CHƯƠNG 1

Chuỗi số

Những nhà sáng lập đầu tiên của phép tính vi phân, bao gồm Newton và Leibniz, đã nhận thức rõ tầm quan trọng của chuỗi vô hạn. Các giá trị chính xác của nhiều hàm như sin và cosin chỉ có thể đạt được trong những trường hợp đặc biệt. Các chuỗi vô hạn cung cấp một công cụ để tính xấp xỉ bất kỳ một giá trị nào của các hàm đó với độ sai số bé tùy ý. Trong chương này, chúng ta sẽ bắt đầu bằng các khái niệm về chuỗi vô hạn của các số thực, sự hội tụ hay phân kỳ, tổng của chuỗi số. Sau đó, các tiêu chuẩn kiểm tra tính hội tụ và phân kỳ của các chuỗi số, cùng với một số tính chất khác của chúng sẽ được trình bày.

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

Định nghĩa 1.1. *Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số. Tổng vô hạn*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, trong đó a_n được gọi là số hạng tổng quát và $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n.

i) Nếu dãy số $\{S_n\}$ là hội tụ với $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ và có tổng bằng S và viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

ii) Ngược lại, nếu dãy số $\{S_n\}$ là phân kỳ, thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là phân kỳ.

Ví dụ 1.2. Xét chuỗi số sau:

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

Chuỗi số này có $S_n = n(n+1)/2$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ (phân kỳ). Kết luận, chuỗi số là phân kỳ.

Ví dụ 1.3. Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của chuỗi hình học

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots, a \neq 0^{(1)}$$

Ta có

$$\begin{cases} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$$

Do đó $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$ và

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- Trường hợp $q = 1$ dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì $S_n = an$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.
- Trường hợp $q = -1$ ta có $S_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ a, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Chuỗi đã cho là phân kỳ.

Kết luận: chuỗi hình học đã cho hội tụ và có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$ nếu $|q| < 1$ và phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

Ví dụ 1.4. Viết số thực $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ dưới dạng phân số.

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một chuỗi hình học với $a = \frac{17}{10^3}$ và $q = \frac{1}{10^2}$. Do đó

$$2.3\overline{17} = \frac{23}{10} + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng $1.9999\ldots = 2$.

Chứng minh. Ta có

$$1.9999\ldots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots = 1 + \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Sau số hạng đầu tiên thì tổng đã cho là một chuỗi hình học với $a = \frac{9}{10}$ và $q = \frac{1}{10}$. Do đó

$$1.9999\ldots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2.$$

■

(1)còn gọi là chuỗi của cấp số nhân.

Nếu chỉ nhìn thoáng qua thì có vẻ như là $1.9999\ldots < 2$. Chính vì vậy, nếu chưa được học khái niệm về giới hạn hoặc chuỗi số, đẳng thức này có lẽ sẽ gây bối rối cho người đọc.

Ví dụ 1.6. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và tính tổng.

Trước hết ta phân tích $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Kết luận: Chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng 1.

Ví dụ 1.7. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Với $1 < m \in \mathbb{N}$ bất kỳ, chọn $n > 2^{m+1}$ ta được

$$\begin{aligned} S_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m+1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \cdots + 2^m.\frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{m+1}{2} \end{aligned}$$

Dãy các tổng riêng S_n có thể lớn tùy ý nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, chuỗi đã cho phân kỳ.

Định lý 1.8 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).
Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ, thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Chứng minh. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Vì $n-1 \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

Chú ý 1.9. 1. Mệnh đề đảo của Định lý 1.8 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$, nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 1.34 (tr. 14) dưới đây).

2. Định lý 1.8 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi đã cho là phân kỳ. Chẳng hạn như chuỗi số sau đây $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Thay đổi một số số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$ sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ (với mọi $M > 1$).

Ví dụ 1.10. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ là phân kỳ bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

Định lý 1.11 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ). *Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cũng là một chuỗi số hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ví dụ 1.12. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2016}{n(n+1)} + \frac{2017}{2^n}\right)$ hội tụ và tính tổng.

Ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2016}{n(n+1)}$ hội tụ và có tổng bằng 2016, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2017}{2^n}$ hội tụ và có tổng bằng 2017 nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2016}{n(n+1)} + \frac{2017}{2^n}\right)$ cũng hội tụ và có tổng bằng 4033.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Định nghĩa 1.13. *Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ với $a_n > 0$ được gọi là một là chuỗi số dương.*

Nhận xét rằng dãy các tổng riêng S_n là một dãy số tăng, nên một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi S_n là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

1.2.1 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 1.14 (Tiêu chuẩn so sánh 1). *Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ có $a_n \leq b_n$ với mọi n hoặc kể từ một số n nào đó. Khi đó*

i) *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *là hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *là phân kỳ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *cũng là phân kỳ.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \tag{1.1}$$

i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ và $B_n \leq B$ với mọi n. Bất đẳng thức (1.1) chứng tỏ dãy tổng riêng A_n là một dãy số bị chặn trên, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Vì vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (1.1). ∎

Ví dụ 1.15. Xét sự hội tụ của chuỗi số nghịch đảo bình phương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ta có $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ theo Ví dụ 1.6 (tr. 3) nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ và do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ cũng hội tụ.

Ví dụ 1.16. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

Chứng minh. Ta có $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ theo Ví dụ 1.15, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ cũng là hội tụ. ∎

Ví dụ 1.17. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Chứng minh. Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kỳ theo Ví dụ 1.7 (tr. 3), nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ là phân kỳ. ∎

Ví dụ 1.18. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$.

Ta có

$$u_n = \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln[\ln(\ln(n+1))]}} = \frac{1}{n^{\ln[\ln(\ln(n+1))]}}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \ln[\ln(\ln(n+1))] = +\infty$ nên tồn tại $N_0 > 0$ sao cho $\ln[\ln(\ln(n+1))] > 2, \forall n > N_0$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^2} \forall n > N_0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n \text{ hội tụ.}$$

Định lý 1.19 (Tiêu chuẩn so sánh 2). *Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ và } c \neq \infty.$$

Khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

Chứng minh. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n, \forall n \geq N.$$

Lấy tổng từ N đến ∞ ta được

$$(c-\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq (c+\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n. \tag{1.2}$$

Ta chọn ϵ đủ nhỏ sao cho $c - \epsilon > 0$. Theo tiêu chuẩn so sánh 1,

- vế phải của bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.
- vế trái của bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng hội tụ.

■

Chú ý 1.20.

a) Các trường hợp đặc biệt

- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ suy ra với n đủ lớn thì $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ hay $a_n \leq b_n$ với mọi $n \geq N$ nào đó.

- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kỳ. Điều này cũng dễ hiểu vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ suy ra với n đủ lớn thì $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ hay $a_n \geq b_n$ với mọi $n \geq N$ nào đó.

b) Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dáng điệu" của số hạng tổng quát a_n tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:

- Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kỳ nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$
- Chuỗi hàm zeta $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Ví dụ 1.21. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là n^2 và số hạng trội của mẫu số là $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Ta có

$$a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n).n^{1/2}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ là phân kỳ theo Ví dụ 1.34 (tr. 14) nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ∎

Ví dụ 1.22. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là 3^n và số hạng trội của mẫu số là 5^n. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Ta có

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+3^n)5^n}{(4^n+5^n)3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1} = 1.$$

Mà chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ là hội tụ theo Ví dụ 1.3 (tr. 1), do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ∎

Chú ý 1.23. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có dạng sau:

1. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của n hoặc là các lũy thừa của n, chẳng hạn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_m n^{\alpha_m}}{b_0 + b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_k n^{\beta_k}},$$
với $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m, 0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k, a_m \neq 0, b_k \neq 0.$
Khi đó số hạng trội của tử số là $a_m n^{\alpha_m}$ và số hạng trội của mẫu là $b_k n^{\beta_k}$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k - \alpha_m}}$. Theo Ví dụ 1.34, chuỗi đã cho là hội tụ nếu $\beta_k - \alpha_m > 1$ và phân kỳ nếu $\beta_k - \alpha_m \leq 1$.

2. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là n, chẳng hạn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 a_1^n + \alpha_2 a_2^n + \cdots + \alpha_m a_m^n}{\beta_1 b_1^n + \beta_2 b_2^n + \cdots + \beta_k b_k^n},$$
với $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m, 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k, \alpha_m \neq 0, \beta_k \neq 0.$
Khi đó số hạng trội của tử số là $\alpha_m a_m^n$ và số hạng trội của mẫu số là $\beta_k b_k^n$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Theo Ví dụ 1.3, chuỗi đã cho hội tụ nếu $\frac{a_m}{b_k} < 1$ và phân kỳ nếu $\frac{a_m}{b_k} \geq 1$.

3. Một dạng chuỗi khác cũng sử dụng tiêu chuẩn so sánh, đó là các chuỗi số có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$
Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$:
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$
ở đó $o(x^3)$ là ký hiệu VCB bậc cao hơn x^3, ta có
$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} \text{ khi } x \to 0.$$
Khi $n \to \infty$ thì $\frac{1}{n} \to 0$, do đó
$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \text{ khi } n \to \infty.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho cũng hội tụ. Một cách tương tự, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{e}-1-\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n-1}{n^2-n+1}.$$

Một số khai triển Maclaurin

- $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
- $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

Một số VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x-1 \sim \ln(1+x)$,
- $\sqrt[m]{1+\alpha x}-1 \sim \ln\sqrt[m]{1+\alpha x} = \dfrac{1}{m}\ln(1+\alpha x) \sim \dfrac{\alpha x}{m}$,
- $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Ví dụ 1.24. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{\pi}{2^n}$

Đây là một chuỗi số dương, khi $n \to \infty$, ta có $\arctan\dfrac{\pi}{2^n} \sim \dfrac{\pi}{2^n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n} = \pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{\pi}{2^n}$ cũng hội tụ.

Ví dụ 1.25. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$

Khi $n \to \infty$, $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha} = \dfrac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

Nếu $\alpha > \dfrac{1}{2}$ thì chuỗi số là hội tụ; nếu $\alpha \le \dfrac{1}{2}$ thì chuỗi số là phân kỳ.

Ví dụ 1.26. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

Để sử dụng tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi số kiểu này, chúng ta ghi nhớ hai giới hạn quan trọng sau.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = \infty, (a > 1, \forall\alpha)$, hay $n^\alpha \le e^n$ khi n là đủ lớn.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln^\beta n} = \infty, (\forall\beta)$, hay $\ln^\beta n \le n$ khi n là đủ lớn.

Nói một cách khác thì khi $n \to \infty$, hàm số mũ, hàm đa thức và hàm số logarit của n đều là các VCL. Tuy nhiên, hàm số mũ tiến ra vô cùng "nhanh hơn" hàm đa thức, và hàm đa thức "nhanh hơn" hàm số logarit.

Chúng ta sẽ dùng giới hạn đầu tiên: $(\sqrt{n})^\alpha \le e^{\sqrt{n}}$ khi n đủ lớn, tức là, $e^{-\sqrt{n}} \le n^{-\frac{\alpha}{2}}$, với n đủ lớn và với mọi α. Chọn $\alpha = 4$, ta thấy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ cũng là hội tụ.

1.2.2 Tiêu chuẩn D'Alembert

Định lý 1.27. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

ii) Nếu $L > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

iii) Nếu $L = 1$ thì chưa kết luận được gì (tiêu chuẩn D'Alembert không áp dụng được trong trường hợp này).

Chứng minh. i) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nên với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số N sao cho

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon,\ \forall n \ge N.$$

Chọn ε đủ nhỏ sao cho $L + \epsilon < 1$. Ta có

$$\begin{aligned} a_n < (L+\epsilon)a_{n-1} < (L+\epsilon)^2 a_{n-2} < \cdots &< a_N(L+\epsilon)^{n-N} \\ &= \frac{a_N}{(L+\epsilon)^N}.(L+\epsilon)^n,\ \forall n > N. \end{aligned}$$

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L+\epsilon)^n$ hội tụ $(L + \epsilon < 1)$ nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

ii) Nếu $L > 1$ thì $u_{n+1} > u_n$ với n đủ lớn, chẳng hạn với mọi $n \ge N$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge a_N > 0$. Chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn điều kiện cần.

iii) Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kỳ còn chuỗi số sau hội tụ. ■

Chú ý 1.28. Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn D'Alembert, giới hạn sau đây thường hay được sử dụng

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

Chứng minh. Giới hạn trên có thể được chứng minh bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số như sau.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x}} = \alpha.$$

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$ ■

Ví dụ 1.29. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3^n}$

Chứng minh. a) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi đã cho hội tụ.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi đã cho hội tụ.

c) Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+5}{3(n^2+5)} = \frac{1}{3} < 1$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi đã cho hội tụ. ■

1.2.3 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 1.30. *Giả sử tồn tại* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

ii) Nếu $L > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

iii) Nếu $L = 1$ thì chưa kết luận được gì (tiêu chuẩn Cauchy không áp dụng được trong trường hợp này).

Chứng minh. i) Vì $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} < L+\epsilon \Leftrightarrow a_n < (L+\epsilon)^n, \forall n \geq N.$$

Chọn ϵ đủ nhỏ sao cho $L+\epsilon < 1$ ta có chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^n$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

ii) Vì $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} > L-\epsilon \Leftrightarrow a_n > (L-\epsilon)^n, \forall n \geq N.$$

Chọn $\epsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $L-\epsilon > 1$ ta có chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L-\epsilon)^n$ phân kỳ. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kỳ.

iii) Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kỳ còn chuỗi số sau hội tụ. ■

Chú ý 1.31. 1. Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn Cauchy, các giới hạn sau đây thường hay được sử dụng

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0.$$

Chứng minh. Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh hai giới hạn trên bằng cách đưa về giới hạn của các hàm số sau đây:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1,\ \forall a > 0.$$
∎

2. Một cách tổng quát, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$ với mọi đa thức $P(n)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Thật vậy,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{P(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln P(n)}{n}.$$

Mặt khác, theo công thức L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln P(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)'}{P(x)} = 0$$

vì $P'(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $P(x)$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln P(n)}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1.$$

Ví dụ 1.32. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Chứng minh. a) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

b) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ. ∎

1.2.4 Tiêu chuẩn tích phân

Định lý 1.33. *Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục, dương, giảm trên $[N, \infty)$ và $a_n = f(n)$ (với N là số nguyên dương cố định nào đó). Khi đó chuỗi số $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ và tích phân suy rộng $\int_N^{\infty} f(x)dx$ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,*

i) Nếu $\int_N^{\infty} f(x)dx$ là hội tụ thì $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ hội tụ.

ii) Nếu $\int_N^{\infty} f(x)dx$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Chứng minh. Không mất tổng quát xét $N = 1$. Vì $f(x)$ là hàm số giảm nên

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n, \quad x \in [n, n+1], n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tích phân từ n đến $n+1$ ta được

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tổng từ 1 đến $M-1$ ta được

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + \cdots + a_M &\leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{M-1}^M f(x)dx \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} \end{aligned}$$

hay

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \int_1^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}. \tag{1.3}$$

i) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, tức tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = S$ thì từ bất đẳng thức (1.3) ta có $S_M - a_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_M$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi S nên tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} (S_M - a_1) = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A + a_1$.

ii) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ, trong trường hợp này vì hàm $f(x)$ dương nên điều này có nghĩa là $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = +\infty$. Bất đẳng thức (1.3) suy ra $\lim\limits_{M\to\infty} S_{M-1} = \infty$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ. ∎

Tiêu chuẩn tích phân là một tiêu chuẩn rất hữu ích, đặc biệt là khi $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là một hàm số sơ cấp mà nguyên hàm có thể tính được và cũng là một hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ là liên tục, dương, và giảm trên đoạn $[1, \infty)$. Xét tích phân suy rộng

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 1.34. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$.

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ là liên tục, dương, và giảm trên $[1, \infty)$. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ là hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq 1$. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta có chuỗi đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq 1$. ∎

Chú ý 1.35. a) Hàm zeta được định nghĩa như sau $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ và được sử dụng nhiều trong lý thuyết số. Nhà toán học Thụy Sĩ Euler là người đầu tiên tính được chính xác $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Công thức này sẽ được chứng minh trong Ví dụ 2.42 (tr. 45).

b) Tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ và giá trị của tích phân suy rộng $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ là có thể khác nhau. Chẳng hạn như $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ trong khi đó $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$.

§3. CHUỖI SỐ VỚI SỐ HẠNG CÓ DẤU BẤT KỲ

1.3.1 Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý 1.36. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

Chứng minh. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\le 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \\ &\le 2T, \end{aligned} \tag{1.4}$$

ở đó $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vậy $\{S_n + T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại

$$A = \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n).$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A - \lim_{n\to\infty} T_n = A - T,$$

chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A - T$. ∎

Chú ý 1.37. Mệnh đề đảo của Định lý 1.36 là không đúng. Nghĩa là nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì không kết luận được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ cũng là hội tụ, xem Ví dụ 1.46 dưới đây. Điều này dẫn chúng ta đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.38 (Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ). *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *được gọi là*

i) hội tụ tuyệt đối nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ,*

ii) bán hội tụ nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ.*

Ví dụ 1.39. Xét sự hội tụ tuyệt đối của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$

Chứng minh. a) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ là hội tụ (theo tiêu chuẩn D'Alembert) nên chuỗi đã cho là hội tụ tuyệt đối.

b) Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right|$ có $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ là hội tụ, do đó chuỗi số đã cho là hội tụ tuyệt đối.

Chú ý 1.40. 1. Theo Định lý 1.36 ta có: chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

2. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ là phân kỳ thì chưa kết luận được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ cũng là phân kỳ, ví dụ như trường hợp chuỗi bán hội tụ trong Ví dụ 1.46 dưới đây chẳng hạn. Tuy nhiên, nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ là phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alembert hoặc theo tiêu chuẩn Cauchy thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ cũng là phân kỳ.

Định lý 1.41 (Tiêu chuẩn D'Alembert mở rộng). *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).

ii) Nếu $L > 1$ thì cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ đều là phân kỳ.

Định lý 1.42 (Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng). *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).

ii) Nếu $L > 1$ thì cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ đều là phân kỳ.

Ví dụ 1.43. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{an}{(1-a^2)^n}$ $(0<|a|\neq 1)$. Ta có

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|a|n}}{|1-a^2|} = \frac{1}{|1-a^2|}.$$

Nếu $0 < |a| < \sqrt{2}$ thì $l = \dfrac{1}{|1-a^2|} > 1$, chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Nếu $|a| > \sqrt{2}$ thì $l = \dfrac{1}{a^2-1} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

Nếu $|a| = \sqrt{2}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{2} = +\infty$, chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn điều kiện cần.

Để chỉ ra cho bạn đọc các ví dụ về chuỗi bán hội tụ, chúng ta cần đến khái niệm chuỗi đan dấu sau.

1.3.2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 1.44. *Chuỗi số có dạng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một chuỗi đan dấu.*

Định lý 1.45 (Định lý Leibniz). *Nếu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số dương, giảm và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *là một chuỗi số hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \leq a_1$.

