$.

Ⓐ $d^2y = \frac{2x^2 - 2}{(1+x^2)^2} dx^2$.

Ⓑ $d^2y = \frac{2x^2 + 2}{(1+x^2)^2} dx^2$.

Ⓒ $d^2y = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} dx^2$.

Ⓓ $d^2y = -\frac{2x^2 + 2}{(1+x^2)^2} dx^2$.

Câu 40. Tính vi phân cấp 2 của hàm $y = \arctan(x^2)$.

Ⓐ $d^2y = \frac{2 + 6x^4}{(1+x^4)^2} dx^2$.

Ⓑ $d^2y = \frac{2 - 6x^4}{(1+x^4)^2} dx^2$.

Ⓒ $d^2y = \frac{6x^4 - 2}{(1+x^4)^2} dx^2$.

Ⓓ $d^2y = -\frac{2 + 6x^4}{(1+x^4)^2} dx^2$.

Câu 41. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2024]{x} - 1}{\sqrt[2025]{x} - 1}$

Ⓐ $\frac{2024}{2025}$.

Ⓑ $\frac{2025}{2024}$.

Ⓒ 0.

Ⓓ $+\infty$.

Câu 42. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 x}, & \text{nếu } x \in (-1; 1) \setminus \{0\} \\ 3m - 1, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

Ⓐ $m = 1$.

Ⓑ $m = 2$.

Ⓒ $m = 3$.

Ⓓ $m = 0$.

Câu 43. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{2x^2}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2m, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

Ⓐ $m = 0$.

Ⓑ $m = 2$.

Ⓒ $m = 3$.

Ⓓ $m = 1$.

Câu 44. Xác định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{\sin^2 x}, & \text{nếu } -1 < x < 0 \\ m - \frac{1}{2}, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

Ⓐ $m = 3$.

Ⓑ $m = 2$.

Ⓒ $m = 1$.

Ⓓ $m = 0$.

Câu 45. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Ⓐ 1.

Ⓑ $\sqrt[3]{e}$.

Ⓒ \sqrt{e} .

Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Câu 46. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$.

Ⓐ $-\frac{1}{144}$.

Ⓑ $\frac{1}{144}$.

Ⓒ $\frac{1}{36}$.

Ⓓ $-\frac{1}{36}$.

Câu 47. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+2x} - 2}{\sqrt[4]{x+16} - 2}$.

(A) $\frac{2}{5}$.

(B) $-\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{4}{5}$.

(D) $-\frac{4}{5}$.

Câu 48. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - 1 - x}$.

(A) $\frac{2}{5}$.

(B) $-\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 49. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 2x + x^2)^{\cot^3 x}$.

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) $+\infty$.

Câu 50. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin^2 x)^{\cot^2 x}$.

(A) e .

(B) \sqrt{e} .

(C) $\sqrt[3]{e}$.

(D) $\sqrt[4]{e}$.

III. Tích phân bất định

Câu 51. Tính $I = \int \frac{3}{x+a} dx$.

(A) $I = 3|x+a| + C$.

(B) $I = 3 \ln(x+a) + C$.

(C) $I = -3 \ln(x+a) + C$.

(D) $I = 3 \ln|x+a| + C$.

Câu 52. Tính $I = \int \frac{3}{(x+a)^2} dx$.

(A) $I = -\frac{3}{x+a} + C$.

(B) $I = 3 \ln(x+a) + C$.

(C) $I = \frac{3}{x+a} + C$.

(D) $I = 3|x+a| + C$.

Câu 53. Tính $I = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

(A) $I = \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C$.

(B) $I = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$.

(C) $I = \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) + C$.

(D) $I = \ln \left(\frac{x-2}{x-1} \right) + C$.

Câu 54. Tính $I = \int \sin(3x+1) dx$.

(A) $I = \frac{\cos(3x+1)}{3} + C$.

(B) $I = -\frac{\cos(3x+1)}{3} + C$.

(C) $I = \cos(3x+1) + C$.

(D) $I = -\cos(3x+1) + C$.

Câu 55. Tính $I = \int \cos(5x-2) dx$.

(A) $I = \frac{\sin(5x-2)}{5} + C$.

(B) $I = -\frac{\sin(5x-2)}{5} + C$.

(C) $I = \sin(5x-2) + C$.

(D) $I = -\sin(5x-2) + C$.

Câu 56. Tính $I = \int \frac{dx}{4x-1}$.

(A) $I = \frac{\ln|4x-1|}{4} + C$.

(B) $I = \frac{\ln(4x-1)}{4} + C$.

(C) $I = \ln(4x-2) + C$.

(D) $I = \ln(4x-1) + C$.

Câu 57. Tính $I = \int \frac{e^3}{e^{2x}} dx$.

- Ⓐ $I = \frac{e^{3-2x}}{2} + C$. Ⓑ $I = -\frac{e^{3-2x}}{2} + C$. Ⓒ $I = e^{3-2x} + C$. Ⓓ $I = -e^{3-2x} + C$.

Câu 58. Tính $I = \int (2^x + x^2) dx$.

