

# Schwingungen und das Pohl'sche Rad

Christopher Jung

26. August 2004

## 1 Harmonische Federschwingung

Ein an einer Feder befestigter Gegenstand gleitet reibungsfrei auf einem Tisch. Betreibt man diesen Vorgang innerhalb des Proportionalitätsbereichs der Feder, so erfährt der Gegenstand nach dem Hookeschen Gesetz die Kraft

$$F = -Dx,$$

wobei  $D$  die Federkonstante ist. Zusammen mit dem zweiten Newtonschen Gesetz ergibt sich:

$$F = -Dx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

oder

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = - \left( \frac{D}{m} \right) x.$$

Die Lösung hierfür lautet

$$x = A \cos(\omega t + \delta),$$

wobei  $A$ ,  $\omega$  und  $\delta$  Konstanten sind. Man nennt  $A$  die Amplitude und  $\delta$  die Phase. Bewegungen, deren Auslenkung  $x$  dieser Gleichung gehorchen, werden harmonische Schwingungen genannt.

## 2 Reibung

Die Reibungskraft ist in der Mechanik der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Man macht deshalb folgenden Ansatz:

$$\vec{F}_r = -\varrho(|\vec{v}|) \vec{v} \quad \varrho(v) > 0.$$

Der Reibungskoeffizient ist zwar immer positiv, aber häufig selbst eine Funktion von  $v$ . Ist  $\varrho$  unabhängig konstant, so spricht man von Stoke'scher Reibung.

- Bsp.: Eine angeströmte Platte, hinter der sich eine tote Zone und eine Wirbelstraße bilden, hat eine Widerstandskraft, die proportional zu  $v^2$  ist.

## 3 Wiederholung und Notation: Drehimpuls, Drehmoment, etc.

- Winkel:

$$\varphi$$

- Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

- Trägheitsmoment:

$$I = \int r^2 dm \quad \text{bzw.} \quad I = \sum_i m_i r_i^2$$

- Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- Drehimpuls eines Teilchensystems, das sich um eine Symmetrieachse durch den Massenmittelpunkt dreht, kann man schreiben als:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Verallgemeinerte Form des zweiten Newtonschen Gesetzes für Drehbewegungen in Systemen, in denen sich alle Teilchen mit der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bewegen:

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

Drehimpuls $\vec{L}$	Impuls $\vec{p}$
Drehmoment $\vec{m}$	Kraft $\vec{F}$
Trägheitsmoment $I$	Masse $m$
Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$	Geschwindigkeit $\vec{v}$

Tabelle 1: Entsprechungen für Drehbewegungen

## 4 Freie Schwingung

Von der Feder rührt ein rücktreibendes Drehmoment  $M_F$  her. Hierfür gilt:

1.  $M_F = I \cdot \ddot{\varphi}$
2.  $M_F = -D^* \cdot \varphi$

$$\omega_0^2 := \frac{D^*}{I} \quad \xRightarrow{\quad} \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$$

Das ist eine homogene DGL mit 2. Ordnung und hat somit zwei unabhängige Lösungen:

$$\varphi(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + A_2 \cdot \sin(\omega_0 t).$$

Die Integrationskonstanten  $A_1$  und  $A_2$  werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

- Beispiel:  $\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$

$$\implies \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

## 5 Gedämpfte Schwingung

Die Reibung erzeugt ein zusätzliches Moment  $M_R$ , das proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist:

$$M_R = -R \cdot \dot{\varphi}.$$

Somit lautet die DGL nun:

$$I \cdot \ddot{\varphi} + R \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0.$$

Wir haben also noch immer eine homogene DGL 2. Ordnung.

Man nutzt nun den komplexen Lösungsansatz

$$\varphi(t) = e^{\kappa t}$$

und erhält für  $\kappa$  nach einer kleinen Rechnung:

$$\kappa = -\frac{R}{2I} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4I^2} - \frac{D}{I}}.$$

Zur Vereinfachung definiert man:

$$\alpha := \frac{R}{2I}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{I}.$$

Man muss nun also drei Fälle unterscheiden.