Chứng minh. Xét dãy tổng riêng S_{2n} có

$$S_{2n+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+2}) \geq S_{2n}.$$

Mặt khác

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Như vậy dãy tổng riêng chẵn $\{S_{2n}\}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi a_1 nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq a_1$. Bây giờ xét dãy tổng riêng lẻ $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ nên

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Kết luận: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ là một chuỗi số hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S \leq a_1$. ■

Ví dụ 1.46. Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$

Chứng minh. a) Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ là phân kỳ. Mặt khác $a_n = \frac{1}{n+1}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, do đó chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ là hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho là bán hội tụ.

b) Dễ nhận thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ là phân kỳ. Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$ có $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$. Trong trường hợp này sẽ không dễ dàng để nhìn thấy ngay a_n là một chuỗi số giảm. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ có

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

$f'(x) < 0$ nếu $x > \sqrt[3]{2}$, do đó $f(x)$ là hàm số giảm trên $(2, \infty)$. Do đó $a_n > a_{n+1}$ với $n > 2$. Theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi đan dấu đã cho hội tụ và do đó bán hội tụ. ■

1.3.3 Tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối hoặc bán hội tụ

Các chuỗi số hội tụ tuyệt đối hay bán hội tụ khác nhau căn bản ở nhận xét sau đây.

- Với chuỗi hội tụ tuyệt đối, cho dù có thay đổi vị trí các số hạng một cách tùy ý như thế nào đi nữa, chuỗi số mới nhận được vẫn hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng chuỗi ban đầu.
- Còn với chuỗi bán hội tụ thì với mọi $M \in \mathbb{R}$ (thậm chí bằng ∞), tồn tại một cách thay đổi vị trí các số hạng của chuỗi đã cho để nhận được chuỗi mới có tổng bằng M.

Đó chính là nội dung của hai Định lý rất sâu sắc, Định lý Dirichlet và Định lý Riemann.

Định lý 1.47.

1. *(Dirichlet) Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ tuyệt đối và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. *Gọi* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *là một phép hoán vị (hay phép thế, phép song ánh, hay nói cách khác là một cách sắp xếp lại thứ tự các phần tử) bất kỳ của* $\mathbb{N}$. *Khi đó chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ *cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng* S.

2. *(Riemann) Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bán hội tụ và* M *là một số thực bất kỳ. Khi đó tồn tại một phép hoán vị* π *trên* $\mathbb{N}$ *sao cho chuỗi* $a_{\pi(n)}$ *hội tụ và có tổng bằng* M.

Chứng minh. 1. Hiển nhiên

$$T_n = |a_{\pi(1)}| + |a_{\pi(2)}| + \cdots + |a_{\pi(n)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S, \forall n,$$

nên dãy các tổng riêng $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ là một dãy số tăng và bị chặn. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T \leq S$. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ hội tụ tuyệt đối và

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}| = T.$$

Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Để chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ cũng có tổng bằng A, ta viết

$$\begin{aligned} a_{\pi_n} &= \left(\frac{|a_{\pi_n}| + a_{\pi_n}}{2}\right) - \left(\frac{|a_{\pi_n}| - a_{\pi_n}}{2}\right) \\ &= a'_{\pi_n} - a''_{\pi_n}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ta thấy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n}$ là các chuỗi số dương và theo chứng minh ở trên thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{\pi_n}| + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T+A),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{\pi_n}| - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T-A).$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n} = \frac{1}{2}(T+A) + \frac{1}{2}(T-A) = A.$$

2. Ta thừa nhận Định lý này. ∎

Ví dụ 1.48. Chúng ta biết rằng chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ là bán hội tụ. Giả sử

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách sắp xếp lại chuỗi đan dấu trên để được một chuỗi mới có tổng chỉ bằng $\frac{1}{2}S$. Chuỗi mới như sau

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots,$$

tức là thay vì dấu cộng và dấu trừ xen kẽ thì cứ một dấu cộng rồi đến hai dấu trừ. Như vậy mỗi nhóm sẽ gồm ba phần tử là $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2.2k}$. Vậy chuỗi mới có thể viết dưới dạng như sau:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\
=&\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2.2k} + \cdots \\
=&\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right) \\
=&\frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

1.3.4 Phép nhân chuỗi

Định nghĩa 1.49. *Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là hai chuỗi bất kỳ. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, ở đó*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

được gọi là tích của hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Định lý 1.50. *Cho* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *là các chuỗi hội tụ tuyệt đối và* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$*. Khi đó chuỗi tích* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *cũng hội tụ tuyệt đối và* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$*.*

Tại sao lại định nghĩa phép nhân chuỗi của hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ theo cách như trên mà không phải là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Có lẽ chúng xuất phát từ phép nhân hai đa thức. Giả sử

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m, \quad Q_p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^p.$$

Khi đó tích của hai đa thức trên sẽ là đa thức $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m+p} x^{m+p}$ mà hệ số của x^n sẽ được tính theo công thức:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Cũng tương tự như vậy, nếu ta có hai đa thức (chuỗi hình thức) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ thì phép nhân hai đa thức này sẽ được thực hiện như sau:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{1.6}$$

với

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Thay $x = 1$ trong công thức (1.6) ta được $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

1.3.5 Phần đọc thêm: Các tiêu chuẩn Dirichlet, Abel, Raabe, Bertrand

Định lý 1.51. 1. *(Tiêu chuẩn Dirichlet) Nếu các điều kiện sau được thoả mãn:*

- *dãy các tổng riêng của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn,*
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số đơn điệu hội tụ đến* 0*,*

thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

2. *(Tiêu chuẩn Abel) Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số đơn điệu bị chặn thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *cũng hội tụ.*

Chứng minh. 1. Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n b_n$ và $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Vì $a_k = A_k - A_{k-1}$, ta có

$$\begin{aligned} S_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ &= A_1b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + (A_3 - A_2)b_3 + \cdots + (A_n - A_{n-1})b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n \qquad (1.7) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_nb_n. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, dãy tổng riêng A_n bị chặn, giả sử $|A_n| < M$ với mọi n. Khi đó

$$0 \le |A_nb_n| \le M|b_n|.$$

Vì thế $\lim\limits_{n\to\infty} A_nb_n = 0$ theo nguyên lý giới hạn kẹp.

Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \le \sum_{k=1}^{n} M(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \to Mb_1 \text{ (khi } n \to \infty).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Công thức (1.7) dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to\infty} A_nb_n = S.$$

2. Cũng xuất phát từ công thức (1.7). Vì $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số đơn điệu bị chặn nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, hơn nữa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} A_nb_n = Ab.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy các tổng riêng A_n của nó bị chặn, tức là tồn tại số M sao cho $|A_n| < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \le \sum_{k=1}^{n} M|b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_n| \to M(|b_1 - b|).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Công thức (1.7) dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to\infty} A_nb_n = S + Ab.$$

■

Tiêu chuẩn Leibniz là một trường hợp riêng của tiêu chuẩn Dirichlet. Thật vậy, xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = (-1)^{n-1}$. Dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ có dạng $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1$ nên $S_n \leq 1$ với mọi n.

Ví dụ về chuỗi bán hội tụ không phải là chuỗi đan dấu

Hầu hết các ví dụ về chuỗi bán hội tụ mà chúng ta đã gặp đều có dạng chuỗi đan dấu. Sau đây là một ví dụ không tầm thường về chuỗi bán hội tụ mà không phải là chuỗi đan dấu.

Ví dụ 1.52. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ là một chuỗi bán hội tụ.

Chứng minh. Trước hết, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$. Hiển nhiên, dãy b_n là đơn điệu và hội tụ về 0. Bây giờ ta chứng minh $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\sin k$ là một dãy số bị chặn. Thật vậy,

$$\begin{aligned}2\sin\frac{1}{2}S_n = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin k &= \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right) - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Do đó

$$S_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Theo tiêu chuẩn Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ là một chuỗi số hội tụ.

Việc tiếp theo là đi chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$ là một chuỗi số phân kỳ. Thật vậy, với mỗi số tự nhiên k, khoảng $[\frac{\pi}{6}+k\pi, \pi-\frac{\pi}{6}+k\pi]$ có độ dài bằng $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}>1$ nên chứa ít nhất một số tự nhiên n_k nào đó. Khi đó

$$|\sin(n_k)| \geq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|\sin n_k|}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{\pi(k+1)}.$$

Chuỗi điều hòa $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ là phân kỳ nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin n_k|}{n_k}$ cũng là phân kỳ. Cũng theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$ là phân kỳ. ∎

Chú ý 1.53. Người ta tính được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}.$$

Định lý 1.54 (Tiêu chuẩn Raabe). *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R.$$

Khi đó

a) Nếu $R > 1$ thì chuỗi số hội tụ.

b) Nếu $R < 1$ thì chuỗi số phân kỳ.

Định lý 1.55 (Tiêu chuẩn Bertrand). *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết*

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B.$$

Khi đó

a) Nếu $B > 1$ thì chuỗi số hội tụ.

b) Nếu $B < 1$ thì chuỗi số phân kỳ.

Chú ý 1.56.
1. Tiêu chuẩn Raabe mạnh hơn tiêu chuẩn D'Alembert, người ta thường sử dụng tiêu chuẩn Raabe khi tiêu chuẩn D'Alembert không có hiệu quả.
2. Tiêu chuẩn Bertrand mạnh hơn tiêu chuẩn Raabe, người ta thường sử dụng tiêu chuẩn Bertrand khi tiêu chuẩn Raabe không có hiệu quả.

Ví dụ 1.57 (Dùng tiêu chuẩn Raabe). Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ta thấy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right] = \frac{1}{2},$$

vì theo quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Theo tiêu chuẩn Raabe, chuỗi đã cho phân kỳ. Chú ý rằng trong trường hợp này không dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy được vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Ví dụ 1.58 (Dùng tiêu chuẩn Bertrand). Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-\sqrt{n})\ln^2 n}$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2 > 1.$$

Theo tiêu chuẩn Bertrand, chuỗi số đã cho hội tụ. Chú ý rằng trong trường hợp này không dùng được tiêu chuẩn Raabe vì

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 1.$$

§4. BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Các khái niệm cơ bản về chuỗi số

Bài tập 1.1. Xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, tính tổng của chúng.

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

Bài tập 1.2. Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) + \cdots$

b) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots$

c) $\frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \cdots$

Bài tập 1.3. Tính tổng của các chuỗi số sau đây

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{1+n+n^2}$

Bài tập 1.4. Chứng minh rằng các chuỗi số sau là phân kỳ

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2^n}{n}$

Chuỗi số dương

Bài tập 1.5. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^2+1}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{1+n}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$ f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$ g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{4}}}$ h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1}$ l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$

Bài tập 1.6. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$ i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$ j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Bài tập 1.7. Chứng minh rằng các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}, p \in \mathbb{R}$ là

a) hội tụ tuyệt đối nếu $p > 1$,

b) bán hội tụ nếu $p = 1$,

c) bán hội tụ nếu $0 < p < 1$.

Bài tập 1.8. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}2^n}{(n+1)^{n^2}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin(e^{-n})$ h) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, $(\alpha,\beta>0)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n+2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$ j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1-a^2)^n}$, $0<|a|\neq 1$

Bài tập 1.9. Xét sự hội tự của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3^n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2 + \cdots + \ln^2 n}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, (a \neq e)$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n}(n-1)!}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}, a, b \in \mathbb{R}$

k) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$

l) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}, (p > 0)$

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Bài tập 1.10. Sử dụng tiêu chuẩn Leibniz để xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+e}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+3}{n^2+n}$

Bài tập 1.11. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}; (\alpha > 1)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}; (p > 0)$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+2^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}); a \in \mathbb{R}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]$

g) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, (\alpha, \beta > 0)$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}; a \in \mathbb{R}$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

Phần đọc thêm: Tiêu chuẩn Raabe và tiêu chuẩn Bertrand

Bài tập 1.12. Chứng minh rằng nếu dùng tiêu chuẩn Bertrand với chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty} e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}$ thì tính được

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] = 0$$

nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên không sử dụng tiêu chuẩn Raabe trong trường hợp này được vì

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1.$$

CHƯƠNG 2

Chuỗi hàm số

Chương này sẽ đề cập đến các chuỗi phụ thuộc vào các biến, còn gọi là chuỗi hàm số. Như đã nói ở trên, các giá trị chính xác của nhiều hàm như $\sin(x)$ và $\cos(x)$ chỉ có thể đạt được trong những trường hợp đặc biệt của biến x. Các chuỗi hàm số là công cụ để tính xấp xỉ bất kỳ một giá trị nào của các hàm đó với độ sai số bé tùy ý. Việc biểu diễn các hàm thành chuỗi cho phép ta có thể thực hiện các tính toán liên quan đến tính liên tục, khả vi, hay khả tích của hàm thông qua việc tính toán thuận lợi trên các chuỗi hàm số.

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI HÀM SỐ, SỰ HỘI TỤ, HỘI TỤ ĐỀU

2.1.1 Chuỗi hàm số và miền hội tụ

Định nghĩa 2.1. *Cho dãy các hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Chuỗi hàm số được định nghĩa như sau:*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là hội tụ.

ii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là phân kỳ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là phân kỳ.

Tập hợp tất cả các điểm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ, được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm số.

Ví dụ 2.2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Chứng minh. Tại mỗi điểm $x = x_0$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là một chuỗi hình học. Do đó, theo Ví dụ 1.3 thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là hội tụ nếu $|x_0| < 1$ và phân kỳ nếu $|x_0| \geq 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(-1, 1)$. ∎

Ví dụ 2.3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Chứng minh. Tại mỗi điểm $x = x_0$ xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$. Theo Ví dụ 1.34 (tr. 14) thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ là hội tụ nếu và chỉ nếu $x_0 > 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(1, \infty)$. ∎

2.1.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều

Đặt vấn đề: Cho chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Giả thiết rằng miền hội tụ của chuỗi hàm số này là X, và chuỗi hàm số này hội tụ đến hàm số $S(x)$ trên X, nghĩa là,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X.$$

- Nếu với mỗi n, hàm số $u_n(x)$ có tính chất nào đó (liên tục, khả tích, khả vi), thì liệu hàm số $S(x)$ cũng có tính chất này?
- Phải chăng
$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$
nghĩa là chuyển dấu đạo hàm vào phía trong biểu thức tổng vô hạn được?

Chẳng hạn như, chuỗi hàm số sau đây (xem phần chuỗi lũy thừa, mục 2.2.5):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Phải chăng

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Để trả lời được các câu hỏi này chúng ta cần đến khái niệm **hội tụ đều** sau.

Định nghĩa 2.4. *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều đến* $S(x)$ *trên tập* X *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon, \forall n > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

- Chú ý rằng trong định nghĩa trên, $n(\epsilon)$ chỉ phụ thuộc vào ϵ mà không phụ thuộc vào x.
- Ý nghĩa hình học: với n đủ lớn thì $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x) - \epsilon, S(x) + \epsilon), x \in X$.

Định lý 2.5 (Tiêu chuẩn Cauchy). *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập* X *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \epsilon, \forall p, q > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

Định lý 2.6 (Tiêu chuẩn Weierstrass). *Nếu các giả thiết sau là đúng:*

i) $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X,$

ii) Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ,*

thì chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ tuyệt đối và đều trên* X.

Ví dụ 2.7.

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass. Thật vậy,

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2 + x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ.

ii) Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, chuỗi số tương ứng là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz. Ký hiệu tổng của chuỗi đã cho là $S(x)$, chính là tổng của chuỗi số tương ứng với x. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n + 1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó, chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$ hội tụ đều đến $S(x)$ (gợi ý: dựa vào định nghĩa).

2.1.3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý 2.8 (Tính liên tục). *Nếu các giả thiết sau là đúng*

i) $u_n(x)$ *liên tục trên X với mọi n,*

ii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên X,*

thì $S(x)$ *liên tục trên X, nghĩa là,*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Ví dụ 2.9. Xét tính liên tục của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{n+1}}$.

[Gợi ý] Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục.

Định lý 2.10 (Tính khả tích). *Nếu các giả thiết sau là đúng*

i) $u_n(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *với mọi n,*

ii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* $[a,b]$*,*

thì $S(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(x)dx\right).$$

Ví dụ 2.11. Tính tổng của chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n} = 1+\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}+\cdots+\dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n}+\cdots$

Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =: f(x)$. Nhận xét:

- Chuỗi hàm số này không tính được một cách trực tiếp,
- tuy nhiên $\int (n+1)x^n dx = x^{n+1} + C$ và chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ thì tính được và bằng $\frac{x}{1-x}$ (là cấp số nhân với công bội bằng x).

Do đó, chúng ta tích phân từng thành phần của chuỗi hàm số $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ trong khoảng $[0,x]$:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (n+1)t^n dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Đạo hàm 2 vế phương trình này ta được, $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Tổng của chuỗi số đã cho bằng

$$1 + \sqrt{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n+1}{(\sqrt{2})^n} + \ldots = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2(3 + 2\sqrt{2}).$$

Chú ý 2.12. Việc còn lại là đi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều trong Định lý 2.10. Bằng tiêu chuẩn D'Alembert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu $-1 < x < 1$, hơn nữa chuỗi hàm số này hội tụ đều trên đoạn $[-\epsilon, \epsilon]$ với mỗi $\epsilon \in (0, 1)$ (theo tiêu chuẩn Weierstrass).

Ví dụ 2.13. Chứng minh rằng

a) $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1]$.

b) $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Chứng minh. Thật vậy, ta biết rằng

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n, |x| < 1,$$

vì đây là tổng của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^2$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Chuỗi bên phải hội tụ tại $x = \pm 1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), đặc biệt nó hội tụ đều trên $[-1, 1]$. Ta có công thức sau:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

■

Định lý 2.14 (Tính khả vi). *Nếu các giả thiết sau là đúng*

i) $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a, b) với mọi n,

ii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ về $S(x)$ trên (a, b),

iii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên (a, b),

thì $S(x)$ khả vi trên (a, b) và

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Ví dụ 2.15. Tính tổng của chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ trên $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Nhận xét:

- Chuỗi hàm số này không tính tổng được một cách trực tiếp,
- tuy nhiên, $\left(\frac{x^n}{n}\right)' = x^{n-1}$ và chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ tính được tổng và bằng $\frac{1}{x-1}$ (vì là chuỗi hình học với công bội bằng x).

Dễ thấy chuỗi ban đầu hội tụ trên $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (theo D'Alembert), và chuỗi các đạo hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ là hội tụ đều trên $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (tiêu chuẩn Weierstrass, so sánh với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)}$ trên $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). Do đó, ta có thể đạo hàm 2 vế của biểu thức $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ để nhận được

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Nên

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

Kết luận

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \tag{2.1}$$

Ví dụ 2.16. Tính tổng

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Gợi ý: Để "loại bỏ" số hạng $3n+1$ ở dưới mẫu số, ta xét chuỗi hàm

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}.$$

và đi tính $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3}$ (tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^3$). Do đó,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

§2. Chuỗi lũy thừa

Trong tiết này chúng ta xét trường hợp đặc biệt của chuỗi hàm số đó là chuỗi lũy thừa. Đối với chuỗi lũy thừa thì các điều kiện về hội tụ, hội tụ đều, liên tục, khả vi, khả tích, v.v., trở nên thuận tiện và dễ sử dụng hơn so với chuỗi hàm số tổng quát.