- Ⓐ $I = 2^x + x^3 + C$. Ⓑ $I = 2^x + \frac{x^3}{3} + C$. Ⓒ $I = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + C$. Ⓓ $I = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C$.

Câu 59. Tính $I = \int \frac{dx}{7x-3}$.

- Ⓐ $I = \frac{\ln(7x-3)}{7} + C$. Ⓑ $I = \ln|7x-3| + C$.
Ⓒ $I = \ln(7x-3) + C$. Ⓓ $I = \frac{\ln|7x-3|}{7} + C$.

Câu 60. Tính $I = \int 5^{3x+1} dx$.

- Ⓐ $I = 5^{3x+1} + C$. Ⓑ $I = \frac{5^{3x+1}}{3 \ln 5} + C$. Ⓒ $I = 5^{3x} + C$. Ⓓ $I = \frac{5^{3x+1}}{3} + C$.

Câu 61. Tính $I = \int \sin x \cos x dx$.

- Ⓐ $I = -\frac{\cos 2x}{4} + C$. Ⓑ $I = \cos 2x + C$. Ⓒ $I = \sin 2x + C$. Ⓓ $I = -\sin 2x + C$.

Câu 62. Tính $I = \int \sqrt{9^x + 9^{-x} + 2} dx$.

- Ⓐ $I = 3^x - 3^{-x} + C$. Ⓑ $I = 3^x + 3^{-x} + C$. Ⓒ $I = \frac{3^x - 3^{-x}}{\ln 3} + C$. Ⓓ $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Câu 63. Tính $I = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

- Ⓐ $I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$. Ⓑ $I = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$.
Ⓒ $I = \ln \frac{x-1}{x+2} + C$. Ⓓ $I = \ln \frac{x+2}{x-1} + C$.

Câu 64. Tính $I = \int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$.

- Ⓐ $I = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$. Ⓑ $I = \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$.
Ⓒ $I = \ln \frac{x-3}{x+2} + C$. Ⓓ $I = \ln \frac{x+2}{x-3} + C$.

Câu 65. Tính $I = \int \frac{7^2}{7^{5x}} dx$.

- Ⓐ $I = \frac{7^{2-5x}}{\ln 7} + C$. Ⓑ $I = -\frac{7^{2-5x}}{5 \ln 7} + C$. Ⓒ $I = 7^{5x} + C$. Ⓓ $I = \frac{7^{1-5x}}{\ln 7} + C$.

Câu 66. Tính $I = \int \frac{2e^x}{\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}} dx$.

- Ⓐ $I = 2 \ln(e^x + 1 + \sqrt{2+2e^x+e^{2x}}) + C$. Ⓑ $I = \ln(e^x + 1 + \sqrt{2+2e^x+e^{2x}}) + C$.
Ⓒ $I = 2 \arcsin(e^x + 1) + C$. Ⓓ $I = 2 \arctan(e^x + 1) + C$.

Câu 67. Tính $I = \int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

- Ⓐ $I = -\frac{2 \ln x - 1}{4x^2} + C$. Ⓑ $I = -\frac{2 \ln x + 1}{x^2} + C$.

Ⓒ $I = \frac{2 \ln x + 1}{4x^2} + C.$

Ⓓ $I = -\frac{2 \ln x + 1}{4x^2} + C.$

Câu 68. Tính $I = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx.$

Ⓐ $I = (\sin x + 1) e^{\sin x} + C.$

Ⓑ $I = \sin x e^{\sin x} + C.$

Ⓒ $I = \frac{\sin 2x e^{\sin x}}{2} + C.$

Ⓓ $I = (\sin x - 1) e^{\sin x} + C.$

Câu 69. Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$

Ⓐ $I = \arctan \sqrt{x} + C.$

Ⓑ $I = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$

Ⓒ $I = \arcsin \sqrt{x} + C.$

Ⓓ $I = \ln \sqrt{x} + C.$

Câu 70. Tính $I = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}.$

Ⓐ $I = \ln (\cos x + 4 + \sqrt{\cos^2 x + 4}) + C.$

Ⓑ $I = \ln (\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4}) + C.$

Ⓒ $I = -\ln (\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4}) + C.$

Ⓓ $I = \frac{1}{\ln (\cos^2 x + 4)} + C.$

IV. Tính tích phân suy rộng loại 1 (chỉ giới thiệu)

Câu 71. Tính $I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Ⓐ $I = \pi.$

Ⓑ $I = \frac{\pi}{4}.$

Ⓒ $I = \frac{1}{4}.$

Ⓓ $I = +\infty.$

Câu 72. Tính $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$

Ⓐ $I = \frac{\pi}{2}.$

Ⓑ $I = \frac{\pi}{4}.$

Ⓒ $I = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$

Ⓓ $I = +\infty.$

Câu 73. Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$

Ⓐ $I = \frac{\pi^2}{8}.$

Ⓑ $I = \frac{\pi^2}{6}.$

Ⓒ $I = \frac{\pi^2}{4}.$

Ⓓ $I = \frac{\pi^2}{2}.$

CHƯƠNG 2: HÀM NHIỀU BIẾN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính đạo hàm riêng

1) Cho $z = \sqrt[3]{xy}$, tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0).$

2) $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

3) $z = \ln \tan \frac{x}{y}$

4) $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$

5) $f(x, y) = e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y).$

6) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$

7) $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$

8) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$

9) $u = x^{y^2z}$

10) Cho $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = e^{x+y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

11) Cho $z = \ln(3x + 2y - 1)$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{dz}{dt}$.