### 5.1 Schwingfall: $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

Hier definiert man  $\omega$  als

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Über den Lösungsansatz

$$\varphi(t) = C_1 e^{\kappa_1 t} + C_2 e^{\kappa_2 t}$$

kommt man durch Rechnen und Umformen auf folgende Lösung:

$$\varphi(t) = [A_1 \cdot \cos(\omega t) + A_2 \cdot \sin(\omega t)] \cdot e^{-\alpha t} = B \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t - \beta).$$

- Beispiel:  $\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t - \arctan \frac{\alpha}{\omega})$$

### 5.2 Kriechfall: $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$

Diesmal definiert man  $\omega$  als

$$\omega := \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (\Rightarrow \alpha > \omega_0).$$

Die Lösung der DGL lautet:

$$\varphi(t) = (B_1 e^{\omega t} + B_2 e^{-\omega t}) e^{-\alpha t}.$$

- Beispiel:  $\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{\varphi_0}{2\omega} \cdot ((\omega + \alpha)e^{\omega t} + (\omega - \alpha)e^{-\omega t}) e^{-\alpha t}$$

### 5.3 Aperiodischer Grenzfall: $\alpha^2 - \omega^2 = 0$

Diesmal muss der Lösungsansatz wie folgt gewählt werden:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\kappa t} + C_2 t e^{\kappa t}.$$

Als Lösung ergibt sich:

$$\varphi(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-\alpha t}.$$

- Beispiel:  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}$$

Häufig sollen Schwingungen eines Systems verhindert werden. Nach einmaliger Auslenkung soll das System auf schnellstmöglichem Weg, ohne in Schwingung zu geraten, im Ausgangspunkt zur Ruhe kommen. Dafür ist der aperiodische Grenzfall ideal geeignet.

- Anwendung:
  - elektrische Messgeräte
  - Waagen
  - Stoßdämpfer am Auto

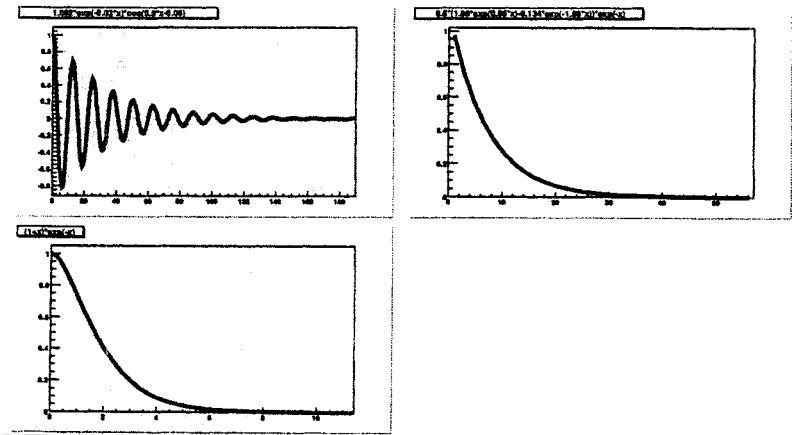


Abbildung 1: Schwingfall, Kriechfall und aperiodischer Grenzfall im Vergleich. Als Randbedingungen wurden  $\varphi(0) = 1$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  benutzt.

## 6 Erzwungene, periodische Schwingung

Nun kommt noch ein periodisch treibendes Drehmoment  $M_t$  hinzu:

$$M_t = M_0 \cdot \sin(\Omega t).$$

Die DGL lautet somit

$$I\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + D^*\varphi = M_0 \cdot \sin(\Omega t)$$

und ist eine inhomogene DGL zweiter Ordnung. Da wir die entsprechende homogene DGL gerade gelöst haben, brauchen wir nur noch eine partikuläre Lösung. Mit etwas Rechenaufwand erhält man z.B. folgende:

$$\varphi(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \delta) \quad \left( \text{mit } A = \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \cdot \frac{M_0}{I} \text{ und } \tan \delta = \frac{2\alpha\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)} \right).$$