2.2.1 Các khái niệm cơ bản về chuỗi lũy thừa

Định nghĩa 2.17. *Chuỗi lũy thừa (theo biến x) là chuỗi hàm số có dạng*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n; \text{ (quy ước: } x^0 = 1\ \forall x)$$

với $a_0, a_1, a_2, \cdots$, là các hằng số thực.

Ta ký hiệu chuỗi lũy thừa là $\sum a_nx^n$.

Ví dụ 2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^nx^n}{n!}$ là các chuỗi lũy thừa.

Định lý 2.19 (Abel). *Xét chuỗi lũy thừa $\sum a_nx^n$.*

1. *Nếu $\sum a_nx^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$, thì nó hội tụ tuyệt đối tại bất kỳ điểm x thỏa mãn $|x| < |x_0|$.*
2. *Nếu $\sum a_nx^n$ phân kỳ tại điểm $x = x_1$, thì nó phân kỳ tại bất kỳ điểm x thỏa mãn $|x| > |x_1|$.*

Chứng minh. (1) Ta có $\sum a_nx_0^n$ hội tụ. Cố định bất kỳ $x \in \mathbb{R}$ mà $|x| < |x_0|$, ta tính $|a_nx^n| = |a_nx_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

Do $\sum a_nx_0^n$ hội tụ, nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0$. Vậy, dãy số $\{a_nx_0^n\}$ là bị chặn. Tức là, $\exists M > 0$, sao cho $|a_nx_0^n| \leq M\ \forall n$. Do đó, $0 \leq |a_nx^n| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\ \forall n$.
Lại có $|x| < |x_0|$, cho nên chuỗi $\sum M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ.
Theo tiêu chuẩn so sánh 1, ta có chuỗi $\sum |a_nx^n|$ hội tụ. Tức là chuỗi $\sum a_nx^n$ hội tụ tuyệt đối.

(2) là hệ quả của (1). ∎

2.2.2 Bán kính hội tụ và khoảng hội tụ

Định nghĩa 2.20. *Số $0 \leq R \leq \infty$ được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi $\sum a_nx^n$ khi và chỉ khi* $\begin{cases} \sum a_nx^n \text{ hội tụ tuyệt đối} & \forall |x| < R \\ \sum a_nx^n \text{ phân kỳ} & \forall |x| > R. \end{cases}$
Khi đó, khoảng $(-R, R)$ gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Ở đây có hai trường hợp đặc biệt, chúng ta sẽ giải thích kỹ hơn:

1. $R = 0 \Longleftrightarrow \sum a_n x^n$ chỉ hội tụ tại một điểm duy nhất là $x = 0$.

2. $R = \infty \Longleftrightarrow \sum a_n x^n$ hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.21. 1. Xét chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Chuỗi lũy thừa luôn hội tụ tại $x = 0$. Tại $x \neq 0$, ta tính $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|n}{n+1} = |x|$

Do đó, theo tiêu chuẩn D'Alembert

(a) Nếu $|x| < 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

(b) Nếu $|x| > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Vậy, chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $R = 1$ bởi vì nó hội tụ tuyệt đối $\forall |x| < 1$, và phân kỳ $\forall |x| > 1$. Khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ có bán kính hội tụ $R = \infty$ vì nó hội tụ tại mọi $\forall x \in \mathbb{R}$ (D'Alembert). Khoảng hội tụ là $(-\infty, \infty)$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$ có bán kính hội tụ $R = 0$ vì nó chỉ hội tụ tại duy nhất điểm $x = 0$ và phân kỳ tại mọi $x \neq 0$ (D'Alembert).

Việc tính bán kính hội tụ có thể thực hiện một cách đơn giản hơn nhờ định lý sau.

Định lý 2.22 (Công thức tính bán kính hội tụ). *Xét $\sum a_n x^n$ với $\rho := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (hoặc $\rho := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$), khi đó bán kính hội tụ là* $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$

Với quy ước $\frac{1}{0} = \infty$ và $\frac{1}{\infty} = 0$, ta viết gọn là $R = \frac{1}{\rho}$.

Ví dụ 2.23. 1. Xét chuỗi lũy thừa $\sum \frac{x^n}{n}$. Ta có $a_n = \frac{1}{n}$, vậy, $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

Do đó, chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

2. Xét $\sum \frac{x^n}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Vậy, chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $R = \infty$.

3. Xét $\sum (n!)x^n$, $a_n = n!$, $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Vậy, chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $R = 0$.

Lưu ý về miền hội tụ của chuỗi lũy thừa: Để tìm miền hội tụ của $\sum a_n x^n$ ta có thể dùng một trong hai cách:

1. Tính như trước đây bằng các sử dụng các tiêu chuẩn hội tụ phân kỳ, hoặc

2. Tính bán kính hội tụ R, rồi khoảng hội tụ $(-R, R)$. Sau đó, kiểm tra các đầu mút $-R$ và R để xem có gộp được vào miền hội tụ hay không. Bên ngoài khoảng hội tụ (tức là, với $|x| > R$) thì ta đã biết là chuỗi lũy thừa phân kỳ.

Lưu ý này có thể áp dụng cho chuỗi dạng $\sum a_n(f(x))^n$ bằng cách đặt $X = f(x)$ để đưa về chuỗi lũy thừa $\sum a_n X^n$.

Ví dụ 2.24. 1. Xét chuỗi lũy thừa $\sum \frac{x^n}{n}$. Theo trên ta có bán kính hội tụ là $R = 1$, nên khoảng hội tụ là $(-1, 1)$. Bên ngoài khoảng này (tức $|x| > 1$) thì chuỗi phân kỳ. Vậy xét thêm hai đầu mút:
+) Tại $x = 1$, chuỗi trở thành $\sum \frac{1}{n}$, là chuỗi điều hòa phân kỳ.
+) Tại $x = -1$, chuỗi thành $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, là chuỗi đan dấu thỏa mãn điều kiện định lý Leibniz, nên nó hội tụ.
Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi là $[-1, 1)$.

2. Để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+2} \left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^n$$

ta đặt $X = \frac{2x+2}{2x-3}$, chuỗi trở thành chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} X^n$. Ta có: $a_n = \frac{1}{n+2}$, vậy bán kính hội tụ $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+2}}} = 1$, khoảng hội tụ $(-1, 1)$.
Tại $X = 1$, chuỗi thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ cùng tính chất với $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (phân kỳ).
Tại $X = -1$, chuỗi thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ là chuỗi đan dấu, dễ thấy định lý Leibniz được thỏa mãn, nên nó hội tụ. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $-1 \le X < 1$. Thay $X = \frac{2x+2}{2x-3}$, và giải bất phương trình tương ứng $-1 \le \frac{2x+2}{2x-3} < 1$ ta nhận được miền hội tụ của chuỗi ban đầu là $x \le \frac{1}{4}$, tức là $(-\infty, \frac{1}{4}]$.

2.2.3 Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý 2.25 (Hội tụ đều). *Xét chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó, $\sum a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn con nằm hoàn toàn trong khoảng hội tụ của nó.*

Chứng minh. Xét bất kỳ đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$, khi đó $-R < a < b < R$. Nên $\exists x_0 \in (0, R)$ sao cho $[a, b] \subset [-x_0, x_0]$. Ta có chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối tại x_0. Lại có $|a_n x^n| \le |a_n x_0^n|\ \forall x \in [a, b]$, $\forall n$, và $\sum |a_n x_0^n|$ là hội tụ. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên $[a, b]$. ∎

Hệ quả 2.26 (Liên tục). Chuỗi lũy thừa liên tục trên mọi đoạn con nằm hoàn toàn trong khoảng hội tụ, do đó liên tục trên khoảng hội tụ, và

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \; \forall x_0 \in (-R, R).$$

Hệ quả 2.27 (Khả tích). Chuỗi lũy thừa khả tích trên mọi đoạn con nằm hoàn toàn trong khoảng hội tụ, và $\int\limits_a^b \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b a_n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$ $\forall [a, b] \subset (-R, R)$.

Ví dụ 2.28. Tính tổng $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ trên khoảng $(-1, 1)$. Đầu tiên ta dễ dàng tính được bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa này là $R = 1$ do đó $(-1, 1)$ chính là khoảng hội tụ. Biểu diễn $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x t^{n-1} dt \stackrel{?}{=} \int\limits_0^x \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right\} dt = \int\limits_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) \; \forall x \in (-1, 1)$.
Ta có $\stackrel{?}{=}$ là đúng do $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$ hội tụ đều trên $[0, x] \subset (-1, 1)$ (vì $x \in (-1, 1)$). Tất nhiên, trường hợp $x < 0$, ta viết $[x, 0] \subset (-1, 1)$. Tóm lại, $S(x) = -\ln(1-x) \; \forall x \in (-1, 1)$.

Hệ quả 2.29 (Khả vi). Chuỗi lũy thừa khả vi vô hạn trong khoảng hội tụ $(-R, R)$, và

$$\frac{d^k}{dx^k} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} \; \forall x \in (-R, R)$$

với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Dựa vào tính chất là chuỗi các đạo hàm $\sum n a_n x^{n-1}$ có cùng bán kính hội tụ (theo công thức tính bán kính hội tụ) và do đó có cùng khoảng hội tụ với chuỗi gốc $\sum a_n x^n$, từ đó chuỗi các đạo hàm hội tụ đều trên mọi đoạn con nằm trong khoảng hội tụ, và ta có thể lấy đạo hàm vào từng số hạng của chuỗi. Lập luận này có thể tiếp tục đến đạo hàm cấp k tùy ý nên ta nhận được công thức ở trên. ∎

Ví dụ 2.30. Tính tổng ở trên theo cách lấy đạo hàm:
$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ trên khoảng $(-1, 1)$. Theo trên, ta có khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là $(-1, 1)$. Trong khoảng hội tụ ta có thể lấy đạo hàm vào từng số hạng của chuỗi, tức là: $S'(x) = \frac{d}{dx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^n}{n} \right\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \; \forall x \in (-1, 1)$.
Vậy $S(x) = S(0) + \int\limits_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) \; \forall x \in (-1, 1)$.

Nhận xét. Nếu miền hội tụ của chuỗi lũy thừa chứa cả đầu mút $-R$ hoặc R thì các tính chất trên có thể mở rộng ra cho đầu mút đó.

2.2.4 Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

Ta xét bài toán viết một hàm cho trước thành tổng của chuỗi lũy thừa. Việc biểu diễn này cho phép xấp xỉ hàm thành đa thức cấp n với độ sai số bé tùy ý khi n đủ lớn, và cho phép tính toán giải tích (biểu diễn liên tục, hội tụ, tính tích phân, đạo hàm) của hàm một cách thuận tiện, dễ dàng.

Bài toán: Cho hàm f khả vi vô hạn trên $(x_0 - R, x_0 + R)$. Hỏi

1. Liệu có tồn tại chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sao cho
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)\ ?$$

2. Giả sử chuỗi lũy thừa như trên đã tồn tại, hỏi chuỗi đó có duy nhất?

Giải: Ta sẽ trả lời câu hỏi thứ hai trước:

(2) Giả sử đã tồn tại chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sao cho
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Khi đó, thay $x = x_0$ thì $f(x_0) = a_0$. Lấy đạo hàm: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}\ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Lại thay $x = x_0 \Rightarrow f'(x_0) = a_1$. Lấy đạo hàm cấp k, ta có
$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{d^k}{dx^k}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} a_n(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \end{aligned}$$

Thay $x = x_0$ ta được $f^{(k)}(x_0) = a_k k!$ do đó $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Vậy, nếu chuỗi lũy thừa như trên tồn tại thì nó phải có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Do đó, chuỗi lũy thừa đó là duy nhất.

Định nghĩa 2.31. *Cho hàm f khả vi vô hạn trên $(x_0 - R, x_0 + R)$, khi đó chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ gọi là chuỗi Taylor của hàm f.*

Khi $x_0 = 0$, ta gọi chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ là chuỗi Maclaurin của hàm f.

Để trả lời cho câu hỏi thứ nhất về sự tồn tại của chuỗi lũy thừa hội tụ về $f(x)$ ta có định lý sau đây.

Định lý 2.32. *Cho hàm f khả vi vô hạn trên $(x_0 - R, x_0 + R)$ thỏa mãn $\exists M > 0$ sao cho $|f^{(n)}(x)| \leq M \; \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \; \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó chuỗi Taylor của f hội tụ đến hàm f trên $(x_0 - R, x_0 + R)$, tức là $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \;\; \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.*

Chứng minh. Sử dụng công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

với ξ nào đó $\in (x_0 - R, x_0 + R)$. Vậy

$$|f(x) - S_k(x)| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}\right| \leq \frac{MR^{k+1}}{(k+1)!} \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Do đó $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(x) = f(x) \; \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. (đpcm)

Nhận xét: Định lý trên vẫn đúng cả cho trường hợp $R = \infty$. Trong chứng minh ta chỉ cần lấy khoảng con hữu hạn bất kỳ để có các đánh giá cần thiết.

Ví dụ 2.33. 1. Khai triển thành chuỗi Maclaurin hàm $f(x) = \sin x \; \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = \sin x$;
Ta có $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \; \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy, $|f^{(n)}(x)| \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}, \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Do đó $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n!}x^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

2. Tương tự $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

3. Dễ thấy $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Áp dụng: Ta áp dụng các khai triển ở trên để chứng minh công thức Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Thật vậy, thay $x = i\varphi$ ở trong công thức khai triển của e^x, ta có

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos\varphi + i\sin\varphi$$

2.2.5 Một số khai triển thành chuỗi Maclaurin của hàm sơ cấp cơ bản

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ với $x \in (-1,1)$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ với $x \in \mathbb{R}$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ với $x \in \mathbb{R}$

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ với $x \in \mathbb{R}$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ với $x \in (-1,1)$

6. $\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ với $x \in (-1,1]$

7. $\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ với $x \in (-1,1)$

8. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
với $x \in [-1,1]$.

Lưu ý: Khi khai triển một số hàm thành chuỗi lũy thừa, ta có thể biến đổi để đưa về các khai triển cơ bản ở trên và sử dụng các khai triển đó (mà không phải chứng minh lại). Cách làm này rất nhanh chóng và tiện lợi đối với một số hàm.

Ví dụ 2.34. Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ thành chuỗi Maclaurin.

Ta viết $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} - \frac{1}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$ với $x \in (-2,2)$ (Ở đây ta sử dụng khai triển cơ bản số 1 ở trên).

2.2.6 Áp dụng: Tính gần đúng giá trị của hàm và tích phân

Nhờ khai triển Taylor (hay khai triển MacLaurin khi $x_0 = 0$) ở trên ta có thể tính xấp xỉ giá trị của hàm khả vi vô hạn tại điểm x nào đó trong lân cận $(x_0 - R, x_0 + R)$, bằng cách cố định số N và tính xấp xỉ

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Xấp xỉ càng chính xác khi N càng lớn. Cụ thể, sai số của xấp xỉ có thể tính theo phần dư Lagrange không vượt quá: $\frac{M}{(N+1)!}|x-x_0|^{N+1}$.

Ví dụ 2.35. Tính xấp xỉ $\sin(0,3)$. Ở đây, ta chọn chẳng hạn $N = 4$ và sử dụng khai triển Maclaurin của $\sin(x)$ ở trên, ta có:

$$\sin(0.3) \approx 0.3 - \frac{(0.3)^3}{3!} \approx 0.2945$$

Sai số của xấp xỉ (với $M = 1$) là không vượt quá $\frac{(0.3)^5}{5!} < 0,000021$. Như vậy, độ chính xác sẽ là đến 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy. Nếu cần độ chính xác cao hơn thì ta chỉ việc lấy N lớn hơn. Ta có thể lấy đến độ chính xác tùy ý vì $\lim_{n\to\infty} \frac{(0.3)^n}{n!} = 0$.

Hơn nữa, ta có thể áp dụng khai triển Taylor (hay MacLaurin) để tính xấp xỉ giá trị của tích phân xác định. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.36. Tính gần đúng $\int_0^1 e^{x^2}dx$. Sử dụng khai triển Maclaurin của hàm e^{x^2} (thay x bởi x^2 trong công thức số 4) tính đến $N = 4$, ta có

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}.$$

Vậy,

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \int_0^1 (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!})dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5(2!)} + \frac{1}{7(3!)} + \frac{1}{9(4!)} \approx 1,4618.$$

Sai số của xấp xỉ có thể tính nhờ phần dư Lagrange không vượt quá $\int_0^1 e^1 \left|\frac{x^{10}}{5!}\right| dx = \frac{e}{11(5!)} < 0,0021$. Do đó, độ chính xác sẽ là đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

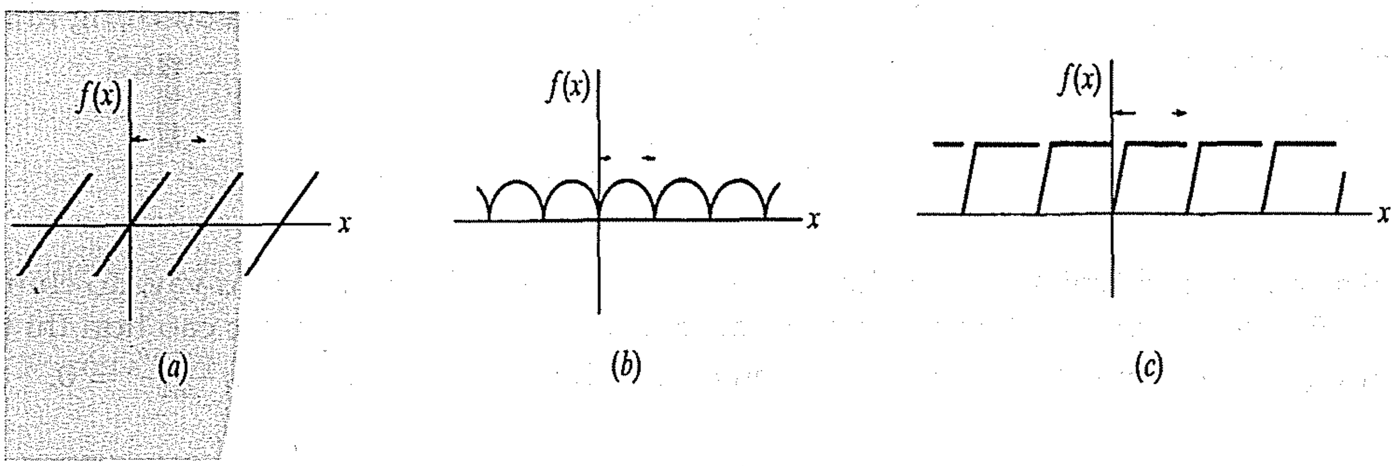
§3. CHUỖI LƯỢNG GIÁC VÀ CHUỖI FOURIER

2.3.1 Hàm tuần hoàn, hàm liên tục từng khúc, chuỗi lượng giác

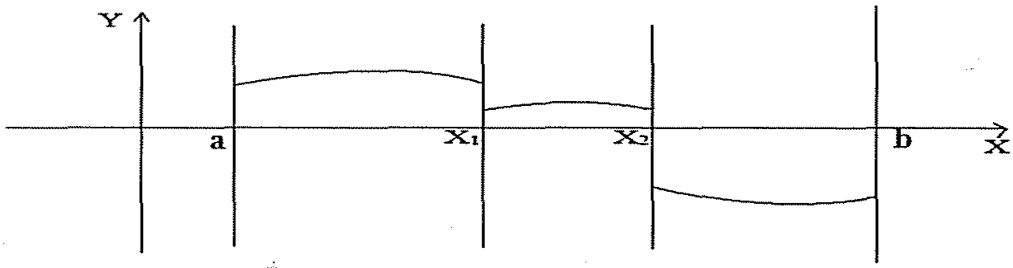
Để thuận tiện cho người đọc chúng ta nhắc lại khái niệm hàm tuần hoàn và hàm liên tục từng khúc: Hàm $f(x)$ gọi là hàm tuần hoàn với chu kỳ T nếu $\forall x \in \mathbb{R}$, có $f(x+T) = f(x)$, trong đó T là hằng số dương. Giá trị nhỏ nhất $T > 0$ như thế gọi là chu kỳ tối thiểu của $f(x)$.

