

11. Mechanische Schwingungen und Wellen

Mechanische Schwingungen spielen sowohl in der Grundlagenforschung als auch in der Technik eine große Rolle. Ihre Bedeutung als Schallquelle in der Akustik und Musik, als Sensor beim Hören, und auch ihr unerwünschter Einfluss bei Resonanzen von Maschinen, Gebäuden und Brücken rechtfertigt eine eingehende Beschäftigung mit ihren physikalischen Grundlagen. Ihre mathematische Behandlung ist in vielen Punkten analog zu derjenigen elektrischer oder magnetischer Schwingungen (siehe Bd. 2, Kap. 6). Die Untersuchung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen fördert nicht nur das Verständnis makroskopischer Schwingungsphänomene, sondern ist auch für die Erkenntnisgewinnung über die Struktur der Materie (atomare Schwingungen in der Molekül- und Festkörperphysik) von großem didaktischen Nutzen.

Auch die Erforschung der Ausbreitung von Schwingungen im Raum in Form von Wellen gibt sehr wichtige Informationen über die Mechanismen, die zum räumlichen Transport von Schwingungsenergie infolge der Kopplung zwischen benachbarten Atomen und Molekülen führen.

In diesem Kapitel sollen mechanische Schwingungen, bei denen Materie bewegt wird, und die verschiedenen Formen von mechanischen Wellen behandelt werden. Als reizvolle Anwendungsgebiete wird zum Schluss die Bedeutung des Ultraschalls in der Medizin und ein kurzer Abriss über die Schwingungsphysik der Musikinstrumente gegeben.

11.1 Der freie ungedämpfte Oszillator

Im Kap. 2 haben wir die grundlegenden Bewegungsgleichungen der Mechanik am einfachsten Modell des Massenpunktes behandelt. Genau so lassen sich die

physikalischen Grundlagen der mechanischen Schwingungen am besten klar machen für den idealisierten Fall punktförmiger Massen, bevor wir zu Schwingungen ausgedehnter Körper vorstoßen.

Ein an einer Feder hängender Körper mit der Masse m hat eine Ruhelage bei $x = 0$, in der die Schwerkraft gerade durch die rücktreibende Federkraft kompensiert wird. Bei $x = 0$ ist daher die Gesamtkraft Null. Wird nun m aus der Ruhelage bei $x = 0$ ausgelenkt (Abb. 11.1), so tritt im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetz (siehe Abschn. 6.2) eine rücktreibende Kraft

$$\vec{F} = -Dx\hat{e}_x$$

auf, die den Massenpunkt wieder zurück in die Ruhelage zu bringen versucht, wobei D die Rückstellkonstante der Feder ist, die vom Torsionsmodul des Federmaterials und der Dicke der Feder abhängt. Seine Bewegungsgleichung heißt daher:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx. \quad (11.1a)$$

Mit der Abkürzung $\omega_0^2 = D/m$ geht dies über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (11.1b)$$

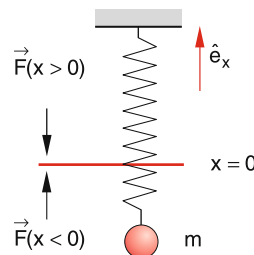


Abb. 11.1. Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Dies ist die Schwingungsgleichung des *harmonischen Oszillators* (der „harmonisch“ heißt, weil ein solcher Oszillator in der Akustik einen „reinen“ Sinuston erzeugt. Die Überlagerung reiner Töne mit Frequenzen $n \cdot \omega_0$ ($n =$ kleine ganze Zahl) wird als harmonisch empfunden).

Im Abschn. 2.9.7 hatten wir bereits für das Fadenpendel bei kleinen Auslenkungen eine analoge Schwingungsgleichung (2.85b) für die Winkelauslenkung φ gefunden.

Die Gleichung (11.1) hat als Lösung die Funktion

$$x = c \cdot e^{\lambda t}, \quad (11.2)$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. Setzt man (11.2) in (11.1) ein, so ergibt sich die Bestimmungsgleichung $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ für den Parameter λ , aus der die beiden Werte

$$\lambda_1 = +i\omega_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\omega_0$$

für λ folgen. Wir erhalten daher die beiden Lösungen

$$x_1(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = c_2 e^{-i\omega_0 t},$$

die für $\omega_0 \neq 0$ linear unabhängig sind. Die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung (11.1) ist dann eine Linearkombination beider Lösungen und daher:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (11.3)$$

Da $x(t)$ eine reelle Funktion sein muss, folgt für die komplexen Konstanten $c_1 = c_2^* = c$, sodass unsere Lösungsfunktion für die Schwingungsamplitude

$$x(t) = c e^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad c = a + ib \quad (11.4a)$$

wird. Die reellen Konstanten a und b müssen aus den Randbedingungen des spezifischen Schwingungsproblems bestimmt werden.

BEISPIEL

Wenn die Masse m in Abb. 11.1 zur Zeit $t = 0$ durch $x = 0$ mit einer Geschwindigkeit $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ läuft, dann ergibt sich: $c + c^* = 0 \Rightarrow a = 0$ und $v_0 = i\omega_0(c - c^*) = i\omega_0 \cdot 2ib \Rightarrow b = -v_0/2\omega_0$. Also wird:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Anmerkung

Anstelle der Masse m an der Feder kann man den harmonischen Oszillator auch durch eine Masse, die auf einer parabelförmig gebogenen Luftkissenbahn hin und her schwingt, demonstrieren. Hier liegt die Gleichgewichtslage dann im tiefsten Punkt der Bahn, und die Schwerkraft (die bei der Feder durch die Auslenkung bei $x = 0$ kompensiert wird) wirkt dann als rücktreibende Kraft.

11.2 Darstellung von Schwingungen

Setzen wir für die komplexen Amplituden c und c^* in (11.4) ihre Polardarstellung

$$c = |c| e^{i\varphi}, \quad c^* = |c| e^{-i\varphi}$$

ein, so ergibt sich die zu (11.4a) äquivalente Darstellung

$$x(t) = |c| \left[e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} \right]. \quad (11.4b)$$

Nach der Eulerschen Formel für komplexe Zahlen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

können wir (11.4a) auch in der Form schreiben:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} C_1 = c + c^* \\ C_2 = i(c - c^*) \end{cases}. \quad (11.4c)$$

Eine vierte äquivalente Schreibweise ist

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (11.4d)$$

Ein Vergleich mit (11.4c) liefert:

$$C_1 = A \cdot \cos \varphi,$$

$$C_2 = A \cdot \sin \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \frac{C_2}{C_1} \quad \text{und}$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Alle vier Schreibweisen (11.4a–d) für die Lösung von (11.1) sind äquivalent (Abb. 11.2). Sie stellen eine *harmonische* Schwingung dar mit der Frequenz ω_0 und der **Amplitude** $A = 2|c|$ (Abb. 11.3).

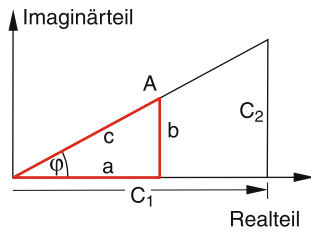


Abb. 11.2. Zur Relation zwischen den äquivalenten Darstellungen einer harmonischen Schwingung mit $c = a + ib$
 $A = C_1 + iC_2$

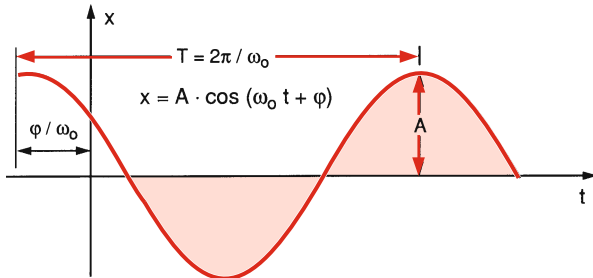


Abb. 11.3. Schwingungsdauer T , Amplitude A und Phasenverschiebung φ einer harmonischen Schwingung

Für unser obiges Beispiel mit den Randbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ ergeben alle Darstellungen (11.4a–d):

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

wie man sofort durch Einsetzen in (11.4a–d) nachprüfen kann.

