Chương 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN, TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN

ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

Năm 2025

Mục lục

Chương 1. Hàm số một biến

Định nghĩa 1.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 (có thể không xác định tại x_0). Ta nói hàm số có giới hạn là A khi x dần tới x_0, ký hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, nếu

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $|f(x) - A| < \epsilon$ với $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$.

Ví dụ 1.1.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$.

Lấy $\epsilon > 0$ bé tùy ý, ta cần tìm số $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x - 1| < \delta$ thì $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$. Phân tích $|(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < \epsilon$ nếu $|x - 1| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Vậy ta có thể chọn $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$. Khi đó nếu $0 < |x - 1| < \delta$ thì $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$.

Định nghĩa về giới hạn một phía

Định nghĩa 1.2.

- Giới hạn trái của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$,
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0 - 0) = A$$
$$\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \text{ thì } |f(x) - A| < \epsilon.$$
- Giới hạn phải của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$,
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0 + 0) = A$$
$$\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \text{ thì } |f(x) - A| < \epsilon.$$

Từ Định nghĩa, ta thấy

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \begin{cases} \exists f(x_0 - 0) & = A \\ \exists f(x_0 + 0) & = A \end{cases}$$

Định nghĩa 1.3.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $|f(x)| > M$ nếu $0 < |x - x_0| < \delta$.
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ sao cho $|f(x) - A| < \epsilon$ nếu $|x| > N$.
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists N > 0$ sao cho $|f(x)| > M$ nếu $|x| > N$.

Ví dụ:

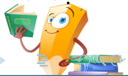
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta = \dfrac{1}{M} > 0$ thỏa mãn $|\dfrac{1}{x}| > M$ với $0 < |x - 0| < \delta$.
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x} = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists N = \dfrac{1}{\epsilon} > 0$ thỏa mãn $|\dfrac{1}{x} - 0| < \epsilon$ với $|x| > N$.

Định lí 1.1.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, ($A, B$ hữu hạn). Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = A.B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, nếu $B \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B$, nếu $0 < A \neq 1$.

Chú ý nếu các điều kiện của Định lý không thỏa mãn, ta có các giới hạn dạng vô định $\infty + \infty$; $\infty - \infty$; $0.\infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; 1^∞; 0^∞; 0^0; ∞^0.



Các tính chất của giới hạn hàm số

Định lí 1.2.

Nếu $f(x)$ là hàm sơ cấp và xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ta gọi các nhóm hàm sau là hàm sơ cấp cơ bản:

1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$,
2. Hàm mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$,
3. Hàm logarit $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$,
4. Hàm lượng giác $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x$
5. Hàm lượng giác ngược $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \arctan x,\ y = arccotx.$

Ta gọi $f(x)$ là hàm sơ cấp nếu nó được tạo thành từ các hàm sơ cấp cơ bản cùng với các phép lấy tổng, hiệu, tích, thương, hợp.

Định lí 1.3.

Giả sử $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi x nằm trong lân cận của x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$. Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$

Từ tiêu chuẩn kẹp, ta chứng minh được một số giới hạn cơ bản sau:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Ví dụ 1.2.

Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\sqrt{1+2x} - 1}$.

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt{2x+1} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{2x+1} - 1} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{2x+1} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1} + 1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} . \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{2x+1} + 1)}{2} \\
&= \ 1.\frac{2}{2} + \frac{1}{2}.0 = 1.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 1.3.

Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt[4]{1+4x^2}-1}$.

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+4x^2}-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+4x^2}-1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)}{(\sqrt[4]{1+4x^2}-1)(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)}{\sqrt{1+4x^2}-1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)(\sqrt{1+4x^2}+1)}{1+4x^2-1} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[4]{1+4x^2}+1)(\sqrt{1+4x^2}+1)}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Chú ý 1.

Với giới hạn dạng 1^∞ ta có công thức sau:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$$

Ví dụ 1.4.

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{2x^2+x}$.

Giới hạn có dạng 1^∞, áp dụng công thức :

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{2x^2+x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x)\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}-1\right)}$$

$$\ln A = \lim_{x\to\infty}\frac{-4(2x^2+x}{3x^2+5}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{8}{3}.$$

Vậy $A = e^{-8/3}$

Chương 1. Hàm số một biến

2. Hàm số liên tục

Định nghĩa 2.1.

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của x_0. Hàm số được gọi là liên tục tại x_0, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận trái của x_0. Hàm số được gọi là liên tục trái tại x_0, nếu $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$
3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận phải của x_0. Hàm số được gọi là liên tục phải tại x_0, nếu $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \iff \begin{cases} y = f(x) \text{ liên tục trái tại } x_0 \\ y = f(x) \text{ liên tục phải tại } x_0 \end{cases}$$

$$\iff f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

Hàm số liên tục

Định nghĩa 2.2.

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$.
2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó $\begin{cases} \text{liên tục trong } (a, b), \\ \text{liên tục phải tại } a, \\ \text{liên tục trái tại } b. \end{cases}$

Nhận xét 1.

Các hàm sơ cấp thì liên tục trên tập xác định của nó.

Ví dụ 2.1.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{x} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

- Với mọi $x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow f(x) = x^2 + a$ là hàm sơ cấp và xác định nên hàm số liên tục trong $(-\infty, 0)$.
- Với mọi $x \in (0, +\infty) \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ là hàm sơ cấp và xác định nên hàm số liên tục trong $(0, +\infty)$.
- Tại $x = 0$, ta có $f(0) = a$;
  $f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + a) = a$;
  $f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 3 \cdot \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} = 3.$
  Nếu $a = 3$ thì $f(0) = f(0-0) = f(0+0)$, hàm số liên tục tại $x = 0$.
  Nếu $a \neq 3$ thì $f(0) = f(0-0) \neq f(0+0)$, hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

Ví dụ 2.2.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

- Với mọi $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Longrightarrow f(x) = x.\sin\dfrac{1}{x}$ là hàm sơ cấp và xác định nên hàm số liên tục trong $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Tại $x = 0$, ta có $f(0) = a$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$

  (vì x là VCB khi $x \to 0$, $\sin\dfrac{1}{x}$ là hàm bị chặn nên tích của chúng là VCB khi $x \to 0$)

  Nếu $a = 0$ thì $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, hàm số liên tục tại $x = 0$.

  Nếu $a \neq 0$ thì $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

Chương 1. Hàm số một biến

3. Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Định nghĩa 3.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 (kể cả tại x_0). Cho x_0 số gia $\Delta x \neq 0$ (bé), đặt $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và gọi là số gia của hàm số tại x_0. Nếu tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ và hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0 và ký hiệu là $f'(x_0) = y'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}(x_0)$

!

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bảng đạo hàm của các hàm cơ bản

$(x^\alpha)' = \alpha . x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(C)' = 0$ với C là hằng số

$(a^x)' = a^x . \ln a$ với $0 < a \neq 1$

$(log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ với $0 < a \neq 1$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(arccot x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Các quy tắc tính đạo hàm

Định lí 3.1.

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại x. Khi đó tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có đạo hàm tại x và:

- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$;
- $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$;
- $(k.f(x))' = k.f'(x)$ với k là hằng số;
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$;
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ nếu $g(x) \neq 0$.

Các quy tắc tính đạo hàm

Định lí 3.2.

Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x và hàm số $f = f(u)$ có đạo hàm tại $u(x)$. Khi đó hàm hợp $f = f[u(x)]$ có đạo hàm tại x và

$$f'(x) = f'[u(x)].u'(x).$$

Định lí 3.3.

Cho hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm tại x và có hàm số ngược $x = x(y)$. Nếu $y'(x) \neq 0$, thì hàm số ngược $x = x(y)$ cũng có đạo hàm tại y và

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Hàm khả vi và vi phân của hàm số

Định nghĩa 3.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong $U(x_0)$ (kể cả tại x_0), số gia $\Delta x \neq 0$ (bé), đặt $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Nếu $\exists A \in \mathbb{R}$ sao cho $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + o(\Delta x)$, khi $\Delta x \to 0$ thì hàm số được gọi là khả vi tại x_0 và $df(x_0) = A.\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số tại x_0.

Định lí 3.4.

Hàm số $y = f(x)$ khả vi tại $x_0 \Longleftrightarrow \exists f'(x_0) = A$.

!

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x,$$

$$df = dy = df(x) = f'(x).dx.$$

Quy tắc L'Hospital

Định lí 3.5.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong lân cận của (x_0) và

- hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

!

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ví dụ 3.1.

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được :

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được :

$$I \stackrel{L}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3.2.

Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^2}.$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-e^x}{x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}-e^x}{2x}.$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được

$$I\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}-e^x}{2}=-1.$$

Ví dụ 3.3.

Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

- Dùng quy tắc L'Hospital: $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{(1+e^x)e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x}$
- $I = 0$.

Ví dụ 3.4.

Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \sin x}.$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hospital

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x \sin x + x^2 \cos x}.$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)\left(2\dfrac{\sin x}{x} + \cos x\right)} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3.5.

Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - xe}{\cos(1-x) - 1}.$$

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được :

$$I = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - xe}{\cos(1-x) - 1} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\sin(1-x)}$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được :

$$I \overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{-\cos(1-x)} = -e$$

Ví dụ 3.6.

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$

- Áp dụng quy tắc L' Hospital ta được $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2}$
- Rút gọn được $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{3(1+x^2)} = \dfrac{-1}{3}$

Chú ý 2.

Với các giới hạn dạng $0 \cdot \infty$ ta đưa về $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ và áp dụng quy tắc L'Hospital rồi tính.

Ví dụ 3.7.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x.$$

Giới hạn có dạng $0 \cdot \infty$, ta chuyển về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x &= \lim_{x \to +0} \frac{\ln^2 x}{1/x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&\stackrel{L}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \ln x (1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x \to +0} \frac{2 \ln x}{-1/x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&\stackrel{L}{=} \lim_{x \to +0} \frac{2/x}{1/x^2} = 0
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.8.

Tìm giới hạn của hàm số:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Giới hạn có dạng $0\cdot\infty$, đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ và áp dụng quy tắc L'Hospital ta được :

$$I = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{x-1}{x+1}}{1/x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-2}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2+2} = 1$$

Ví dụ 3.9.

Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

- Đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ rồi sử dụng quy tắc L' Hospital ta được:

  $$I = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-3/x^4}$$

- $I = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x^3}{3} = 0$

Chú ý 3.

Với giới hạn dạng 1^∞ ta có công thức sau:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$$

Ví dụ 3.10.

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Giới hạn có dạng 1^∞, áp dụng công thức :

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}.$$

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6} = -\frac{1}{6}$$

Vậy $A = e^{-1/6}$

Ví dụ 3.11.

Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

- Đây là giới hạn dạng 1^∞ nên ta có $I = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x-1)\ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x}$.
- Xét $J = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$
- Áp dụng quy tắc L' Hospital ta có $J = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$
- Vậy $I = e^0 = 1$.

Chú ý 4.

Với giới hạn dạng 0^0 hoặc ∞^0 ta lấy ln cả 2 vế để đưa giới hạn về dạng tích $0.\infty$ rồi chuyển về $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ để áp dụng quy tắc.

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln A = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln\left[f(x)\right]$$

Ví dụ 3.12.

Tìm giới hạn: $I = \lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$

$$\ln I = \lim_{x\to 0^+} \tan 2x \ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\cot 2x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2(2x)}{-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x(4\sin^2 x\cos^2 x)}{-2\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-2\sin x\cos^3 x\right) = 0$$

Vậy $A = 0^0 = 1$.

Chương 1. Hàm số một biến

Định nghĩa 4.1.

Hàm $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên tập X nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in X$.

Nhận xét 2.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X thì $F(x) + C$ (với C là hằng số bất kỳ) cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X. Ngược lại, mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên X đều có dạng $F(x) + C$. Hay, hai nguyên hàm của cùng một hàm số chỉ sai khác nhau hằng số C.

4. Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 4.2.

Biểu thức $F(x) + C$ được gọi là tích phân của $f(x)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, C là hằng số bất kỳ.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm dưới tích phân.

Các tính chất của tích phân bất định

1. Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + C$.
2. Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.
3. $\displaystyle\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\displaystyle d\left(\int f(x)dx\right) = f(x).dx$.
4. $\displaystyle\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
5. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số.

(1). $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

(2). $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(3). $\int e^x dx = e^x + C$

(4). $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$

(5). $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6). $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7). $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(8). $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(9). $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(10). $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

(11). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(12). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

(13). $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

(14). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln|x + \sqrt{x^2+A}| + C$

Các phương pháp tính tích phân bất định

1. Phương pháp đổi biến số: Xét $I = \displaystyle\int f(x)dx$

   Đặt $x = \varphi(t) \Longleftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$ (tương ứng 1-1).
   Khi đó $dx = \varphi'(t)dt$.
   $I = \displaystyle\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C = G\left[\varphi^{-1}(x)\right] + C.$

2. Phương pháp tích phân từng phần: $u = u(x),\ v = v(x)$
   $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

Ví dụ 4.1.

Tính tích phân bất định $\int \frac{2}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$.

1. Đặt $t = e^x$, thì $dx = \frac{dt}{t}$ và tích phân trở thành $I = \int \frac{2}{t(t-1)(t-2)} dt$.
2. Tách $\frac{2}{t(t-1)(t-2)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t-1} + \frac{1}{t-2}$.
3. $I = \ln|t| - 2\ln|t-1| + \ln|t-2| + C = \ln\left|\frac{e^x(e^x-2)}{(e^x-1)^2}\right| + C.$

Ví dụ 4.2.

Tính tích phân: $I = \int \frac{x.\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

- Dùng tích phân từng phần
  $$I = \int \arctan x . d\sqrt{1+x^2} = \arctan x . \sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
- $I = \arctan x . \sqrt{1+x^2} - \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C$

Xét $I = \displaystyle\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, trong đó $P_m(x), Q_n(x)$ là những đa thức bậc m, n.

1. Nếu $m \geq n$ thì ta thực hiện phép chia và tách được $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = h(x) + \dfrac{R_k(x)}{Q_n(x)}$, ở đó $k < n$
2. Nếu $m < n$, ta phân tích mẫu thành tích các nhân tử là đa thức bậc nhất hoặc tam thức bậc 2 có $\Delta < 0$. Sau đó tách hàm dưới tích phân thành tổng của các phân thức đơn giản và đưa về tổng các tích phân
   - $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
   - $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$
   - $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + M\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{b}\arctan\frac{x+a}{b} + C$

Ví dụ 4.3.

Tính tích phân bất định: $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+8x-21}{x^2+4x+13}dx.$

1. $\displaystyle I = \int \left(x - 2 + \frac{3x+5}{x^2+4x+13}\right)dx.$
2. $\displaystyle I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}.\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+13} - \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}$
3. $\displaystyle I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}.\ln(x^2+4x+13) - \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C.$

Ví dụ 4.4.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{(2x-1)dx}{9x^2+6x+5}$

- $I = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+5}dx - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$
- $I = \dfrac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) - \dfrac{5}{9}\displaystyle\int \frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+4}$
- $I = \dfrac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) - \dfrac{5}{18}\arctan\dfrac{3x+1}{2} + C$

Tích phân của các hàm lượng giác

Xét tích phân $I = \displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$, R là hàm hữu tỷ nào đó.

- Nếu R là hàm lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$, khi đó $dt = -\sin x dx$ và $\sin^2 x = 1 - t^2$
- Nếu R là hàm lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$, khi đó $dt = \cos x dx$ và $\cos^2 x = 1 - t^2$
- Nếu R là hàm chẵn với cả $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = \sin^{2n} x . \cos^{2m} x$ thì hạ bậc, chuyển tích về tổng
- Trong trường hợp tổng quát, có thể đặt $t = \tan \dfrac{x}{2}$. Khi đó

  $$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ví dụ 4.5.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos^2 x}$

- Đặt $t = \cos x$ ta có: $dt = -\sin x dx$ và $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}(\mathrm{t}-1)} = \int \left(\frac{1}{\mathrm{t}-1} - \frac{1}{\mathrm{t}} \right) \mathrm{dt}$
- $I = \ln(1-t) - \ln|t| + C$
- $I = \ln(1-\cos x) - \ln|\cos x| + C.$

Ví dụ 4.6.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x . \cos^2 x}$

- Đặt $t = \cos x$ ta có :$dt = -\sin x dx$ và $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2(\mathrm{t}^2 - 1)}$
- $I = \displaystyle\int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t^2} \right) dt$
- $I = \dfrac{1}{2} \ln|t-1| - \dfrac{1}{2} \ln|t+1| + \dfrac{1}{t} + C$
- $I = \dfrac{1}{2} \ln(1 - \cos x) - \dfrac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \dfrac{1}{\cos x} + C$

Ví dụ 4.7.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{5 + 2\sin x - \cos x}$

- Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$ ta có : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.
- $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{2\mathrm{dt}}{6\mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t} + 4} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 + \frac{2}{3}\mathrm{t} + \frac{2}{3}}$
- $I = \displaystyle\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$

Ví dụ 4.8.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$

- Đổi biến $t = \tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $I = \displaystyle\int \frac{2dt}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{2dt}{3+t^2}$
- $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\arctan\dfrac{t}{\sqrt{3}} + C$
- $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\arctan\dfrac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$,ở đó C là hằng số bất kì.

Tích phân của các hàm vô tỷ

- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, đặt $x = a\sin t$ hoặc $t = \sqrt{a^2 - x^2}$
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, đặt $x = \dfrac{a}{\cos t}$ hoặc $t = \sqrt{x^2 - a^2}$
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$, đặt $x = a\tan t$ hoặc $t = \sqrt{x^2 + a^2}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, ta đưa về một trong hai dạng
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$
  - $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{A} + C$
- $\displaystyle I = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, ta tách ra thành tổng dạng

$$I = M.\int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + N.\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ví dụ 4.9.

Tính tích phân bất định : $\displaystyle\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

1. Tách hàm dưới tích phân: $\displaystyle\frac{3x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{3}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
2. $\displaystyle I = \int \left(\frac{3}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{4}{\sqrt{(x+1)^2+4}} \right) dx$
3. $\displaystyle I = 3\int \frac{d(x^2+2x+5)}{2\sqrt{x^2+2x+5}} + 4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$
4. $I = 3\sqrt{x^2+2x+5} + 4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$

Ví dụ 4.10.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$

- $I = \dfrac{5}{4}\displaystyle\int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}.$
- $\displaystyle\int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = 2\sqrt{2x^2+8x+1} + C_1.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}} \right| + C_2.$
- $I = \dfrac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \dfrac{13}{\sqrt{2}} \ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x+\dfrac{1}{2}} \right| + C.$

Ví dụ 4.11.

Tính tích phân: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}$

- $I = \displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{3} - \left(\sqrt{3}x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}$.
- Đổi biến: $t = \sqrt{3}x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó: $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \displaystyle\int \dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{1}{3} - t^2}}$
- $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}t) + C$.
- $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(3x - 2) + C$.

Ví dụ 4.12.

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

- $I = \displaystyle\int \ln(1+\sqrt{1+x^2})d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}.$
- Tính $J = \displaystyle\int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}$. Đổi biến

  $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow tdt = xdx \Rightarrow J = \displaystyle\int \frac{tdt}{1+t}.$
- $J = \displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - \ln|1+t| + C = \sqrt{1+x^2} - \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C.$

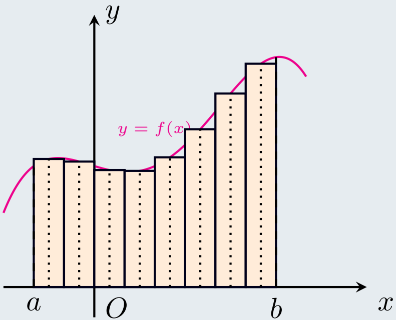
  Vậy $I = \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C$ với C là hằng số tùy ý.

Chương 1. Hàm số một biến

Định nghĩa 5.1.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n phần nhỏ bởi các mốc $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$. Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kỳ với mọi $i = 1, \cdots, n$.

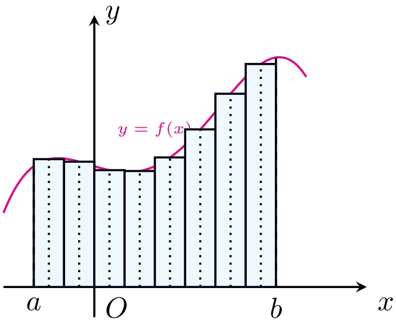
Lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.



