

# Exam 2

## Toan-ky-thuat

(1) Phân tích SVD của ma trận  $A$ ,  $U\Sigma V^T$ , trong đó  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ .

(2) Chéo hóa trực giao ma trận  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

(3) Xét hàm lỗi (loss function) của mô hình hồi quy logistic  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi

$$f(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^k \ln [1 + e^{-y_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)}],$$

trong đó  $y_i = 1$  hoặc  $y_i = -1$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ . Chứng minh rằng

(a)  $f$  là hàm lồi khả vi;

(b) Nêu phương pháp lập gradient đối với hàm lỗi này.

(4) Với dữ liệu nhận được cho  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, y)$ ,

$x_1$	$x_2$	$y$
2.04	3.55	3.11
2.04	6.07	3.26
3.06	3.55	3.89
3.06	6.97	10.25
4.08	3.55	3.11
4.08	6.16	13.48
2.06	3.62	3.94
2.06	6.16	3.53

dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất ước lượng các tham số  $\beta_k$  trong mô hình:  
 $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$ .

(5) Gọi  $X$  là tỷ lệ thời gian một sinh viên được chọn ngẫu nhiên phân bổ để làm bài kiểm tra năng khiếu nhất định. Giả sử  $X$  có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

với  $\theta > -1$ . Một mẫu 10 sinh viên được khảo sát với thời gian như sau:  $x_1 = 0.92; x_2 = 0.79; x_3 = 0.90; x_4 = 0.65; x_5 = 0.86; x_6 = 0.47; x_7 = 0.73; x_8 = 0.97; x_9 = 0.94$ ; và  $x_{10} = 0.77$ .

Sử dụng dữ liệu trên ước lượng tham số  $\theta$  bằng phương pháp MLE.