Das Argument $(\omega_0 t + \varphi)$ der Kosinusfunktion in (11.4d), welches den momentanen Wert der Auslenkung $x(t)$ bestimmt, heißt **Phase** der Schwingung. Man kann den Zeitnullpunkt so wählen, dass $\varphi = 0$ wird, sodass wir statt (11.4d) erhalten:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t. \quad (11.4e)$$

Jedes Mal nach der Zeit $t = 2\pi/\omega_0 = T$ wird derselbe Wert von $x(t)$ erreicht, d. h.

$$x(t + T) = x(t).$$

Die Zeitspanne T heißt **Schwingungsdauer** oder Schwingungsperiode; $\nu = 1/T$ ist die **Schwingungsfrequenz** und $\omega = 2\pi\nu$ die **Kreisfrequenz** (siehe Abschn. 2.4). Der harmonisch schwingende Massenpunkt heißt **harmonischer Oszillator**.

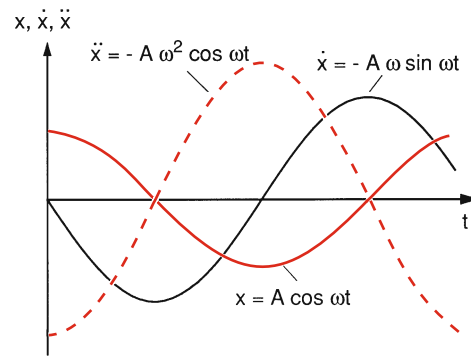


Abb. 11.4. Auslenkung $x(t)$, Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ einer harmonischen Schwingung

In Abb. 11.4 sind Auslenkung $x(t) = A \cdot \cos \omega t$, Geschwindigkeit $v(t) = -A\omega \sin \omega t$ und Beschleunigung $a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$ aufgezeichnet. Man sieht, dass die Beschleunigung immer gegenphasig zur Auslenkung ist (d. h. $x(t)$ ist um π gegen $a(t)$ phasenverschoben).

BEISPIEL

$x_1(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$ und $x_2(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ stellen zwei harmonische Schwingungen dar mit gleicher Frequenz ω_0 und gleicher Amplitude A , die jedoch um den Phasenwinkel φ gegeneinander verschoben sind. Die Maxima von $x_1(t)$ sind um das Zeitintervall $\Delta t = \varphi/\omega_0$ gegen die von $x_2(t)$ verschoben (Abb. 11.5).

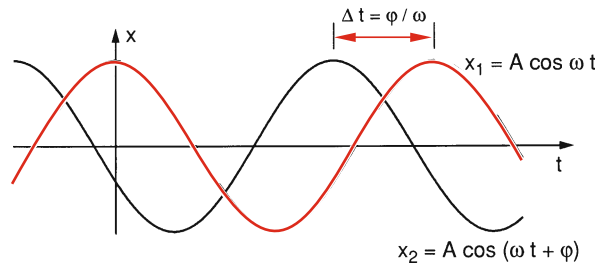


Abb. 11.5. Zwei harmonische Schwingungen gleicher Frequenz ω mit einer relativen Phasenverschiebung φ

11.3 Überlagerung von Schwingungen

In der Natur treten selten reine harmonische Schwingungen auf, sondern meistens mehr oder weniger

komplizierte Schwingungsformen. Es zeigt sich jedoch, dass man auch komplizierte nichtharmonische Schwingungen oft darstellen kann als Überlagerungen von harmonischen Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen, Amplituden oder Phasen. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit solchen Überlagerungen von Schwingungen befassen.

Sind die Schwingungsrichtungen aller überlagerten Schwingungen gleich (z. B. wenn alle Auslenkungen in der x -Richtung liegen), so sprechen wir von *eindimensionalen* Überlagerungen. Im allgemeinen Fall der zwei- oder dreidimensionalen Überlagerung können die Auslenkungen der einzelnen überlagerten Schwingungen beliebige Richtungen haben.

11.3.1 Eindimensionale Überlagerungen

Die Summe der einzelnen Schwingungen

$$x(t) = \sum_n x_n(t) = \sum_n a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (11.5)$$

hängt von den Amplituden a_n , den Frequenzen ω_n und den Phasen φ_n der Summanden ab.

a) Zwei Schwingungen gleicher Frequenz

Überlagert man die beiden Schwingungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

gleicher Frequenz ω , aber mit unterschiedlichen Amplituden a bzw. b und Phasen φ_1, φ_2 , so ergibt sich nach dem Additionstheorem der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) + x_2(t) &= A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \\ &= C \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (11.6)$$

mit den Relationen

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos \varphi_2, \\ B &= -a \cdot \sin \varphi_1 - b \cdot \sin \varphi_2, \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \\ \tan \varphi &= -B/A. \end{aligned}$$

Man erhält als Überlagerung (11.6) also wieder eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz, aber mit anderer Amplitude und Phase als die Teilwellen (Abb. 11.6).

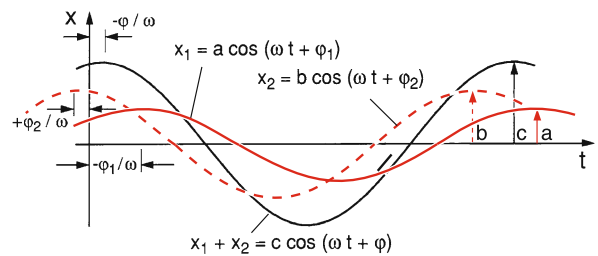


Abb. 11.6. Eindimensionale Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz ω aber verschiedener Phasen φ_1 und φ_2

Spezialfälle:

$$1. \quad a = b \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 = 2a \cos(\omega t + \varphi)$$

Beide Schwingungen addieren sich phasengleich und die resultierende Schwingung hat die doppelte Amplitude und gleiche Phase.

$$2. \quad a = b, \varphi_1 \neq \varphi_2$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a[\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)] \\ &= a[\cos \omega t (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \\ &\quad - \sin \omega t (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= b \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ &= b \cdot [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \\ \Rightarrow a(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) &= b \cdot \cos \varphi \\ a(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) &= b \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} = \tan \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\Rightarrow b = a \cdot \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\Rightarrow x(t) = a \cdot \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cos(\omega t + \varphi)$$

Die resultierende Amplitude ist geringer als $2a$ und die Gesamtphase ist von φ_1, φ_2 verschieden. Für $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ wird $x(t) \equiv 0$, d. h. die beiden gegenphasigen Teilschwingungen löschen sich aus!