Ví dụ 2.37. Hàm lượng giác $\sin x$, $\cos x$ là tuần hoàn chu kỳ $T = 2\pi$, còn hàm $\cos\frac{\pi x}{L}$ và $\sin\frac{\pi x}{L}$ là tuần hoàn chu kỳ $2L$. Chẳng hạn $\cos\frac{\pi(x+2L)}{L} = \cos(\frac{\pi x}{L} + 2\pi) = \cos\frac{\pi x}{L}$.

Hàm tuần hoàn với chu kỳ T được gọi là hàm $T-$ tuần hoàn.



Tiếp theo, ta nhắc lại khái niệm hàm liên tục từng khúc: Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục từng khúc trên (a,b) nếu (a,b) có thể phân chia thành một số hữu hạn các khoảng $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ sao cho trên mỗi khoảng (x_j, x_{j+1}) hàm số là liên tục $\forall j = \overline{0,\, n-1}$ và tại mỗi đầu mút x_j thì giới hạn phải và giới hạn trái là tồn tại.



Ta ký hiệu:
giới hạn phải $\lim\limits_{x\to x_j;\, x>x_j} f(x) := f(x_j+0)$ và giới hạn trái $\lim\limits_{x\to x_j;\, x<x_j} f(x) := f(x_j-0)$.
Lưu ý là tại các đầu mút ngoài cùng a và b, thì chỉ tính giới hạn một phía (giới hạn phải tại a, và giới hạn trái tại b).

Định nghĩa 2.38 (Chuỗi lượng giác). *Chuỗi hàm số*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

gọi là chuỗi lượng giác, trong đó a_n, $n = 0,1,2,\cdots$; b_n, $n = 1,2,\cdots$; là các hằng số thực.

Tổng của chuỗi (nếu tồn tại) là hàm tuần hoàn chu kỳ $2L$.
Đặc biệt, khi $L = \pi$, chuỗi lượng giác trở thành chuỗi hàm số
$\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$. Ta có định lý sau đây về điều kiện đủ cho sự hội đều của chuỗi lượng giác.

Định lý 2.39. *Nếu $\sum(|a_n| + |b_n|)$ hội tụ, thì chuỗi lượng giác ở trên hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.*

Chứng minh. $|a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}| \le |a_n| + |b_n|$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall n$, và $\left|\dfrac{a_0}{2}\right| + \sum(|a_n| + |b_n|)$ hội tụ. Do đó, theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi lượng giác hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. ∎

2.3.2 Khai triển hàm thành chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier

Tương tự như trường hợp khai triển thành chuỗi lũy thừa, ở đây ta cũng xét bài toán biểu diễn một hàm số thành chuỗi lượng giác. Việc biểu diễn này cho phép ta xấp xỉ hàm thành các hàm sin và cos, để nhằm tính toán dễ dàng theo các phép toán trên các hàm sin và cos, hơn nữa việc khai triển này cho phép phân rã hàm thành các hệ số (hay phổ) Fourier vốn có ứng dụng trong lý thuyết xử lý tín hiệu, bài toán truyền nhiệt, truyền sóng và các bài toán phương trình đạo hàm riêng khác. Cụ thể ta xét bài toán:

Bài toán. Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn chu kỳ $2L$, và liên tục từng khúc trên $(-L, L)$.

1. Liệu có tồn tại chuỗi lượng giác $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right)$ sao cho $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right)$ $\forall x \in (-L, L)$?

2. Giả sử chuỗi lượng giác như trên đã tồn tại, liệu nó có duy nhất?

Giải: Tương tự như trường hợp chuỗi lũy thừa, đầu tiên ta trả lời câu hỏi thứ hai:
(2) Giả sử đã tồn tại chuỗi lượng giác sao cho

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \ \forall x \in (-L, L).$$

Cố định bất kỳ số $m \in \mathbb{N}$. Nhân hai vế đẳng thức trên với $\cos \frac{m\pi x}{L}$ và lấy tích phân hai vế từ $-L$ đến L ta nhận được: $\int\limits_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \int\limits_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} dx +$
$+ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{-L}^{L} a_n \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int\limits_{-L}^{L} b_n \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)$

Với $m = 0$: $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int\limits_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} dx = La_0$, do đó $a_0 = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x)dx$.

Với $m > 0$: sử dụng các kết quả tính toán

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n \\ L & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n \\ L & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \text{ với mọi số nguyên dương } m, n$$

ta có $\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = La_m$. Do đó, $a_m = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx\ \forall\ m = 1,2,\cdots$. Kết hợp với trường hợp $m=0$, ta có $a_m = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx\ \forall\ m = 0,1,2,\cdots$.

Nhận xét: Ta nhận được công thức xác định tất cả các a_m với mọi $m \in \mathbb{N}$ kể cả khi $m = 0$. Để có được điều đó ta đã sử dụng cách viết chuỗi lượng giác với số hạng bắt đầu là $\frac{a_0}{2}$ mà lúc đầu ta thấy là có vẻ hơi kỳ cục. Cuối cùng, cách viết đó cho ta một công thức thống nhất cho toàn bộ $a_m\ \forall m \in \mathbb{N}$.

Tương tự, ta có $b_m = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx\ \forall\ m = 1,2,\cdots$.

Do đó, nếu một chuỗi lượng giác như vậy tồn tại, thì nó là duy nhất (vì tất cả a_n, b_n được xác định duy nhất bởi f). Ta đặt tên cho chuỗi và các hệ số đó trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.40. *Xét $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ $2L$ và liên tục từng khúc trên $(-L,L)$. Khi đó, chuỗi lượng giác*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 1,2,\cdots$$

được gọi là Chuỗi Fourier của f. Các số a_n, b_n được xác định như trên gọi là Hệ số Fourier của f.

Để trả lời cho câu hỏi thứ hai ta có định lý Dirichlet sau đây:

Định lý 2.41 (Dirichlet). *Xét hàm f xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ $2L$ và liên tục từng khúc trên $(-L,L)$. Giả sử $f'(x)$ tồn tại và liên tục từng khúc trên $(-L,L)$. Khi đó, chuỗi Fourier của f hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) =$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f \text{ liên tục tại } x, \\ \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) & \text{nếu } f \text{ không liên tục tại } x, \end{cases}$$

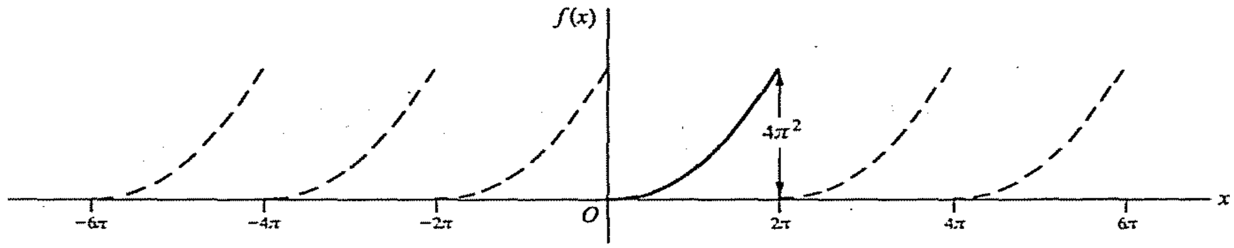
ở đây a_n và b_n là Hệ số Fourier của f xác định như trên.

Trước khi đưa ra một số ví dụ tính toán hệ số và chuỗi Fourier, chúng ta có một số nhận xét sau đây để việc tính toán thuận tiện dễ dàng hơn.

Nhận xét.

1. Nếu f là hàm chẵn, thì $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ cũng là hàm chẵn, còn $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ là hàm lẻ, do đó, $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 0,1,2,\cdots;\ b_n = 0\ \forall n = 1,2,\cdots$.
2. Nếu f là hàm lẻ, thì $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ là hàm lẻ, và $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ là hàm chẵn, vậy, $a_n = 0\ \forall n = 0,1,2,\cdots\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 1,2,\cdots$
3. Với hàm tuần hoàn g chu kỳ $2L$ ta có
$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = \int_c^{c+2L} g(x)dx \text{ với mọi hằng số } c.$$
Do đó, $a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 0,1,2,\cdots$
$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 1,2,\cdots\ \forall$ hằng số c.

Ví dụ 2.42. 1. Khai triển hàm $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định trên $\mathbb{R}$, thành chuỗi Fourier.

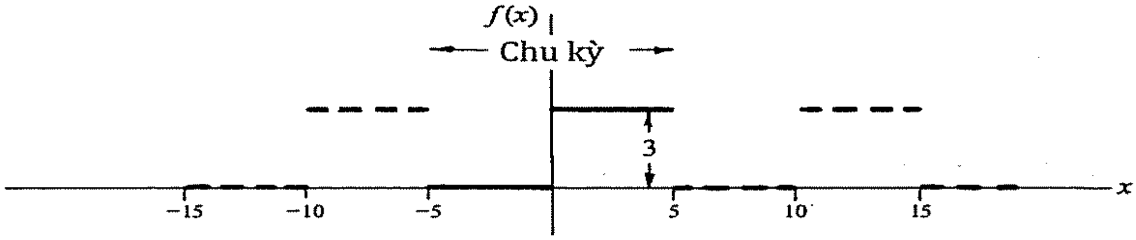


Giải. Chu kỳ $2L = 2\pi$, nên $L = \pi$.
Chọn $c = 0$, ta có $a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left\{x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right\}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$ với $n \neq 0$;
Với $n = 0$, ta có $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx = \frac{8\pi^2}{3}$.
Lại có, $b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx =$
$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left\{x^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Big|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$
$\forall n = 1,2,\ldots$
Vậy $f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$.
Đẳng thức đúng với $0 < x < 2\pi$. Theo định lý Dirichlet, tại $x = 0$ và $x = 2\pi$ chuỗi Fourier hội tụ đến trung bình của giới hạn phải (0) và giới hạn trái ($4\pi^2$, xem hình), vậy nó hội tụ đến $\frac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2$.

Tiếp theo, ta sử dụng kết quả trên để chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Thật vậy, tại $x = 0$, chuỗi trở thành $\frac{4\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$. Như trên đã nói, theo định lý Dirichlet, chuỗi đó hội tụ đến $\frac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2$. Vậy $\frac{4\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\pi^2$, do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn chu kỳ 10, và
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{nếu } 0 < x < 5 \end{cases}$$



a) Khai triển f thành chuỗi Fourier.
b) Hỏi phải cho hàm f nhận giá trị nào tại $x = -5$, $x = 0$, và $x = 5$ để chuỗi Fourier của nó hội tụ về $f(x)$ với mọi $-5 \le x \le 5$.
Giải.
a) Chu kỳ $2L = 10$, vậy $L = 5$. Chọn $c = -5$, ta có

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx \\ &= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{5}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}dx \\ &= \frac{3}{5}\,(\frac{5}{n\pi})\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 = 0 \text{ với } n \ne 0; \end{aligned}$$

Với $n = 0$, ta có: $a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3$. Lại có,

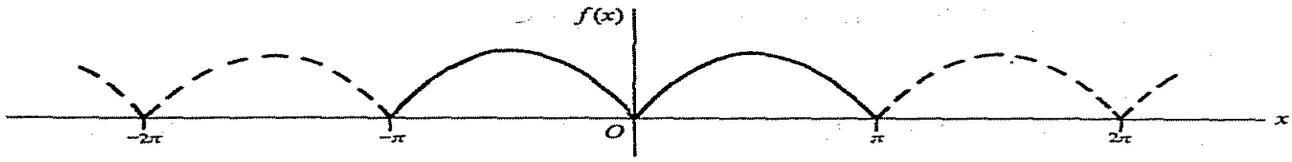
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx \\ &= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{5}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 (3)\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}dx \\ &= \frac{3}{5}\,(\frac{-5}{n\pi})\cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \text{ với mọi } n = 1, 2, \cdots; \end{aligned}$$

Chuỗi Fourier tương ứng là:

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}.$$

Theo định lý Dirichlet chuỗi Fourier của f hội tụ đến $f(x)$ tại các điểm liên tục của f, và hội tụ đến $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ tại các điểm gián đoạn của f. Như vậy, tại các điểm $x = -5; 0; 5$ hàm f gián đoạn nên chuỗi hội tụ đến $\frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$ (xem trên đồ thị). Do đó, ta chọn $f(-5) = f(0) = f(-5) = \frac{3}{2}$ thì chuỗi hội tụ đến $f(x)$ với mọi $-5 \le x \le 5$.

3. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm f tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định trên $\mathbb{R}$, với $f(x) = |\sin x|$, $-\pi < x < \pi$.



Giải. Đây là hàm chẵn trên khoảng chu kỳ $(-L, L) = (-\pi, \pi)$ nên ta có $b_n = 0\ \forall n = 1, 2, \ldots,$ và

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(x+nx)}{n+1}+\frac{\cos(nx-x)}{n-1}\right\}\Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1+\cos n\pi}{n+1}+\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\} = -\frac{2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \text{ với } n \neq 1; \end{aligned}$$

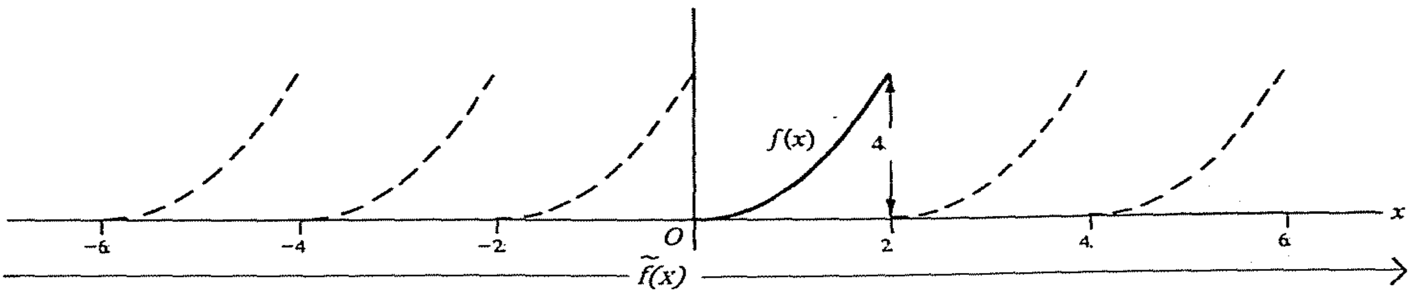
Với $n = 1$, ta có $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x dx = 0$.
Với $n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}$. Vậy

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos n\pi x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)}{n^2-1}\cos n\pi x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2.3.3 Khai triển Fourier của hàm xác định trên (a, b)

Xét hàm f xác định trên (a, b). Để khai triển f thành chuỗi Fourier trên (a, b), ta tìm hàm $\tilde{f}$ tuần hoàn chu kỳ $2L \geq b - a$ và $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$. (Khi đó $\tilde{f}$ gọi là một mở rộng $2L -$ tuần hoàn của f lên toàn trục số $\mathbb{R}$). Sau đó khai triển $\tilde{f}$ thành chuỗi Fourier, và đó cũng chính là chuỗi Fourier của f khi hạn chế lên (a, b) (tức là khi xét biến $x \in (a, b)$). Khi ta chọn chu kỳ $2L = b - a$ thì trong công thức tính hệ số Fourier a_n, b_n ta chỉ sử dụng các giá trị của f trên (a, b), vì ta lấy tích phân trên $(a, a + 2L) = (a, b)$ và trong khoảng này $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$.



Khi ta chọn chu kỳ $2L > b - a$, thì ta có thể khéo chọn hàm $\tilde{f}$ là chẵn hoặc lẻ để đơn giản tính toán, khi đó chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm cos hoặc chỉ chứa các hàm sin. Cách làm này thường áp dụng cho trường hợp hàm f xác định trên nửa khoảng $(0, L)$.

Chuỗi Fourier chỉ chứa hàm Sine

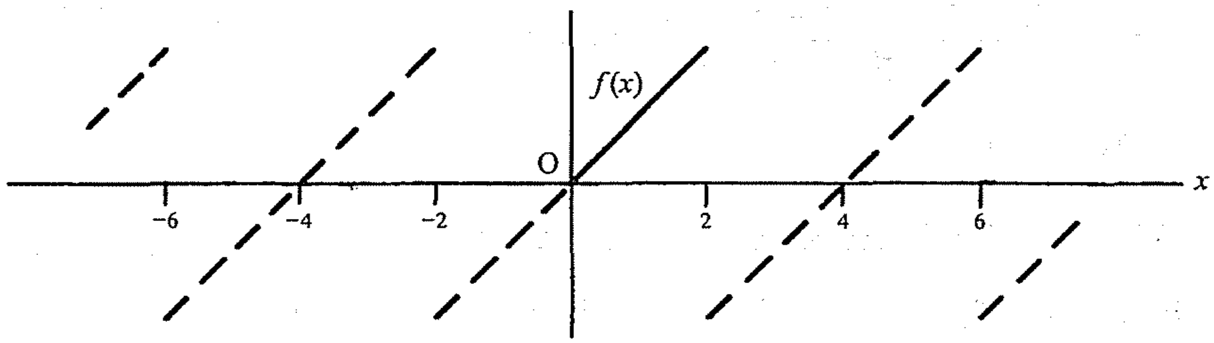
Cho f xác định trên $(0, L)$, thỏa mãn điều kiện của Định lý Dirichlet trên $(0, L)$. Mở rộng f thành hàm lẻ $\tilde{f}$ trên $(-L, L)$ bằng cách đặt

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in (0, L), \\ -f(-x) & \text{nếu } x \in (-L, 0). \end{cases}$$

Bên ngoài khoảng $(-L, L)$, thì $\tilde{f}$ là $2L$ – tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Khi đó, hệ số Fourier của $\tilde{f}$ (tức là của f) là $a_n = 0\ \forall n = 0, 1, 2, \cdots$; $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx\ \forall n = 1, 2, \cdots$.
Lưu ý rằng, khi tính các hệ số và do đó là chuỗi Fourier ta cũng chỉ dùng đến các giá trị của f, vì $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in (0, L)$.

Ví dụ 2.43. Khai triển hàm $f(x) = x$, $0 < x < 2$, thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm sin.

Giải. Ta mở rộng f thành hàm lẻ $\tilde{f}$ tuần hoàn chu kỳ $2L = 4$ và $\tilde{f}(x) = x$, $\forall x \in (0, 2)$ (xem hình). Ta nói f được mở rộng lẻ và 4 – tuần hoàn thành hàm $\tilde{f}$.