12) Cho $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, f là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

13) Cho $z = f(xy + y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $A = (x + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$.

14) Cho $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $B = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$.

Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

1) Tính $y'(x)$ biết $y = y(x)$ hàm ẩn xác định hệ thức: $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

2) Tính $y'(x)$, $y''(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

3) Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

4) Tính z'_x, z'_y và dz biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi

(a) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z.$

(e) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(b) $\arctan z + z^2 = e^{xy}$

(f) $2x + 3y + z = e^{xyz}.$

(c) $z - ye^{x/z} = 0$

(d) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$

(g) $xyz = \cos(x + y + z)$

5) Tính $y'(x), z'(x)$ biết $y = y(x), z = z(x)$ xác định bởi
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$$

6) Tính u'_x, u'_y biết $u = x^2 + y^2 + xyz$ và $z = z(x, y)$ xác định bởi $ze^z = ye^x + xe^y$.

Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1) Cho hàm số $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2) Cho $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh rằng: $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$.

3) Tính $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ biết $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

4) Tính z''_{xy} biết hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$.

5) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$.

6) Tính $d^2 f(1, 1)$, biết: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$.

7) Tính $d^2 f(0, 1)$, biết: $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.

8) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$ tại điểm $(1, 2)$.

9) Tìm $d^2 z$ biết:

(a) $z = x^2 \ln(x + y)$

(b) $z = \arctan \frac{y}{x}$

Bài 4. Cực trị của hàm nhiều biến

1) Tìm cực trị các hàm sau:

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

(f) $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$.

(g) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2 \ln(xy)$.

(c) $f(x, y) = xy + 1000 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

(h) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

(d) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

(e) $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$

(i) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$.

2) Tìm cực trị có điều kiện:

(a) $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

(d) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

3) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

(a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

(b) $f(x, y) = xy$ trên miền $D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$

(c) $z = 1 + xy - x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 1$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = x^2 + 5^y$.

(A) $dz = 2xdx + 5^y \ln 5dy$.

(B) $dz = 2xdx + 5^y \ln ydy$.

(C) $dz = 2xdx + 5^{y-1}dy$.

(D) $dz = 2xdx + 5^{y-1} \ln 5dy$.

Câu 2. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = \ln \sqrt{x - y}$.

(A) $dz = \frac{dy - dx}{2(x - y)}$.

(B) $dz = \frac{dx - dy}{2(x - y)}$.

(C) $dz = \frac{dx - dy}{x - y}$.

(D) $dz = \frac{dy - dx}{x - y}$.

Câu 3. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = \arctan(x - y)$.

(A) $dz = \frac{dx + dy}{1 + (x - y)^2}$.

(B) $dz = \frac{dx - dy}{1 + (x - y)^2}$.

(C) $dz = \frac{dy - dx}{1 + (x - y)^2}$.

(D) $dz = \frac{-dx - dy}{1 + (x - y)^2}$.

Câu 4. Tìm vi phân toàn phần của hàm số $z = x^2 + 2xy + \sin(x^3y^5)$.

(A) $dz = [4x + 3x^2 \cos(x^3y^5)]dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)]dy$.

(B) $dz = [2x + 2xy + 3x^2 \cos(x^3y^5)]dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)]dy$.

(C) $dz = [2x + 2y + 3x^2 \cos(x^3y^5)]dx + [2x + 5y^4 \cos(x^3y^5)]dy$.

(D) $dz = [2x + 2y + 3x^2y^5 \cos(x^3y^5)]dx + [2x + 5x^3y^4 \cos(x^3y^5)]dy$.

Câu 5. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = x^3 + y^2 - 4xy$.

(A) $d^2z = 6xdx^2 - 8dxdy + 2dy^2$.

(B) $d^2z = 6xdx^2 - 4dxdy + 2dy^2$.

(C) $d^2z = 6xdx^2 + 8dxdy + 2dy^2$.

(D) $d^2z = 6xdx^2 + 4dxdy + 2dy^2$.

Câu 6. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = y \ln x$.

(A) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy + \frac{1}{x}dy^2$.

(B) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$.

(C) $d^2z = \frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$.

(D) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 - \frac{2}{x}dxdy$.

Câu 7. Đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $f(x, y) = e^x(-x + 3y)$ là

(A) $-e^x(-x + 3y)$.

(B) $3e^x(-x + 3y)$.

(C) $-e^x$.

(D) $3e^x$.

Câu 8. Vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = x^2 + x \cos y$ tại điểm $(1; 0)$ là

(A) $2dx - dy$.

(B) $2xdx - x \sin ydy$.

(C) 2 .

(D) $3dx$.

Câu 9. Các điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$ là

(A) $M_1(0; 0)$ và $M_2(-1; 2)$.