b) Verschiedene Frequenzen, Schwebungen

Anders sieht es aus, wenn zwei Schwingungen verschiedener Frequenz überlagert werden (Abb. 11.7). Für gleiche Amplituden $a = b$

$$x_1 = a \cdot \cos \omega_1 t; \quad x_2 = a \cdot \cos \omega_2 t$$

erhält man wegen

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

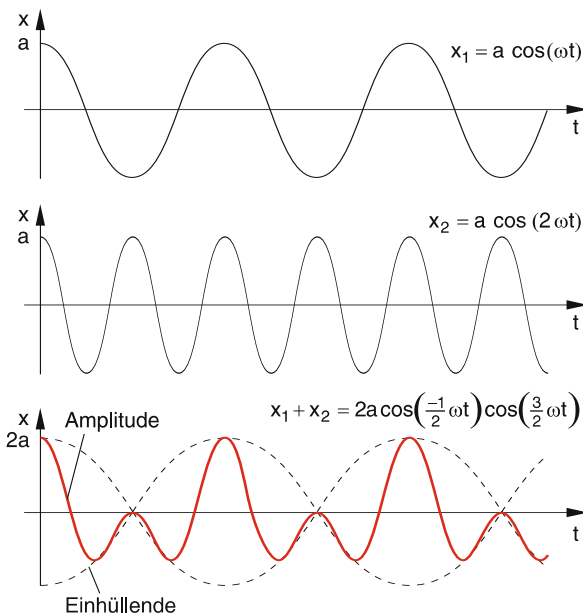


Abb. 11.7. Eindimensionale Überlagerung zweier Schwingungen unterschiedlicher Frequenz

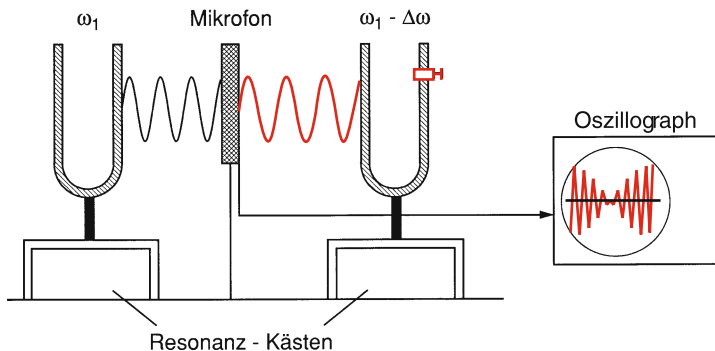


Abb. 11.9. Experimenteller Aufbau zur Demonstration von Schwebungen

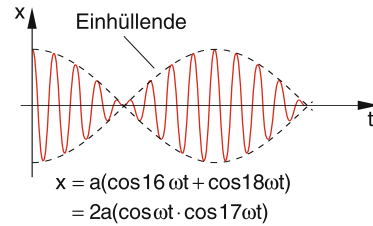


Abb. 11.8. Schwebung bei der Überlagerung zweier Schwingungen mit $\delta\omega \ll \omega$

die Überlagerungsschwingung:

$$x = 2a \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \quad (11.7)$$

Wenn sich die beiden Frequenzen nicht sehr unterscheiden, d.h. wenn $\omega_1 - \omega_2 \ll \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ gilt, kann man (11.7) auffassen als Schwingung mit der Mittenfrequenz $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, deren Amplitude $A(t) = 2a \cdot \cos[(\omega_1 - \omega_2) \cdot t/2]$ eine (gegen $T = 2\pi/\bar{\omega}$) langsam veränderliche Funktion ist (Abb. 11.8). Man nennt einen solchen Vorgang eine **Schwebung**.

Man kann Schwebungen im akustischen Bereich durch zwei Stimmgabeln, die etwas gegeneinander verstimmt sind, hörbar und über ein Mikrophon auch auf einem Oszillographen sichtbar machen (Abb. 11.9; siehe auch Abschn. 11.10).

c) Überlagerung mehrerer Schwingungen; Fourier-Analyse

Überlagert man N Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen ω_n , so sieht die Überlagerungs-

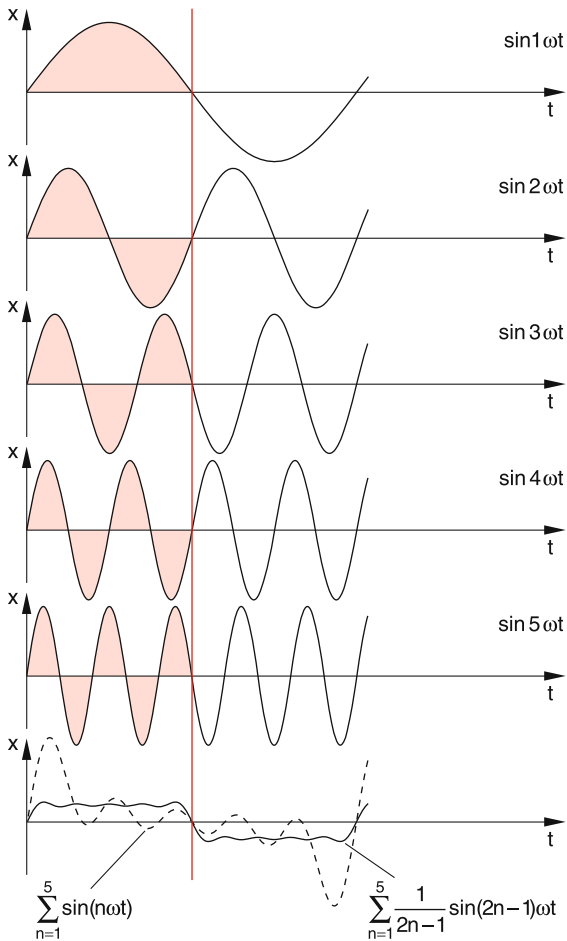


Abb. 11.10. Überlagerung von fünf Schwingungen $x_n = a \cdot \sin n\omega t$ gleicher Amplitude mit Frequenzen $n\omega$ bzw. $(2n-1)\omega$ ($n = 1 \dots 5$). Die Amplitude der Überlagerungsschwingung ist um den Normierungsfaktor $N \approx 3,66$ verkleinert

schwingung

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (11.8)$$

im Allgemeinen komplizierter aus (Abb. 11.10). Die Funktion $x(t)$ ist jedoch immer periodisch mit einer Periode $T = 2\pi/\omega_g$, wobei ω_g der „größte gemeinsame Teiler“ aller beteiligten Frequenzen ω_n ist (rationale Frequenzverhältnisse vorausgesetzt). Wenn gilt: $\omega_n = n \cdot \omega_1$ ($n = \text{ganzzahlig}$), so ist die Periode von $x(t)$: $T = 2\pi/\omega_1$.

Umgekehrt lässt sich jede periodische Funktion $f(t)$ mit $f(t) = f(t+T)$ immer in eine Summe von Sinus- oder Kosinusfunktionen zerlegen, deren Frequenzen $\omega_n = n \cdot \omega_1$ ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ω_1 sind [11.1], d. h. es gilt:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_n). \quad (11.9)$$

Die Schwingung $a_1 \cos \omega_1 t$ heißt **Grundschwingung** oder Fundamentalschwingung, die höherfrequenten Anteile heißen **Oberschwingungen**. In der Akustik spricht man auch vom *Grundton* und den *Obertönen*.

Die Zerlegung (11.9) einer periodischen Funktion $f(t)$ in ihre harmonischen Schwingungsanteile heißt **Fourierzerlegung** oder auch **Fourieranalyse**. Ihre allgemeine Darstellung wird im Anhang A.4 erläutert.