Khi đó, $a_n = 0$, và

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \left\{(x)(\frac{-2}{n\pi}) \cos\frac{n\pi x}{2}) - (1)(\frac{-4}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi \text{ với mọi } n = 1, 2, \ldots; \end{aligned}$$

Ta có

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4\cos n\pi}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2}$$

với mọi $x \in (0, 2)$.

Chuỗi Fourier chỉ chứa hàm Cosine

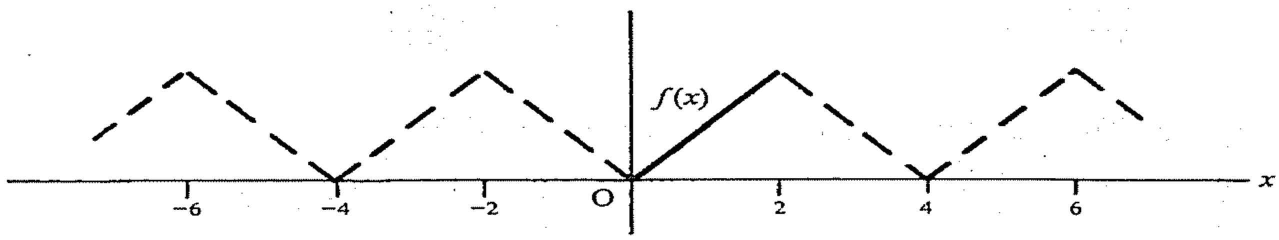
Cho f xác định trên $(0, L)$, thỏa mãn điều kiện của Định lý Dirichlet trên $(0, L)$. Mở rộng f thành hàm chẵn $\tilde{f}$ trên $(-L, L)$ bằng cách đặt

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in (0, L), \\ f(-x) & \text{nếu } x \in (-L, 0). \end{cases}$$

Bên ngoài khoảng $(-L, L)$, thì $\tilde{f}$ là $2L -$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Khi đó, hệ số Fourier của $\tilde{f}$ (tức là của f) là $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ \forall n = 0, 1, 2, \cdots$; $b_n = 0\ \forall n = 1, 2, \cdots$.

Ví dụ 2.44. Khai triển hàm $f(x) = x$, $0 < x < 2$, thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm cos.

Giải. Ta mở rộng f thành hàm chẵn $\tilde{f}$ tuần hoàn chu kỳ $2L = 4$ và $\tilde{f}(x) = x$, $\forall x \in (0, 2)$ (xem hình). Ta nói f được mở rộng chẵn và $4 -$ tuần hoàn thành hàm $\tilde{f}$.



Khi đó, $b_n = 0$ và

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ &= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \text{ với } n \neq 0; \end{aligned}$$

Với $n = 0$, $a_0 = \int_0^2 x dx = 2$. Vậy

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

với mọi $x \in (0, 2)$.

§4. BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2.1. Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n\sqrt[3]{n}}$, $x \in [-2, 2]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$, $x \in [-1, 1]$

Bài tập 2.2. Tìm miền hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x+\cos x}{n^2+x^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n(n+1)}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}x^n}{5^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} x^n$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n+\sin x}{3n+1}$

Bài tập 2.3. Tìm miền hội tụ và tính tổng

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(2n+1)x^{2n}$

Bài tập 2.4. Tìm miền hội tụ và tính tổng

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Bài tập 2.5. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4n^3+3n+1}{7^n}\right) x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-9)^n \left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n^2} x^n$

Bài tập 2.6. Sử dụng đổi biến về chuỗi lũy thừa, hãy tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2+2n+3)}{(-3)^n} \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^n.$$

Bài tập 2.7. Khai triển hàm sau thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x) = 2xe^{-x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{2-3x}$ với $x < \frac{2}{3}$

Bài tập 2.8. Khai triển hàm $f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-5}{x^2-5x+6}$ thành chuỗi Maclaurin.

Bài tập 2.9. Cho hàm số f là hàm tuần hoàn chu kỳ 8, xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{nếu } 0 \leqslant x < 4, \\ x-5 & \text{nếu } 4 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$$

Hãy khai triển hàm f thành chuỗi Fourier.

Bài tập 2.10.

1. Khai triển $f(x) = \cos 5x, 0 < x < \pi$ thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm sin.

2. Ta phải cho f nhận giá trị nào tại $x = 0$ và $x = \pi$ để chuỗi Fourier ở trên hội tụ về $f(x)$ với mọi $0 \leq x \leq \pi$.

CHƯƠNG 3

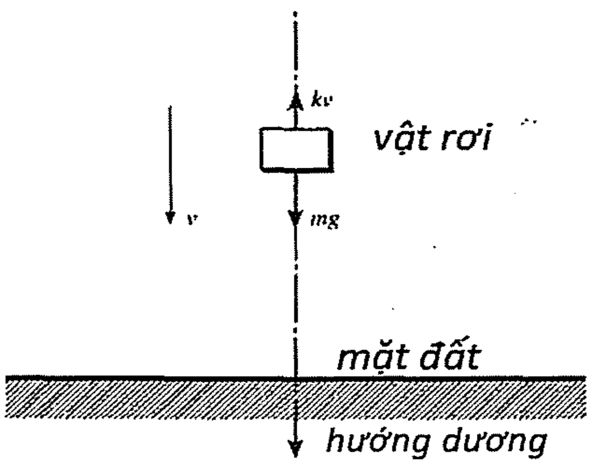
Dẫn nhập về phương trình vi phân, phương trình vi phân cấp một

§1. BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Trong tiết này chúng ta giới thiệu một số bài toán trong vật lý, mạch điện và mô hình thú – mồi trong tự nhiên dẫn đến các phương trình vi phân. Cùng với đó, chúng ta giới thiệu một số khái niệm cơ bản của phương trình vi phân, như là nghiệm, cấp, bài toán giá trị ban đầu, v.v..

3.1.1 Bài toán vật rơi

Xét vật rơi với khối lượng m và vận tốc (cần tìm) v:



Ta chọn chiều dương là chiều hướng xuống phía mặt đất trùng với hướng rơi của vật thể, và xét hai lực tác động lên vật thể gây ra chuyển động:

1. Gia tốc trọng trường mg;
2. Lực cản không khí $-kv$; trong đó k là hằng số dương (Lưu ý rằng lực cản không khí chống lại việc rơi nên có hướng ngược với hướng rơi xuống của vật thể).

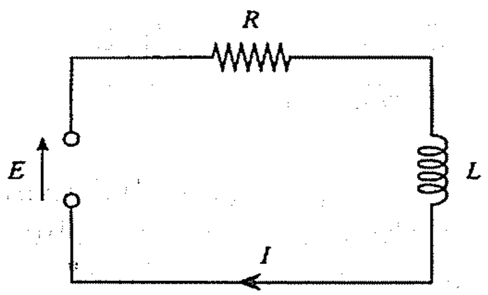
Theo định luật hai của Newton ta có tổng lực tác động lên vật bằng khối lượng nhân với gia tốc, tức là $\vec{F}_{\text{tổng}} = m\vec{a}$. Mặt khác, theo trên, tổng lực là $\vec{F}_{\text{tổng}} = mg - kv$, do đó

$$\vec{F}_{\text{tổng}} = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + k\frac{v}{m} = g.$$

Phương trình này chứa hàm cần tìm $v(t)$ và đạo hàm của nó $\frac{dv}{dt}$, vì thế ta gọi phương trình đó là phương trình vi phân.

3.1.2 Mạch điện

Xét mạch RL có điện trở R, cuộn cảm L, nguồn $E = E(t)$. Tính cường độ dòng điện $I = I(t)$ trong mạch



Ký hiệu các hiệu điện thế tương ứng qua R là V_R, qua L là V_L, từ luật Kirchoff ta có: $V_R + V_L = E$. Lại có, theo định luật Ohm: $V_R = RI$; và luật cho cuộn cảm $V_L = L\frac{dI}{dt}$. Vậy ta có:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

Phương trình này được gọi là phương trình vi phân vì nó chứa hàm cần tìm I và đạo hàm của của hàm cần tìm $\frac{dI}{dt}$.

3.1.3 Mô hình quần thể thú – mồi

Chúng ta xét mô hình sinh thái quần thể đơn giản, trong đó một loài động vật ăn thịt (thú) săn mồi loài khác (con mồi), trong khi con mồi sống trên một nguồn thức ăn khác. Chẳng hạn như xét loài cáo và thỏ trong một khu rừng kín: Cáo săn con mồi là thỏ, thỏ sống trên thảm thực vật trong rừng. Tất nhiên có rất nhiều ví dụ khác, chẳng hạn cá vược trong hồ là kẻ săn mồi và cá tạp là con mồi, hoặc bọ rùa có thể xem như những kẻ săn mồi và rệp là con mồi. Chúng ta nhấn mạnh rằng một mô hình chỉ liên quan đến hai loài không thể mô tả đầy đủ các mối quan hệ phức tạp giữa các loài thực sự xảy ra trong tự nhiên. Tuy nhiên, việc nghiên cứu các mô hình đơn giản là bước đầu tiên hướng tới một hiểu biết về các hiện tượng phức tạp hơn.

Chúng ta gọi u là dân số của quần thể con mồi và v là dân số quần thể thú tại thời điểm t. Để xây dựng một mô hình về sự tương tác của hai loài thú và mồi này, chúng ta giả sử:

1. Khi không có thú, con mồi phát triển với tốc độ tỷ lệ thuận với dân số quần thể; do đó $\frac{du}{dt} = au,\ a > 0$, khi $v = 0$.

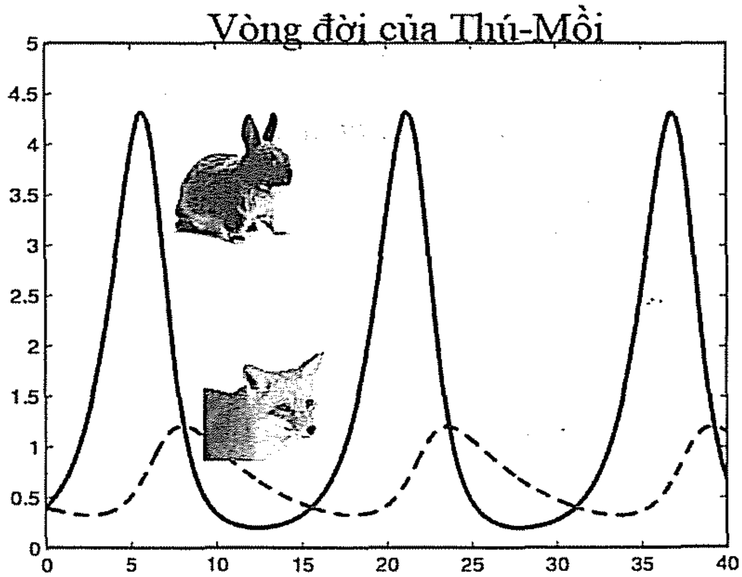
2. Trong trường hợp không có con mồi, thú sẽ chết với tốc độ tỷ lệ với dân số quần thể; do đó $\frac{dv}{dt} = -cv,\ c > 0$, khi $u = 0$.

3. Số lần tương tác thú — mồi (thú ăn thịt mồi) tỷ lệ thuận với tích của hai quần thể của chúng. Mỗi cuộc tương tác như vậy có xu hướng thúc đẩy sự phát triển của thú và ức chế sự phát triển của con mồi. Do đó, tốc độ tăng trưởng của thú được tăng lên một số hạng có dạng γuv, trong khi tốc độ phát triển của con mồi sẽ giảm đi một số hạng $-\alpha uv$, trong đó γ và α là các hằng số dương.

Như vậy, chúng ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= au - \alpha uv, \\ \frac{dv}{dt} &= -cv + \gamma uv. \end{cases} \tag{3.1}$$

Các hằng số a, c, α và γ đều dương; a và c lần lượt là tốc độ sinh trưởng của con mồi và tốc độ chết của thú, còn α và γ là hệ số đo ảnh hưởng của sự tương tác giữa hai loài. Hệ phương trình trên được gọi là hệ phương trình Lotka — Volterra. Chúng được phát triển bởi Lotka vào năm 1925 và bởi Volterra vào năm 1926. Hệ đó là gọi hệ phương trình vi phân vì nó chứa các hàm cần tìm $u(t)$, $v(t)$ và đạo hàm của chúng theo thời gian.



3.1.4 Khái niệm cơ bản

Định nghĩa 3.1. *Phương trình vi phân là phương trình chứa hàm cần tìm và các đạo hàm của nó.*

Trong bảng ví dụ sau đây, ta có hàm cần tìm là y và biến là x (hoặc t, xem phương trình cuối):

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Ta có một số khái niệm ban đầu sau đây:

- Phương trình vi phân gọi là Phương trình vi phân thường nếu hàm cần tìm chỉ phụ thuộc vào một biến độc lập duy nhất.

- Nếu hàm cần tìm phụ thuộc vào hai hay nhiều biến độc lập, thì Phương trình vi phân gọi là Phương trình đạo hàm riêng (xem phương trình cuối cùng).

- Cấp (hay bậc) của Phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm xuất hiện trong phương trình.

Ta viết tắt PTVP: Phương trình vi phân.

Như vậy: Phương trình vi phân thường cấp n với hàm cần tìm y, biến x, có dạng:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

Trong đó F là biểu thức liên hệ xác định giữa các đại lượng $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ (hay nói cách khác F là một hàm $n+1$ biến).

Định nghĩa 3.2. *Chúng ta có các khái niệm cụ thể liên quan trực tiếp đến phương trình vi phân như sau.*

1. *Nghiệm của phương trình vi phân cấp n (với hàm cần tìm y theo biến độc lập x) trên khoảng $J \subset \mathbb{R}$ là hàm số $y = y(x)$ khả vi đến cấp n trên J và thỏa mãn phương trình vi phân với mọi $x \in J$.*

2. *Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.*

Ví dụ 3.3. 1. Xét phương trình vi phân: $y' = 2x + 1$. Ta chỉ việc lấy nguyên hàm để được tất cả các nghiệm $y = \int(2x+1)dx = x^2 + x + C$ với mọi hằng số C.

2. Hàm $y(x) = 2\sin 2x + 3\cos 2x$ là nghiệm của $y'' + 4y = 0$ trên $(-\infty, \infty)$ (ta có thể thay trực tiếp vào phương trình). Việc giải phương trình này sẽ được tiến hành trong chương 3.

Định nghĩa 3.4 (Bài toán giá trị ban đầu, và giá trị biên). *Ta định nghĩa các loại bài toán liên quan đến phương trình vi phân như sau:*

1. *Phương trình vi phân với các điều kiện bổ trợ áp lên hàm cần tìm và các đạo hàm của nó, tất cả được cho tại cùng một giá trị của biến, được gọi là Bài toán giá trị ban đầu (hay Bài toán Cauchy). Các điều kiện bổ trợ đó gọi là điều kiện ban đầu.*

2. *Nếu điều kiện bổ trợ được cho tại nhiều hơn một giá trị của biến thì bài toán gọi là Bài toán giá trị biên và các điều kiện bổ trợ gọi là điều kiện biên.*

Ví dụ 3.5. 1. Bài toán $y'' + 2y = x; y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$ là bài toán giá trị ban đầu, vì hai điều kiện bổ trợ được cho tại đúng một giá trị của biến $x = \pi$.

2. Bài toán $y'' + 2y' = x; y(0) = 1, y(1) = 1$ là bài toán giá trị biên, vì hai điều kiện bổ trợ được cho tại hai giá trị phân biệt $x = 0$ và $x = 1$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Theo trên, phương trình vi phân cấp một với hàm cần tìm y và biến x, có dạng

$$F(x, y, y') = 0.$$

Để tìm hiểu cụ thể cách giải và các tính chất ta cần đến các dạng sau đây.

3.2.1 Dạng tiêu chuẩn và dạng vi phân của phương trình vi phân cấp một

1. Dạng tiêu chuẩn của phương trình vi phân cấp một là

$$y' = f(x, y) \tag{3.2}$$

trong đó f là hàm hai biến xác định trên một miền Ω nào đó của $\mathbb{R}^2$.

2. Vế phải của (3.2) luôn viết được dạng tỷ số của hai hàm $-M(x,y)$ và $N(x,y)$, chẳng hạn $f(x,y) = \frac{-f(x,y)}{-1}$ (thực tế thì có nhiều cách viết thành tỷ số như vậy). Khi đó, (3.2) trở thành $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ và dạng tiêu chuẩn (3.2) trở thành dạng vi phân sau đây:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.3}$$

Định lý 3.6 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm). *Cho hàm hai biến $f(x,y)$ xác định trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$. Xét bài toán Cauchy (bài toán giá trị ban đầu):*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Khi đó,

1. *Nếu $f(x,y)$ liên tục trên Ω thì tồn tại khoảng $(a,b) \ni x_0$ và hàm $y = y(x)$ xác định trên (a,b) sao $y(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy (3.4) trên (a,b).*

2. *Nếu thêm vào đó $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ tồn tại và liên tục trên Ω, thì bài toán Cauchy (3.4) có duy nhất nghiệm trên (a,b).*

Ta có khái niệm sau về nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, và nghiệm kỳ dị.

Định nghĩa 3.7 (Nghiệm tổng quát, Nghiệm riêng, Nghiệm kỳ dị).
Xét phương trình vi phân cấp 1 dạng tiêu chuẩn (3.2) *với hàm* $f(x,y)$ *xác định trên miền* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

1. *Nghiệm tổng quát của* (3.2) *là họ hàm số* $y = y(x, C)$ *trong đó* C *là hằng số tùy ý, sao cho:*

   (a) $y(x,C)$ *luôn là nghiệm của* (3.2) *với bất kỳ hằng số* C *nào.*

   (b) *Với* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *mà tại đó định lý tồn tại duy nhất nghiệm thỏa mãn thì có duy nhất hằng số* C_0, *sao cho* $y(x, C_0)$ *là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy* (3.4).

2. *Nghiệm riêng của* (3.2) *là một nghiệm cụ thể bất kỳ nào đó của* (3.2).

3. *Nghiệm kỳ dị là một nghiệm của phương trình vi phân nhưng không thuộc lớp nghiệm tổng quát đã nói ở trên.*

Ví dụ 3.8. Xét phương trình vi phân $y' = x^2$.
Nghiệm tổng quát là $y = \frac{x^3}{3} + C$. Lấy $(0,2) \in \mathbb{R}^2$, thì nghiệm $y = \frac{x^3}{3} + 2$ ứng với $C = 2 = C_0$ là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy $y' = x^2$; $y(0) = 2$.

Nghiệm riêng: $y = \frac{x^3}{3}$. Phương trình này không có nghiệm kỳ dị.

Lưu ý: Nghiệm tổng quát đôi khi được viết dưới dạng $\Phi(x,y,C) = 0$, gọi là dạng ẩn của nghiệm. Phương trình này biểu diễn những đường trên mặt phẳng xOy, do đó ta biết được đồ thị của nghiệm trên mặt phẳng xOy. Vì thế khi nghiệm tổng quát được viết dạng này ta còn gọi là *đường tích phân tổng quát* hay gọi tắt là *tích phân tổng quát* của nghiệm.

Ví dụ 3.9. Xét phương trình vi phân $xdx + ydy = 0$.