Lập tổng tích phân $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\max_i \Delta x_i \to 0$, nếu tổng tích phân có giới hạn I hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì giới hạn I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Khi ấy $f(x)$ được gọi là hàm khả tích trên $[a, b]$. Số a và b được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân, hàm f là hàm dưới tích phân.

Các tính chất của tích phân xác định

1. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì nó khả tích trên $[a,b]$.
2. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
3. $$\int_a^b dx = b - a.$$
4. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
5. $$\int_a^b \left(\alpha f(x)dx + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \ (\alpha, \beta \text{ là hằng số}).$$

Các tính chất của tích phân xác định

Định lí 5.1.

Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi ấy tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Định lí 5.2.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Các phương pháp tính tích phân xác định

1. Phương pháp đổi biến số: Xét $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

   Đặt $x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x)$, (tương ứng 1-1), $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, $dx = \varphi'(t)dt$ và

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta g(t)dt.$$

2. Phương pháp tích phân từng phần: $u = u(x),\ v = v(x)$

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Ví dụ 5.1.

Tính tích phân: $I = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx; \quad a > 0.$

- Đổi biến $x = a\sin t : I = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$
- $I = \dfrac{a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \dfrac{a^2}{2} \left(t + \dfrac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$
- $I = a^2\pi/4.$

Ví dụ 5.2.

Tính tích phân xác định: $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{\arctan x}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx.$

1. Đổi biến, đặt $x = \tan t \Leftrightarrow \arctan x = t; x = 0 \Leftrightarrow t = 0, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$

2. Khi đó, $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ và

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t \cos t dt$$

3. Dùng pp tích phân từng phần $I = (t \sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6} - \dfrac{1}{2}$

6. Tích phân suy rộng loại 1

Định nghĩa 6.1.

Cho $f(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, với $b > a$. Đặt

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại 1 của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$. Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng là hội tụ, còn ngược lại (hoặc giới hạn không tồn tại, hoặc giới hạn bằng vô cùng), ta nói tích phân suy rộng là phân kỳ.

Định nghĩa 6.2.

Cho $f(x)$ xác định trên $(-\infty, b]$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, với $a < b$. Đặt

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại 1 của $f(x)$ trên $(-\infty, b]$. Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng là hội tụ, còn ngược lại (hoặc giới hạn không tồn tại, hoặc giới hạn bằng vô cùng), ta nói tích phân suy rộng là phân kỳ.

Định nghĩa 6.3.

Cho hàm $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn. Nếu với một số thực a nào đó, hai tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ tồn tại thì đặt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu tổng ở vế phải hữu hạn.

Ví dụ 6.1.

Tính tích phân suy rộng : $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)}$

- Theo định nghĩa, $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2(x+2)}$
- Tách hàm dưới dấu tích phân $\dfrac{1}{x^2(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+2}$ Đồng nhất các hệ số ở hai vế ta tìm được $A = -\dfrac{1}{4}, B = \dfrac{1}{2}, C = \dfrac{1}{4}$
- $I(b) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_1^b \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{b+2}{b}\right) - \frac{1}{2b} + \frac{2-\ln 3}{4}$
- Tính $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)} = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \frac{2-\ln 3}{4}$

Ví dụ 6.2.

Tính tích phân suy rộng: $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

- $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-\sqrt{x}} dx$
- Đặt $\sqrt{x} = t$, ta có $x = t^2$ và $dx = 2t.dt$, $\int\limits_0^b e^{-\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{\sqrt{b}} 2te^{-t} dt$
- $\int\limits_0^b e^{-\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{\sqrt{b}} (-2t) d(e^{-t}) = -2te^{-t}\Big|_0^{\sqrt{b}} + 2\int\limits_0^{\sqrt{b}} e^{-t} dt = -2\sqrt{b}.e^{-\sqrt{b}} - 2e^{-\sqrt{b}} + 2$
- $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{b}.e^{-\sqrt{b}} - 2e^{-\sqrt{b}} + 2\right) = 2 + \lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{\left(2\sqrt{b} - 2\right)}{e^{\sqrt{b}}} = 2$ (Áp dụng quy tắc L'Hospital).

Ví dụ 6.3.

Tính tích phân suy rộng $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

- $I = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^2+2x+10} + \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$.
- Tính: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{b}^{a} \frac{dx}{(x+1)^2+9}$

  $= \displaystyle\lim_{b\to-\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{x+1}{3}\Big|_b^a = \frac{1}{3}\arctan\frac{a+1}{3} + \frac{\pi}{6}$
- Tương tự $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan\frac{a+1}{3}$.
- Vậy $I = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

Chương 2. HÀM NHIỀU BIẾN

ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

2025

Mục lục

1. Các khái niệm
2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần
3. Đạo hàm của hàm ẩn
4. Cực trị của hàm nhiều biến

Định nghĩa 1.1.

Cho D là một miền trong $\mathbb{R}^2$. Một quy tắc $f : D \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi cặp $(x, y) \in D$ với một số thực duy nhất $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ được gọi là một hàm hai biến, ta ký hiệu $z = f(x, y)$.

- D được gọi là miền xác định của hàm số f;
- x, y là các biến độc lập,
- z hay f là hàm số (biến phụ thuộc).

!

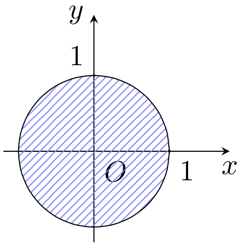
1. Hoàn toàn tương tự, ta có định nghĩa hàm 3 biến, 4 biến,...
2. Nếu hàm số f được cho bởi biểu thức $z = f(x, y)$ thì quy ước tập xác định D là tập hợp các điểm $M(x, y)$ sao cho biểu thức $f(x, y)$ là tồn tại.

Ví dụ 1.1.

Cho hàm hai biến $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Khi đó:

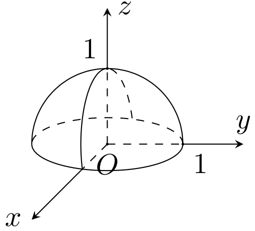
1. x, y là các biến độc lập.
2. z, f là hàm hai biến.
3. Tập xác định là $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
(là hình tròn tâm O, bán kinh 1 trong mặt phẳng Oxy).



Ví dụ 1.2.

Cho hàm hai biến $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

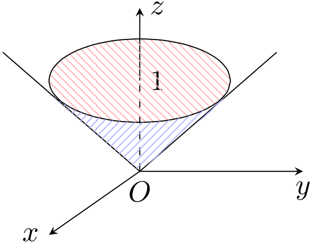
1. Ứng với $M_o = (1, 0)$, ta được $z_0 = f(1, 0) = 0$ là giá trị của hàm số tại $M_o = (1, 0)$.
2. Tập giá trị (tập hợp tất cả các giá trị) là $E = \{z = f(x, y) \mid (x, y) \in D\} = [0, 1]$.
3. Đồ thị hàm số $G = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ \ \forall (x, y) \in D\}$ là nửa trên của mặt cầu tâm O bán kính 1 trong không gian $Oxyz$.

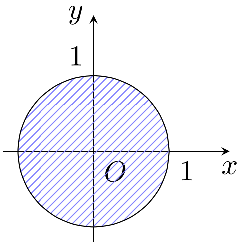


Ví dụ 1.3.

Cho hàm hai biến $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Tập xác định $D = \{\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ là toàn bộ mặt phẳng Oxy.
2. Tập giá trị $E = [0, +\infty)$
3. Đồ thị là mặt nón.





Giới hạn của hàm nhiều biến

Định nghĩa 1.2.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$. Ta nói $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$, hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ hội tụ về M_0 ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$.

!

- Dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ được gọi là hội tụ về M_0, hay $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ nếu
$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$
- Hoàn toàn tương tự ta có định nghĩa giới hạn của hàm 3 biến, 4 biến, ...

Ví dụ 1.4.

Tìm $A = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

Hướng dẫn: Điểm $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ thay đổi và $M_o(1,2)$ cố định. Khi đó $d = d(M, M_o) = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$. Ta có $M \to M_o \Leftrightarrow d \to 0$. Giới hạn được chuyển thành giới hạn của hàm 1 biến d

$$A = \lim_{d\to 0} \frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d^2} = \lim_{d\to 0} \frac{d^2}{d^2\left(\sqrt{1+d^2}+1\right)} = \lim_{d\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+d^2}+1} = \frac{1}{2}$$

Chương 2. Hàm nhiều biến

2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

Định nghĩa 2.1.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$.

- Nếu hàm số một biến $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- Nếu hàm số một biến $y \mapsto f(x_0, y)$ có đạo hàm tại y_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Đạo hàm riêng

Ví dụ 2.1.

Cho hàm hai biến $z = f(z, y) = \sqrt[3]{xy}$ và $M_0(0,0)$. Tính các đạo hàm riêng $f'_x(0,0)$ và $f'_y(0,0)$ bằng định nghĩa.

Hướng dẫn: Theo định nghĩa

1. $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0;$
2. $f'_y(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$

Đạo hàm riêng

!

1. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến x, ta coi y là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến x.
2. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến y, ta coi x là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến y.
3. Hoàn toàn tương tự, ta có định nghĩa đạo hàm của hàm 3 biến, 4 biến, ... và khi tính đạo hàm riêng của $f(x, y, z)$ theo biến x, ta coi y và z là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến x.

Ví dụ 2.2.

Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = x^4y + e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3+y^2} + \sin(4x^2+5y).$$

Hướng dẫn:

1. $f'_x = 4x^3y + 2e^{2x+y^3} + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}} + 8x\cos(4x^2+5y);$
2. $f'_y = x^4 + 3y^2e^{2x+y^3} + \dfrac{2y}{2\sqrt{x^3+y^2}} + 5\cos(4x^2+5y).$

Định nghĩa 2.2.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0). Cho các số gia $\Delta x, \Delta y$, đặt $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ và gọi là số gia toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0). Nếu có thể biểu diễn được

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

trong đó A, B là các hằng số (không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$) và $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ thì hàm số $f(x, y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó, biểu thức $df(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0).

Định lý 2.1.

Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và
$$\begin{cases} A &= f'_x(x_0, y_0), \\ B &= f'_y(x_0, y_0). \end{cases}$$

Như vậy,
$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$$

Định lý 2.2.

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) thì $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0)

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).dx + f'_y(x_0, y_0).dy$$

$$df = df(x, y) = f'_x(x, y).dx + f'_y(x, y).dy$$

Tương tự, đối với hàm 3 biến:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z).dx + f'_y(x, y, z).dy + f'_z(x, y, z).dz$$

Ví dụ 2.3.

Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$.

Hướng dẫn:

1. $$f'_x = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$
2. $$f'_y = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-x)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+x^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$
3. $df(x,y) = f'_x.dx + f'_y.dy = \dfrac{dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{1+y^2}$.

Tính gần đúng bằng vi phân

1. Cho hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) và $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé, ta có

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y$$

2. Tương tự, đối với hàm 3 biến, ta cũng có

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \approx f(M_0) &+ f'_x(M_0).\Delta x \\ &+ f'_y(M_0).\Delta y + f'_z(M_0).\Delta z, \end{aligned}$$

với $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và $|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z|$ khá bé.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u, v)$ khả vi tại $[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$ và $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0). Khi đó hàm hợp $z(x, y) = f\left[u(x, y), v(x, y)\right]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và

$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y. \end{cases}$$

2. $z(x, y) = f\left[u(x, y), v(x, y), w(x, y)\right]$, ta có

$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x + f'_w.w'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y + f'_w.w'_y. \end{cases}$$

3. $g(x, y, z) = f\left[u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\right]$, ta có

$$\begin{cases} g'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x + f'_w.w'_x, \\ g'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y + f'_w.w'_y, \\ g'_z &= f'_u.u'_z + f'_v.v'_z + f'_w.w'_z. \end{cases}$$

Ta xét một vài trường hợp đặc biệt của hàm hợp

1. $z(x,y) = f[u(x,y)]$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{df}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{df}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

2. $z(x) = f\left[u(x), v(x)\right]$, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{dv}{dx}.$$

3. $z(x) = f\left[x, y(x)\right]$, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}.$$

Định nghĩa 2.3.

Giả sử $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y xác định trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0). Khi đó, nếu các hàm hai biến $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ lại có các đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0) thì chúng được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f(x, y)$ tại điểm x_0, y_0 và được ký hiệu:

$$(f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2}$$

$$(f'_x)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = f''_{xy}$$

$$(f'_y)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x} = f''_{yx}$$

$$(f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = f''_{y^2}$$

Tương tự, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 2 được gọi là các đạo hàm riêng cấp 3, ... Chẳng hạn,

$$\left(f''_{xy}\right)'_x = f^{(3)}_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x.\partial y.\partial x},\ \left(f''_{xx}\right)'_y = f^{(3)}_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2.\partial y},\ldots$$

!

Nếu f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Tương tự, $f^{(3)}_{x^2y} = f^{(3)}_{xyx} = f^{(3)}_{yx^2},\ f^{(3)}_{y^2x} = f^{(3)}_{yxy} = f^{(3)}_{xy^2},\cdots$

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

Hướng dẫn:

- Viết lại $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$
- $f'_x = \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$, $\quad f'_y = \dfrac{y-3x}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(1,2) = \dfrac{7}{5}, f'_y(1,2) = -\dfrac{1}{5}$.
- $df(1,2) = f'_x(1,2).dx + f'_y(1,2).dy = \dfrac{7}{5}dx - \dfrac{1}{5}dy$.
- $f''_{xx} = \dfrac{-x^2+y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f''_{xx}(1,2) = -\dfrac{9}{25}$, $f''_{xy} = \dfrac{3x^2-3y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
  $\Rightarrow f''_{xy}(1,2) = -\dfrac{13}{25}$, $f''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2+6xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f''_{yy}(1,2) = \dfrac{9}{25}$.

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Hướng dẫn:

1. $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ và $u'_x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$.
2. $u''_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$
   $\Longrightarrow u''_{xx} = \dfrac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$.
3. Tương tự $u''_{yy} = \dfrac{2y^2-x^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$, $u''_{zz} = \dfrac{2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$.
4. Vậy $A = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

1. Các khái niệm
2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần
3. **Đạo hàm của hàm ẩn**
4. Cực trị của hàm nhiều biến

3. Đạo hàm của hàm ẩn

3.1. Hàm ẩn của 1 biến

Cho phương trình $F(x,y)=0$. Nếu với mỗi $x\in D$ tìm được duy nhất $y=y(x)$ thỏa mãn $F[x,y(x)]=0$ thì ta nói phương trình xác định một hàm ẩn (1 biến) $y=y(x)$ và nếu $F'_y\neq 0$ thì đạo hàm của hàm ẩn

$$y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

3.2. Hàm ẩn của 2 biến

Cho phương trình $F(x,y,z)=0$. Nếu với mỗi $(x,y)\in D$ tìm được duy nhất $z=z(x,y)$ thỏa mãn $F[x,y,z(x,y)]=0$ thì ta nói phương trình xác định một hàm ẩn (2 biến) $z=z(x,y)$ và nếu $F'_z\neq 0$ thì đạo hàm của hàm ẩn

$$z'_x(x,y)=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y(x,y)=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = y \sin x - \cos(x - y)$. Phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- Tính $F'_x = y \cos x + \sin(x - y)$, $F'_y = \sin x - \sin(x - y)$.
- $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)}$.
- $y'(0) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x,y) = xe^y + ye^x - 1 \Longrightarrow$ phương trình trở thành $F(x,y) = 0$.
- $F'_x = e^y + ye^x; F'_y = xe^y + e^x$.
- $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$.
- Khi $x = 0$, thay vào phương trình ta được $y(0) = 1$
  $\Longrightarrow y'(0) = -e^{y(0)} - y(0) = -e - 1$.

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y, z) = 2x + 3y + z - e^{xyz}$, phương trình đã cho trở thành $F(x, y, z) = 0$.
- $F'_x = 2 - yze^{xyz}, F'_y = 3 - xze^{xyz}, F'_z = 1 - xye^{xyz}$
- $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{2 - yze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}$
- $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{3 - xze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}$
- Vi phân toàn phần $dz = -\dfrac{2 - yze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}dx - \dfrac{3 - xze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}dy$

4. Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 4.1.

1. M_0 được gọi là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \leq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực đại chặt.
2. M_0 được gọi là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \geq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực tiểu chặt.
3. Các điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

Nếu $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại của hàm số thì $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số.Tương tự ta cũng có giá trị cực tiểu.

Định lý 4.1.

Nếu hàm $f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm trong $M_0(x_0,y_0)$ của D và có các đạo hàm riêng tại đó thì
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & = 0, \\[2em] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) & = 0. \end{cases}$$

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng đều bằng 0 được gọi là điểm dừng của hàm số. Từ định lý trên, nếu một điểm trong của D là điểm cực trị thì nó là điểm dừng. Điều ngược lại của định lý chưa chắc đúng.

Định lý 4.2.

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của M_0. ta đặt

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

1. Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x, y)$,
2. Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x, y)$,
3. Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$,
4. Nếu $\Delta = 0$ thì ta chưa thể kết luận được gì về điểm M_0.

Ví dụ 4.1.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = \dfrac{xy}{8} + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x \neq 0, y \neq 0$.

- Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2:
  $f'_x = \dfrac{y}{8} - \dfrac{1}{x^2},\ f'_y = \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{y^2},\ f''_{xx} = \dfrac{2}{x^3},\ f''_{xy} = \dfrac{1}{8},\ f''_{yy} = \dfrac{2}{y^3}$
- Tìm tọa độ điểm dừng, ta giải hệ: $\begin{cases} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{8} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số có 1 điểm dừng là $M = (2,2)$.
- Xét tại điểm dừng $M(2,2)$:
  $A = f''_{xx}(M) = \dfrac{2}{2^3},\ B = f''_{xy}(M) = \dfrac{1}{8},\ C = f''_{yy}(M) = \dfrac{2}{2^3} \Rightarrow B^2 - AC < 0,\ A > 0.$
  Hàm số đạt cực tiểu tại M và $f_{\text{ct}} = f(2,2) = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$

Hướng dẫn:Hàm số xác định khi $x > 0, \forall y$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 : $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \quad f'_y = -4y + \sqrt{x} + 7,$

$$f''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''_{yy} = -4.$$

+) Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 & = & 0 \\ -4y + \sqrt{x} + 7 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

+) Xét tại $M(1,2)$, ta có $A = f''_{xx}(M) = -\dfrac{1}{2}$, $B = f''_{xy}(M) = \dfrac{1}{2}$, $C = f''_{yy}(M) = -4$

- Ta thấy $B^2 - AC < 0$, $A < 0$, nên M là điểm cực đại của hàm số.
- Giá trị cực đại là $f(1,2) = 12$.

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Hướng dẫn:

1. Với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là: $z'_x = 2x - \dfrac{1}{2x}$, $z'_y = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y}$, $z''_{xx} = 2 + \dfrac{1}{2x^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2y^2}$.
2. Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ: $\begin{cases} z'_x & = 0 \\ z'_y & = 0 \end{cases}$ Vì $xy > 0$ nên hàm số có hai điểm dừng là $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.
3. Tại $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$.
4. Tại $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
   $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$
2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ xy & = 3 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng $M_1(1,3)$, $M_2(3,1)$, $M_3(-1,-3)$, $M_4(-3,-1)$.
3. Xét tại các điểm dừng:
   1. Tại $M_1(1,3)$, ta có $A = 6$, $B = 18$, $C = 6$, $B^2 - AC > 0$, nên M_1 không phải là điểm cực trị của hàm số.
   2. Tại $M_2(3,1)$, ta có $A = 18$, $B = 6$, $C = 18$, $B^2 - AC < 0$, nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số. Giá trị cực tiểu là $f(3,1) = -72$
   3. $M_3(-1,-3)$ không phải là điểm cực trị của hàm số.
   4. $M_4(-3,-1)$ là điểm cực đại của hàm số. Giá trị cực đại là $f(-3,-1) = 72$

4.2.Cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.
2. PP nhân tử Lagrange: đặt $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$
   - Tìm điểm dừng của hàm F: $\begin{cases} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ F'_\lambda &= 0 \end{cases} \Longrightarrow M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$
   - Xét tại $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$, tính $d^2F(M_0) = F''_{xx}(M_0)dx^2 + 2F''_{xy}(M_0)dxdy + F''_{yy}(M_0)dy^2$
   - Nếu $d^2F(M_0) > 0, \forall(dx, dy) \neq 0$ thì (x_0, y_0) là cực tiểu có điều kiện của $f(x, y)$.
   - Nếu $d^2F(M_0) < 0, \forall(dx, dy) \neq 0$ thì (x_0, y_0) là cực đại có điều kiện của $f(x, y)$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Tìm các điểm dừng $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Hàm F có hai điểm dừng là $M_1 = \left(-1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ và $M_2 = \left(1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét biểu thức

$d^2F(x, y, \lambda) = F''_{xx}dx^2 + 2F'' + xydxdy + F''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$.