Die experimentelle Fourier-Analyse mechanischer Schwingungen lässt sich mit dem in Abb. 11.11 gezeigten Zungenfrequenzmesser durchführen. Er besteht aus einer Reihe von Blattfedern, deren Resonanzfrequenzen auf $n \cdot \omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) abgestimmt sind. Werden sie durch eine mechanische Schwingung angeregt, so wird die Schwingungsamplitude der n -ten Blattfeder mit der Resonanzfrequenz $n \cdot \omega_1$ proportional zur Amplitude der n -ten Oberschwingung der

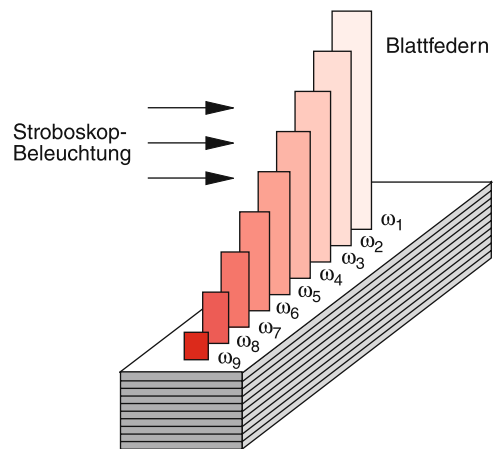


Abb. 11.11. Zungenfrequenzmesser

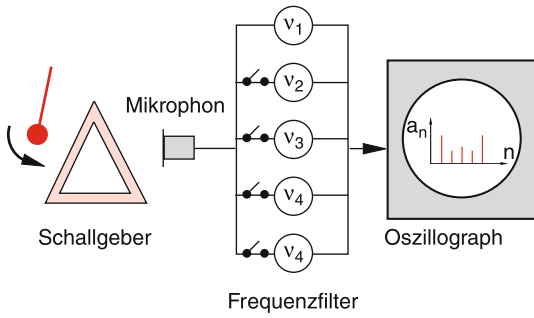


Abb. 11.12. Elektrischer Nachweis mechanischer Schwingungen und Fourier-Zerlegung mit Hilfe von Frequenzfiltern

in $f(t)$ enthaltenen harmonischen Oberschwingungen sein. Unser Ohr ist mit einem solchen sehr feinen Zungenfrequenzmesser ausgestattet, mit dessen Hilfe wir Tonhöhen feststellen und Klänge analysieren können (siehe Abschn. 11.5 und 11.14).

Eleganter lassen sich mechanische Schwingungen nachweisen, indem man sie durch ein Mikrofon in elektrische Spannungssignale $U(t)$ umwandelt, die dann mit Hilfe parallel geschalteter elektrischer Filter, welche auf die Frequenzen $n \cdot \omega_1$ abgestimmt sind (siehe Bd. 2, Abschn. 6.4), in ihre Fourier-Anteile zerlegt und auf einem Oszillographen sichtbar gemacht werden können (Abb. 11.12).

In Abb. 11.13 ist die Fourier-Zerlegung (11.9) der Rechteckfunktion

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{für } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{für } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\text{und } f(t+T) = f(t);$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{A}{2}; \quad a_{2n-1} = \frac{2A}{(2n-1)\pi}; \quad a_{2n} = 0$$

gezeigt mit der entsprechenden Größenverteilung der Koeffizienten a_n (siehe auch (Abb. 11.10)).

Anmerkung

Auch eine beliebige, nicht unbedingt periodische Funktion $f(t)$ lässt sich als Überlagerung von periodischen Funktionen darstellen. Man erhält dann statt der

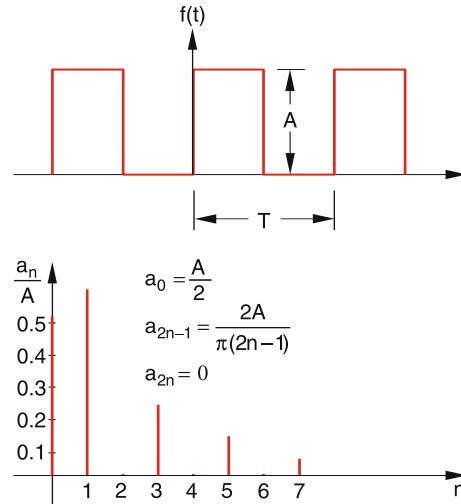


Abb. 11.13. Fourier-Zerlegung einer Rechteck-Mäanderfunktion

Summen die Integrale [11.2]

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t d\omega$$

mit den Koeffizienten

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

11.3.2 Zweidimensionale Überlagerung, Lissajous-Figuren

Überlagert man zwei lineare zueinander senkrechte Schwingungen gleicher Frequenz ω

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\omega t), \\ y &= b \cdot \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (11.10)$$

deren relative Phasenverschiebung φ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos \omega t; \quad \frac{y}{b} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi \\ &= \frac{x}{a} \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi. \end{aligned}$$

Umordnen ergibt:

$$\sin \omega t \sin \varphi = \frac{x}{a} \cos \varphi - \frac{y}{b}$$

$$\cos \omega t \sin \varphi = \frac{x}{a} \sin \varphi.$$

Elimination der Zeit durch Quadrieren und Addieren liefert:

$$\sin^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi.$$

Dies kann umgeformt werden in die Ellipsengleichung für die Bahnkurve des schwingenden Massenpunktes in der x - y -Ebene

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} - \frac{2xy \cos \varphi}{a^* b^*} = 1, \quad (11.11)$$

deren Achsen schräg zur x - bzw. y -Achse liegen und deren Achsenabschnitte $a^* = a \cdot \sin \varphi$ und $b^* = b \cdot \sin \varphi$ von den Amplituden a und b sowie von der Phasenverschiebung φ zwischen den Teilschwingungen abhängen (Abb. 11.14).

Für den Spezialfall $\varphi = 0$ entartet die Ellipse in die Gerade $y = (b/a)x$. Für $\varphi = \pi/2$ ergibt sich eine Ellipse, deren Achsen $a^* = a$ und $b^* = b$ in der x - bzw. y -Richtung liegen. Ist $\varphi = \pi/2$ und außerdem $a = b$, so wird die Bahnkurve ein Kreis.

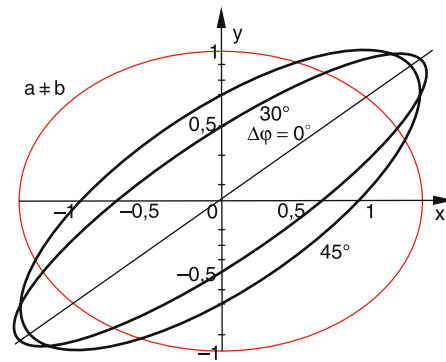
Man kann solche überlagerten Schwingungen mit einem Fadenpendel vorführen, dessen Masse aus einer Hohlkugel aus magnetischem Material besteht, wenn durch äußere Elektromagnete die Schwingungen (11.10) in x - und y -Richtungen angeregt werden. Wird der Pendelkörper mit weißem Sand gefüllt, der aus einer engen Öffnung fließen kann, so sieht man die Bahnkurve auf einer unter dem Pendel ausgelegten Fläche aus schwarzem Samt. Einfacher und variabler lassen sich überlagerte Schwingungen mit einem Oszillographen vorführen. Die Abb. 11.14 zeigt einige Beispiele von (11.10) für $a = b$ und $a \neq b$ bei verschiedenen Werten von φ .