(B) $M_1(0; 0)$ và $M_2(-2; -2)$.

(C) $M_1(1; 1)$ và $M_2(2; 2)$.

(D) $M_1(1; -1)$ và $M_2(-1; 2)$.

Câu 10. Đạo hàm riêng theo biến z của hàm số $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz^2}$ là

- (A) $\frac{-2xyz}{y^2 + x^2z^4}$. (B) $\frac{xy}{z^2 + x^2z^4}$. (C) $\frac{2xyz}{x^2 + z^2y^4}$. (D) $\frac{-2xy^2}{x^2 + z^2y^4}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

- (A) $f''_{xx}(1; 2) = \frac{8}{9}$. (B) $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{5}{6}$. (C) $f''_{xx}(1; 2) = \frac{3}{25}$. (D) $f''_{xx}(1; 2) = -\frac{4}{5}$.

Câu 12. Cho hàm ẩn hai biến $z = z(x, y)$ xác định bởi $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Đạo hàm riêng của $z(x, y)$ theo biến x bằng

- (A) $\frac{xye^{\frac{z}{x}}}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$. (B) $\frac{e^{\frac{z}{x}}}{x^2 - xye^{\frac{z}{x}}}$. (C) $\frac{yze^{\frac{z}{x}}}{xye^{\frac{z}{x}} - x^2}$. (D) $\frac{x}{x^2 + xye^{\frac{z}{x}}}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$, ($x \geq 0, y \geq 0$). Điểm cực tiểu $M(x_0; y_0)$ của hàm số có $x_0 - y_0$ bằng

- (A) -2 . (B) 3 . (C) -3 . (D) 2 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x, y) = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$.
(C) Hàm f không có điểm dừng. (D) Hàm f có một cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$ với $x > 0, y > 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.
(C) Hàm f có 2 điểm dừng. (D) Hàm f có 3 điểm dừng.

Câu 16. Cho hàm số $f(x, y) = 2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}$ với $x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$.
(C) Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$. (D) Hàm f có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Câu 17. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực đại tại $(1; -1)$. (B) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; -1)$.
(C) Hàm f có 2 cực trị. (D) Hàm f không có cực trị.

Câu 18. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \ln |1 + x^2y|$ với điều kiện $x - y - 3 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực tiểu tại $(0; -3)$ và cực đại tại $(2; -1)$.
(B) Hàm f đạt cực đại tại $(0; -3)$ và tại $(2; -1)$.
(C) Hàm f đạt cực đại tại $(0; -3)$ và cực tiểu tại $(2; -1)$.
(D) Hàm f đạt cực tiểu tại $(0; -3)$ và tại $(2; -1)$.

Câu 19. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2(y - 1) - 3x + 2$ với điều kiện $x - y + 1 = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$ và cực đại tại $(-1; 0)$.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$ và tại $(-1; 0)$.
 Ⓑ Hàm f đạt cực đại tại $(1; 2)$ và cực tiểu tại $(-1; 0)$.
 Ⓒ Hàm f đạt cực tiểu tại $(1; 2)$ và tại $(-1; 0)$.

Câu 20. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 3x + 4y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và cực đại tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
 Ⓑ Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
 Ⓒ Hàm f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và cực tiểu tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
 Ⓓ Hàm f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và tại $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(1; 0)$. Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(1; 0)$.
 Ⓒ Hàm f có một cực đại và một cực tiểu. Ⓓ Hàm f không có cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $(0; 0)$.
 Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $(2; 0)$ và tại $(-2; 0)$.
 Ⓒ Hàm f chỉ có đúng hai điểm dừng.
 Ⓓ Hàm f đạt cực đại tại $(2; 0)$ và tại $(-2; 0)$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - 2x + 5$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(0; 0)$. Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0; 0)$.
 Ⓒ Hàm f có một điểm dừng. Ⓓ Hàm f có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 24. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(0; 0)$. Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0; 0)$.
 Ⓒ Hàm f không có cực trị. Ⓓ Hàm f không có điểm dừng.

Câu 25. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(2; 1)$. Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(2; 1)$.
 Ⓒ Hàm f có đúng 2 điểm dừng. Ⓓ Hàm f có đúng 4 điểm dừng.

Câu 26. Cho hàm số $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x + 32y$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ Hàm f đạt cực đại tại $M(1; 2)$. Ⓑ Hàm f đạt cực tiểu tại $M(1; 2)$.
 Ⓒ Hàm f không có cực trị. Ⓓ Hàm f không có điểm dừng.