Somit ergeben sich folgende allgemeine Lösungen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 < \omega_0^2 &: \varphi(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \delta) + B \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t - \beta) \\ \alpha^2 > \omega_0^2 &: \varphi(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \delta) + (B_1 e^{\omega t} + B_2 e^{-\omega t}) e^{-\alpha t} \\ \alpha^2 = \omega_0^2 &: \varphi(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \delta) + (B_1 + B_2 t) e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

- Beispiel:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  im Schwingfall

$$\Rightarrow \varphi(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \delta) + \frac{A \sin \delta}{\cos(\arctan \frac{\Omega + \alpha}{\omega})} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan \frac{\Omega + \alpha}{\omega}\right)$$

## 7 Resonanz

Man interessiert sich für das Maximum der Amplitude

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \cdot \frac{M_0}{I} \quad \text{mit } \alpha = \frac{R}{2I}.$$

Durch Ableitung nach  $\Omega$  erhält man das Maximum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \Omega} &= \frac{1}{[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2]^{3/2}} \cdot [4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2) + 8\alpha^2\Omega] \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow 4\Omega[(\Omega^2 - \omega_0^2) + 2\alpha^2] = 0 \\ &\Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \end{aligned}$$

Die Größe  $Q \equiv \frac{\omega_0}{2\alpha}$  nennt man Güte. Sie bestimmt die Breite der Resonanzkurve; je größer die Güte, desto schärfer und höher ist die Resonanz. Bei den Werten  $\Omega_{1,2} = \sqrt{1 \pm 1/Q} \cdot \omega_0$  (Näherung für große Werte von  $Q$ !) fällt die Amplitude der angeregten Schwingung auf den Wert  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_{\text{res}}$ , wobei  $A_{\text{res}} = \frac{A}{\omega_0^2} \cdot Q \cdot (1 - (1/(4Q)^2))^{-\frac{1}{2}}$  die Amplitude bei der Resonanzfrequenz ist.

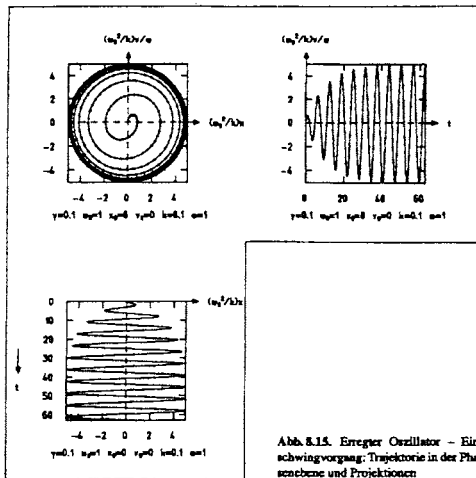


Abb. 8.15. Erregter Oszillator – Einschwingvorgang; Trajektorie in der Phasenebene und Projektionen

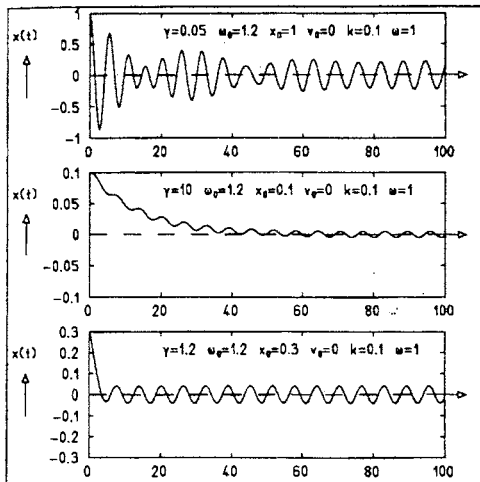


Abb. 8.16. Auslenkung  $x(t)$  des erregten Oszillators während des Einschwingvorgangs für  $\gamma < \omega_0$  (oben),  $\gamma > \omega_0$  (Mitte) und  $\gamma = \omega_0$  (unten)