Überlagert man zwei zueinander senkrechte Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen

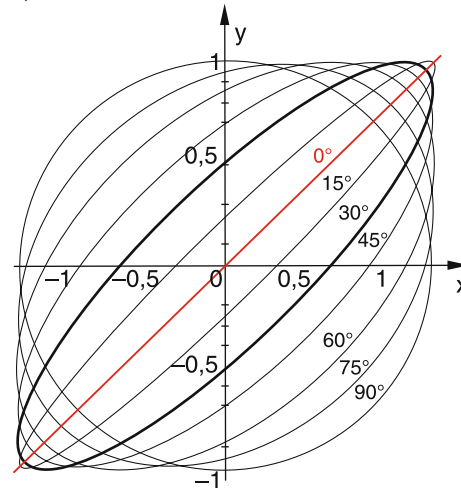
$$x = a \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = b \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (11.12)$$

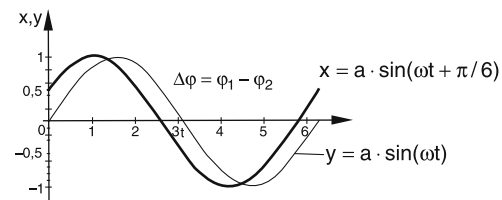
so beschreibt die Bahnkurve im Allgemeinen eine komplizierte Bahn, die nur dann eine geschlossene Kurve darstellt, wenn ω_1/ω_2 eine rationale Zahl ist (*Lissajous-Figur*). Bei irrationalem Verhältnis ω_1/ω_2



a)



b) Phasenverschiebung
 $\Delta\varphi = 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90$ Grad



c)

Abb. 11.14a–c. Bahnkurven $y(x)$ der Schwingungen $y(t) = a \cdot \sin \omega t$ und $x(t) = b \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi)$ für verschiedene Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$: (a) für $a \neq b$ und (b) für $a = b$ (c) Schwingungen $y(t)$ und $x(t)$ für $\Delta\varphi = \pi/6$

füllt die Bahnkurve im Laufe der Zeit die gesamte Fläche des Rechtecks

$$-a \leq x \leq +a; \quad -b \leq y \leq +b$$

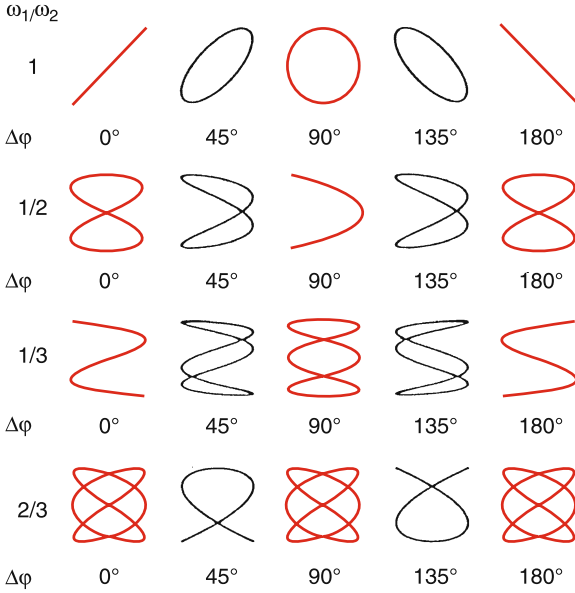


Abb. 11.15. Lissajous-Figuren $y = f(x)$ der Schwingungen (11.12) für verschiedene Werte des Frequenzverhältnisses ω_1/ω_2 und der Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ($\varphi_1 = 0$)

aus [11.5]. In Abb. 11.15 sind für einige Werte von ω_1/ω_2 und $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ die entsprechenden Lissajous-Figuren illustriert.

11.4 Der freie gedämpfte Oszillator

Lässt man die Masse des freien Oszillators in Abb. 11.1 in einer Flüssigkeit schwingen (Abb. 11.16), so kann man die Reibung nicht mehr vernachlässigen und zur rücktreibenden Federkraft $\vec{F} = -D \cdot \vec{x}$ kommt noch die Stokessche Reibungskraft

$$\vec{F}_r = -6\pi\eta r \cdot \vec{v} \quad (11.13)$$

für eine mit der Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ bewegte Kugel hinzu (siehe Abschn. 8.5).

Ganz allgemein können wir Schwingungen, bei denen die Reibungskraft $\vec{F}_r = -b \cdot \dot{x} \hat{e}_x$ entgegengerichtet zum Geschwindigkeitsvektor und proportional zum Geschwindigkeitsbetrag $|\dot{v}|$ ist, durch die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x - b \cdot \dot{x} \quad (11.14)$$

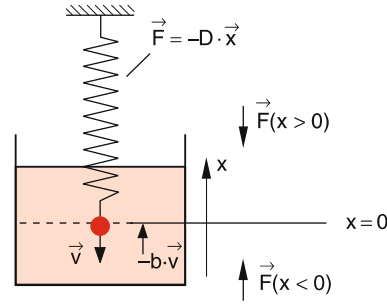


Abb. 11.16. Gedämpfter Oszillator

beschreiben. Mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = D/m, \quad 2\gamma = b/m$$

erhalten wir aus (11.14) die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.15)$$

der gedämpften Schwingung mit der Dämpfungskonstanten γ . Wir machen wie in Abschn. 11.1 den Lösungsansatz

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

und erhalten durch Einsetzen in (11.15) für die Größe λ die Bestimmungsgleichung:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (11.16)$$

sodass analog zu (11.3) die allgemeine Lösung von (11.15) lautet:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (11.17a)$$

Das zeitliche Verhalten von $x(t)$ hängt nun ganz entscheidend ab vom Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{\text{mittlere Rückstellkraft}}{\text{mittlere Reibungskraft}} &= \frac{\langle |D \cdot x| \rangle}{\langle |b \cdot \dot{x}| \rangle} \\ &= \frac{m\omega_0^2 \sqrt{\bar{x}^2}}{2\gamma m \sqrt{\bar{\dot{x}}^2}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}, \end{aligned}$$

d. h. von der relativen Größe von ω_0 und γ .
Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

a) $\gamma < \omega_0$, d. h. schwache Dämpfung

Mit der Abkürzung $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ wird

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = -\gamma \pm i\omega,$$

und die allgemeine Lösung (11.17) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (c e^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t}) \\ &= A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (11.17b)$$

wobei wie im vorigen Abschnitt gilt:

$$A = 2|c| \quad \text{und} \quad \tan \varphi = -\frac{i(c - c^*)}{c + c^*} = \frac{\text{Im}\{c\}}{\text{Re}\{c\}}.$$

Gleichung (11.17) stellt eine gedämpfte Schwingung dar, deren Amplitude $A \cdot \exp(-\gamma t)$ exponentiell abklingt. Sie ist in Abb. 11.17 für die Randbedingungen $x(0) = A$ und $\dot{x}(0) = v_0$ dargestellt, für die sich aus Gleichung (11.17) die Weg-Zeit-Funktion

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (11.17c)$$

und mit $v_0 = -A \cdot \gamma$ die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} \left[\cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma} \sin \omega t \right] \quad (11.17d)$$

ergibt.

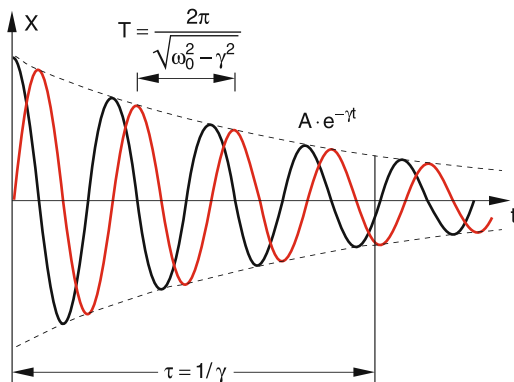


Abb. 11.17. Gedämpfte Schwingung mit Dämpfungskonstante γ und Schwingungsdauer T für die Anfangsbedingungen $x(0) = A$ (schwarz) und $x(0) = 0$ (rot)

Zwei aufeinander folgende Maxima der gedämpften Schwingung haben das Amplitudenverhältnis

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\gamma T} \quad (11.18)$$

mit $T = 2\pi/\omega$.

Der natürliche Logarithmus des inversen Verhältnisses

$$\ln \left[\frac{x(t)}{x(t+T)} \right] = \gamma \cdot T = \delta$$

heißt **logarithmisches Dekrement** δ .

Nach der Zeit $\tau = 1/\gamma$ ist die Einhüllende $f(t) = A e^{-\gamma t}$ der gedämpften Schwingung auf $1/e$ des Anfangswertes abgesunken.

