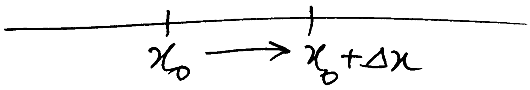
Đạo hàm theo hướng

1 chiều: $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



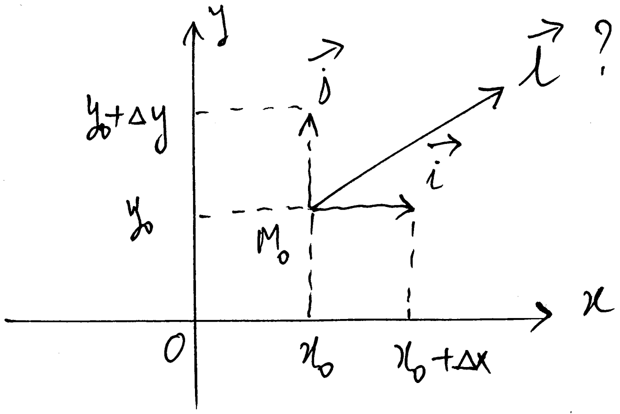
2 chiều: $z = f(x,y)$; $M_0 = (x_0, y_0)$; $\vec{i} = (1,0)$
$\vec{j} = (0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(M_0 + \Delta x . \vec{i}) - f(M_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(M_0 + \Delta y . \vec{j}) - f(M_0)}{\Delta y}$$



Cho hàm $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$
$\vec{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$

Nếu giới hạn $\lim_{t \to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0)}{t}$ tồn tại hữu hạn

thì ta nói nó là đạo hàm của hàm f tại M_0 theo hướng $\vec{l}$, ký hiệu $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0)}{t}$$

Đặc biệt $\vec{l} = e_i$ $\qquad e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow i}{1}, 0, \dots, 0)$ là véctơ thứ i của hệ cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ trong $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial e_i}(M_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(M_0 + te_i) - f(M_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)$$

$i = 1, \dots, n$

<u>Cách tính</u>: Xét $g(t) = f(M_0 + t\vec{l})$

$$= f(\underbrace{x_1^0 + tl_1}_{x_1}, \dots, \underbrace{x_n^0 + tl_n}_{x_n})$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0 + t\vec{l}) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0 + t\vec{l}) \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

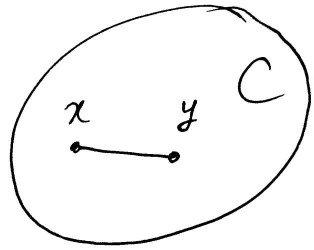
$$= l_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0 + t\vec{l}) + \dots + l_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0 + t\vec{l})$$

$$g'(0) = l_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \dots + l_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0).$$

$$= \langle \nabla f(M_0), \vec{l} \rangle.$$

§2. Tập lồi, hàm lồi

1. Tập lồi: Cho $C \subset \mathbb{R}^n$

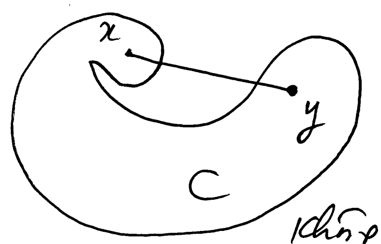


lồi

với $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in [0,1]$

Đoạn thẳng nối x, y được xác định là tập

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\alpha)x + \alpha y,\ \alpha \in [0,1]\}$$



không lồi

$n=1$:

$[x,y] = \{z \in \mathbb{R} : z = (1-\alpha)x + \alpha y,\ \alpha \in [0,1]\}$ là đoạn thẳng thông thường trong $\mathbb{R}$. Thật vậy

với $\alpha = 0$: $z = x$

$\alpha = 1$: $z = y$

$0 < \alpha < 1$: $z = x + \alpha(y-x) > x$ (vì $y > x$)

$z = y - (1-\alpha)(y-x) < y$

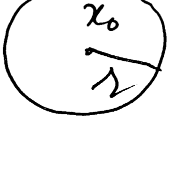
Như vậy khi α biến thiên trong $(0,1)$ thì z biến thiên trong (x,y).

Ta nói tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi nếu $\forall x, y \in C$

$$[x,y] \subset C.$$

Như vậy $\mathbb{R}^n$ là 1 tập lồi hiển nhiên. Ta quy ước $\emptyset$ là tập lồi.

Ví dụ: CMR quả cầu đóng $B[x_0, r]$ trong $\mathbb{R}^n$ là 1 tập lồi



$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

lấy $x, y \in B[x_0, r]$, $\alpha \in [0,1]$ ta có:

$$
\begin{aligned}
\|(1-\alpha)x + \alpha y - x_0\| &= \|(1-\alpha)(x-x_0) + \alpha(y-x_0)\| \\
&\le (1-\alpha)\|x-x_0\| + \alpha\|y-x_0\| \\
&\le (1-\alpha)r + \alpha r = r
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (1-\alpha)x + \alpha y \in B[x_0, r] \Rightarrow B[x_0, r]$ là tập lồi.

