

7. Gedämpfte und erzwungene Schwingungen



Vertiefung der Schwingungslehre. Drehschwingungen mit unterschiedlichen Dämpfungen: Schwingfall, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall. Erzwungene Schwingungen: Amplitude und Phasenwinkel als Funktion der Frequenz, Resonanz, Einfluß der Dämpfung.



Standardlehrbücher (Stichworte: Drehpendel, Drehschwingungen, gedämpfte Schwingungen, erzwungene Schwingungen, Resonanz), *Themenkreis 5*: Harmonische Schwingungen.



Pohlsches Rad

Erzwungene Schwingungen spielen in vielen Teilgebieten der Physik sowie in ihren Anwendungen in der Technik eine wichtige Rolle. Beispiele sind die Schallübertragung durch elektromagnetische Systeme (Lautsprecher, Mikrofon), elektrische Schwingkreise und die Vorgänge bei Absorption und Dispersion von Licht. Bei all diesen scheinbar so verschiedenartigen Problemen tritt stets die Frage auf: Wie hängen Amplitude und Phase eines schwingenden Systems, auch *Oszillator* oder *Resonator* genannt, bei gegebener Eigenfrequenz von der Frequenz des Erregers und von der Dämpfung des Resonators ab?

Die mathematischen Beschreibungen dieser verschiedenartigen Schwingungssysteme sind weitgehend analog, so daß man Erkenntnisse aus einem Bereich auch auf andere übertragen kann. Ein mechanischer Resonator,

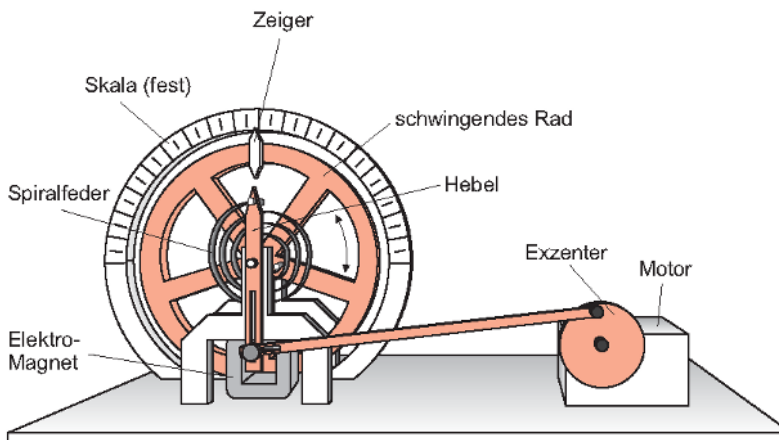


Bild 7.1. Pohlsches Rad zur Untersuchung von Drehschwingungen (von R. W. Pohl zu Demonstrationszwecken entwickelt)

wie z. B. das Pohlsche Rad, Bild 7.1, bietet gegenüber anderen, z. B. dem elektrischen Schwingkreis, den Vorteil größerer Anschaulichkeit und soll deshalb in dieser Aufgabe behandelt werden.

Das Pohlsche Rad ist um die Achse drehbar und wird durch eine Spiralfeder in der Ruhelage gehalten. Die Feder ist an einem Ende am Rad befestigt und am anderen Ende an einem Hebel. Wird das Rad aus der Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen, so kehrt es in Form einer gedämpften Schwingung in die Ruhelage zurück. Das Rad läuft dabei zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, der bei Bewegung des Rades in diesem Wirbelströme induziert, die zu einer Abbremsung führen. Die Dämpfungszeitkonstante kann über die Stromstärke im Magneten geregelt werden.

Durch einen Motor mit Exzenter und Schubstange kann der Hebel hin- und herbewegt werden. Durch das mitbewegte obere Ende der Spiralfeder wirkt ein periodisches Drehmoment auf das Rad, das auf diese Weise zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird.