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

PHẦN TỰ LUẬN

A. Phương trình vi phân cấp 1

Bài 1. Giải các phương trình tách biến

$$(1) \quad x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

$$(3) \quad y' = (x + y + 1)^2$$

$$(2) \quad y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$$

$$(4) \quad y' = \cos(x - y - 1)$$

Bài 2 . Giải các phương trình đẳng cấp

$$(1) \quad y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$(4) \quad y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$$

$$(2) \quad xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$$

$$(5) \quad y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$$

$$(3) \quad xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$$

$$(6) \quad y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$$

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$(1) \quad y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

$$(4) \quad (x^2 + y)dx = xdy$$

$$(2) \quad y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, \quad y(2) = 1.$$

$$(5) \quad (y + \ln x)dx - xdy = 0$$

$$(3) \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$(6) \quad y' \cos y + \sin y = x$$

Bài 4. Giải các phương trình Bernoulli

$$(1) \quad y' - 2xy = 3x^3y^2$$

$$(4) \quad xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$$

$$(2) \quad 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

$$(5) \quad ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$$

$$(3) \quad y' + 2y = y^2e^x$$

$$(6) \quad xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

$$(1) \quad (x + y)dx + (x - y)dy = 0; \quad y(0) = 0.$$

$$(3) \quad \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

$$(2) \quad (1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$$(4) \quad (1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$$

B. Phương trình vi phân cấp 2

Bài 6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

(1) $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}$.

(7) $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$

(2) $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x$.

(8) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

(3) $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

(9) $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$

(4) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$

(10) $y'' + y = 4xe^x$

(5) $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2$;

(11) $y'' + y = 6 \sin x$

$y(0) = 0, y'(0) = 2$

(12) $y'' - 2y' + y = xe^x$

(6) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$,

(13) $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$

$y(2) = y'(2) = 0$

(14) $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình vi phân $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ có nghiệm tổng quát là

(A) $y = C - \sin(\arctan x)$.

(B) $y = \sin(C - \arctan x)$.

(C) $y = \sin C - \sin(\arctan x)$.

(D) $y = \arctan(C - \sin x)$.

Câu 2. Phương trình vi phân $x(y^2 + 1)dx = y(x^2 + 1)dy$ có nghiệm tổng quát là

(A) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C$.

(B) $(x^2 + 1) + (y^2 + 1) = C$.

(C) $(y^2 + 1) = (x^2 + 1) + C$.

(D) $y^2 = C(x^2 + 1) - 1$.

Câu 3. Phương trình vi phân $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$ với điều kiện $y(1) = 1$ có nghiệm là

(A) $x^2 = ye^{2-x-y}$.

(B) $y^2 = xe^{2-x-y}$.

(C) $x^2y = e^{2-x-y}$.

(D) xy^2ye^{2-x-y} .

Câu 4. Phương trình vi phân $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

(A) $e^y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(B) $e^x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$.

(C) $e^y = \tan\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

(D) $e^x = \tan\left(e^y + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

Câu 5. Phương trình vi phân $y \ln^3 y + \sqrt{x+1}y' = 0$ với điều kiện $y(0) = e$ có nghiệm là

(A) $\ln^2 y = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}$.

(B) $2 \ln^2 y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 1$.

(C) $\frac{1}{2 \ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}$.

(D) $\frac{1}{\ln^2 y} = 2\sqrt{x+1} - 1$.

Câu 6. Phương trình vi phân $(xy' - y) \arctan \frac{y}{x} = x$ có nghiệm tổng quát là

(A) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$.

(B) $x^2 + y^2 = Ce^{2\frac{y}{x} \arctan \frac{y}{x}}$.

(C) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} + \arctan \frac{y}{x}}$.

(D) $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x}}$.

Câu 7. Phương trình vi phân $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$ với điều kiện $y(1) = \frac{\pi}{2}$ có nghiệm là

(A) $1 - \cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right)$.

(B) $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right) - 1$.

(C) $\cos \frac{y}{x} = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right) + 1$.

(D) $\cos \frac{y}{x} - 1 = x^2 \left(\cos \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Câu 8. Phương trình vi phân $xy' = y + x$ với điều kiện $y(1) = 2$ có nghiệm là

- (A) $y = x(\ln x + 2x)$. (B) $y = x \ln x + 2$. (C) $y = 2(\ln x + x)$. (D) $y = x(\ln x + 2)$.

Câu 9. Phương trình vi phân $xy' = 2y - 2\sqrt{xy}$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C + \sqrt{x}$. (B) $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C - \sqrt{x}$.
(C) $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2 = C\sqrt{x}$. (D) $\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = C\sqrt{x}$.

Câu 10. Phương trình vi phân $(2xy + \sin y) dx + (x^2 + x \cos y) dy = 0$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $x^2y + x \sin y = C$. (B) $x^2y + x \cos y = C$.
(C) $2x^2y + x \sin y + xy = C$. (D) $x^2y + 2x \sin y = C$.

Câu 11. Phương trình vi phân $(e^{x+y} + 3x^2) dx + (e^{x+y} + 4y^3) dy = 0$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

- (A) $y^3 + x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$. (B) $y^4 + x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$.
(C) $y^3 - x^4 + e^{x+y} - 1 = 0$. (D) $y^4 - x^3 + e^{x+y} - 1 = 0$.

Câu 12. Phương trình vi phân $xy' - y = x^2 \cos x$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + C$. (B) $y = x \sin x - \frac{2 \sin x}{x^2} + Cx$.
(C) $y = x \sin x + C$. (D) $y = x \sin x + Cx$.

Câu 13. Phương trình vi phân $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y^4 = \frac{1}{x^3(C - e^{-x})}$. (B) $y^4 = \frac{1}{x^2(C - e^{-x})}$.
(C) $y^4 = \frac{1}{x^3(C + e^x)}$. (D) $y^4 = \frac{1}{x^2(C + e^x)}$.