Die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ der gedämpften Schwingung bei gleicher Rückstellkraft ist *kleiner* als die der ungedämpften Schwingung. Die Frequenzverschiebung wächst mit steigender Dämpfung.

BEISPIELE

1. $\gamma/\omega_0 = 0,01 \Rightarrow (\omega_0 - \omega) = 5 \cdot 10^{-5} \omega_0$; $\delta = 0,06$, d. h. nach etwa 16 Schwingungsperioden fällt die Amplitude auf $1/e$ ab, d. h. $\tau = 16T$.
2. $\gamma/\omega_0 = 0,1 \Rightarrow (\omega_0 - \omega) \approx 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$; $\delta = 0,6$, d. h. $\tau = 1,6T$.

b) $\gamma > \omega_0$, d. h. starke Dämpfung

Die Koeffizienten (11.16)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \alpha \\ \text{mit } \alpha &= \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

sind jetzt reell. Die allgemeine Lösung (11.17) wird daher:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}]. \quad (11.19a)$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ ergibt sich: $c_1 + c_2 = 0$, und $c_1 - c_2 = v_0/\alpha$, sodass man die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{2\alpha} e^{-\gamma t} [e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}] \quad (11.19b)$$

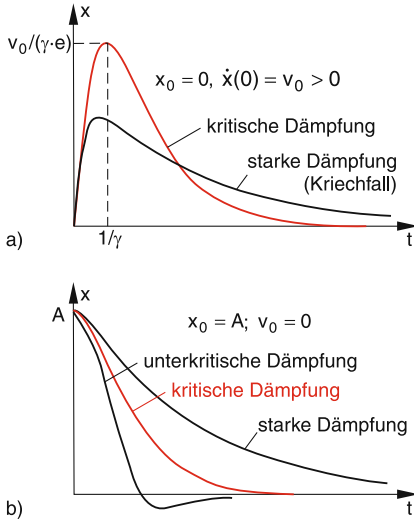


Abb. 11.18. Auslenkung $x(t)$ des gedämpften Oszillators für kritische (rote Kurve, aperiodischer Grenzfall) und überkritische Dämpfung (schwarze Kurve, Kriechfall) Anfangsbedingungen (a) $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$; (b) $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$

erhält. Dies lässt sich mit Hilfe der hyperbolischen Sinusfunktion $\sinh(\alpha t) = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$ schreiben als

$$x(t) = \frac{v_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \sinh(\alpha t). \quad (11.19c)$$

Die „Schwingung“ in (11.19c) besteht aus einer einzigen Auslenkung, die für $t \rightarrow \infty$ langsam gegen Null geht (Abb. 11.18a). Man nennt diesen Fall b) auch *Kriechfall*, weil die Amplitude nach Erreichen ihres Maximums nur sehr langsam gegen Null „kriecht“.

Für $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ ergibt sich

$$c_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha} A; \quad c_2 = \frac{\alpha - \gamma}{2\alpha} A$$

$$x(t) = \frac{A}{\alpha} e^{-\gamma t} [\alpha \cosh(\alpha t) + \gamma \sinh(\alpha t)] \quad (11.19d)$$

c) $\gamma = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall)

Unsere beiden Lösungsparameter (11.16) sind jetzt entartet, d. h. es gilt:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\gamma.$$

Die allgemeine Lösung (11.17a) der Differentialgleichung (11.15) muss aber zwei freie Integrationskonstanten enthalten. Deshalb wird der Ansatz

$$x(t) = C(t) \cdot e^{\lambda t} \quad (11.20)$$

mit dem zeitabhängigen Vorfaktor $C(t)$ gemacht. Geht man damit in (11.15) ein, so erhält man für die Funktion $C(t)$ die Differentialgleichung:

$$\ddot{C} + (2\lambda + 2\gamma)\dot{C} + (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)C = 0.$$

Für die Lösung $\lambda = -\gamma = -\omega_0$ werden die Vorfaktoren von \dot{C} und C Null, sodass aus

$$\ddot{C} = 0 \quad \text{folgt:} \quad C = c_1 t + c_2.$$

Unsere allgemeine Lösung wird daher:

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\gamma t}. \quad (11.21)$$

Sie ist für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} \quad (11.21a)$$

in Abb. 11.18a dargestellt.

Die Schwingung ist wie im Kriechfall b) zu nur einer Auslenkung entartet, die jedoch in Abb. 11.18a mit linearer Steigung beginnt und dem Nullpunkt nach Erreichen des Maximums schneller zustrebt als im Fall $\gamma > \omega_0$. Das Maximum liegt bei $t(x_{\max}) = 1/\gamma$. Für $t = 5/\gamma$ ist bereits die Amplitude auf $x(t) \approx 0,1 x_{\max}$ abgeklungen.

Für die Anfangsbedingungen $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ ergibt sich aus (11.21) die Lösungsfunktion

$$x(t) = A(1 + \gamma t) e^{-\gamma t}, \quad (11.21b)$$

die bei $x(0) = A$ beginnt und mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ (d. h. mit waagerechter Tangente in Abb. 11.18b) startet und dann gegen Null geht.

11.5 Erzwungene Schwingungen

Wird das obere Ende der Feder in Abb. 11.16 nicht fest montiert, sondern durch eine periodisch wirkende Kraft $F_a = F_0 \cdot \cos \omega t$ auf- und abbewegt (Abb. 11.19), so wirkt auf die Masse m (durch die Feder übertragen) eine zusätzliche Kraft. Die Bewegungsgleichung heißt daher

$$m \cdot \ddot{x} = -Dx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \quad (11.22a)$$

welche mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad K = \frac{F_0}{m}$$

in die *inhomogene* Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K \cdot \cos \omega t \quad (11.22b)$$

übergeht, die sich von der *homogenen* Gleichung (11.15) der freien gedämpften Schwingung durch das ortsunabhängige Glied $K \cos \omega t$ der äußeren Kraft unterscheidet.

Die allgemeine Lösung einer solchen inhomogenen linearen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung (11.17a) der homogenen (11.15) plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung [11.6]. Sie muss daher die Form haben

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.23a)$$

wobei $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Frequenz der freien gedämpften Schwingung (11.15) ist (schwache Dämpfung).

Für genügend lange Zeiten $t \gg 1/\gamma$ wird die Amplitude $A_1 \cdot \exp(-\gamma t)$ des ersten Terms so klein, dass wir sie gegenüber dem zweiten Term vernachlässigen können. Dieser zweite Term hängt von der Frequenz ω der äußeren Kraft ab, die ihre Schwingungsfrequenz dem System aufzwingt (erzwungene Schwingung).