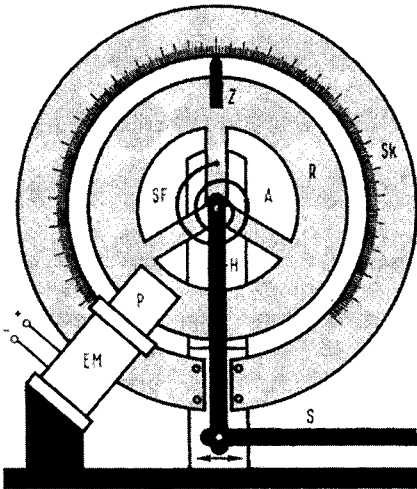
Abbildung 2: Einschwingvorgang, entnommen aus „Mechanik“ von Brandt und Dahmen

## 2.7.4 Erzwungene Schwingungen eines Drehpendels. Resonanzverhalten

### 2.7.4.1 Das lineare (harmonische) Drehpendel

**2.7.4.1.0 Methode** Wirkt auf ein schwingungsfähiges Drehsystem (Drehpendel) von außen periodisch ein Drehmoment mit der Kreisfrequenz  $\omega_a$ , dann stellt sich nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs ein stabiler Schwingungszustand ein, in dem das System mit der Kreisfrequenz  $\omega_a$  schwingt, auch dann, wenn  $\omega_a$  nicht mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Systems übereinstimmt. Diese Art der Schwingung heißt erzwungene Schwingung. Die sich einstellende Schwingungsamplitude  $\psi_a$  ist stark von  $\omega_a$  abhängig. Sie erreicht bei schwacher Dämpfung des Systems ein stark ausgeprägtes Maximum nahe bei  $\omega_a = \omega_0$ . Diese Erscheinung heißt Resonanz. Bei starker Dämpfung hingegen wird das Maximum flacher und liegt unterhalb der Eigenfrequenz (vgl. Kapitel 7, insbesondere Abschn. 7.3). Das Resonanzverhalten der in Fig. 2.34 dargestellten Anordnung soll untersucht werden. Das Drehpendel besteht aus dem flachen Kupferring R (Trägheitsmoment bezüglich A ist  $J_A$ ), der auf der Achse A drehbar und möglichst reibungsfrei gelagert ist, und der Spiralfeder SF (Richtmoment  $^{\circ}D$ ), die einerseits an R, andererseits an dem ebenfalls um A drehbaren und zunächst feststehenden Hebel H befestigt ist. H kann durch die Schubstange S, die

durch einen Exzenter (verstellbare Amplitude) auf der Achse eines drehzahlvariablen (Frequenz  $f_a$ !) Elektromotors betätigt wird, in eine Schwingbewegung (Verdrehungswinkel  $\chi$  gegen die Ruhstellung) versetzt werden. Dadurch wird das innere Ende von



SF periodisch sinusförmig hin und her bewegt und damit durch SF auf R ein periodisches Drehmoment ausgeübt. Die Amplitude  $\psi_a$  von R wird mit dem Zeiger Z an der Skala Sk abgelesen.

Das System wird durch eine Wirbelstrombremse gedämpft. Dazu läuft der Kupferring zwischen den Polschuhen P des Elektromagneten EM, dessen Erregung durch den Spulenstrom  $I_s$  eingestellt werden kann.

Fig. 2.34

Apparat zur Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Drehpendels, das zu Drehbewegungen angeregt wird

R Rotor; EM-P Wirbelstrombremse

Man denke sich das Kupferrad aus lauter Kreisleitern zusammengesetzt. Nur beim Eintritt in das und beim Austritt aus dem Magnetfeld wird in jedem Kreisleiter ein Induktionsstrom erzeugt. Auf diesen übt das Magnetfeld eine bremsende Kraft aus. Man hat damit eine fein einstellbare Dämpfungsvorrichtung. Das von ihr erzeugte Drehmoment ist proportional der Umfangsgeschwindigkeit des Kupferringes und damit proportional der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  der Drehbewegung.