Câu 14. Phương trình vi phân $y' + \frac{4}{x}y = \frac{3}{x^4}$ với điều kiện $y(1) = 0$ có nghiệm là

- (A) $y = \frac{3(x-1)}{x^4}$. (B) $y = \frac{3(1-x)}{x^4}$. (C) $y = \frac{3(x-1)}{x^5}$. (D) $y = \frac{3(1-x)}{x^5}$.

Câu 15. Phương trình vi phân $\sqrt{1-x^2}y' + y = \arcsin x$ với điều kiện $y(0) = 0$ có nghiệm là

- (A) $y = \arcsin x + e^{\arcsin x} - 1$. (B) $y = \arcsin x + e^{-\arcsin x} - 1$.
(C) $y = \arcsin x - e^{\arcsin x} + 1$. (D) $y = \arcsin x - e^{-\arcsin x} + 1$.

Câu 16. Phương trình vi phân $y'' - 4y' + 3y = 0$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. (B) $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
(C) $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. (D) $y = C_1 x^3 + C_2 x$.

Câu 17. Phương trình vi phân $y'' + 2y' + 2y = 0$ có nghiệm tổng quát là

- (A) $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. (B) $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
(C) $y = e^x (C_1 \cos(-x) + C_2 \sin(-x))$. (D) $y = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$.

Câu 18. Phương trình vi phân $y'' + 3y' = 0$ với điều kiện $y(0) = 1$ và $y'(0) = 2$ có nghiệm là

- (A) $y = \frac{1}{2}(5 - 3e^{3x})$. (B) $y = \frac{1}{3}(5 - 2e^{3x})$. (C) $y = \frac{1}{2}(5 - 3e^{-3x})$. (D) $y = \frac{1}{3}(5 - 2e^{-3x})$.

Câu 19. Phương trình vi phân $y'' + 9y = 0$ với điều kiện $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ có nghiệm là

Ⓐ $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x - \sin 3x).$

Ⓑ $y = \frac{\sqrt{2}}{6} (\cos 3x + \sin 3x).$

Ⓒ $y = \frac{6 - \sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x.$

Ⓓ $y = \frac{6 + \sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} \cos 3x.$

Câu 20. Phương trình vi phân $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$ với điều kiện $y(0) = 3$ và $y'(0) = 9$ có nghiệm là

Ⓐ $y = e^{5x} + e^{3x} + e^x.$

Ⓑ $y = 2e^{5x} + e^{3x} - e^x.$

Ⓒ $y = \frac{1}{8} (e^{5x} + 22e^{3x} + e^x).$

Ⓓ $y = \frac{1}{2} (-e^{5x} + 5e^{3x} + 2e^x).$

Câu 21. Phương trình vi phân $y'' - 6y' + 5 = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - x.$

Ⓑ $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + x + 1.$

Ⓒ $y = C_1 + C_2 e^{6x} - \frac{5}{6}x.$

Ⓓ $y = C_1 + C_2 e^{6x} + \frac{5}{6}x.$

Câu 22. Phương trình vi phân $y'' + 4y + 4 = 0$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = C_1 + C_2 e^{-4x} - 1.$

Ⓑ $y = C_1 + C_2 \cos 2x - 1.$

Ⓒ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 1.$

Ⓓ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1.$

Câu 23. Phương trình vi phân $y'' + 2y' - 3y = e^x \cos x + 3xe^x \sin x$ có dạng nghiệm riêng là

Ⓐ $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x].$

Ⓑ $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x].$

Ⓒ $y^* = e^x (A \cos x + B \sin x).$

Ⓓ $y^* = xe^x (A \cos x + B \sin x).$

Câu 24. Phương trình vi phân $y'' - 2y' + 2y = e^x [(x^2 + 1) \cos x + x \sin x]$ có dạng nghiệm riêng là

Ⓐ $y^* = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x].$

Ⓑ $y^* = xe^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x].$

Ⓒ $y^* = e^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x].$

Ⓓ $y^* = xe^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x].$

Câu 25. Phương trình vi phân $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$ có nghiệm tổng quát là

Ⓐ $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x).$

Ⓑ $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x).$

Ⓒ $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{51} (14 \cos x + 5 \sin x).$

Ⓓ $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{102} (14 \cos x + 5 \sin x).$

CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

a) $5y_{n+2} + 6y_{n+1} - 11y_n = 2n - 1$

j) $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 4y_n + 3n^2 + 2$

b) $5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 3^n$

k) $y_{n+2} + y_n = n + 1$

c) $5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = n^2 + 1$

l) $y_{n+2} + y_n = 3, y_0 = 0, y_1 = 1$

d) $y_{n+2} + y_n = 2^n$

m) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2n + 1,$
 $y_0 = 0, y_1 = 1$

e) $y_{n+2} + 5y_n = 5n^2 - 2n - 1$

n) $y_{n+2} - y_n = 0, y_0 = 0, y_1 = 1$

f) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{-2n}$

o) $y_{n+2} + y_n = 2^n, y_0 = 0, y_1 = 1$

g) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n + 5$

p) $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 6(n + 1)4^{n+2}$

h) $y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n + n^2$

q) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = -4 + 2^n$

i) $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 5y_n + 3n^2$

Bài 2. Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1

a)
$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 2y_n \end{cases}, x_0 = 2, y_0 = -1$$

b)
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 8y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 6y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 2$$

c)
$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = -5$$

d)
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 1$$

e)
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}, x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$f) \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 6y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$$

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ là

- Ⓐ $y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$. Ⓑ $y_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot (-3)^n$.
 Ⓒ $y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n$. Ⓓ $y_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 3^n$.