Mit dem Pohlschen Rad können folgende Arten von Schwingungen beobachtet werden:

- Nach einmaligem Anstoßen schwingt das Pohlsche Rad ohne bzw. mit geringer Dämpfung. Dabei wird eine Schwingungsdauer T_0 bzw. Frequenz $f_0 = 1/T_0$ bzw. Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$ beobachtet, die sog. **Eigenkreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung**.
- Mit Hilfe der Stromstärke im Dämpfungsmagneten können verschieden starke Dämpfungen eingestellt werden. Die Schwingungsamplituden A nehmen dann schneller ab, es liegt eine **gedämpfte Schwingung** vor. Die Eigenkreisfrequenz ω_e ändert sich aber kaum meßbar gegenüber ω_0 . Die genaue Rechnung zeigt aber, daß sie etwas kleiner geworden ist.
- Durch periodische Erregung mit dem Motor, der sich mit der Kreisfrequenz ω dreht, werden **erzwungene Schwingungen** erzeugt. Bei Variation der Erregerkreisfrequenz ω beobachtet man:
 - Im Bereich der Eigenkreisfrequenz ω_0 des Pendels wird die Amplitude A sehr groß, was als **Resonanz** bezeichnet wird, s. a. Bild 7.6
 - Zwischen Erreger und Pendel besteht eine Phasenverschiebung. Das Pendel läuft gegenüber dem Erreger nach. Die Erscheinung ist besonders deutlich bei hohen Erregerkreisfrequenzen ($\omega > \omega_0$), bei denen die Bewegung fast gegenphasig wird, s. a. Bild 7.6

Um die Bewegung des Drehpendels analytisch zu beschreiben, betrachtet man die folgenden Größen. Die drehbare Scheibe des Pohlschen Rades besitzt ein Trägheitsmoment I , auf das durch die Spiralfeder das Rückstellmoment $-D^*\varphi$ einwirkt, wobei D^* die Winkelrichtgröße der Feder und φ der Auslenkwinkel sind. Das bremsende Moment $-\rho\dot{\varphi}$, das durch die Wirbelstrombremse erzeugt wird, setzt man proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ an, wobei die Proportionalitätskonstante ρ als *Reibungs-* oder *Bremskoeffizient* bezeichnet wird. Schließlich wirkt von außen ein periodisches *Erregermoment* $M \cos \omega t$ mittels Elek-

tromotor und Verbindungsstange ein, wobei ω als Erregerkreisfrequenz bezeichnet wird. Damit ergibt sich die

**Bewegungsgleichung
einer erzwungenen Drehschwingung mit Dämpfung**

$$I\ddot{\varphi} = -D^*\varphi - \rho\dot{\varphi} + M \cos \omega t$$

$$\text{bzw. } \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = N \cos \omega t$$

$$\text{mit } 2\delta = \frac{\rho}{I}, \quad \omega_0^2 = \frac{D^*}{I} \quad \text{und} \quad N = \frac{M}{I}.$$

Diese Schwingungsgleichung ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihre allgemeine Lösung $\varphi_{\text{allg}}(t)$ kann man gewinnen, wenn man die Summe aus der *allgemeinen Lösung* $\psi(t)$ der zugehörigen, homogenen Differentialgleichung und einer *partikulären Lösung* $\varphi(t)$ der inhomogenen Gleichung selbst bildet. Zuerst soll die zugehörige homogene Differentialgleichung behandelt werden, dann die inhomogene.