Zur quantitativen Beschreibung stellen wir die Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung des Drehpendels auf. Dabei nehmen wir zunächst an, daß die Schubstange in Ruhe sei. Wir versetzen das Pendel in Schwingung und greifen einen Zustand heraus, bei dem sich das Pendel in der Stellung  $\psi$  (Ruhstellung  $\psi = 0$ ) befindet und die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  hat. Auf das Kupferrad wirkt dann einmal das Drehmoment  $M_1 = -\partial D \psi$ , das von der Spiralfeder herrührt, zum anderen das Drehmoment  $M_2 = -C \dot{\psi}$ , das von der Wirbelstrombremse ausgeübt wird.  $C$  ist dabei eine Größe, die durch  $I_s$  einstellbar ist. Das resultierende Drehmoment  $M_1 + M_2$  bedingt eine Winkelbeschleunigung  $\ddot{\psi}$ , und es gilt  $M_1 + M_2 = J_A \ddot{\psi}$ . Bei feststehender Schubstange lautet also die Bewegungsgleichung (vgl. auch Gl. (7.5))

$$J_A \ddot{\psi} + C \dot{\psi} + \partial D \psi = 0. \quad (2.117)$$

Setzt man die Schubstange in periodische Bewegung, dann greift an dem Kupferrad ein weiteres Drehmoment  $M_a = \partial D \cdot \chi = \partial D \cdot \chi_0 \cos \omega_a t = M_0 \cos \omega_a t$  an. Gl. (2.117) geht dann über in die Differentialgl. der erzwungenen Drehschwingung



$$J_A \ddot{\psi} + C \dot{\psi} + {}^oD \psi = M_0 \cos \omega_a t \quad (2.118)$$

oder nach Division durch  $J_A$  in

$$\ddot{\psi} + 2\delta \dot{\psi} + \omega_0^2 \psi = \alpha_0 \cos \omega_a t; \quad (2.119) \equiv (7.21b)$$

dabei wurden die Abkürzungen

$$\delta = \frac{C}{2J_A}; \quad \omega_0^2 = \frac{{}^oD}{J_A} \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \frac{M_0}{J_A} \quad (2.119a, b, c)$$

verwendet.  $\delta$  heißt „Abklingkonstante“,  $\omega_0$  ist die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, genannt „Kennfrequenz“. Die Lösung der Differentialgleichung (2.119)  $\equiv$  (7.21) für den stationären Zustand (nach Abklingen der Einschwingvorgänge) lautet nach Abschn. 7.3

$$\psi(t) = \psi_a \cos(\omega_a t - \varphi) \quad (2.120) \equiv (7.22)$$

mit folgenden Zusammenhängen:

$$\psi_a = \psi_0 \sqrt{\left\{ 1 - \left( \frac{\omega_a}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left( 2 \frac{\delta}{\omega_0} \frac{\omega_a}{\omega_0} \right)^2}^{1/2}; \quad \psi_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} \quad (2.121) \equiv (7.29a)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\delta \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \arctan \frac{2\delta \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}. \quad (2.122) \equiv (7.27)$$

Gl. (2.120) sagt, daß das System mit der Kreisfrequenz  $\omega_a$  (Frequenz  $f_a = \omega_a/2\pi$ ) schwingt, daß jedoch die Phase gegenüber dem äußeren Drehmoment  $M_a$  um  $\varphi$  verschoben ist. Die relative Amplitude der Schwingung  $\psi_a/\psi_0$  nach Gl. (2.121) und die Phase  $\varphi$  nach Gl. (2.122) sind in Fig. 7.3 bzw. Fig. 7.4 für verschiedene „Dämpfungsgrade“  $\delta/\omega_0$  als Funktion von  $\omega_a/\omega_0$  aufgetragen. Fig. 7.3 zeigt das ausgeprägte Resonanzverhalten bei kleinen  $\delta$ -Werten und die Verschiebung der maximalen Amplitude zu kleineren  $\omega_a$ -Werten bei wachsendem  $\delta$ .