- Tại M_1, $d^2F(M_1) = dx^2 + dy^2 > 0$, $\forall(dx, dy) \neq (0, 0)$ nên $-1, -2$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số, $f_{ct} = f(-1, -2) = -5$.
- Tại M_1, $d^2F(M_1) = -dx^2 - dy^2 > 0$, $\forall(dx, dy) \neq (0, 0)$ nên $1, 2$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm số, $f_{cd} = f(1, 2) = 5$.

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bộ môn Toán Giải tích

Trường Đại học Giao thông vận tải

2025

Mục lục

1. Khái niệm về phương trình vi phân

Trong thực tế, khi nghiên cứu sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các đại lượng, nhiều khi chúng ta không thể thiết lập trực tiếp mối quan hệ phụ thuộc ở dạng hàm số giữa các đại lượng, nhưng có thể dễ dàng thiết lập phương trình liên hệ giữa các đại lượng mà ta cần tìm mối quan hệ hàm số, cùng với các đạo hàm hoặc vi phân của hàm số chưa biết đó. Các phương trình như vậy được gọi là phương trình vi phân. Nếu hàm số cần tìm chỉ phụ thuộc một biến số thì phương trình vi phân được gọi là phương trình vi phân thường, thông thường chỉ gọi đơn giản là phương trình vi phân. Nếu hàm số cần tìm phụ thuộc nhiều biến số thì phương trình vi phân được gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng.
Trong chương này, chúng ta chỉ xét phương trình vi phân thường và cũng hạn chế xét một số dạng phương trình vi phân cấp 1, cấp 2.

1. Khái niệm về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.

Phương trình vi phân là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

- x: biến độc lập.
- $y = y(x)$: hàm số cần tìm.
- $y', y'', \ldots, y^{(n)}$: đạo hàm các cấp của y.

Cấp của PTVP là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân có mặt trong phương trình đó.

Ví dụ: 1. $y'' + 2xy' = 3x^2$ là PTVP cấp 2.
2. $y^{(3)} + 2y'' - 3y = \sin x$ là PTVP cấp 3.

Định nghĩa 2.

Nghiệm của PTVP là mọi hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình.

Định nghĩa 3.

PTVP cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

hoặc

$$y' = f(x, y) \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Định nghĩa 4.

- Nghiệm tổng quát của PTVP cấp một là họ hàm số $y = \varphi(x, C)$ (C là một hằng số tùy ý) thỏa mãn phương trình.
  Từ nghiệm tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $y = \varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng của PTVP.
- Có khi giải PTVP cấp một ta không thu được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà chỉ thu được nghiệm tổng quát dưới dạng hàm ẩn xác định bởi hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$, hệ thức này được gọi là tích phân tổng quát của PTVP.
  Từ tích phân tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $\Phi(x, y, C_0) = 0$ được gọi là tích phân riêng của PTVP.

Nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào được gọi là nghiệm kỳ dị.

Phương trình vi phân tách biến (PTVP có biến phân ly)

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \tag{3}$$

Cách giải: Tích phân hai vế phương trình (3) ta được

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.1.

Giải phương trình vi phân
$$e^{2x}dx - \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

Tích phân hai vế phương trình
$$\int e^{2x}dx - \int \frac{dy}{1+y^2} = C$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{2} - \arctan y = C.$$

Vậy tích phân tổng quát của PTVP đã cho là $\dfrac{e^{2x}}{2} - \arctan y = C$.

Phương trình vi phân có thể tách biến

$$P_1(x).Q_1(y)dx + P_2(x).Q_2(y)dy = 0. \tag{4}$$

Cách giải: Chia hai vế của phương trình (4) cho $P_2(x).Q_1(y) \neq 0$ ta được

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

Chú ý: Nếu $P_2(x).Q_1(y) = 0$ tại $x = x_0$ (hoặc $y = y_0$) thì $x = x_0$ (hoặc $y = y_0$) cũng là nghiệm của PTVP.

Ví dụ 2.2.

Giải phương trình vi phân

$$x\left(y^2-1\right)dx+y\left(x^2-1\right)dy=0.$$

- $x=\pm 1, y=\pm 1$ là các nghiệm của PT.
- Với $x\neq \pm 1,\ y\neq \pm 1$, chia hai vế của PT cho $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\neq 0$ ta được

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{x}{x^2-1}dx+\int \frac{y}{y^2-1}dy=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2-1)}{y^2-1}=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=C$$ là tích phân tổng quát của PT.

Ví dụ 2.3.

Giải phương trình vi phân
$$e^x\left(y^2+1\right)dx + ydy = 0$$

Chia hai vế phương trình cho y^2+1 ta được
$$e^x dx + \frac{y}{y^2+1}dy = 0$$
$$\Leftrightarrow \int e^x dx + \int \frac{y}{y^2+1}dy = C$$
$$\Leftrightarrow e^x + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C.$$

Vậy tích phân tổng quát của PT đã cho là
$$e^x + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C.$$

Cách giải PTVP dạng $y' = f(ax + by + c)$

Đặt $u(x) = ax + by + c \Rightarrow u' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{u' - a}{b}$.

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{u' - a}{b} = f(u) \\ \Leftrightarrow\ & u' = a + bf(u) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du}{dx} = a + bf(u) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du}{a + bf(u)} = dx, \qquad (\text{với } a + bf(u) \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx + C. \end{aligned}$$

Chú ý: Nếu $a + bf(u) = 0$ *tại* $u = u_0$ *thì* $y = \dfrac{u_0 - ax - c}{b}$ *là một nghiệm của PTVP.*

Ví dụ 2.4.

Giải phương trình vi phân

$$y' = (x + y + 1)^2.$$

Đặt $u = x + y + 1 \Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$.

PTVP đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & u' - 1 = u^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du}{u^2+1} = dx \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{du}{u^2+1} = \int dx + C \\ \Leftrightarrow\ & \arctan u = x + C \end{aligned}$$

$\Rightarrow \arctan(x + y + 1) = x + C$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

Ví dụ 2.5.

Giải phương trình vi phân
$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Đặt $u = x - y - 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$.
PTVP đã cho trở thành
$$1 - u' = \cos u \Leftrightarrow u' = 1 - \cos u \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \cos u.$$

- $1 - \cos u = 0 \Leftrightarrow \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
  $\Rightarrow y = x - 1 - k2\pi$ là nghiệm của PTVP đã cho.
- $1 - \cos u \neq 0$ ta có
  $$\frac{du}{1-\cos u} = dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{1-\cos u} = \int dx + C \Leftrightarrow \int \frac{du}{2\sin^2\frac{u}{2}} = x + C \Leftrightarrow -\cot\frac{u}{2} = x + C$$
  $\Rightarrow -\cot\dfrac{x-y-1}{2} = x + C$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

Phương trình vi phân đẳng cấp

$$y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

Cách giải: Đặt $u(x) = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

Phương trình (5) trở thành: $\quad u + x.u' = \varphi(u)$

$$\Leftrightarrow x.\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad (\text{với } \varphi(u) - u \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Chú ý: Nếu $\varphi(u) - u = 0$ tại $u = u_0$ thì $y = u_0 x$ cũng là nghiệm của PTVP.

Ví dụ 2.6.

Giải phương trình vi phân

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

PTVP đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & u + x.u' = e^{-u} + u \\ \Leftrightarrow\ & x.\frac{du}{dx} = e^{-u} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du}{e^{-u}} = \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{du}{e^{-u}} = \int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \int e^{u} du = \ln|x| + C \Leftrightarrow e^{u} = \ln|x| + C \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

Ví dụ 2.7.

Giải phương trình vi phân

$$y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}.$$

$$y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2.$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

PTVP đã cho trở thành: $\quad u + x.u' = u^2 - 2$

$$\Leftrightarrow x.\frac{du}{dx} = u^2 - u - 2$$

- $u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 2 \end{array}\right. \Rightarrow y = -x,\ y = 2x$ là các nghiệm của PT đã cho.

- $u^2 - u - 2 \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{du}{u^2-u-2} &= \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow \int \frac{du}{(u-2)(u+1)} &= \int \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| &= \ln|x| + \ln|C| \\
\Leftrightarrow \ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| &= 3\ln|Cx| = \ln|Cx|^3 \\
\Leftrightarrow \frac{u-2}{u+1} &= C_1x^3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{y-2x}{y+x} = C_1x^3$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

PTVP tuyến tính cấp một

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{6}$$

trong đó $p(x),\ q(x)$ là các hàm liên tục của x.

- Nếu $q(x) \equiv 0$ thì phương trình (6) là PTVP tuyến tính thuần nhất.
- Nếu $q(x) \not\equiv 0$ thì phương trình (6) là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

Cách giải:

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

+ $y = 0$ là một nghiệm của PT trên.
+ Nếu $y \neq 0$ ta có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Rightarrow y = C.e^{-\int p(x)dx}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} \qquad (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

- Tìm nghiệm tổng quát của PT không thuần nhất (6) dưới dạng

$$y = C(x).e^{-\int p(x)dx} \qquad (C(x) \text{ là hàm của } x).$$

$$y' = C'(x).e^{-\int p(x)dx} + C(x).\left(-\int p(x)dx\right)'.e^{-\int p(x)dx}$$

$$= C'(x).e^{-\int p(x)dx} - C(x).p(x).e^{-\int p(x)dx}.$$

Thay y, y' vào PT không thuần nhất (6) và rút gọn ta được

$$C'(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x).e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int q(x).e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (6) là

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right),$$

với C_1 là hằng số tùy ý.