Freie, gedämpfte Schwingung

Die zugehörige, homogene Differentialgleichung

$$\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$$

ist die Schwingungsgleichung für eine freie gedämpfte Schwingung. Differentialgleichungen dieses Typs lassen sich durch einen Exponentialansatz lösen, der bei imaginärem Argument λ auch Sinus- und Kosinusfunktionen ergibt:

$$\psi \propto e^{\lambda t},$$

wobei λ zu bestimmen ist. Dazu wird der Ansatz in die Differentialgleichung eingesetzt ($\dot{\psi} \propto \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{\psi} \propto \lambda^2 e^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Die Multiplikation mit $e^{-\lambda t}$ ergibt:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Setzt man $\lambda_{1,2}$ wieder in den Ansatz ein, dann erhält man zwei Lösungen:

$$\psi_1 \propto e^{-\delta t + \Gamma t} \quad \text{und} \quad \psi_2 \propto e^{-\delta t - \Gamma t} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Die *allgemeine Lösung* ergibt sich durch Linearkombination, also:

$$\psi = ae^{-\delta t + \Gamma t} + be^{-\delta t - \Gamma t} \quad .$$

Dazu folgende Fallunterscheidungen:

Schwingfall: $\delta^2 < \omega_0^2$

Bei geringer Dämpfung ist der Wurzelausdruck $\Gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = i\omega_e$ imaginär. Umformung mittels *Eulerscher Formel* $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ liefert:

$$\psi = ae^{-\delta t}(\cos \omega_e t + i \sin \omega_e t) + be^{-\delta t}(\cos \omega_e t - i \sin \omega_e t) \quad .$$

Dabei wird

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

als Eigenkreisfrequenz des gedämpften Oszillators bezeichnet. Durch Einführung neuer Konstanten A und B , die reell gewählt werden, ergibt sich:

$$\psi = e^{-\delta t}(A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t) \quad .$$

Das ist die allgemeine Gleichung einer gedämpften Schwingung. Aus der Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi_0$ ergibt sich $A = \psi_0$. Zur Festlegung der anderen Konstanten B ist eine zweite Anfangsbedingung notwendig. Wird der Drehschwinger am Anfang um ψ_0 ausgelenkt und dann losgelassen, so gilt:

$$\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad .$$

Durch Differentiation des Ansatzes folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\delta e^{-\delta t}(A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t) \\ &\quad + e^{-\delta t}(-A\omega_e \sin \omega_e t + B\omega_e \cos \omega_e t) \quad . \end{aligned}$$

Mit der zweiten Anfangsbedingung ergibt sich

$$\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} = -\delta A + B\omega_e = -\delta\psi_0 + B\omega_e = 0 \quad .$$

Damit ist $B = \delta\psi_0/\omega_e$, und es ergibt sich der zeitliche Verlauf für eine *gedämpfte Schwingung*:

$$\text{Schwingfall} \quad \psi_S = \psi_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \quad .$$

Die Einhüllende der Amplituden dieser Schwingung ist nicht konstant, sondern eine exponentiell abklingende Funktion, Bild 7.2. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Maxima mit dem Abstand der Schwingungsdauer T ist aber konstant und nur von der Dämpfung abhängig:

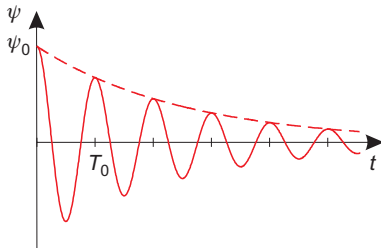


Bild 7.2. Gedämpfter Schwingfall oder periodischer Fall ($\delta/\omega_0 = 1/16$)

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t+T)} = e^{+\delta T} \quad .$$

Der Logarithmus davon heißt **logarithmisches Dämpfungsdekrement Λ** :

$$\Lambda = \ln \left(\frac{\psi(t)}{\psi(t+T)} \right) = \delta T \quad .$$

und kann zur Bestimmung von δ herangezogen werden.