Phương trình trên tương đương với $\frac{1}{2}d(x^2+y^2) = 0 \iff x^2 + y^2 = C$ với mọi hằng số C. Ta có thể giải tường minh y như là hàm của x, nhưng để làm điều đó thì phải xét các trường hợp để có thể lấy căn bậc hai thực và việc giải sẽ cho ta hai hàm $y = \pm\sqrt{C - x^2}$. Do đó, ta sẽ để nghiệm tổng quát dạng ẩn $x^2 + y^2 = C$, dạng này cho phép nhận thấy ngay đồ thị của nghiệm là các đường tròn đồng tâm tại $(0,0)$. Hơn nữa, đôi khi ta có thể tham số hóa đồ thị (đường tích phân) của nghiệm dạng

$$\begin{cases} x = x(t,C), \\ y = y(t,C). \end{cases}$$

Chẳng hạn đồ thị nghiệm của phương trình nói trên có thể viết dạng tham số là

$$\begin{cases} x = \sqrt{C}\cos t \\ y = \sqrt{C}\sin t. \end{cases}$$

Đây là một cách viết khác của nghiệm tổng quát của phương trình vi phân. Chúng ta gọi nghiệm tổng quát viết dưới dạng này là dạng tham số của nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

Tóm lại: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một có thể viết dưới một trong ba dạng sau:

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ \textit{Dạng tường minh } y = y(x, C) \\ \\ 2.\ \textit{Dạng ẩn } \Phi(x, y, C) = 0 \\ \\ 3.\ \textit{Dạng tham số } \begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t, C). \end{cases} \end{array}\right.$$

3.2.2 Các phương trình vi phân khuyết

A. Phương trình vi phân khuyết y: $F(x, y') = 0$. Tức là trong phương trình không có y. Vậy ta có 03 trường hợp:

Trường hợp 1. Có thể giải ra được $y' = f(x)$. Khi đó, ta lấy nguyên hàm, và nghiệm tổng quát là $y = \int f(x)dx + C$

Trường hợp 2. Giải ra được $x = f(y')$. Khi đó, đặt $y' = t$, có: $x = f(t)$ và $dx = f'(t)dt$; $dy = y'dx = tf'(t)dt$. Vậy được dạng tham số của nghiệm $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \int tf'(t)dt + C. \end{cases}$

Trường hợp 3. Có tham số hóa $x = f(t)$; $y' = g(t)$. Khi đó, $dy = y'dx = g(t)f'(t)dt$, lấy nguyên hàm ta được $y = \int g(t)f'(t)dt + C$ kết hợp với $x = f(t)$ ta được nghiệm tổng quát dưới dạng tham số.

Ví dụ 3.10. Giải phương trình $x = 3y'^2 + 2y' + 1$.
Đặt $y' = t$, ta nhận được: $x = 3t^2 + 2t + 1$, nên $dx = (6t + 2)dt$, và $dy = y'dx = t(6t + 2)dt$. Vậy $y = 2t^3 + t^2 + C$, do đó nghiệm tổng quát dạng tham số là: $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 1 \\ y = 2t^3 + t^2 + C. \end{cases}$

B. Phương trình vi phân khuyết x: $F(y, y') = 0$.

Trường hợp 1. Giải ra được $y' = f(y)$. Ta viết thành $\frac{dy}{dx} = f(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{f(y)} = dx$ (nếu $f(y) \neq 0$)
$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{f(y)} - x - C = 0$ (có thể để dạng ẩn của nghiệm $\Phi(x, y, C) = 0$.)

Trường hợp 2. Giải ra được $y = f(y')$. Tham số hóa $y' = t$ rồi tiến hành tương tự như trường hợp 2 ở mục A.

Trường hợp 3. Có thể tham số hóa $y = f(t)$; $y' = g(t)$. Tính toán tương tự như trên.

Ví dụ 3.11. Giải phương trình $y^2 + y'^2 = 1$.

Giải. Ta thực hiện tham số hóa $y = \sin t$; $y' = \cos t$. Lại có $dy = y'dx = \cos t dx$. Tức là $\cos t dt = \cos t dx$. Vậy xảy ra hai trường hợp:
Nếu $\cos t \neq 0$ thì có $dt = dx$ vậy $t = x + C$, và do đó nghiệm tổng quát là $y = \sin(x + C)$.
Nếu $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ khi đó $y' = 0$, và $y = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 1$. Đây là hai nghiệm kỳ dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

3.2.3 Phương trình vi phân biến số phân ly

Định nghĩa 3.12. *Phương trình vi phân biến số phân ly có dạng*

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \tag{3.5}$$

Cách giải: Phương trình tương đương với

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C \tag{3.6}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.13. Giải: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+2}{y}$; đk: $y \neq 0$.

Bằng cách nhân hai vế với ydx, ta viết lại phương trình vi phân dưới dạng vi phân $(x^2+2)dx - ydy = 0$, đây là phương trình vi phân biến số phân ly với $A(x) = x^2 + 2$ và $B(y) = -y$. Ta có nghiệm tổng quát là $\int(x^2+2)dx - \int ydy = C$ tức là $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}y^2 = C$ với mọi hằng số C.

Ví dụ 3.14. Giải phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^4}{3(1+y^3)\sqrt{1+x^2}}$.

Với đk: $y \neq -1; 0$, ta có phương trình vi phân tương đương với:
$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{3(1+y^3)dy}{y^4} = 0 \Longleftrightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{3(1+y^3)dy}{y^4} = C$. Tính nguyên hàm, ta nhận được nghiệm tổng quát: $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + y^{-3} - 3\ln|y| = C$.
Ngoài ra, bằng cách thử trực tiếp vào phương trình ta có $y \equiv 0$ cũng là một nghiệm của phương trình.

3.2.4 Phương trình vi phân thuần nhất (đẳng cấp)

Định nghĩa 3.15. *Phương trình vi phân*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.7}$$

gọi là thuần nhất (đẳng cấp) khi và chỉ khi $f(tx, ty) = f(x, y)$ $\forall t \neq 0$.

Với $x \neq 0$ ta có $f(x, y) = f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) := g(\frac{y}{x})$. Tức là vế phải có thể viết thành hàm g chỉ phụ thuộc vào tỷ số $\frac{y}{x}$.
Cách giải: Ta chuyển về phương trình vi phân biến số phân ly bằng cách đặt: $\frac{y}{x} = v \Leftrightarrow y = xv$; tính đạo hàm: $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$. Thay vào phương trình ta có, $v + x\frac{dv}{dx} = g(v) \Leftrightarrow \frac{dv}{g(v)-v} = \frac{dx}{x}$ với $g(v) \neq v$, đó là phương trình vi phân biến số phân ly, ta chỉ việc lấy nguyên hàm hai vế để nhận được nghiệm tổng quát.
Với $g(v) = v$, phương trình trở thành $\frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow v = k$ (hằng số). Do đó, ta có nghiệm $y = kx$ với hằng số k nào đó.

Ví dụ 3.16. Giải $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3y^2}{2xy}$; đk: $xy \neq 0$.

Ta có hàm vế phải $f(x, y) = \frac{x^2-3y^2}{2xy}$, thỏa mãn $f(tx, ty) = \frac{t^2x^2-3t^2y^2}{2t^2xy} = f(x, y)$ $\forall t \neq 0$, vậy đây là phương trình thuần nhất (đẳng cấp). Ta đặt $\frac{y}{x} = v \Leftrightarrow y = xv$, vậy $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$. Thay vào phương trình vi phân ta có
$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{2v} \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-5v^2}{2v}$. Vậy, có hai trường hợp:
Trường hợp 1: $1 - 5v^2 \neq 0$, khi đó phương trình vi phân tương đương với $\frac{2vdv}{1-5v^2} = \frac{dx}{x}$, đó là phương trình vi phân biến số phân ly. Lấy nguyên hàm hai vế ta được nghiệm tổng quát là $|x|^3|x^2 - 5y^2| = C$ với $x \neq 0; 5y^2 - x^2 \neq 0$ (vì $1 - 5v^2 \neq 0$).
Trường hợp 2: $1 - 5v^2 = 0 \Leftrightarrow v = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, thì phương trình vi phân ban đầu tương đương với $\frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow v = k$ (hằng số), trường hợp này hằng số chính là $k = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ như trên. Vậy phương trình có thêm cặp nghiệm $y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}x$.

3.2.5 Phương trình vi phân tuyến tính

Định nghĩa 3.17. *Phương trình vi phân tuyến tính cấp một có dạng*

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{3.8}$$

Trường hợp $q(x) = 0$ $\forall x$, thì ta gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất;
Nếu $q(x) \not\equiv 0$, ta nói phương trình (3.8) là phương trình không thuần nhất.

Cách giải: Ta xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow dy + p(x)ydx = 0.$$

Rõ ràng $y \equiv 0$ là nghiệm của phương trình. Ta đi tìm nghiệm $y \not\equiv 0$.

Chia cho y ta có phương trình vi phân $\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow$
$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln|C| \Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Leftrightarrow |y| = |C|e^{-\int p(x)dx}$.
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Bây giờ, xem $C = C(x)$ là hàm của x, thay $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ vào phương trình không thuần nhất ở trên, ta có:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Do đó, $C'(x) = e^{\int p(x)dx}q(x)$, tức là $C(x) = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + K$. Vậy nghiệm tổng quát của (3.8) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + K\right). \tag{3.9}$$

Phương pháp trên đây gọi là phương pháp biến thiên hằng số.

Ví dụ 3.18. Giải phương trình vi phân $y' + \frac{4}{x}y = x^4$.

Ta có $p(x) = \frac{4}{x}$ và $q(x) = x^4$, thay vào công thức (3.9) ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y = e^{-\int \frac{4dx}{x}}\left(\int e^{\int \frac{4dx}{x}}x^4dx + K\right) = \frac{x^5}{9} + \frac{K}{x^4}$ ∀ hằng số K.

Ví dụ 3.19. Giải phương trình vi phân $xy' - 3y(x) = -4x^4\sin 4x$.

Để áp dụng công thức nghiệm tổng quát ở trên thì ta phải đưa phương trình về dạng chính tắc (3.8). Tức là ta xét $x \neq 0$ và chia hai vế phương trình cho x (lưu ý rằng theo định nghĩa của nghiệm thì nghiệm xác định trên khoảng mở của biến số để có thể tính được đạo hàm, nên giá trị của biến x tại một vài điểm rời rạc có thể bỏ qua) ta nhận được: $y' - \frac{3}{x}y(x) = -4x^3\sin 4x$, vậy $p(x) = -\frac{3}{x}$ và $q(x) = -4x^3\sin(4x)$. Lắp p, q vào công thức (3.9) ở trên ta có nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:

$$y = e^{\int \frac{3dx}{x}}\left(-\int e^{-\int \frac{3dx}{x}}4x^3\sin 4x dx + K\right) = x^3(\cos 4x + K).$$

3.2.6 Phương trình vi phân Bernoulli

Định nghĩa 3.20. *Phương trình vi phân Bernoulli có dạng $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ với α là số thực ($\alpha \neq 0; \alpha \neq 1$).*

Cách giải: Nếu $\alpha > 0$, thì $y = 0$ là một nghiệm. Còn nếu $\alpha < 0$, thì đk để pt có nghĩa là $y \neq 0$. Ta tìm nghiệm $y \neq 0$. Chia hai vế cho y^α ta được $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$. Thay $z = y^{1-\alpha}$ (vậy, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$) ta được Phương trình vi phân tuyến tính $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$.

Ví dụ 3.21. Giải $y' + xy = xy^2$. Đây là Phương trình vi phân Bernoulli với $p(x) = q(x) = x$, và $\alpha = 2$. Đầu tiên, $y = 0$ là nghiệm. Để tìm nghiệm $y \neq 0$, ta chia hai vế cho y^2 ta được $y^{-2}y' + xy^{-1} = x$. Thay $z = y^{-1} \Leftrightarrow y = 1/z$, với $z' = -y^{-2}y'$ vào phương trình vi phân ta có: $z' - xz = -x$ (phương trình vi phân tuyến tính)
$\Leftrightarrow z = e^{-\int(-x)dx}\left(\int e^{\int(-x)dx}(-x)dx + K\right) = 1 + Ke^{\frac{x^2}{2}}$. Do đó, $y = \frac{1}{1+Ke^{\frac{x^2}{2}}}$.

3.2.7 Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa 3.22. *Phương trình vi phân toàn phần là Phương trình vi phân dạng*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.10}$$

trong đó M, N là các hàm liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong một miền đơn liên $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, và $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ $\forall (x,y) \in \Omega$.

Cách giải: Điều kiện ở trên dẫn đến tồn tại hàm $U(x,y)$ xác định trên Ω sao cho $dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Vậy (3.10) $\Leftrightarrow dU(x,y) = 0$ do đó, nghiệm tổng quát của (3.10) là $U(x,y) = C$ (với hằng số C tùy ý).

Công thức tính U: Chọn $(x_0, y_0) \in \Omega$, ta có thể tính U bằng một trong hai cách sau:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt$$

hoặc

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt.$$

Sau khi tính U, ta viết nghiệm tổng quát của phương trình vi phân toàn phần là:

$$U(x,y) = C.$$

Ví dụ 3.23. Giải $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$. Ở đây $M = \frac{y}{x^2}$; $N = -\frac{1}{x}$; $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Ta có $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$, vậy đây là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $(x_0, y_0) = (1,0) \in \Omega$; $U(x,y) = \int_1^x M(t,0)dt + \int_0^y N(x,t)dt = \int_1^x 0dt - \int_0^y \frac{1}{x}dt = -\frac{y}{x}$. Vậy, nghiệm tổng quát là $\frac{y}{x} = C$ với mọi hằng số C.

Ví dụ 3.24. Giải phương trình vi phân $(2xy^3 - \frac{2y^2}{\sin^2(x)})dx + (3x^2y^2 + \frac{4y}{\tan(x)})dy = 0$. Ta có $M = 2xy^3 - \frac{2y^2}{\sin^2(x)}$; $N = 3x^2y^2 + \frac{4y}{\tan(x)}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R})$ và $\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - \frac{4y}{\sin^2(x)} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Đây là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $(x_0, y_0) = (1,0) \in \Omega$; ta có $U(x,y) = \int_1^x M(t,0)dt + \int_0^y N(x,t)dt = \int_1^x 0dt + \int_0^y (3x^2t^2 + \frac{4t}{\tan(x)})dt = y^3x^2 + 2y^2\cot(x)$. Vậy nghiệm tổng quát là: $y^3x^2 + 2y^2\cot(x) = C$.

3.2.8 Thừa số tích phân

Ta xét khi phương trình vi phân (3.10) không là phương trình vi phân toàn phần.

Định nghĩa 3.25. *Hàm số $I(x,y) \neq 0$ được gọi là thừa số tích phân đối với (3.10) khi và chỉ khi*

$$I(x,y)[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0 \tag{3.11}$$

là phương trình vi phân toàn phần.

Khi đó ta giải (3.11) từ đó nhận được nghiệm của (3.10) (vì hai phương trình đó tương đương trên miền mà $I(x,y) \neq 0$). Để tìm $I(x,y)$ ta giải

$$\frac{\partial(I(x,y)M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(I(x,y)N(x,y))}{\partial x}. \tag{3.12}$$

Điều này có thể tiến hành trong một số trường hợp, cụ thể:

Trường hợp 1. Thừa số tích phân $I(x,y) = I(x)$ chỉ phụ thuộc x: Ta sẽ tìm điều kiện áp đặt lên M, N (và các đạo hàm riêng) để tồn tại thừa số tích phân $I(x,y) = I(x)$ chỉ phụ thuộc x. Đầu tiên, ta thay $I(x,y) = I(x)$ vào phương trình (3.12), thì nhận được:

$$I(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)I'(x) + I(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI(x)}{I(x)} = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}dx.$$

Vậy để tồn tại I chỉ phụ thuộc vào x thì đại lượng $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$ phải là hàm chỉ phụ thuộc vào x (không phụ thuộc vào y). Khi đó, lấy nguyên hàm hai vế và cho hằng số bằng 0 (vì ta chỉ cần ít nhất một thừa số tích phân), ta nhận được

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx}.$$

Trường hợp 2. Tương tự như trên ta có: khi đại lượng $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)}$ là hàm chỉ phụ thuộc vào y (không phụ thuộc vào x) thì tồn tại thừa số tích phân $I(x,y) = I(y)$ chỉ phụ thuộc y với

$$I(y) = e^{-\int \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dy}.$$

Ta tổng kết hai trường hợp này trong bảng sau:

Nếu $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv g(x)$ chỉ phụ thuộc x $I(x) = e^{\int g(x)dx}$	Nếu $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv h(y)$ chỉ phụ thuộc y $I(y) = e^{-\int h(y)dy}$

Ví dụ 3.26. Giải $ydx - xdy = 0$ (dễ thấy phương trình vi phân này không là phương trình vi phân toàn phần). Kiểm tra $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = -\frac{2}{x}$ chỉ phụ thuộc x; Thừa số t/p $I(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$. Vậy phương trình vi phân $\Leftrightarrow \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$ là Phương trình vi phân toàn phần. Nghiệm tổng quát là $\frac{y}{x} = C$.

Ví dụ 3.27. Giải $(2xy^2 - \frac{2y}{\sin^2(x)})dx + (3x^2y + \frac{4}{\tan x})dy = 0$.

Ta có $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M} = -\frac{1}{y}$ chỉ phụ thuộc y. Vậy, thừa số tích phân $I(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$. Nhân hai vế với y ta được phương trình vi phân toàn phần và đó chính là phương trình trong ví dụ 3.24 ở trên, nghiệm tổng quát là:
$y^3x^2 + 2y^2\cot(x) = C$.