Công thức nghiệm tổng quát

Nghiệm tổng quát của PTVP tuyến tính cấp một $y' + p(x)y = q(x)$ là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \tag{7}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.8.

Giải phương trình vi phân
$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

PTVP đã cho là PTVP tuyến tính cấp một với $p(x) = 2x$ và $q(x) = xe^{-x^2}$. Nghiệm tổng quát của PT là

$$y = e^{-\int 2xdx}\left(\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C\right)$$
$$= e^{-x^2}\left(\int xe^{-x^2}e^{x^2}dx + C\right) = e^{-x^2}\left(\int xdx + C\right) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Ví dụ 2.9.

Giải phương trình vi phân
$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

PTVP đã cho là PTVP tuyến tính cấp một với $p(x) = -\dfrac{2}{x+1}$ và $q(x) = (x+1)^3$. Nghiệm tổng quát của PT là

$$y = e^{-\int -\frac{2}{x+1}dx}\left(\int (x+1)^3 e^{\int -\frac{2}{x+1}dx} dx + C\right)$$
$$= e^{2\ln|x+1|}\left(\int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|} dx + C\right)$$

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^2\left(\int (x+1)^3(x+1)^{-2}dx + C\right) \\ &= (x+1)^2\left(\int (x+1)dx + C\right) \\ &= (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là

$$y = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right).$$

Chú ý: $e^{\ln b} = b, \quad e^{a\ln b} = b^a$

Phương trình Bernoulli

$$y' + p(x).y = q(x).y^{\alpha}, \qquad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1) \tag{8}$$

Cách giải: Chia hai vế của phương trình (8) cho $y^{\alpha} \neq 0$ ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x).y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $u(x) = y^{1-\alpha} \Rightarrow u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x) \Leftrightarrow u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x).$$

Phương trình trên là PTVP tuyến tính cấp 1. Sau khi tìm được nghiệm tổng quát của phương trình này, trở về biến y, ta được nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát của phương trình Bernoulli đã cho.

Chú ý: Nếu $\alpha > 0$ thì $y = 0$ là một nghiệm của phương trình Bernoulli.

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân
$$y' + 2y = e^x y^2, \quad y(0) = 1.$$

- $y = 0$ thỏa mãn PT nhưng không thỏa mãn điều kiện ban đầu.
- Với $y \neq 0$, chia hai vế của PT cho y^2 ta được
$$y^{-2}y' + 2y^{-1} = e^x.$$
Đặt $u = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$. PT trở thành
$$-u' + 2u = e^x \Leftrightarrow u' - 2u = -e^x.$$
Đây là PTVP tuyến tính có nghiệm tổng quát
$$u = e^{-\int -2dx}\left(\int -e^x . e^{\int -2dx} dx + C\right)$$

$$u = e^{2x}\left(\int -e^{x}.e^{-2x}dx + C\right) = e^{2x}\left(\int -e^{-x}dx + C\right)$$
$$= e^{2x}\left(e^{-x} + C\right) = Ce^{2x} + e^{x}.$$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{Ce^{2x} + e^{x}}$.

$y(0) = \dfrac{1}{C+1} = 1 \Rightarrow C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0.$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng cần tìm là

$$y = \frac{1}{e^{x}} = e^{-x}.$$

Ví dụ 2.11.

Giải phương trình vi phân
$$y' - 2xy = 3x^3y^2.$$

- $y = 0$ là một nghiệm của PT.
- Với $y \neq 0$, chia hai vế của PT cho y^2 ta được

$$\frac{y'}{y^2} - 2x.\frac{1}{y} = 3x^3.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{y} \Rightarrow u' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Phương trình trở thành

$$-u' - 2xu = 3x^3 \Leftrightarrow u' + 2xu = -3x^3.$$

PT này là PTVP tuyến tính cấp một có nghiệm tổng quát là

$$u = e^{-\int 2xdx}\left(\int -3x^3 e^{\int 2xdx} dx + C\right) = e^{-x^2}\left(\int -3x^3 e^{x^2} dx + C\right).$$

Xét $I = \displaystyle\int -3x^3 e^{x^2} dx = -3\int x^2 e^{x^2} x dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

$$I = -\frac{3}{2}\int te^t dt = -\frac{3}{2}\int td(e^t) = -\frac{3}{2}\left(te^t - e^t\right) = -\frac{3}{2}e^{x^2}(x^2 - 1).$$

$\Rightarrow u = Ce^{-x^2} - \dfrac{3}{2}(x^2 - 1)$.

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là $y = \dfrac{1}{Ce^{-x^2} - \dfrac{3}{2}(x^2 - 1)}$.

2.6. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{9}$$

được gọi là *phương trình vi phân toàn phần* nếu vế trái của nó là vi phân toàn phần của một hàm hai biến $u(x, y)$ nào đó, nghĩa là

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Khi đó, tích phân tổng quát của phương trình (9) là

$$u(x, y) = C.$$

Nếu các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D nào đó thì điều kiện cần và đủ để phương trình (9) trở thành phương trình vi phân toàn phần là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \tag{10}$$

2.6. Phương trình vi phân toàn phần

Khi điều kiện (10) được thỏa mãn, tích phân tổng quát của phương trình (9) có dạng

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \tag{11}$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C \tag{12}$$

trong đó (x_0, y_0) là một điểm chọn trước bất kì thuộc miền D.

Ví dụ 2.12.

Giải phương trình vi phân

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Đặt

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{2x}{y^3} \\ Q(x,y) = \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = -\dfrac{6x}{y^4} \\ Q'_x = -\dfrac{6x}{y^4} \end{cases}$$

$\Rightarrow P'_y = Q'_x \Rightarrow$ PTVP đã cho là PTVP toàn phần.

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$, tích phân tổng quát của PTVP đã cho là

$$\int_0^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(0,y)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{2x}{y^3}dx + \int_1^y \frac{1}{y^2}dy = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^3}\Big|_0^x - \frac{1}{y}\Big|_1^y = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + 1 = C$$

Ví dụ 2.13.

Giải phương trình vi phân

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0, \quad y(0)=0.$$

Đặt

$$\begin{cases} P(x,y)=x+y \\ Q(x,y)=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=1 \\ Q'_x=1 \end{cases} \Rightarrow P'_y=Q'_x$$

$\Rightarrow$ PTVP đã cho là PTVP toàn phần.
Chọn $(x_0,y_0)=(0,0)$, tích phân tổng quát của PTVP đã cho là

$$\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=C \Leftrightarrow \int_0^x xdx+\int_0^y (x-y)dy=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_0^x + (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^y = C$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Do đó, tích phân riêng cần tìm là

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = 0.$$

Định nghĩa 5.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng là phương trình có dạng

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{13}$$

trong đó $a,\ b,\ c$ là các hằng số và $a \neq 0$.

- Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình (13) là phương trình tuyến tính thuần nhất.
- Nếu $f(x) \not\equiv 0$ thì phương trình (13) là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

Phương trình tuyến tính thuần nhất

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{14}$$

Cách giải: Giải phương trình đặc trưng: $ak^2 + bk + c = 0.$

1. PT đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$.
   $\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT (14) là $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.
2. PT đặc trưng có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$.
   $\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT (14) là $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$.
3. PT đặc trưng có nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.
   $\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT (14) là $y = e^{\alpha x} \left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right]$.

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình vi phân:
1. $y'' - 4y = 0$ 2. $4y'' + 4y' + y = 0$ 3. $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

1. Phương trình đặc trưng: $k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm 2.$
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT là $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$

2. Phương trình đặc trưng: $4k^2 + 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2}$ (bội 2)

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT là

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{1}{2}x}.$$

3. Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = 1 \pm 2i.$
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT là $y = e^x\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$
$\Rightarrow y' = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)$

$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Nghiệm riêng cần tìm là $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x).$

Phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (a \neq 0) \tag{15}$$

PT thuần nhất tương ứng của PT (15) là

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{16}$$

Nghiệm tổng quát của PT (15) = nghiệm tổng quát của PT (16) + một nghiệm riêng của PT (15).

Phương pháp giải phương trình tuyến tính không thuần nhất (15)

Bước 1. Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của PT thuần nhất (16).
Bước 2. Tìm một nghiệm riêng y_* của PT không thuần nhất (15).
Bước 3. Nghiệm tổng quát của PT không thuần nhất (15) là

$$y = \overline{y} + y_*$$

Để tìm một nghiệm riêng y_* của PT không thuần nhất (15), ta xét 3 trường hợp đặc biệt của vế phải $f(x)$ sau đây:

Trường hợp 1. Vế phải $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ ($P_n(x)$ là đa thức bậc n của x).

1. Nếu α không là nghiệm của PT đặc trưng $(ak^2 + bk + c = 0)$ thì tìm y_* dưới dạng

$$y_* = e^{\alpha x} Q_n(x).$$

2. Nếu α là nghiệm đơn của PT đặc trưng thì tìm y_* dưới dạng

$$y_* = x e^{\alpha x} Q_n(x).$$

3. Nếu α là nghiệm kép của PT đặc trưng thì tìm y_* dưới dạng

$$y_* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x).$$

$Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x.

Ví dụ 3.2.

Giải phương trình vi phân
$$y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' - 2y' + y = 0$.
Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$ (bội 2)
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là

$$\overline{y} = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Vế phải $f(x) = 2e^{2x}$ (dạng $e^{2x}P_0(x)$). Vì $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của PT không thuần nhất dưới dạng $y_* = A.e^{2x}$.
$\Rightarrow y_*' = 2Ae^{2x},\ y_*'' = 4Ae^{2x}$.
Thay y_*, y_*', y_*'' vào PT đã cho ta được
$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_* = 2e^{2x}.$$
Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là $y = \overline{y} + y_* = (C_1 + C_2x)e^x + 2e^{2x}$.

Ví dụ 3.3.