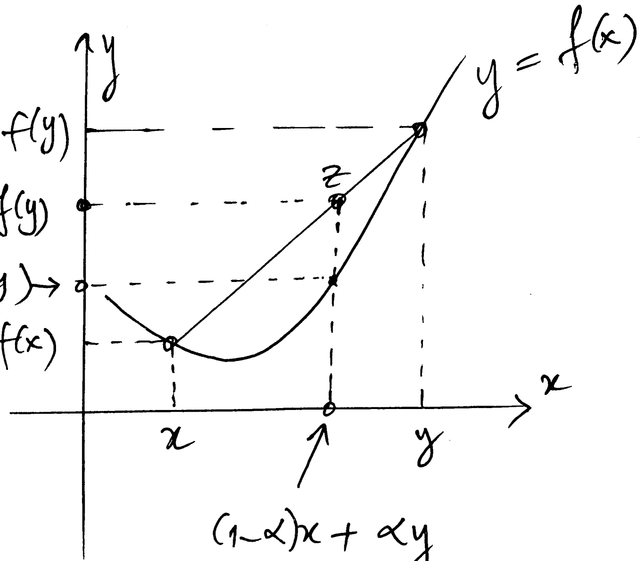
Tương tự quả cầu mở $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ cũng là 1 tập lồi.

2. <u>Hàm lồi</u>: Cho hàm $f: C \to \mathbb{R}$; $C \subset \mathbb{R}^n$ là 1 tập lồi $\neq \emptyset$

Hàm f gọi là lồi nếu $\forall x, y \in C$, $\forall \alpha \in [0,1]$

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

<u>Ý nghĩa hình học</u>:

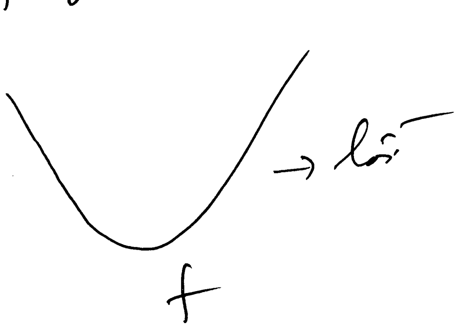


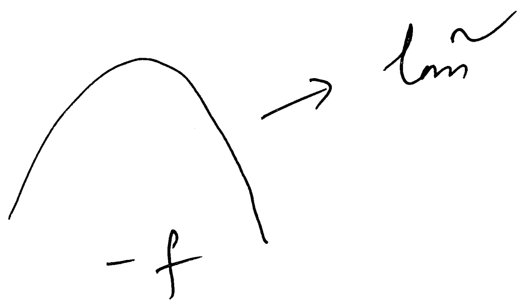
Đoạn nối $(x, f(x))$ và $(y, f(y))$ là tập các điểm

$$
\begin{aligned}
z &= (1-\alpha)(x, f(x)) + \alpha(y, f(y)) \\
&= ((1-\alpha)x + \alpha y, (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y))
\end{aligned}
$$

Như vậy hàm f lồi có đồ thị từ $(x, f(x))$ đến $(y, f(y))$ nằm dưới đoạn nối $(x, f(x))$ và $(y, f(y))$.

Hàm f gọi là lõm nếu $-f$ là lồi.





Ví dụ 1: CMR hàm

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \|x\|^2 \text{ là hàm lồi}$$

CM: cách 1: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n;\ \forall \alpha \in [0,1]$ ta có

$$(1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2 - \|(1-\alpha)x + \alpha y\|^2$$
$$= (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2 - (1-\alpha)^2\|x\|^2 - 2\alpha(1-\alpha)\langle x,y\rangle - \alpha^2\|y\|^2$$
$$= \left[(1-\alpha) - (1-\alpha)^2\right]\|x\|^2 - 2\alpha(1-\alpha)\langle x,y\rangle + (\alpha - \alpha^2)\|y\|^2$$
$$= \alpha(1-\alpha)\left[\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\right] = \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \geq 0$$

Cách 2: $f((1-\alpha)x + \alpha y) = \|(1-\alpha)x + \alpha y\|^2$

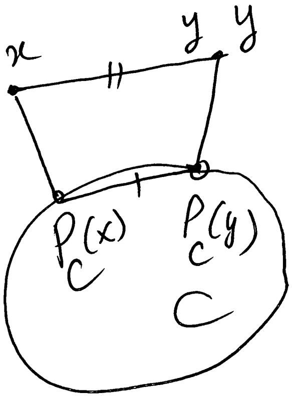
$$= (1-\alpha)^2\|x\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\langle x,y\rangle + \alpha^2\|y\|^2$$
$$\overset{C\text{-}S}{\leq} (1-\alpha)^2\|x\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\|x\|.\|y\| + \alpha^2\|y\|^2$$
$$\overset{\text{Cauchy}}{\leq} (1-\alpha)^2\|x\|^2 + \alpha(1-\alpha)\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] + \alpha^2\|y\|^2$$
$$= \left[(1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)\right]\|x\|^2 + \left[\alpha(1-\alpha) + \alpha^2\right]\|y\|^2$$
$$= (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2 = (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