3.2.9 Phần đọc thêm: Ứng dụng vào mô hình thú – mồi

Chúng ta trở lại mô hình thú – mồi được giới thiệu trong phần dẫn nhập. Ta lấy các hệ số cụ thể $a = 1; \alpha = 0.5; c = 0.75; \gamma = 0.25$. Khi đó hệ phương trình (3.1) trở thành:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= u - 0.5uv, \\ \frac{dv}{dt} &= -0.75v + 0.25uv. \end{cases} \tag{3.13}$$

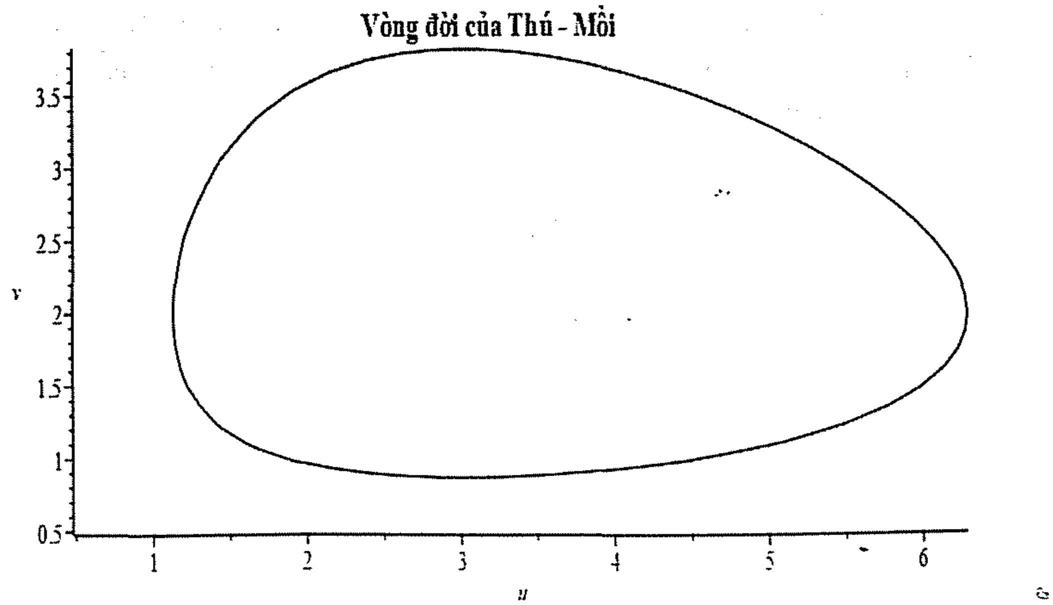
Chia phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất, ta có

$$\frac{dv}{du} = \frac{-0.75v + 0.25uv}{u - 0.5uv} \Leftrightarrow \frac{(1 - 0.5v)dv}{v} = \frac{(-0.75 + 0.25u)du}{u}.$$

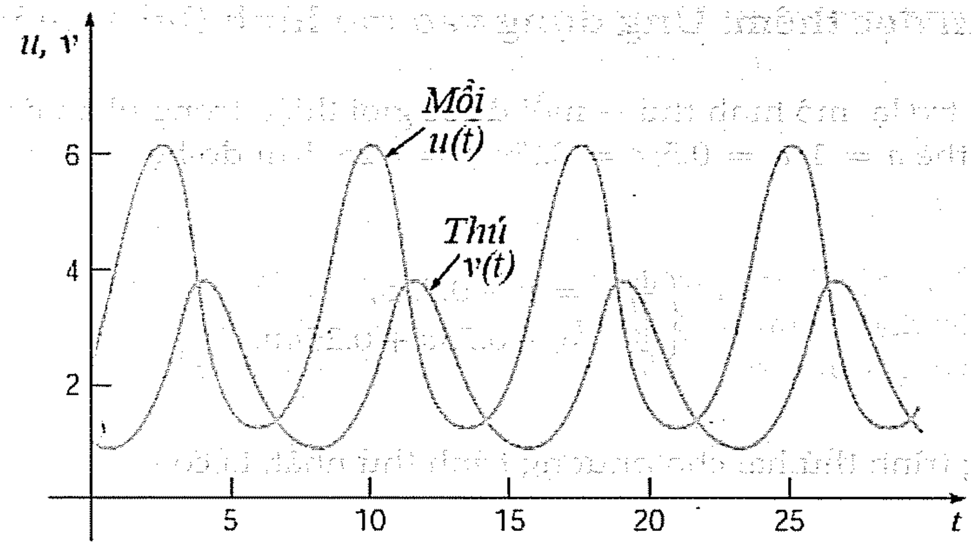
Đây là phương trình biến số phân ly. Lấy nguyên hàm hai vế (lưu ý là u, v đều dương) ta được nghiệm tổng quát:

$$0.75 \ln u + \ln v - 0.5v - 0.25u = C.$$

Để mô tả ý nghĩa của nghiệm, ta có thể vẽ đồ thị của hàm ẩn (chẳng hạn bằng phần mềm Maple với dòng lệnh:
> with(plots, implicitplot)
> implicitplot(0.75*ln(u) + ln(v) − 0.5*v − 0.25*u = −0.5, u = 0.15 .. 16, v = 0.15 .. 28))
để nhận được đồ thị:



Chúng ta cũng có thể giải bằng phương pháp xấp xỉ cho hệ phương trình này, và được nghiệm mô tả trong hình sau:



Hình ảnh này mô tả quá trình tăng trưởng và suy thoái theo chu trình của quần thể thú v và mồi u. Khi quần thể thú còn ít, thì số lượng con mồi tăng trưởng trở thành nguồn thức ăn dồi dào cho thú, nhờ đó, quần thể thú cũng phát triển theo. Nhưng khi quần thể thú quá lớn đến độ nhất định thì việc săn mồi quá nhiều làm cho số lượng mồi bắt đầu giảm, và khi số lượng mồi giảm đến độ không đủ nguồn thức ăn cho thú phát triển thì số lượng thú cũng giảm theo. Đến lúc số lượng thú không còn đủ để cản trở sự phát triển của mồi thì số lượng mồi bắt đầu tăng và một chu kỳ mới lại được bắt đầu.

Các biến thiên dân số quần thể theo chu kỳ của động vật ăn thịt và con mồi theo dự đoán của hệ (3.1) đã được quan sát thấy trong tự nhiên. Một ví dụ nổi bật được mô tả bởi Odum: Dựa trên hồ sơ của Công ty Vịnh Hudson của Canada, các dân số quần thể linh miêu và thỏ rừng snowshoe được biểu thị bằng số lượng cá thể được quan sát trong giai đoạn 1845 − 1935 cho thấy sự thay đổi định kỳ rõ rệt với khoảng thời gian từ 9 đến 10 năm. Các đỉnh điểm của sự phát triển quần thể thỏ được tiếp theo sau bởi sự suy giảm rất nhanh, và các đỉnh của sự phát triển của linh miêu và thỏ rừng bị lệch pha, với tỷ lệ của thỏ rừng có số lượng quần thể lên đỉnh trước linh miêu một năm hoặc hơn.

§3. BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3.1. Giải các phương trình vi phân:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^4}{3(1+y^3)\cos^2 x}$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\cos x}{(1+2y^3)}$

Bài tập 3.2. Giải phương trình:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3xy+y^2}{3x^2}$

Bài tập 3.3. Giải các phương trình

a) $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ b) $xy' - 3y = x^4\cos x$

Bài tập 3.4. Cho $y = y(x)$ là nghiệm bài toán Cauchy $xy' + (x+1)y = 2xe^{-x}$; $y(1) = a$, với $x > 0$, và a là tham số. Tìm giá trị của a để $\lim_{x \to 0} y(x) = 0$.

Bài tập 3.5. Tìm giá trị của y_0 để nghiệm y của bài toán Cauchy $y' - y = 1 + 3\sin x$; $y(0) = y_0$, luôn bị chặn (tức là không tiến đến $\pm\infty$) khi $x \to \infty$.

Bài tập 3.6. Giải các phương trình vi phân

a) $xy' + y^2 + 2y = 0$ b) $y' + \frac{1}{x}y = 3x^2y^3$

Bài tập 3.7. Giải phương trình vi phân

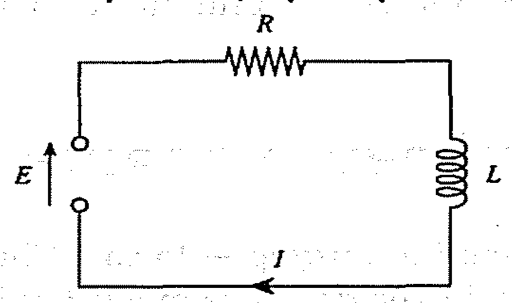
a) $(e^y + 1)dx + (xe^y + 1)dy = 0$ b) $(3x^2y + 3\sin y)dx + (x^3 + 3x\cos y)dy$

Bài tập 3.8. Tìm thừa số tích phân của phương trình vi phân sau, sau đó giải phương trình:

a) $(3xy + 4\cos(y))dx + (x^2 - 2x\sin(y))dy = 0$

b) $(y^2 - 2y\sin(x))dx + (3xy + 4\cos(x))dy = 0$

Bài tập 3.9. Cho mạch RL biết điện trở R, hệ số tự cảm L, nguồn $E = E(t)$.



Tính cường độ dòng điện $I = I(t)$ trong các trường hợp sau:

a) Nguồn điện là hằng $E(t) = E_0$ với mọi $t \geq 0$.

b) Nguồn điện là tuần hoàn, chẳng hạn $E(t) = E_0 \sin \omega t$.

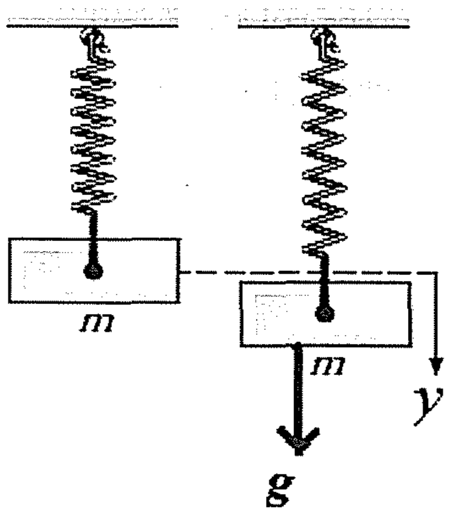
CHƯƠNG 4

Phương trình vi phân cấp hai

Trong chương này, chúng ta sẽ trình bày về phương trình vi phân cấp hai và hệ phương trình vi phân cấp một. Các khái niệm chung và phương pháp giải cho một số dạng phương trình cũng như cho hệ phương trình sẽ được đề cập một cách chi tiết.

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Ví dụ 4.1 (Mô hình dao động khối lượng — lò xo). Chúng ta xét mô hình dao động trong Vật lý như sau: Xét sự chuyển động của một vật có khối lượng m gắn vào một lò xo như hình vẽ bên dưới. Gọi y là sự thay đổi vị trí của vật so với vị trí cân bằng. Như



chúng ta đã biết, theo Định luật hai của Newton (xem phần phương trình vi phân cấp một) ta có: $\vec{F}_{\text{tổng}} = m\vec{a}$, trong đó gia tốc $\vec{a} = y''$ và tổng lực $\vec{F}_{\text{tổng}} = -\gamma y' - ky + g(t)$ với số hạng $\gamma y'$ thể hiện cho lực giảm xóc ($\gamma > 0$ là hằng số giảm), số hạng ky diễn tả lực đàn hồi ($k > 0$ là hằng số co dãn của lò xo) và $g(t)$ là ngoại lực tác động vào vật. Như vậy, ta có thể viết lại phương trình mô tả cho hệ khối lượng — lò xo như sau:

$$my'' + \gamma y' + ky = g(t).$$

Đó là một phương trình vi phân cấp hai bởi vì cấp cao nhất của đạo hàm của hàm cần tìm trong phương trình là cấp hai.

Định nghĩa 4.2. *Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng*

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{hoặc} \quad y'' = f(x, y, y').$$

Định nghĩa 4.3. *Bài toán Cauchy (hay bài toán giá trị ban đầu) đối với PTVP cấp 2 có dạng*

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{thỏa mãn} \quad y(x_0) = y_0 \text{ và } y'(x_0) = y'_0.$$

Điều kiện $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$ được gọi là điều kiện ban đầu.

Định lý 4.4 (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm). *Cho PTVP cấp 2 sau:*

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4.1}$$

Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:

- $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ *và* $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *liên tục trên miền* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$.
- $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$.

Khi đó: Trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (4.1) *sao cho $y_0 = y(x_0)$ và $y'_0 = y'(x_0)$.*

Định nghĩa 4.5 (Các cách gọi nghiệm của bài toán).

- *Nghiệm tổng quát là hàm số có dạng $y = g(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ, thỏa mãn:*
  i) *$y = g(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình* (4.1) *với mọi C_1 và C_2.*
  ii) *Với mọi $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$, tồn tại $C_1 = C_1^0$ và $C_2 = C_2^0$ sao cho $g(x_0, C_1, C_2) = y_0$ và $g'(x_0, C_1, C_2) = y'_0$.*
- *Nghiệm riêng là một nghiệm cụ thể bất kỳ nào đó của phương trình* (4.1).
- *Nghiệm kỳ dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát.*

Chú ý 4.6.

- Nghiệm tổng quát đôi khi được viết dưới dạng $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, ta gọi là dạng ẩn của nghiệm. Nghiệm tổng quát được viết dạng này còn được gọi là tích phân tổng quát của nghiệm.
- Đôi khi ta có thể tham số hóa nghiệm dưới dạng $\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2) \\ y = y(t, C_1, C_2). \end{cases}$ Nghiệm tổng quát được viết dạng này được gọi là dạng tham số của nghiệm.

- Tất cả các cách gọi nghiệm trên đều có thể được gọi chung là nghiệm của PTVP cấp 2. Tóm lại: Nghiệm tổng quát của PTVP cấp 2 có thể viết bởi một trong ba dạng sau:

$$\left[\begin{array}{l} \text{1. Dạng tường minh } y = g(x, C_1, C_2) \\ \text{2. Dạng ẩn } \Phi(x, y, C_1, C_2) = 0 \\ \text{3. Dạng tham số } \begin{cases} x = x(t, C_1, C_2) \\ y = y(t, C_1, C_2) \end{cases} \end{array}\right.$$

§2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH KHUYẾT

4.2.1 Phương trình khuyết y : $F(x, y', y'') = 0$

Cách giải:

- Đặt $u = y'$, ta đưa về PTVP cấp 1 dạng $F(x, u, u') = 0$.
- Giả sử phương trình trên có nghiệm tổng quát $u = f(x, C)$.
- Giải PTVP cấp 1 dạng $y' = f(x, C)$.

Ví dụ 4.7. Giải PTVP sau: $2xy'' - 6y' + x^2 = 0$ với $y(1) = 0, y'(1) = 1$.

Giải: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow y'' - \frac{3}{x}y' = -\frac{x}{2}$. (1)

Đặt $u = y'$, ta có: $u' - \frac{3}{x}u = -\frac{x}{2}$ (2) $\Rightarrow$ Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (2) là

$$\begin{aligned} u &= Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}. \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \\ &= Ke^{3\ln|x|} - e^{3\ln|x|} \int \frac{x}{2}e^{-3\ln|x|}dx = Kx^3 - x^3 \int \frac{x}{2}x^{-3}dx \\ &= Kx^3 - \frac{1}{2}x^2, \text{ do điều kiện ban đầu nên coi } x > 0. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $y'(1) = 1 \Rightarrow u(1) = 1 \Rightarrow K = \frac{3}{2}$. Ta có:

$$y' = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = \int \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + C.$$

Vì điều kiện ban đầu $y(1) = 0$ nên $C = -\frac{5}{24}$.

Kết luận: Nghiệm là $y = \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}$.

4.2.2 Phương trình khuyết y và y' : $F(x,y'')=0$

Cách giải: Nếu từ $F(x,y'')=0$ ta rút ra được $y''=g(x)$, thì ta chỉ cần lấy tích phân 2 lần sẽ có nghiệm tổng quát $y=G(x,C_1,C_2)$ với C_1, C_2 là các hằng số. Nếu từ $F(x,y'')=0$ ta rút ra được $x=f(y'')$, thì ta sẽ tham số hóa nghiệm như sau:

- Đặt $t=y''$, ta có $x=f(t)$.
- Để tìm y', ta biến đổi $dy'=y''dx=tf'(t)dt$. Lấy nguyên hàm 2 vế, ta tính được $y'=f_1(t,C_1)$ với C_1 là hằng số.
- Để tìm y, ta biến đổi $dy=y'dx=f_1(t,C_1)f'(t)dt$. Lấy nguyên hàm 2 vế, ta tính được $y=f_2(t,C_1,C_2)$ với C_2 là hằng số.

Ví dụ 4.8. Giải PTVP sau: $x=(y'')^2+y''+1$.

Giải: Đặt $t=y''$, từ phương trình đã cho ta có $x=t^2+t+1$.
Ta thấy: $dy'=y''dx=t(2t+1)dt=(2t^2+t)dt$. Nguyên hàm 2 vế ta có:

$$y'=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+C_1.$$

Sử dụng công thức $dy=y'dx=t(2t+1)dt=\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+C_1\right)(2t+1)dt$

$$=\left(\frac{4}{3}t^4+\frac{5}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2C_1t+C_1\right)dt$$

và lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $y=\frac{4}{15}t^5+\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{6}t^3+C_1t^2+C_1t+C_2$.
Kết luận: Nghiệm của phương trình là

$$x=t^2+t+1,\quad y=\frac{4}{15}t^5+\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{6}t^3+C_1t^2+C_1t+C_2.$$

4.2.3 Phương trình khuyết x : $F(y,y',y'')=0$

Cách giải:

- Đặt $u=y'$, ta có $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$.

  Thay vào phương trình đã cho ta có PTVP cấp 1: $F\left(y,u,u\frac{du}{dy}\right)=0$.
- Giả sử phương trình trên có nghiệm tổng quát: $u=f(y,C)$.
- Giải PTVP cấp 1: $y'=f(y,C)$.

Ví dụ 4.9. Giải phương trình vi phân sau: $yy''=y'^2-y'^3$.

Giải: Đặt $u = y'$, ta có $y'' = u\dfrac{du}{dy}$, thay vào phương trình đã cho ta có:

$$yu\frac{du}{dy} = u^2 - u^3. \quad (*)$$

Ta thấy: $u = 0$, tức là $y = C_1$ là 1 nghiệm của phương trình $(*)$. Với $u \neq 0$, ta có:
Phương trình $(*) \Leftrightarrow y\dfrac{du}{dy} = u - u^2 \Leftrightarrow \dfrac{du}{u - u^2} = \dfrac{dy}{y}$ với $u \neq 1$.
Tích phân hai vế ta có:

$$-\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|y| + \ln|C_2| \Leftrightarrow \left|\frac{u-1}{u}\right| = \frac{1}{|C_2 y|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u-1}{u} = \frac{C_3}{y} \Rightarrow u = \frac{y}{y - C_3}.$$

Khi đó: $y' = \dfrac{y}{y - C_3} \Leftrightarrow \dfrac{y - C_3}{y}dy = dx$

$$\Leftrightarrow x = \int \left(1 - \frac{C_3}{y}\right)dy = y - C_3\ln|y| + C_4.$$

Ta thấy: $u = 1$, tức là $y = x + C$ là nghiệm của phương trình đã cho.
Kết luận: Nghiệm là $y = C_1$, $y = x + C$ và $x = y - C_3\ln|y| + C_4$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

4.3.1 Phương trình thuần nhất

Định nghĩa 4.10. *Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là phương trình có dạng*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.2}$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm số cho trước.

Định lý 4.11. *Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của phương trình* (4.2), *thì $C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của phương trình* (4.2) *với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Ta có: $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ và $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$ nên

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0,$$

tức là ta có điều phải chứng minh. ∎

Định nghĩa 4.12. *Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên $[a, b]$ nếu $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ hằng số $\forall\, x \in [a, b]$. Ngược lại, ta nói hai hàm đó là phụ thuộc tuyến tính.*

Ví dụ 4.13. a) Hai hàm số e^x và e^{2x} là độc lập tuyến tính.

b) Hai hàm số $\tan x$ và $2\tan x$ là phụ thuộc tuyến tính.

Định nghĩa 4.14. *Định thức Wronsky của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Định lý 4.15. *Nếu y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính trên $[a,b]$ thì*

$$W(y_1, y_2) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Chứng minh. Vì y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính nên $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = C$ là hằng số $\Rightarrow y_2 = Cy_1 \Rightarrow y_2' = Cy_1' \Rightarrow y_1y_2' = y_1'y_2 \Rightarrow$ ta có điều phải chứng minh. ■

Chú ý 4.16. Nếu tồn tại $x_0 \in [a,b]$ mà $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0$, thì hai hàm đó là độc lập tuyến tính.