Giải phương trình vi phân

$$y'' - 4y' = 2x + 3, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' - 4y' = 0.$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Vế phải $f(x) = 2x + 3 = e^{0.x}(2x + 3)$ (dạng $e^{0.x} P_1(x)$). Vì $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của PT không thuần nhất dưới dạng
$y_* = xe^{0x}(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$
$\Rightarrow y_*^{'} = 2Ax + B,\ y_*^{''} = 2A.$

Thay $y_*^{'}, y_*^{''}$ vào PT đã cho ta được

$$2A - 8Ax - 4B = 2x + 3 \Leftrightarrow -8Ax + 2A - 4B = 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} -8A = 2 \\ 2A - 4B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{7}{8} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_* = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{7}{8}x.$

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là $y = \overline{y} + y_* = C_1 + C_2e^{4x} - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{7}{8}x.$

$\Rightarrow y' = 4C_2e^{4x} - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{8}.$

Ta có $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y^{'}(0) = 4C_2 - \dfrac{7}{8} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{23}{32} \\ C_2 = \dfrac{23}{32} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng cần tìm là $y = -\dfrac{23}{32} + \dfrac{23}{32}e^{4x} - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{7}{8}x.$

Ví dụ 3.4.

Giải phương trình vi phân

$$4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $4y'' - 4y' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $4k^2 - 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$ (bội 2).

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là

$$\overline{y} = (C_1 + C_2 x)\, e^{\frac{1}{2}x}.$$

Vế phải $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$ (dạng $e^{\frac{1}{2}x}P_1(x)$). Vì $\alpha = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của PT không thuần nhất dưới dạng

$$y_* = x^2 e^{\frac{1}{2}x}(Ax + B) = e^{\frac{1}{2}x}(Ax^3 + Bx^2)$$

$\Rightarrow y_*^{'} = e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)$

$\Rightarrow y_*^{''} = e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{4}Ax^3 + 3Ax^2 + \frac{1}{4}Bx^2 + 6Ax + 2Bx + 2B)$

Thay $y_*, y_*^{'}, y_*^{''}$ vào PT đã cho ta được

$Ax^3 + 12Ax^2 + Bx^2 + 24Ax + 8Bx + 8B - 2Ax^3 - 2Bx^2 - 12Ax^2 - 8Bx + Ax^3 + Bx^2 = x$

$$\Leftrightarrow 24Ax + 8B = x \quad \Rightarrow \begin{cases} 24A = 1 \\ 8B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{24} \\ B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow y_* = \frac{1}{24}x^3 e^{\frac{1}{2}x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là

$$y = \overline{y} + y_* = (C_1 + C_2 x)\, e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{24}x^3 e^{\frac{1}{2}x}.$$

Trường hợp 2. Vế phải $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]$
$(P_n(x), Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m của $x)$.

1. Nếu $\alpha \pm \beta i$ không là nghiệm của PT đặc trưng thì tìm y_* dưới dạng

$$y_* = e^{\alpha x}\left[G_s(x)\cos(\beta x) + H_s(x)\sin(\beta x)\right].$$

2. Nếu $\alpha \pm \beta i$ là nghiệm của PT đặc trưng thì tìm y_* dưới dạng

$$y_* = xe^{\alpha x}\left[G_s(x)\cos(\beta x) + H_s(x)\sin(\beta x)\right].$$

$G_s(x), H_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{m, n\}$.

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình vi phân
$$y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + 2y' + 2y = 0.$
Phương trình đặc trưng: $k^2 + 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = -1 \pm i.$
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là
$$\overline{y} = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Vế phải $f(x) = e^x \sin x = e^{1.x}(0.\cos x + 1.\sin x)$. Vì $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của PT không thuần nhất dưới dạng
$$y_* = e^x(A \cos x + B \sin x).$$

$\Rightarrow y_*' = e^x(A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x)$
$\Rightarrow y_*'' = e^x(A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - A \cos x - B \sin x)$
$\quad = e^x(2B \cos x - 2A \sin x)$

Thay y_*, y_*', y_*'' vào PT đã cho ta được
$2B\cos x - 2A\sin x + 2A\cos x + 2B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = \sin x$

$$\Leftrightarrow (4A+4B)\cos x + (-4A+4B)\sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A+4B=0 \\ -4A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} \\ B = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_* = e^x\left(-\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x\right)$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là

$$y = \overline{y} + y_* = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^x\left(-\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x\right).$$

Ví dụ 3.6.

Giải phương trình vi phân
$$y'' + 4y = 2\cos 2x.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + 4y = 0$.
Phương trình đặc trưng: $k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm 2i$.
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là
$$\overline{y} = e^{0.x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$
Vế phải $f(x) = 2\cos 2x = e^{0.x}(2.\cos 2x + 0.\sin 2x)$. Vì $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của PT không thuần nhất dưới dạng
$$y_* = xe^{0.x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$
$\Rightarrow y_*' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$
$\Rightarrow y_*'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)$

Thay y_*, y_*'' vào PT đã cho ta được
$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = 2\cos 2x$

$$\Leftrightarrow -4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4A = 0 \\ 4B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_* = \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là

$$y = \overline{y} + y_* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

Trường hợp 3. Vế phải $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, trong đó $f_1(x), f_2(x)$ có dạng Trường hợp 1 hoặc Trường hợp 2.

Ta tìm y_* dưới dạng

$$y_* = y_{1*} + y_{2*},$$

trong đó: y_{1*} là nghiệm riêng của PT $ay'' + by' + cy = f_1(x)$

y_{2*} là nghiệm riêng của PT $ay'' + by' + cy = f_2(x)$

Ví dụ 3.7.

Giải phương trình vi phân
$$y'' + 9y = \cos 3x + e^x$$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + 9y = 0.$
Phương trình đặc trưng: $k^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm 3i.$
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là
$$\overline{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Vế phải $f(x) = \cos 3x + e^x = f_1(x) + f_2(x)$

- Tìm nghiệm riêng y_{1*} của PT $y'' + 9y = \cos 3x.$
  $f_1(x) = \cos 3x = e^{0.x}(1.\cos 3x + 0.\sin 3x)$. Vì $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 3i$ là nghiệm của PT đặc trưng nên $y_{1*} = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$
- Tìm nghiệm riêng y_{2*} của PT $y'' + 9y = e^x.$
  $f_2(x) = e^x = 1.e^{1.x}$. Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của PT đặc trưng nên $y_{2*} = Ce^x.$

Nghiệm riêng của PT đã cho được tìm dưới dạng

$$y_* = y_{1*} + y_{2*} = x(A\cos 3x + B\sin 3x) + Ce^x.$$

$\Rightarrow y_*^{'} = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + Ce^x$
$\Rightarrow y_*^{''} = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) + Ce^x$
Thay $y_*, y_*^{''}$ vào PT đã cho ta được
$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) + Ce^x + 9x(A\cos 3x + B\sin 3x) + 9Ce^x = \cos 3x + e^x$.

$$\Leftrightarrow -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + 10Ce^x = \cos 3x + e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6A = 0 \\ 6B = 1 \\ 10C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{6} \\ C = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow y_* = \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{10}e^x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{6}\sin 3x + \dfrac{1}{10}e^x$.

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - Trường ĐHGTVT

2025

Mục lục

Chương 4. Phương trình sai phân

1. Tổng quát về phương trình sai phân

Định nghĩa 1.1.

Cho hàm có đối số nguyên (dãy số): $x_n = x(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sai phân của x_n là biểu thức:

$$\boxed{\Delta x_n = x_{n+1} - x_n}$$

Lấy sai phân của sai phân được gọi là sai phân cấp 2 của x_n:

$$\boxed{\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Lấy sai phân của sai phân cấp 2 được gọi là sai phân cấp 3 của x_n:

$$\boxed{\Delta^3 x_n = \Delta(\Delta^2 x_n) = \Delta^2 x_{n+1} - \Delta^2 x_n = x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n}$$

Một cách tổng quát, lấy sai phân của sai phân cấp $k-1$ được gọi là sai phân cấp k của x_n.
Sai phân cấp k của x_n sẽ được biểu diễn qua $x_{n+k}, x_{n+k-1}, \cdots, x_n$.

1. Tổng quát về phương trình sai phân

Định nghĩa 1.2.

Phương trình sai phân là phương trình có dạng:

$$\boxed{F(n, x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n, \cdots, \Delta^k x_n) = 0}$$

- n là đối số nguyên,
- x_n là hàm có đối số nguyên (dãy số) chưa biết (ẩn hàm),
- Δx_n, $\Delta^2 x_n$, $\cdots$, $\Delta^k x_n$ là sai phân cấp $1, 2, \cdots, k$ của x_n.

Cấp của phương trình sai phân là cấp cao nhất của sai phân có mặt trong phương trình. Phương trình sai phân cấp k tổng quát còn có thể viết dưới dạng:

$$\boxed{G(n, x_{n+k}, x_{n+k-1}, \cdots, x_{n+1}, x_n) = 0}$$

1. Tổng quát về phương trình sai phân

- Nghiệm của phương trình sai phân là mọi hàm có đối số nguyên (dãy số) x_n thỏa mãn phương trình (khi thay x_n cùng với các sai phân của nó vào thì 2 vế của phương trình bằng nhau với mọi giá trị nguyên của n).
- Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là hàm dạng:

$$\boxed{x_n = \varphi(n, C_1, C_2, \cdots, C_k)}$$

thỏa mãn phương trình với mọi hằng số $C_1, C_2, \cdots, C_k$ tùy ý.

- Giải phương trình sai phân là đi tìm mọi nghiệm của phương trình.
- Phương trình sai phân tuyến tính cấp k tổng quát có dạng:

$$\boxed{a_k(n)x_{n+k} + a_{k-1}(n)x_{n+k-1} + \cdots + a_1(n)x_{n+1} + a_0(n)x_n = f(n)}$$

Với $a_k(n), a_{k-1}(n), \cdots, a_1(n), a_0(n), f(n)$ là các hàm đã biết còn x_n là hàm phải tìm.

Chương 4. Phương trình sai phân

2. Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

Là phương trình có dạng:

$$\boxed{a.x_{n+2} + b.x_{n+1} + c.x_n = f(n) \quad (1)}$$

- n là biến số nguyên; x_n là hàm phải tìm;
- a, b, c là hằng số; $f(n)$ là hàm đã biết $(a,\, c \neq 0)$;
- $f(n)$ là vế phải của phương trình;
- Nếu vế phải $f(n) = 0$ ta có phương trình thuần nhất;
- Nếu vế phải $f(n) \neq 0$ ta có phương trình không thuần nhất.