Der zweite Term gibt daher den durch die äußere periodische Kraft bewirkten *stationären* Schwingungszustand an, während die Überlagerung (11.23a) für Zeiten $t \lesssim 1/\gamma$ den *Einschwingvorgang* beschreibt.

a) Stationärer Zustand

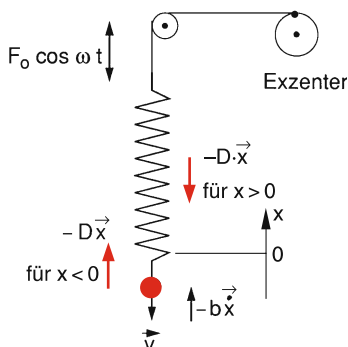


Abb. 11.19.
Erzwungene Schwingung

Wir wollen zuerst diesen stationären Zustand der erzwungenen Schwingungen behandeln, bei dem die gedämpfte Eigenschwingung des Systems bereits abgeklungen ist. Wir machen deshalb den Ansatz

$$x(t) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.23b)$$

der als zwei frei zu bestimmende Parameter die Amplitude A_2 und die Phasenverschiebung φ der erzwungenen Schwingung enthält. Geht man mit (11.23b) in (11.22b) ein, so ergibt sich durch Anwenden des Additionstheorems für Winkelfunktionen nach Ordnen der Glieder:

$$\begin{aligned} &[(\omega_0^2 - \omega^2) A_2 \cos \varphi - 2\gamma A_2 \omega \sin \varphi - K] \cos \omega t \\ &- [(\omega_0^2 - \omega^2) A_2 \sin \varphi + 2\gamma A_2 \omega \cos \varphi] \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für beliebige Zeiten t gelten soll, müssen die beiden Vorfaktoren in eckigen Klammern identisch Null sein. Daraus erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\gamma \omega \cos \varphi = 0, \quad (11.24a)$$

$$A_2 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2A_2 \gamma \omega \sin \varphi - K = 0. \quad (11.24b)$$

Aus (11.24a) ergibt sich:

$$\tan \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.25)$$

Die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ einer erzwungenen Schwingung mit $\gamma > 0$ wächst für $\omega \leq \omega_0$ von 0 bis $-\pi/2$, für $\omega \geq \omega_0$ von $-\pi/2$ bis $-\pi$. Sie ist negativ, d. h. die erzwungene Schwingung „hinkt“ der Erregerschwingung nach!

Die Phasenverschiebung φ zwischen erzwungener Schwingung und Erregerschwingung hängt von der Dämpfung γ , der Erregerfrequenz ω und ihrer Lage zur Eigenfrequenz ω_0 ab (Abb. 11.20). Für $\omega = 0$ ist $\varphi = 0$, für wachsende Werte von ω wird die Verzögerung ($\varphi < 0$) der erzwungenen Schwingung immer größer, erreicht bei $\omega = \omega_0$ den Wert $\varphi = -\pi/2$ und für $\omega \rightarrow \infty$ den maximalen Wert $\varphi = -\pi$.

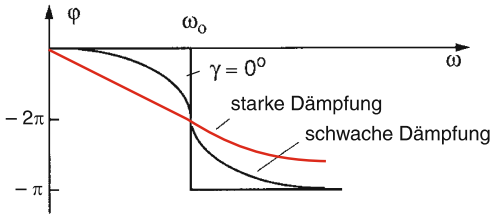


Abb. 11.20. Phasenverschiebung φ zwischen erzwungener und Erregerschwingung für verschiedene Dämpfungen

Lösen wir (11.24b) nach $A_2 \sin \varphi$ bzw. $A_2 \cos \varphi$ auf, erhalten wir bei Verwendung von (11.24a):

$$A_2 \sin \varphi = -\frac{2\gamma\omega K}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2},$$

$$A_2 \cos \varphi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)K}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}.$$

Quadrieren und Addieren beider Gleichungen liefert mit $K = F_0/m$

$$A_2(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad (11.26)$$

Anmerkung

Mit einem komplexen Ansatz

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = K \cdot e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad z = x + iy \quad (11.27)$$

anstelle der reellen Gleichung (11.22) kommt man schneller und eleganter zu den Ergebnissen (11.24–26). Man erhält durch Einsetzen des Lösungsansatzes $z = A \cdot e^{i\omega t}$ in (11.27) sofort die komplexe Amplitude

$$\begin{aligned} A &= \frac{K \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \\ &= a + ib = |A| \cdot e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (11.27a)$$

mit dem Realteil

$$a = \frac{K(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = A_2 \cos \varphi \quad (11.27b)$$

und dem Imaginärteil

$$b = -\frac{2K\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = A_2 \sin \varphi \quad (11.27c)$$

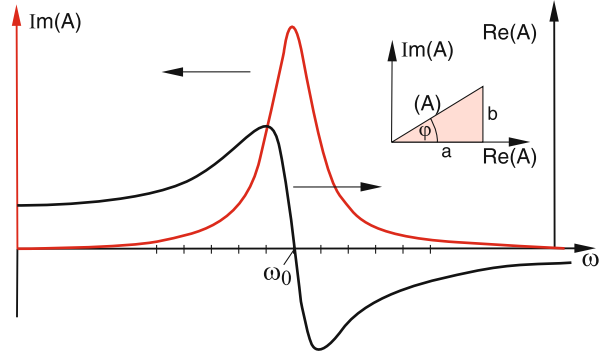


Abb. 11.21. Komplexe Darstellung der erzwungenen Schwingung mit $\text{Re}(A)$ und $\text{Im}(A)$

und daraus die Phase $\tan \varphi = b/a$ und die reelle Amplitude $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Abb. 11.21). Man nutzt bei dieser Vorgehensweise aus, dass bei linearen Gleichungen komplexer Größen sowohl Real- als auch Imaginärteil der komplexen Lösung beide für sich auch Lösungen der Gleichung sind. Man kann zeigen (siehe Aufgabe 11.3), dass nur der Imaginärteil b dauernd Energie verbraucht, die von der treibenden Kraft geliefert wird. Der Realteil führt zu einer periodischen Energieaufnahme und Abgabe.

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung hängt ab

- von der Amplitude $K = F_0/m$ der äußeren Kraft,
- von der Dämpfung γ ,
- von der Frequenz ω der Erregerschwingung und der Eigenfrequenz ω_0 des erregten Systems.

Differenziert man den Radikanden in (11.26) nach ω und setzt die Ableitung Null, so erhält man das Minimum des Nenners, also das Maximum der Amplitude A_2 für

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (11.27d)$$

Dies entspricht *nicht genau* der Resonanzfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ des freien gedämpften Oszillators, weicht aber für $\gamma \ll \omega_0$ nicht stark von ω_1 ab.

Die Resonanzkurve $A_2(\omega)$ der erzwungenen Schwingung ist in Abb. 11.22 für verschiedene Werte des Verhältnisses γ/ω_0 aufgetragen. Man beachte, dass die Kurven nicht genau symmetrisch um ω_0 und auch nicht um ω_R liegen. Die Unsymmetrie wird mit wachsendem γ/ω_0 größer.

Wir wollen noch die Halbwertsbreite der Resonanzkurven bestimmen. Die Amplitude $A(\omega)$ in (11.26) wird maximal für die Resonanzfrequenz ω_R in (11.27d) für die der Nenner den Wert $2\gamma(\omega_R^2 + \gamma^2)^{1/2}$ annimmt. Damit die Amplitude bei den Frequenzen $\omega_{1,2}$ auf

$A_R/2$ absinkt, muss der Radikand in (11.26) den Wert

$$(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (2\gamma\omega_{1,2})^2 = 16\gamma^2(\omega_R^2 + \gamma^2)$$

haben. Daraus folgt:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_R^2 \pm 2\gamma\sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2}.$$

Die volle Halbwertsbreite ist dann $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

$$\Delta\omega = \left[\omega_R^2 + 2\gamma\sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2} \right]^{1/2} - \left[\omega_R^2 - 2\gamma\sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2} \right]^{1/2}. \quad (11.27e)$$

Die Asymmetrie der Kurven $A_2(\omega)$ und die Verschiebung des Maximums wird deutlicher in Abb. 11.23, in der ein größerer Frequenzbereich als Abszisse gewählt und die Ordinate gestaucht ist.

Für $\gamma \ll \omega_R$ gilt wegen $\omega_{1,2}^2 - \omega_R^2 = (\omega_{1,2} + \omega_R) \cdot (\omega_{1,2} - \omega_R) \approx 2\omega_R \cdot (1/2)\Delta\omega$

$$\Delta\omega = (2\gamma/\omega_R)\sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2} \approx 2\gamma \cdot \sqrt{3}. \quad (11.27f)$$

Für $\gamma = 0$ wird $\Delta\omega = 0$ und in (11.26) $A_2 = \infty$ für $\omega = \omega_0$ (Resonanzkatastrophe). Die Dämpfung begrenzt die Amplitude A_2 auf einen solchen Wert, bei dem die Reibungsenergie pro Zeiteinheit die durch die äußere Kraft zugeführte Leistung gerade kompensiert (siehe Abschn. 11.15).