Định lý 4.17. *Cho $p(x)$ và $q(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của phương trình* (4.2) *thỏa mãn $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0 \in [a,b]$, thì*

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Chứng minh. Ta có: $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ và $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$ nên

$$y_1''y_2 + p(x)y_1'y_2 + q(x)y_1y_2 = 0 \quad \text{và} \quad y_1y_2'' + p(x)y_1y_2' + q(x)y_1y_2 = 0,$$

tức là

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \qquad (*)$$

Vì $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ nên $W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$.
Phương trình $(*)$ trở thành:

$$\frac{dW}{dx} = -p(x)W \Leftrightarrow \frac{dW}{W} = -p(x)dx \Leftrightarrow \frac{W(x)}{W(x_0)} = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx},$$

do giả thiết $W(x_0) \neq 0$. Khi đó:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \neq 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Định lý 4.18. *Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình* (4.2), *thì*

- $W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$,
- *nghiệm tổng quát của phương trình* (4.2) *có dạng*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad \text{với mọi hằng số } C_1, C_2.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh công thức nghiệm tổng quát ở trên. Thật vậy: Theo Định lý 4.11, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ luôn là nghiệm của (4.2). Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh với mọi điều kiện ban đầu cho trước $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$, ta có thể tìm được các hằng số C_1 và C_2 để nghiệm $y = C_1y_1 + C_2y_2$ thỏa mãn điều kiện này. Ta có:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y(x_0) = y_0 \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) = y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \qquad (*)$$

Có thể coi $(*)$ là hệ phương trình bậc nhất với ẩn (C_1, C_2), ta thấy định thức của hệ này là

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

và bằng giá trị của định thức $W(y_1, y_2)$ tại x_0. Vì y_1 và y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính, nên định thức $W(y_1, y_2)$ tại x_0 là khác không, tức là $D \neq 0$. Do đó, hệ $(*)$ luôn có nghiệm duy nhất $(C_1, C_2) \Rightarrow$ điều phải chứng minh. ∎

Chú ý 4.19. Muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4.2), ta chỉ cần xác định được hai nghiệm độc lập tuyến tính của nó. Cách tìm như sau:

- **Bước 1:** Nhẩm 1 nghiệm $y_1 \neq 0$ thỏa mãn phương trình (4.2).
- **Bước 2:** Xác định nghiệm y_2 bằng cách đặt $y_2 = y_1.u$. Thay vào phương trình (4.2) ta tính được

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx. \quad \text{(Công thức Liouville)}$$

Tuy nhiên, không có công thức tổng quát nào cho hai nghiệm độc lập tuyến tính của PTVP tuyến tính thuần nhất cấp hai, tức là nói chung không giải được PTVP tuyến tính cấp hai trong trường hợp tổng quát. Điều này khác hẳn với PTVP tuyến tính cấp một.

Ví dụ 4.20. Giải PTVP sau: $x^2y'' + xy' - y = 0$.

Giải: Phương trình $\Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \quad (*)$.
Ta thấy: $y_1 = x$ là nghiệm của phương trình $(*)$. Đặt $y_2 = y_1.u = u.x$, theo công thức Liouville ta có:

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \frac{1}{x^2|x|} dx = -\frac{1}{2x^2},$$

do ta có thể coi $x > 0$. Khi đó: $y_2 = -\frac{1}{2x}$.
Kết luận: Nghiệm tổng quát là $y = C_1x - \frac{C_2}{2x} = C_1x + \frac{C_3}{x}$.

4.3.2 Phương trình không thuần nhất

Định nghĩa 4.21. *PTVP tuyến tính cấp 2 là phương trình có dạng*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{4.3}$$

trong đó $p(x), q(x)$ và $f(x)$ là các hàm số cho trước.

Định lý 4.22. *Nghiệm tổng quát của phương trình* (4.3) *luôn có dạng $y = \bar{y} + Y$, trong đó $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình* (4.2) *và Y là 1 nghiệm riêng của phương trình* (4.3).

Chú ý 4.23. Nghiệm $\bar{y}$ đã được xác định ở phần trước, nên để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4.3) ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng Y của phương trình (4.3) là đủ.

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange: Để tìm 1 nghiệm riêng Y của phương trình (4.3) ta làm như sau:

- **Bước 1:** Xác định nghiệm tổng quát của phương trình (4.2) có dạng $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$.

- **Bước 2:** Coi $C_1 = C_1(x)$ và $C_2 = C_2(x)$ là các hàm số để tìm 1 nghiệm riêng Y của phương trình (4.3) có dạng $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Ta có:

  $$Y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'.$$

  Ta chọn $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$ sao cho

  $$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0. \qquad (1)$$

  Khi đó: $Y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$
  và $\quad Y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''$.
  Thay vào phương trình (4.3) ta có:

  $$\begin{aligned} C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \\ \Leftrightarrow C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \qquad (2) \end{aligned}$$

  do y_1, y_2 là 2 nghiệm của phương trình (4.2) nên

  $$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \text{và} \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

  Tóm lại: Từ (1) và (2), ta tìm $C_1(x)$ và $C_2(x)$ bằng cách xét hệ phương trình sau:

  $$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

- **Bước 3:** Giải hệ phương trình trên tìm $C_1'(x)$ và $C_2'(x) \Rightarrow C_1(x)$ và $C_2(x)$.

Ví dụ 4.24. Giải PTVP sau: $x^2y'' + xy' - y = x^2$.

Giải: Phương trình $\Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 1$. Xét phương trình thuần nhất

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0. \quad (1)$$

Theo Ví dụ 4.20, ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (1) là $\bar{y} = C_1x + \frac{C_2}{x}$. Ta tìm 1 nghiệm riêng Y của phương trình đã cho có dạng $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ bằng cách xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)\frac{1}{x} = 0 \\ C_1'(x) - C_2'(x)\frac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{2} \\ C_2'(x) = -\frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \frac{x}{2} \\ C_2(x) = -\frac{x^3}{6}. \end{cases}$$

Kết luận: $Y = \frac{x^2}{3} \Rightarrow$ Nghiệm tổng quát là $y = \frac{x^2}{3} + C_1x + \frac{C_2}{x}$.

Định lý 4.25 (Nguyên lý chồng nghiệm). *Nếu Y_1 là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

và Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x),$$

thì $Y_1 + Y_2$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

§4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI CÓ HỆ SỐ HẰNG

4.4.1 Phương trình thuần nhất

Định nghĩa 4.26. *Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất có hệ số hằng là phương trình có dạng*

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4.4}$$

trong đó p và q là các hằng số.

Chú ý 4.27. Muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4.4), ta chỉ cần xác định được hai nghiệm độc lập tuyến tính của nó. Để làm điều đó, ta sẽ tìm nghiệm riêng dưới dạng $y = e^{\lambda x}$, trong đó λ là một hằng số cần tìm. Ta có $y' = \lambda e^{\lambda x}$ và $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Thay vào phương trình (4.4) ta được:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (\text{do } e^{\lambda x} \neq 0).$$

Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (4.4).

Tóm lại, ta xét phương trình đặc trưng sau:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{4.5}$$

- **Trường hợp 1:** Nếu phương trình (4.5) có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, thì nghiệm tổng quát của phương trình (4.4) là
$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$
- **Trường hợp 2:** Nếu phương trình (4.5) có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, thì nghiệm tổng quát của phương trình (4.4) là
$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}.$$
- **Trường hợp 3:** Nếu phương trình (4.5) có 2 nghiệm phức $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, thì nghiệm tổng quát của phương trình (4.4) là
$$\bar{y} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Ví dụ 4.28. Giải các PTVP sau:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ b) $4y'' + 4y' + y = 0$ c) $y'' + y' + 3y = 0$

Giải:

a) Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Vì phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -2$, nên nghiệm tổng quát của phương trình là
$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

b) Xét phương trình đặc trưng $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$. Vì phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, nên nghiệm tổng quát của phương trình là
$$\bar{y} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

c) Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$. Vì phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phức $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{11}i$, nên nghiệm tổng quát của phương trình là
$$\bar{y} = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{11}x + C_2 \sin\sqrt{11}x\right).$$

4.4.2 Phương trình không thuần nhất

Định nghĩa 4.29. *PTVP tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi là phương trình có dạng*

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{4.6}$$

trong đó p, q là các hằng số và $f(x)$ là hàm số cho trước.

Chú ý 4.30 (Cần nhớ). Nghiệm tổng quát của phương trình (4.6) luôn có dạng $y = \bar{y} + Y$, trong đó $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.4) và Y là 1 nghiệm riêng của phương trình (4.6). Nghiệm $\bar{y}$ đã được xác định ở phần trước, nên để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4.6) ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) là đủ. Để làm được điều này, ta áp dụng **phương pháp đồng nhất hệ số.**

Tùy thuộc vào hàm vế phải $f(x)$, chúng ta sẽ xác định 1 nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) như sau:

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ và $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

- **Trường hợp 1:** Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (4.5), thì nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) có dạng

$$Y = e^{\alpha x} Q_n(x) \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

- **Trường hợp 2:** Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (4.5), thì nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) có dạng

$$Y = xe^{\alpha x} Q_n(x) \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

- **Trường hợp 3:** Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (4.5), thì nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) có dạng

$$Y = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x) \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

Ví dụ 4.31. Giải PTVP sau: $y'' + 4y' + 3y = (x+2)e^{-x}$.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \qquad (*)$.
Vì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -3$, nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Ta thấy: $f(x) = (x+2)e^{-x}$ mà -1 là nghiệm đơn của phương trình $(*)$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình đã cho có dạng

$$Y = xe^{-x}(Ax + B) = e^{-x}(Ax^2 + Bx).$$

Ta có:

$$Y' = e^{-x}(-Ax^2 - Bx) + e^{-x}(2Ax + B) = e^{-x}\big(-Ax^2 + (2A - B)x + B\big).$$
$$Y'' = e^{-x}\big(Ax^2 - (4A - B)x + 2A - 2B\big).$$

Thay vào phương trình đã cho:
$$e^{-x}\big(Ax^2 - (4A - B)x + 2A - 2B\big) + 4e^{-x}\big(-Ax^2 + (2A - B)x + B\big)$$
$$+3e^{-x}(Ax^2 + Bx) = (x+2)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 4Ax + (2A + 2B) = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x\right)e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}.$$

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là đa thức bậc m, n.

- **Trường hợp 1:** Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (4.5), thì nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) có dạng

$$Y = e^{\alpha x}(Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x),$$

  với $Q_\ell(x), R_\ell(x)$ là hai đa thức bậc $\ell = \max\{m, n\}$.
- **Trường hợp 2:** Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (4.5), thì nghiệm riêng Y của phương trình (4.6) có dạng

$$Y = xe^{\alpha x}(Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x),$$

  với $Q_\ell(x), R_\ell(x)$ là hai đa thức bậc $\ell = \max\{m, n\}$.

Chú ý 4.32 (Cách 2). Đối với $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x)$, ta có thể khử nhân tử $e^{\alpha x}$ hai vế của phương trình (4.6) để đưa phương trình này về dạng đơn giản hơn bằng cách đặt

$$y = e^{\alpha x}u.$$

Ví dụ 4.33. Giải phương trình vi phân sau: $y'' - 3y' + 2y = (x+1)\cos x$.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (*)$.
Vì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$, nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Ta thấy: $f(x) = (x+1)\cos x = e^{0.x}((x+1).\cos x + 0.\sin x)$ mà $0 \pm i$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình đã cho có dạng

$$Y = e^{0.x}((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x) = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x.$$

Ta có: $Y' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x.$

$Y'' = (-Ax - B + 2C)\cos x - (Cx + 2A + D)\sin x.$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$((A-3C)x-3A+B+2C-3D)\cos x$$
$$+((3A+C)x-2A+3B-3C+D)\sin x=(x+1)\cos x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A-3C=1\\ -3A+B+2C-3D=1\\ 3A+C=0\\ -2A+3B-3C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{10}, B=-\dfrac{1}{50}\\ C=\dfrac{-3}{10}, D=-\dfrac{16}{25}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=\left(\frac{1}{10}x-\frac{1}{50}\right)\cos x-\left(\frac{3}{10}x+\frac{16}{25}\right)\sin x+C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

4.4.3 Phương trình Euler

Định nghĩa 4.34. *Phương trình Euler là phương trình có dạng*

$$x^2y''+axy'+by=0 \quad \text{với } a,b\in\mathbb{R}. \tag{4.7}$$

1. **Cách giải:** Đặt $t=\ln|x|$, tức là $|x|=e^t$, ta có:

$$y'=y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}.y'_t$$
$$y''=y''_x=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.y'_t\right)=-\frac{1}{x^2}.y'_t+\frac{1}{x}.\frac{dy'_t}{dx}$$
$$=-\frac{1}{x^2}.y'_t+\frac{1}{x}.\frac{dy'_t}{dt}.\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}.y'_t+\frac{1}{x^2}.y''_t.$$

Thay vào phương trình đã cho ta có:

$$-y'_t+y''_t+ay'_t+by=0\Leftrightarrow y''_t+(a-1)y'_t+by=0.$$

2. **Ví dụ 4.35.** Giải PTVP sau: $x^2y''-9xy'+21y=0.$

Giải: Đặt $t=\ln|x|$, áp dụng công thức ở trên và thay vào phương trình đã cho ta có:

$$y''_t-10y'_t+21y=0. \quad (*)$$

Xét phương trình đặc trưng của phương trình $(*)$ là $\lambda^2-10\lambda+21=0$. Vì phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1=3$ và $\lambda_2=7$, nên nghiệm tổng quát của phương trình $(*)$ là:

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^{7t}.$$

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=C_1e^{3\ln|x|}+C_2e^{7\ln|x|}=C_1|x|^3+C_2|x|^7=K_1x^3+K_2x^7.$$

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.5.1 Đại cương về hệ phương trình vi phân cấp một

Định nghĩa 4.36. *Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một là hệ phương trình có dạng*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \end{cases} \tag{4.8}$$

trong đó $f_1, f_2, \cdots, f_n$ là các hàm $n+1$ biến.

Ví dụ 4.37. $\begin{cases} y_1' = x + 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = -x - 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$ là một hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một.

Định lý 4.38 (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm). *Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:*

- *Các hàm $f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ và $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ liên tục trên miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,*
- *$(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in \mathcal{D}$.*

Khi đó: Trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất một nghiệm $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ của hệ phương trình (4.8) sao cho $y_i^0 = y_i(x_0)$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

Định nghĩa 4.39 (Các cách gọi nghiệm của bài toán). *Cho hệ phương trình (4.8). Khi đó:*

- *Nghiệm tổng quát: Ta nói một bộ n hàm số $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, trong đó $y_i = g_i(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ với $i = \overline{1, n}$ và $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của hệ phương trình (4.8)) nếu:*
  - i) *$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ thỏa mãn HPT (4.8) với mọi $C_1, C_2, \cdots, C_n$.*
  - ii) *Với mọi $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in \mathcal{D}$, tồn tại $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ và $C_n = C_n^0$ sao cho $g_i(x_0, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0) = y_i^0$ với mọi $i = \overline{1, n}$.*
- *Nghiệm riêng là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho các hằng số $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các giá trị cụ thể.*

Chú ý 4.40 (Đưa PTVP cấp cao về hệ PTVP chuẩn tắc cấp một và ngược lại). Xét PTVP cấp n: $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)})$.

Đặt $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_{n-1} = y^{(n-2)}, y_n = y^{(n-1)}$, phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \longrightarrow \text{Hệ PTVP chuẩn tắc cấp một}$$

Ngược lại, một hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 luôn đưa được về PTVP cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các phương trình của hệ (Phương pháp khử).

4.5.2 Phương pháp khử giải hệ phương trình vi phân cấp một

Cách giải: Từ $(n-1)$ phương trình của hệ, ta rút $(n-1)$ hàm số theo 1 hàm số và thay vào phương trình còn lại của hệ. Giải phương trình thu được, từ đó xác định được nghiệm tổng quát của hệ phương trình.

Ví dụ 4.41. Giải hệ phương trình vi phân sau: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Giải: Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + y & (1) \\ y' = 3x + 4y & (2). \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $y = x' - 2x$, thay vào phương trình (2) ta được:

$$(x' - 2x)' = 3x + 4(x' - 2x) \Leftrightarrow x'' - 6x' + 5x = 0. \quad (*)$$

Phương trình đặc trưng của phương trình $(*)$ là $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Vì phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 5$, nên nghiệm tổng quát của phương trình $(*)$ là

$$x = C_1e^t + C_2e^{5t}.$$

Khi đó: $y = x' - 2x = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2C_1e^t - 2C_2e^{5t} = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

Kết luận: Nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$

§6. BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài tập 4.1. Giải các PTVP sau:

1) $y'' = x + \sin x$
2) $xy'' = x^2 - x$ với $y(0) = 0$
3) $y'' = y' + x$
4) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$
5) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$
6) $2xy'y'' = y'^2 - 1$
7) $y'' + y' = xy''$
8) $y''^3 + xy'' = 2y'$
9) $2y'(y'' + 2) = xy''^2$
10) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$
11) $y'(1 + y'^2) = y''$
12) $2yy'' = y^2 + y'^2$

Bài tập 4.2. Giải các PTVP sau:

1) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$
2) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$
3) $y'' - 2(1 + \tan^2 x)y = 0$
4) $(x^2 + 2x)y'' - 2(1 + x)y' + 2y = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = x + 1$
5) $(x - 1)^2y'' + 4(x - 1)y' + 2y = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = \dfrac{1}{1 - x}$
6) $xy'' - y' + 4x^3y = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = \sin(x^2)$
7) $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3}e^x$
8) $y'' \tan x + y'(\tan^2 x - 2) + 2y\cot x = 0$
9) $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$
10) $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = e^x$ bằng cách đặt $y = \dfrac{u}{x^2}$
11) $xy'' + 2y' + xy = x$ bằng cách đặt $y = \dfrac{u}{x}$
12) $y'' + y = \cos x + \tan x$

Bài tập 4.3. Giải các PTVP sau:

1) $y'' + 3y' - 4y = x$
2) $y'' - 2y' + y = 2xe^x$
3) $y'' + 4y' + 3y = 6\cos 2x - 17\sin 2x$
4) $y'' + y = 2x\cos x\cos 2x$
5) $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^{3x}$
6) $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x} + e^{-4x}$
7) $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$
8) $y'' + y = \sin x + xe^{-x}$
9) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2e^x \cos \dfrac{x}{2}$
10) $y'' + 2y' + y = 4xe^x + \dfrac{e^{-x}}{x}$
11) $y'' + y = 3xe^x - \cot^2 x$
12) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\sin x}$

Bài tập 4.4. Giải các PTVP sau:

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
2) $x^2y'' + xy' + y = x$
3) $x^2y'' - xy' - 3y = 10\sin(\ln x),\ x > 0$
4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2$
5) $4x^2y'' + 2xy' + y = 2x$
6) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^2\ln x,\ x > 0$

Bài tập 4.5. Giải các hệ PTVP sau:

1) $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = y + 5z \\ z' = -y - 3z \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

6) $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$