Ví dụ 2: Cho C là 1 tập con lồi đóng trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó người ta c/m được $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\, z \in C$ sao cho

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

z được gọi là hình chiếu của x lên C, ký hiệu

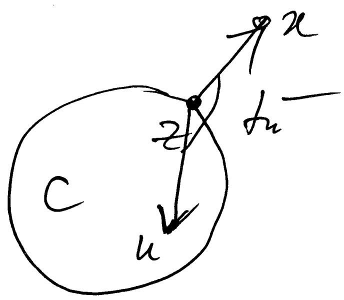
$$z = P_C(x)$$



Như vậy ta có ánh xạ $P_C : \mathbb{R}^n \to C$

$$x \mapsto P_C(x) = z$$ gọi là ánh xạ chiếu.

<u>Tính chất</u>: (i) góc tù: $\langle x - z, u - z \rangle \le 0 \quad \forall u \in C$



(ii) Không giãn

$$\| P_C(x) - P_C(y) \| \le \| x - y \| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(xem hình trước)

CMR hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} \| x - P_C(x) \|^2$$

là hàm lồi khả vi.

<u>Giải</u>:

(i) <u>f lồi</u>: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in [0, 1]$.

Vì $f(x_1) = \frac{1}{2} \| x_1 - P_C(x_1) \|^2$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists c_1 \in C$

sao cho $\frac{1}{2} \| x_1 - c_1 \|^2 < f(x_1) + \varepsilon$

Tương tự $\exists c_2 \in C : \frac{1}{2} \| x_2 - c_2 \|^2 < f(x_2) + \varepsilon$.

<u>Khi đó</u>: $f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) = \frac{1}{2} \| (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - P_C((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \|^2$

$$\le \frac{1}{2} \| (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - [(1-\alpha)c_1 + \alpha c_2] \|^2$$

$$= \frac{1}{2} \| (1-\alpha)(x_1 - c_1) + \alpha (x_2 - c_2) \|^2$$

$$\overset{VD1}{\le} \frac{1}{2} \left[(1-\alpha) \| x_1 - c_1 \|^2 + \alpha \| x_2 - c_2 \|^2 \right]$$

$$< \left[(1-\alpha)(f(x_1)+\varepsilon) + \alpha(f(x_2)+\varepsilon)\right]$$

$$= (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) + \varepsilon$$

vì bất đẳng thức đúng $\forall \varepsilon > 0$ nên $f((1-\alpha)x_1+\alpha x_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$

$\boxtimes$

(ii) f khả vi và $\nabla f(x) = x - P_C(x)$.

Ta có $2[f(x+h)-f(x)] = \|x+h-P_C(x+h)\|^2 - \|x-P_C(x)\|^2$

$$\leq \|x+h-P_C(x)\|^2 - \|x-P_C(x)\|^2$$

$$= \|x+h\|^2 - 2\langle x+h, P_C(x)\rangle + \|P_C(x)\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x, P_C(x)\rangle - \|P_C(x)\|^2$$

$$\Rightarrow 2[f(x+h)-f(x)] \leq 2\langle x,h\rangle + \|h\|^2 - 2\langle h, P_C(x)\rangle$$

$$= 2\langle x-P_C(x), h\rangle + \|h\|^2 \quad (1)$$

$$2[f(x)-f(x+h)] = \|x-P_C(x)\|^2 - \|x+h-P_C(x+h)\|^2$$

$$\leq \|x-P_C(x+h)\|^2 - \|x+h-P_C(x+h)\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\langle x, P_C(x+h)\rangle - \|x+h\|^2 + 2\langle x+h, P_C(x+h)\rangle$$

$$= -2\langle x,h\rangle - \|h\|^2 + 2\langle h, P_C(x+h)\rangle$$

$$= -2\langle x,h\rangle - \|h\|^2 + 2\langle h, P_C(x+h)-P_C(x)\rangle + 2\langle h, P_C(x)\rangle$$

$$\overset{C.S}{\leq} -2\langle x,h\rangle - \|h\|^2 + 2\|h\|.\underbrace{\|P_C(x+h)-P_C(x)\|}_{\leq \|x+h-h\|} + 2\langle h, P_C(x)\rangle$$

$$\overset{\text{ô giãn}}{\leq} -2\langle x-P_C(x), h\rangle + \|h\|^2$$

$$\Rightarrow -\frac{\|h\|}{2} \leq \frac{f(x+h)-f(x)-\langle x-P_C(x), h\rangle}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\langle x-P_C(x), h\rangle}{\|h\|} = 0 \Rightarrow f \text{ khả vi}$$

và $\nabla f(x) = x - P_C(x)$.