Câu 2. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 0$ là

- Ⓐ $y_n = C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{3}$. Ⓑ $y_n = C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{6} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{6}$.
 Ⓒ $y_n = C_1 \cdot \cos \frac{2n\pi}{3} + C_2 \cdot \sin \frac{2n\pi}{3}$. Ⓓ $y_n = C_1 \cdot \cos \frac{5n\pi}{6} + C_2 \cdot \sin \frac{5n\pi}{6}$.

Câu 3. Nghiệm riêng của phương trình sai phân $y_{n+2} - y_n = 0$ thỏa mãn $y_0 = 1, y_1 = 2$ là

- Ⓐ $y_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n$. Ⓑ $y_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$.
 Ⓒ $y_n = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n$. Ⓓ $y_n = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$.

Câu 4. Phương trình sai phân $y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = n$ có một nghiệm riêng dạng

- Ⓐ $y_n^* = n(An + B)$. Ⓑ $y_n^* = An + B$.
 Ⓒ $y_n^* = An$. Ⓓ $y_n^* = An^2 + Bn + C$.

Câu 5. Phương trình sai phân $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 2^n(n+1)$ có một nghiệm riêng dạng

- Ⓐ $y_n^* = 2^n(An^2 + Bn)$. Ⓑ $y_n^* = 2^n(An + B)$.
 Ⓒ $y_n^* = An + B$. Ⓓ $y_n^* = An^2 + Bn$.

Câu 6. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $3y_{n+2} - 2y_{n+1} - y_n = 2^{n+1}$ là

- Ⓐ $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \cdot 2^{n+1}$. Ⓑ $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2^{n+1}$.
 Ⓒ $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{7} \cdot 2^n$. Ⓓ $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \cdot 2^n$.

Câu 7. Nghiệm riêng của phương trình sai phân $y_{n+2} - 4y_n = n$ thỏa mãn $y_0 = 1, y_1 = -1$ là

- Ⓐ $y_n = \frac{7}{6} \cdot 2^n + \frac{11}{6} \cdot (-2)^n - \frac{1}{3}n - 2$. Ⓑ $y_n = \frac{11}{6} \cdot 2^n + \frac{7}{6} \cdot (-2)^n - \frac{1}{3}n - 2$.
 Ⓒ $y_n = \frac{13}{18} \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot (-2)^n - \frac{1}{3}n - \frac{2}{9}$. Ⓓ $y_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{13}{18} \cdot (-2)^n - \frac{1}{3}n - \frac{2}{9}$.

Câu 8. Phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình sai phân?

(1): $xe^y - ye^{2x} = 5$

(2): $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 3y_n = 5$

(3): $(x - y)dx + (2x + e^y)dy = 0$

- Ⓐ Phương trình (1). Ⓑ Phương trình (2).
 Ⓒ Phương trình (3). Ⓓ Phương trình (1) và (2).

Câu 9. Phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai?

(1): $y_{n+2} - 4y_{n+1} = n + 1$

(2): $y'' - y = x + 1$

(3): $y_{n+1} + y_n + y_{n-1} = \sqrt{n}$

(A) Phương trình (1).

(B) Phương trình (2).

(C) Phương trình (3).

(D) Phương trình (1) và (2).

Câu 10. Phương trình đặc trưng của phương trình sai phân $y_{n+2} + y_{n+1} + 3y_n = 0$ là

(A) $k^2 + k = 0$.

(B) $k^2 + 3k + 1 = 0$.

(C) $k^2 + k + 3 = 0$.

(D) $k^2 + 3k = 0$.

Câu 11. Hàm $y_n = 3^n + n$ là nghiệm của phương trình sai phân nào?

(A) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3n - 2$.

(B) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2n - 3$.

(C) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3^n$.

(D) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n$.

Câu 12. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$ là

(A) $y_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{2} - C_2 \sin \frac{n\pi}{2} \right)$.

(B) $y_n = 2^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right)$.

(C) $y_n = C_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{3n\pi}{4}$.

(D) $y_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(C_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{3n\pi}{4} \right)$.

Câu 13. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $4y_{n+2} + 4y_{n+1} + y_n = 0$ là

(A) $y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 2^{-n}$.

(B) $y_n = -C_1 \cdot 2^{-n} - C_2 n \cdot 2^{-n}$.

(C) $y_n = C_1 \cdot (-2)^{-n} + C_2 n \cdot (-2)^{-n}$.

(D) $y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 n \cdot 2^n$.