Xét phương trình sai phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng:

$$\boxed{a.x_{n+2} + b.x_{n+1} + c.x_n = f(n) \quad (1)}$$

Định lý 2.1.

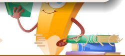
Cấu trúc nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng không thuần nhất (1):

$$\boxed{x_n = \overline{x_n} + x_n^*}$$

- $\overline{x_n}$ là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất tương ứng

$$a.x_{n+2} + b.x_{n+1} + c.x_n = 0 \quad (2)$$

- x_n^* là một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.



Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Xét phương trình sai phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất:

$$\boxed{a.x_{n+2} + b.x_{n+1} + c.x_n = 0 \quad (2)}$$

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình, ta tìm 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (2) dưới dạng: $x_n = \lambda^n$ $(\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \neq 0)$.
Thay $x_n = \lambda^n$ vào phương trình (2), ta được:

$$a.\lambda^{n+2} + b.\lambda^{n+1} + c.\lambda^n = 0$$

Chia cả 2 vế của phương trình cho $\lambda^n \neq 0$, ta được:

$$\boxed{a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0 \quad (3)}$$

Phương trình (3) gọi là phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất (2).

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$\boxed{a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0 \quad (3)}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (3) có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là

$$\boxed{x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (3) có kép $\lambda_1 = \lambda_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là

$$\boxed{x_n = (C_1 + C_2.n)\lambda_1^n}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (3) có nghiệm phức $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = r\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là

$$\boxed{x_n = r^n\,(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi)}$$

trong đó C_1, C_2 là hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.1.

Giải phương trình sai phân:

a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$. b) $4x_{n+2} + 4x_{n+1} + x_n = 0$. c) $y_{n+2} + y_n = 0$

a) Xét phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3$. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là:

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n.$$

b) Xét phương trình đặc trưng: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là:

$$x_n = (C_1 + C_2.n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

c) Xét phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i = \cos\dfrac{\pi}{2} \pm i\sin\dfrac{\pi}{2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là:

$$y_n = C_1\cos\frac{n\pi}{2} + C_2\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Ví dụ 2.2.

Giải phương trình sai phân:

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0;\; x_0 = 1, x_1 = 3$$

- Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3.$
- Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x_n = C_1.2^n + C_2.3^n$$

  (với C_1, C_2 là những hằng số tùy ý).
- Từ điều kiện $x_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1.$
- Từ điều kiện $x_1 = 3 \Rightarrow 2C_1 + 3C_2 = 3.$
- Ta tìm được $C_1 = 0; C_2 = 1.$
- Vậy nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện ban đầu là

$$x_n = 1.3^n = 3^n.$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Xét phương trình:

$$\boxed{a.x_{n+2} + b.x_{n+1} + c.x_n = f(n) \quad (1)}$$

Phương trình thuần nhất:

$$\boxed{a.x_{n+2} + b.x_{n+1} + c.x_n = 0 \quad (2)}$$

Có phương trình đặc trưng

$$\boxed{a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0 \quad (3)}$$

Với vế phải của phương trình có dạng $f(n) = \beta^n.P_k(n)$
(β là hằng số đã biết; $P_k(n)$ là đa thức bậc k của n cho trước).
Giả sử β là nghiệm bội $s(=0;1;2)$ của phương trình đặc trưng, ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $x_n^* = n^s\beta^n.Q_k(n)$.
($Q_k(n)$ là đa thức bậc k của phương trình mà các hệ số chưa biết và chúng được xác định bằng cách thay x_n^*, x_{n+1}^*; x_{n+2}^* vào phương trình (1) và đồng nhất hệ số của 2 vế).

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Ví dụ 2.3.

Giải phương trình sai phân:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2n + 3.$$

- Phương trình thuần nhất $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{x_n} = C_1 + nC_2$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $x_n^* = n^2(An + B) = An^3 + Bn^2$.
- Thay x_n^* vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = \frac{1}{3}, \ B = \frac{1}{2}$. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $x_n^* = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $x_n = \overline{x_n} + x_n^* = C_1 + nC_2 + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}$

Ví dụ 2.4.

Giải phương trình sai phân:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 1 + 2^n.$$

- Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $\overline{x}_n = \sqrt{2^n}(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4})$
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $x_n^* = A + B.2^n$
- Thay x_n^* vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = 1;\ B = 1/2$ và $x_n^* = 1 + 2^{n-1}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $x_n = \sqrt{2^n}(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}) + 1 + 2^{n-1}$

Ví dụ 2.5.

Tìm nghiệm riêng của phương trình:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n + 3; \quad y_0 = 1,\ y_1 = 2.$$

- Phương trình thuần nhất $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ có nghiệm $\overline{y_n} = C_1.2^n + C_2.3^n$.
- Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $y_n^* = An + B$.Thay vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = \dfrac{1}{2}, B = \dfrac{9}{4}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $y_n = \overline{y_n} + y_n^* = C_1.2^n + C_2.3^n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{9}{4}$.
- Thay vào điều kiện đầu : $C_1 = -3,\ C_2 = \dfrac{7}{4}$ và nghiệm cần tìm là
  $y_n = -3.2^n + \dfrac{7}{4}.3^n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{9}{4}$.

Ví dụ 2.6.

Tìm nghiệm của phương trình sai phân:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2^n + n$$

- Phương trình thuần nhất $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{x_n} = C_1 + nC_2$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $x_n^* = A2^n + n^2(Bn + C)$.
- Thay x_n^* vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = 1,\ B = 1/6, C = -1/2$.

  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $x_n^* = 2^n + \dfrac{n^3}{6} - \dfrac{n^2}{2}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $x_n = \overline{x_n} + x_n^* = C_1 + nC_2 + \dfrac{n^3}{6} - \dfrac{n^2}{2}$

Ví dụ 2.7.

Giải hệ phương trình sai phân:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n + 3.2^n$$

- Phương trình thuần nhất: $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{x_n} = (C_1 + C_2.n)2^n$.
- Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $x_n^* = An + B + C.n^2.2^n$.
- Thay vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = 1, B = 2, C = \dfrac{3}{8}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $x_n = \overline{x_n} + x_n^* = (C_1 + C_2.n)2^n + n + 2 + \dfrac{3}{8}n^2.2^n$.

Ví dụ 2.8.

Giải phương trình $4x_{n+2} + 4x_{n+1} + x_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

- Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát: $\overline{x_n} = (C_1 + C_2 n)\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình dạng: $x_n^* = n^2.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n.A$
- Thay x_n^* vào phương trình ta được: $A = \dfrac{1}{2}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là: $x_n = \overline{x_n} + x_n^* = \left(C_1 + C_2 n + \dfrac{n^2}{2}\right)\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.

Ví dụ 2.9.

Giải phương trình sai phân: $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 5u_n = 2 + 3^n$

- Phương trình thuần nhất $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 5u_n = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{u_n} = \sqrt{5}^n(C_1 \cos n\alpha + C_2 \sin n\alpha)$ với $\alpha \in [0, 2\pi)$ thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $u_n^* = A + B3^n$.
- Thay u_n^* vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = 1, B = \dfrac{1}{2}$. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = 1 + \dfrac{3^n}{2}$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = \overline{u_n} + u_n^* = \sqrt{5}^n(C_1 \cos n\alpha + C_2 \sin n\alpha) + u_n^* = 1 + \dfrac{3^n}{2}$

Chương 4. Phương trình sai phân

1. Tổng quát về phương trình sai phân
2. Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
3. Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1

3. Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1

Xét hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1, hệ số hằng:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a.x_n + b.y_n, & x_0 = \alpha \\ y_{n+1} = c.x_n + d.y_n, & y_0 = \beta \end{cases}$$

Từ phương trình (1) thay n bởi $n+1$, ta được $x_{n+2} = a.x_{n+1} + b.y_{n+1}$.
Thay $by_{n+1} = bc.x_n + bd.y_n = bc.x_n + d\left(x_{n+1} - ax_n\right)$, ta được:

$$x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n \Leftrightarrow x_{n+2} - (a+d)x_{n+1} + (ad-bc)x_n = 0$$

Giải phương trình, ta tìm được x_n.
Thay vào $y_n = \dfrac{1}{b}x_{n+1} - \dfrac{a}{b}x_n$, ta tìm được y_n.
Từ điều kiện ban đầu, ta tìm được các hằng số, tìm ra nghiệm thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 3.1.

Giải hệ phương trình sai phân: $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n, & x_0 = 2 \\ y_{n+1} = 2x_n + 2y_n, & y_0 = -1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) thay n bởi $n+1$, ta được $x_{n+2} = 3x_{n+1} + y_{n+1}$.
Thay $y_{n+1} = 2x_n + 2y_n = 2x_n + 2\left(x_{n+1} - 3x_n\right)$, ta được:

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + \left(2x_{n+1} - 4x_n\right) \Leftrightarrow x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Giải phương trình, ta tìm được $x_n = C_1.4^n + C_2$.
Thay $y_n = x_{n+1} - 3x_n = C_1.4^{n+1} + C_2 - 3(C_1.4^n + C_2) = C_1.4^n - 2C_2$.
Từ điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 - 2C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_n = 4^n + 1 \\ y_n = 4^n - 2. \end{cases}$

Ví dụ 3.2.

Giải hệ phương trình sai phân: $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 8y_n, & x_0 = -1 \\ y_{n+1} = 2x_n - 6y_n, & y_0 = 2 \end{cases}$

Từ phương trình (1) thay n bởi $n+1$, ta được: $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 8y_{n+1}$.
Thay $y_{n+1} = 2x_n - 6y_n$, ta có: $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 8\left(2x_n - 6y_n\right)$

$$\Leftrightarrow x_{n+2} = 2x_{n+1} - 16x_n - 6(x_{n+1} - 2x_n) \Leftrightarrow x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Giải phương trình, ta tìm được $x_n = (C_1 + C_2.n).(-2)^n$.
Thay $y_n = \dfrac{1}{8}\left(2x_n - x_{n+1}\right) = (-2)^{n-2}.\left[(2C_1 + C_2) + n(2C_2)\right]$.
Từ điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ \dfrac{1}{2}C_1 + \dfrac{1}{4}C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 10 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_n = \left(-1 + 10n\right)\left(-2\right)^n \\ y_n = \left(2 + 5n\right)\left(-2\right)^n. \end{cases}$