Kriechfall: $\delta^2 > \omega_0^2$

Bei starker Dämpfung erfolgt keine Schwingung des Drehpendels mehr. Nach einer anfänglichen Auslenkung kriecht es in seine Ruhelage zurück. Eine Rechnung ähnlich wie beim Schwingfall ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Kriechfall} \quad \psi_K &= \frac{\psi_0}{2\Gamma} e^{-\delta t} ((\Gamma + \delta)e^{\Gamma t} + (\Gamma - \delta)e^{-\Gamma t}) \\ &= \psi_0 e^{-\delta t} \left(\cosh \Gamma t + \frac{\delta}{\Gamma} \sinh \Gamma t \right) \quad . \end{aligned}$$

Je größer der Reibungskoeffizient ρ und damit δ , desto flacher fällt die Kurve $\psi(t)$ ab, Bild 7.3.

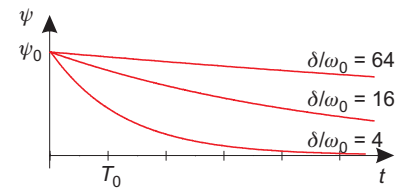


Bild 7.3. Kriechfall mit unterschiedlicher Dämpfung (aperiodischer Fall)

Aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = \omega_0^2$

Für diesen Grenzfall $\delta^2 = \omega_0^2$ erhält man den schnellsten Kriechfall. Mathematisch ergibt sich durch den Grenzübergang $\Gamma \rightarrow 0$:

$$\text{aperiodischer Grenzfall} \quad \psi_G = \psi_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t) \quad .$$

Dies kann durch direktes Einsetzen in die homogene Differentialgleichung überprüft werden. Diese Grenzsituation veranschaulicht Bild 7.4. Die Einstellung des aperiodischen Grenzfalls ist wichtig für technische Systeme, die nach einer Auslenkung aus der Ruhelage möglichst schnell in diese ohne Schwingung zurückkehren sollen, z. B. Autofederung mit Stoßdämpfer, elektrische Zeigermeßinstrumente.

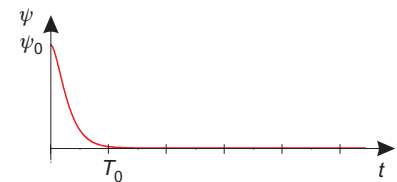


Bild 7.4. Aperiodischer Grenzfall



Erzwungene Schwingungen

Um das Verhalten des erzwungen schwingenden Drehpendels zu beschreiben, muß die Lösung der oben genannten inhomogenen Differentialgleichung gesucht werden. Dazu muß neben der eben behandelten Lösung der homogenen Gleichung noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gesucht werden. Hierzu wird der Ansatz $\varphi = A \cos(\omega t - \alpha)$ gemacht, der berücksichtigt, daß das Pendel im stationären Fall mit der gleichen Kreisfrequenz ω wie der Erreger schwingt. A und α sind noch zu bestimmende Größen. Um das umständliche Rechnen mit trigonometrischen Ausdrücken zu umgehen, rechnet man vorteilhafter nach der Eulerschen Formel mit

$$\varphi = \frac{A}{2} e^{i(\omega t - \alpha)} + c.c. \quad ,$$

wobei *c.c.* den konjugiert komplexen Wert des davorstehenden Ausdrucks bezeichnet. Einsetzen des Ansatzes in die inhomogene Differentialgleichung ergibt:

$$A e^{i(\omega t - \alpha)} (-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2) = N e^{i\omega t} \quad .$$

Der Faktor $e^{i\omega t}$ kann auf beiden Seiten der Gleichung gekürzt werden. Multiplikation mit der konjugiert komplexen Gleichung und Wurzelziehen ergibt:

$$A = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad .$$

Mit $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ ergibt sich:

$$\tan \alpha = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad .$$

Eine partikuläre Lösung lautet damit:

$$\varphi = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos \left(\omega t - \arctan \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right) \quad .$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für das erzwungene schwingende Drehpendel ergibt sich nun aus:

$$\varphi_{\text{allg}} = \psi + \varphi \quad .$$

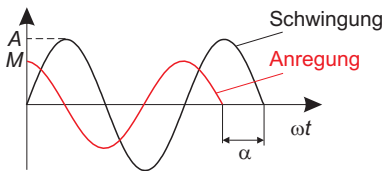


Bild 7.5. Drehmoment $M(t)$ des Erregers sowie die Auslenkung des Schwingers $\varphi = A \sin \omega t$. α : Phasenverschiebung zwischen beiden

