

Exam 2

Toan-ky-thuat

(1) Phân tích SVD của ma trận A , $U\Sigma V^T$, trong đó $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

(2) Chéo hóa trực giao ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(3) Xét hàm lỗi (loss function) của mô hình hồi quy logistic $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \ln [1 + e^{-y_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)}],$$

trong đó $y_i = 1$ hoặc $y_i = -1$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng

(a) f là hàm lồi khả vi;

(b) Nêu phương pháp lặp gradient đối với hàm lồi này.

(4) Với dữ liệu nhận được cho $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, y)$,

x_1	x_2	y
2.04	3.55	3.11
2.04	6.07	3.26
3.06	3.55	3.89
3.06	6.97	10.25
4.08	3.55	3.11
4.08	6.16	13.48
2.06	3.62	3.94
2.06	6.16	3.53

dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất ước lượng các tham số β_k trong mô hình:
 $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$.

(5) Gọi X là tỷ lệ thời gian một sinh viên được chọn ngẫu nhiên phân bổ để làm bài kiểm tra năng khiếu nhất định. Giả sử X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

với $\theta > -1$. Một mẫu 10 sinh viên được khảo sát với thời gian như sau: $x_1 = 0.92; x_2 = 0.79; x_3 = 0.90; x_4 = 0.65; x_5 = 0.86; x_6 = 0.47; x_7 = 0.73; x_8 = 0.97; x_9 = 0.94$; và $x_{10} = 0.77$.

Sử dụng dữ liệu trên ước lượng tham số θ bằng phương pháp MLE.