Die Abklingkonstante  $\delta$  läßt sich am einfachsten an der freien Schwingung messen. Für das Dämpfungsverhältnis  $k$  gilt nach Gl. (7.17) und (7.18) von Abschn. 7.2

$$k = \frac{\psi_n}{\psi_{n+1}} = e^{\delta T}, \quad (2.123)$$

wobei  $\psi_n$  und  $\psi_{n+1}$  zwei aufeinanderfolgende gleichsinnige Amplituden und  $T$  die Schwingungsdauer bei der Dämpfung  $\delta$  bedeuten. Es ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (2.124)$$

Aus Gl. (2.123) folgt

$$\delta = \frac{1}{T} \ln(\psi_n/\psi_{n+1}). \quad (2.125)$$

**2.7.4.1.1 Gang des Versuchs** 1) Man messe bei stillstehendem Motor a) die Schwingungsdauer  $T$  der freien, gedämpften Schwingung des Systems aus den Nulldurchgängen des Zeigers  $Z$  und b) die Amplituden  $\psi_n$  dieser Schwingung in

Abhängigkeit von der Zeit, indem man etwa 10 bis 15 aufeinanderfolgende Amplituden immer auf der gleichen Seite der Winkelskala abliest. Man führe diese Messung bei verschiedenen Strömen  $I_s$  im Dämpfungsmagnet, also verschiedenen  $\delta$ -Werten, beginnend bei  $I_s = 0$  durch. — 2) Man erzeuge das System durch den Motor zur erzwungenen Schwingung, warte ab, bis sich eine stabile Schwingungsamplitude  $\psi_a$  eingestellt hat und lese dann  $\psi_a$  ab (mindestens 10 Ablesungen, Mittelwert bilden). Man beginne diese Messung bei kleinen Frequenzen  $\omega_a$ , die sicher unter der Resonanzstelle liegen und erhöhe  $\omega_a$  zunächst in großen Schritten, um die ungefähre Lage des Resonanzmaximums festzustellen. In der Umgebung der Resonanzstelle führe man die Messung noch einmal in kleinen Schritten durch. Man wiederhole diese Messung bei verschiedenen Dämpfungen  $\delta$ .

**2.7.4.1.2 Auswertung** 1) Man bestimme nach Gl. (2.125) die Abklingkonstante  $\delta$  und trage  $\delta/\omega_0$  in Abhängigkeit von  $I_s$  auf. — 2) Man trage  $\psi_a/\psi_0$  in Abhängigkeit von  $\omega_a/\omega_0$  auf. Zur Auftragung benötigt man die Werte  $\omega_0$  und  $\psi_0$ . Nach Gl. (2.124) ist  $\omega \approx \omega_0$  für „kleine“ Werte von  $\delta$  (man berechne  $\omega/\omega_0$  nach Gl. (2.124) und Gl. (2.123) z. B. für die sehr große Dämpfung  $k = 10$ ), so daß man  $\omega_0$  mit genügender Genauigkeit aus der Schwingungsdauer des Pendels ohne magnetische Dämpfung berechnen kann. Für  $\psi_a$  erhält man aus Gl. (2.121), wenn  $\omega_a/\omega_0 \ll 1$  ist, den Näherungsausdruck

$$\psi_a = \psi_0 \left\{ 1 + \left( \frac{\omega_a}{\omega_0} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \right\}. \quad (2.126)$$

Trägt man also für kleine  $\omega_a$ -Werte  $\psi_a$  als Funktion von  $(\omega_a/\omega_0)^2$  oder von  $\omega_a^2$  auf, so ergibt sich nach Gl. (2.126) eine Gerade, welche die Abszissenachse bei  $\psi_0$  schneidet.

**2.7.4.2 Erzwungene Schwingungen eines nichtlinearen (anharmonischen) Drehpendels**  
siehe Seite 386