Betrachtet man φ_{allg} für genügend lange Zeiten oder genügend große Dämpfung, dann wird ψ aufgrund des exponentiellen Gliedes rasch gegen Null streben und φ allein die weitere Bewegung des Pohlschen Rades beschreiben. Die Zeitspanne bis zum Abklingen von ψ stellt den *Einschwingvorgang* dar. Danach schwingt das Pohlsche Rad mit derselben Kreisfrequenz wie der Erreger, Bild 7.5. Für diesen Schwingungsvorgang zeigt φ folgendes Verhalten:

- Im hypothetischen, dämpfungsfreien Fall mit $\delta = 0$ wächst bei Annäherung der Erregerkreisfrequenz ω an die *Resonatorkreisfrequenz* ω_0 die Amplitude des Resonators über alle Grenzen: **Resonanz**.
- Die Amplitudenfunktion $A = f(\omega)$ hat für $\delta \neq 0$ ein Maximum. In einem Maximum gilt:

$$\frac{dA}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0 \quad .$$

Daraus folgt:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad ,$$

d. h. die Resonanzkreisfrequenz ω_r für die erzwungene, gedämpfte Schwingung liegt etwas unterhalb der Eigenkreisfrequenz ω_0 des freien, ungedämpften Oszillators.

- Der erzwungene Oszillator schwingt mit einer Phasenverschiebung

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

zum Erreger. Es gelten folgende Spezialfälle:

$$\begin{array}{ll} \omega = 0 & \alpha = 0 \\ \omega \rightarrow \omega_0 & \alpha \rightarrow +\pi/2 \\ \omega \rightarrow \infty & \alpha \rightarrow +\pi \end{array} .$$

Für verschiedene Dämpfungen δ sind die *Phasenverschiebungs-* und *Resonanzkurven* im Bild 7.6 dargestellt. Bei geringen Dämpfungen bleibt die vom Erregermotor geleistete Arbeit weitgehend erhalten, was zu einer großen Amplitude der Schwingung führt. Bei großen Dämpfungen wird die Arbeit des Motors in Wärmeenergie umgewandelt, so daß die Schwingungsamplitude und Schwingungsenergie klein sind.

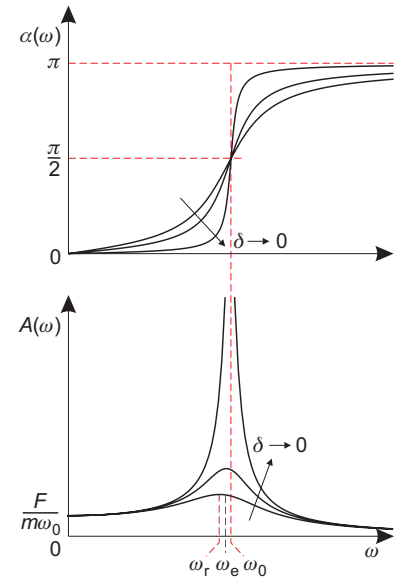


Bild 7.6. Phasenverschiebungs- und Amplituden-Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen δ

7.1 Gedämpfte Schwingung (1/2)



Beobachtung von freien Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen: Schwingfall, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall.



Pohl'sches Rad mit Dämpfungseinrichtung, Bild 7.1, regelbares Netzgerät, Stoppuhr, Vielfachmeßinstrument.



Messung von Eigenkreisfrequenz und Dämpfung

Durch Änderung der Stromstärke im Elektromagneten läßt sich die Dämpfung kontinuierlich regeln. Die Spulen für die Dämpfung können kurzzeitig z. B. bis max. 2 A belastet werden. **!Vorsicht!** Hohe Ströme für Dämpfungsmagneten nur kurzzeitig!