Câu 14. Với giá trị nào của A, B thì $y_n = An^2 - Bn$ là nghiệm của phương trình $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 12n + 8$?

(A) $A = 1; B = 1$.

(B) $A = -1; B = 0$.

(C) $A = 0; B = 1$.

(D) $A = 1; B = 0$.

Câu 15. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $11y_n = 5y_{n+2} + 6y_{n+1}$ là

(A) $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{11}{5} \right)^n$.

(B) $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{6}{11} \right)^n$.

(C) $y_n = C_1 \cdot \left(-\frac{6}{5} \right)^n$.

(D) $y_n = C_1 + C_2 \cdot \left(-\frac{5}{11} \right)^n$.

Câu 16. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$ là

(A) $y_n = C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{3}$.

(B) $y_n = C_1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + C_2 \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.

(C) $y_n = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

(D) $y_n = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + C_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

Câu 17. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} = 10y_{n+1} - 25y_n$ là

(A) $y_n = (C_1 + C_2 n) 5^n$.

(B) $y_n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) 5^n$.

(C) $y_n = C_1 + C_2 5^n$.

(D) $y_n = C_1 + C_2 n 5^n$.

Câu 18. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} + y_n = 2^n$ là

(A) $y_n = \frac{2^n}{5} + C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$.

(B) $y_n = \left(\frac{2}{5} \right)^n + C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$.

$$\textcircled{C} y_n = 2^{n-2} + C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$\textcircled{D} y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Câu 19. Nghiệm riêng của phương trình sai phân $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ thỏa mãn $y_0 = 1, y_1 = 2$ là

$$\textcircled{A} y_n = 1 + n.$$

$$\textcircled{B} y_n = n^2 + 1.$$

$$\textcircled{C} y_n = 2n^2 - n + 1.$$

$$\textcircled{D} y_n = n^3 + 1.$$

Câu 20. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n + 5$ là

$$\textcircled{A} y_n = -\frac{n^2 + 11n}{2} + C_1 2^n + C_2.$$

$$\textcircled{B} y_n = \frac{n^2 - 9n}{2} + C_1 2^n + C_2.$$

$$\textcircled{C} y_n = \frac{n^2 + 11n}{2} + C_1 2^n + C_2.$$

$$\textcircled{D} y_n = \frac{9n - n^2}{2} + C_1 2^n + C_2.$$

Câu 21. Nghiệm riêng của phương trình sai phân $y_{n+2} + y_n = 3$ thỏa mãn $y_0 = 0, y_1 = 1$ là

$$\textcircled{A} y_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$\textcircled{B} y_n = 1 - \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$\textcircled{C} y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

$$\textcircled{D} y_n = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Câu 22. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$ là

$$\textcircled{A} y_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$\textcircled{B} y_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}.$$

$$\textcircled{C} y_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$\textcircled{D} y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n.$$

Câu 23. Nghiệm riêng của phương trình sai phân $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$ thỏa mãn $y_0 = 2, y_1 = 9$ là

$$\textcircled{A} y_n = (3n + 2) 3^n.$$

$$\textcircled{B} y_n = (n - 2) 3^n.$$

$$\textcircled{C} y_n = (-n + 2) 3^n.$$

$$\textcircled{D} y_n = (n + 2) 3^n.$$

Câu 24. Dãy nào dưới đây là một nghiệm riêng của phương trình sai phân $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 4^n(6n + 20)$

$$\textcircled{A} y_n = (2n + 5) 3^n.$$

$$\textcircled{B} y_n = (n + 8) 4^n.$$

$$\textcircled{C} y_n = (3n - 2) 2^n.$$

$$\textcircled{D} y_n = n 4^n.$$

— HẾT —

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 1

1. A	2. B	3. C	4. D	5. B	6. D	7. C	8. A	9. B	10. D
11. C	12. B	13. A	14. C	15. B	16. D	17. A	18. A	19. B	20. C
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. A	27. D	28. D	29. C	30. B
31. A	32. D	33. C	34. B	35. A	36. A	37. C	38. D	39. C	40. B
41. B	42. A	43. D	44. D	45. A	46. B	47. C	48. D	49. A	50. B
51. D	52. A	53. B	54. B	55. A	56. A	57. B	58. C	59. D	60. B
61. A	62. C	63. A	64. A	65. B	66. A	67. D	68. D	69. B	70. C
71. B	72. C	73. A							

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 2

1. A	2. B	3. B	4. C	5. A	6. B	7. D	8. D	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. C	15. A	16. C	17. B	18. B	19. A	20. C
21. B	22. B	23. C	24. B	25. D	26. C				

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 3

1. A	2. B	3. B	4. C	5. A	6. B	7. D	8. D	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. C	15. A	16. C	17. B	18. B	19. A	20. C
21. B	22. B	23. C	24. B	25. D	26. C				

ĐÁP ÁN CHƯƠNG 4

1. A	2. C	3. B	4. B	5. A	6. D	7. D	8. B	9. C	10. C
11. B	12. D	13. C	14. D	15. A	16. A	17. A	18. A	19. A	20. A
21. A	22. B	23. D	24. D						