Die Schwingungsamplituden können an einer das Rad umgebenden feststehenden Skala abgelesen werden. Die Zeitmessungen werden mit einer Stoppuhr durchgeführt. Periodendauern im Schwingfall werden als Abstände gleichsinniger Nulldurchgänge gestoppt.

Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω_0 des nahezu ungedämpften Oszillators durch Messung der Periodendauer. Es tritt nur eine geringe Dämpfung durch Lager- und Luftreibung sowie Verformungsarbeit der Feder auf.

Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω_e des gedämpften Oszillators für verschiedene Dämpfungen, d. h. Spulenströme.

Messung der Amplitude aufeinanderfolgender Schwingungen zur Berechnung des logarithmischen Dekrements bei verschiedenen Spulenströmen.



Einstellung des aperiodischen Grenzfalles: Durch Einstellung einer passenden Dämpfung kehrt das Drehpendel nach einem Ausschlag schnell in die Nullage zurück, ohne weitere Schwingungen auszuführen.



Berechnung von δ für jeden Spulenstrom sowohl aus der Eigenkreisfrequenz ($\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$) als auch aus der Amplitudenabnahme (logarithmisches Dekrement). Vergleich!

7.2 Erzwungene Schwingung (1/2)



Durch periodische Erregung des Pohlschen Rades mit einem Elektromotor soll das Resonanzverhalten der erzwungenen Schwingung überprüft werden.



Pohlsches Rad mit Dämpfungseinrichtung, Bild 7.1, und Elektromotor einschließlich Steuereinheit zur Erzeugung einer periodischen Erregung, Stoppuhr, Vielfachmeßinstrument.

Als Erreger der erzwungenen Schwingung dient ein Elektromotor, am besten ein Schrittmotor, der in kleinen Stufen geschaltet wird und sich so fast gleichmäßig mit konstanter aber einstellbarer Periodendauer T_{err} bzw. Kreisfrequenz oder Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{err}} = 2\pi/T_{\text{err}}$ dreht. Der Motor drückt über einen Exzenter mit Schubstange und Hebel die Spiralfeder in periodischer Folge zusammen oder dehnt diese. Die Schwingungen des Hebels werden dadurch dem Resonator aufgezwungen. Auf diese Weise kann man an der Achse des Drehpendels sinusförmig verlaufende Drehmomente mit konstanter Amplitude, aber einstellbarer Frequenz, angreifen lassen.

Der Motor wird über eine zugehörige Steuereinheit betrieben, an der auch die Periodendauern des Erregers und des Schwingers sowie die Zeitdifferenz des Nulldurchgangs abgelesen werden können.

Will man die Amplitude des Erregers verstellen, so wird nach Lösen der Verschraubung die Schubstange in der Führung des Hebels verschoben.



Resonanzkurven

Aufnahme der Amplitude des Resonators als Funktion der Erregerkreisfrequenz ω für drei verschiedene Dämpfungen. Die Amplitude wird mit dem an der Drehscheibe angebrachten Zeiger (in Bild 7.1 hell gezeichnet) an der runden Skala als Maximalausschlag abgelesen.



Bestimmung der Phasenverschiebung α als Funktion der Erregerkreisfrequenz ω für die zuvor eingestellten Dämpfungen. Diese Aufgabe kann gleich bei den oben eingestellten Erregerkreisfrequenzen mitgemessen werden. Die Phasenverschiebung wird mit dem hellen Zeiger in Bild 7.1 auf der Skala abgelesen, wenn der rote Zeiger, an dem die Spiralfeder befestigt ist, gerade durch die Vertikale geht.



Vergleichen der experimentellen Beobachtungen mit den oben dargestellten theoretischen Resonanzkurven nach Bild 7.6.