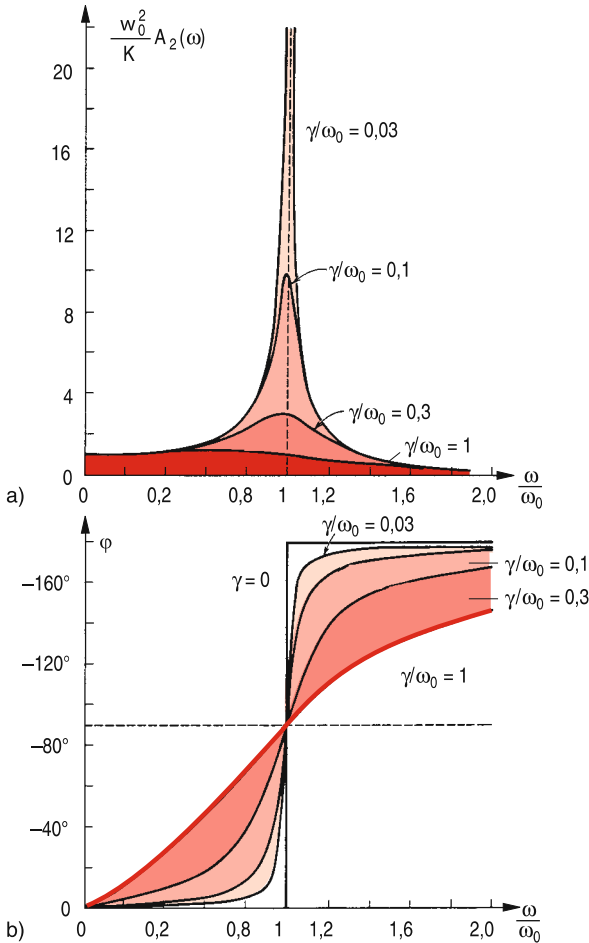


Abb. 11.22. (a) Resonanzkurve der erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen. Man beachte die Verschiebung des Maximums mit zunehmender Dämpfung. (b) Quantitativer Verlauf der Phasenverschiebung

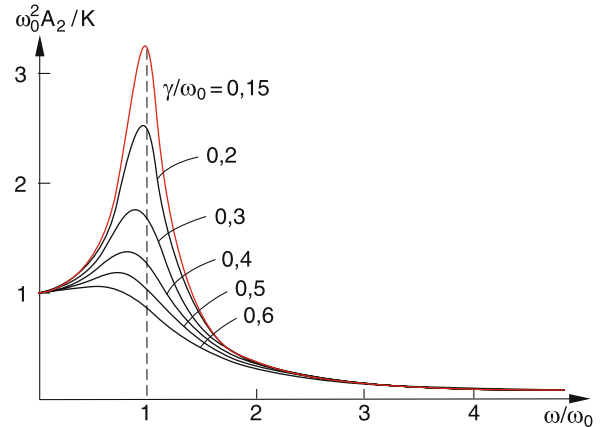


Abb. 11.23. Normierte Amplitude $|A_2(\omega)|$ einer erzwungenen Schwingung

b) Einschwingvorgang

In der stationären Phase der erzwungenen Schwingung taucht die Eigenfrequenz des freien gedämpften Oszillators nur noch indirekt auf: Das System schwingt mit der Erregerfrequenz ω , aber die Differenz zwischen ω und der Erregerfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ bestimmt noch gemäß (11.27) Amplitude und Phase, aber nicht mehr die Frequenz der Schwingung.

Dies ist anders während der Einschwingphase, in der die Eigenschwingung noch nicht abgeklungen ist. Die charakteristischen Klangfarben der verschiedenen Musikinstrumente werden z. B. im Wesentlichen während der Einschwingphase erzeugt (siehe Abschn. 11.15).

11.6 Energiebilanz bei der Schwingung eines Massenpunktes

Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators ist gemäß (11.4e):

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t. \quad (11.28a)$$

Ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2. \quad (11.28b)$$

Für die potentielle Energie erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\text{p}} &= \int_0^x F dx = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t \end{aligned} \quad (11.29a)$$

mit dem Mittelwert

$$\overline{E_{\text{p}}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} D x^2 dt = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2. \quad (11.29b)$$

Die Summe von kinetischer und potentieller Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{p}}(t) &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = E = \text{const} \quad (11.29c) \end{aligned}$$

ist zu jedem Zeitpunkt gleich der konstanten Gesamtenergie (Energiesatz!).

Die Mittelwerte $\overline{E_{\text{kin}}}$ und $\overline{E_{\text{p}}}$ sind bei der harmonischen Schwingung gleich. Sie sind proportional zum Quadrat von Schwingungsamplitude A und Frequenz ω_0 .

BEISPIEL

Eine Masse $m = 1 \text{ g}$, die mit der Frequenz $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ und der Amplitude $A = 1 \text{ cm}$ schwingt, hat eine Energie $E = (m/2)\omega_0^2 A^2 \approx 2 \text{ J}$.

Bei der gedämpften Schwingung wird pro Schwingungsperiode T ein Teil der Schwingungsenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{p}}$ wegen der Reibung in Wärmeenergie umgewandelt. Dies lässt sich erkennen, wenn man (11.14) mit \dot{x} multipliziert. Man erhält:

$$m\ddot{x}\dot{x} + D x \dot{x} = -b \dot{x}^2. \quad (11.30)$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2 \right) = -b \dot{x}^2 = -2\gamma m \dot{x}^2. \quad (11.31)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie. Die pro Schwingungsperiode T in Wärmeenergie W umgewandelte Schwingungsenergie ist dann mit (11.17c):

$$\begin{aligned} W &= -2\gamma m \int_0^T \dot{x}^2 dt \\ &= -2\gamma m \int_0^T A^2 e^{-2\gamma t} (\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t)^2 dt \\ &= \frac{m}{2} A^2 (\omega_0^2 + \gamma^2) (e^{-2\gamma T} - 1), \end{aligned} \quad (11.32)$$

wobei A die Amplitude beim ersten Maximum zur Zeit $t = 0$ ist. Für schwache Dämpfung ($\gamma \ll \omega_0$) ist

$\gamma \cdot T \ll 1$, und (11.32) ergibt wegen $e^{-x} \approx 1 - x$ die Näherung:

$$W \approx -mA^2 (\omega_0^2 + \gamma^2) \cdot \gamma T. \quad (11.33)$$

Die Reibungsverluste steigen also für $\gamma \ll \omega_0$ proportional zum Reibungskoeffizienten γ an, für $\gamma \gtrsim \omega_0$ sogar stärker als linear.

Die Energiebilanz der *erzwungenen* Schwingung erkennt man am besten, wenn man (11.22) mit \dot{x} multipliziert. Dies ergibt analog zu (11.31)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\dot{x} + Dx\dot{x} &= -b\dot{x}^2 + F(t)\dot{x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2 \right) &= -b\dot{x}^2 + F(t) \cdot \dot{x}. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Die linke Seite beschreibt die zeitliche Änderung von kinetischer plus potentieller Energie des Systems, die durch die Reibungsenergie $-b\dot{x}^2$ vermindert und durch die in das System gesteckte Energie $F(t)\dot{x}$ vergrößert wird. Im stationären Zustand ist die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{p}} = \text{const.}$ Die von außen zugeführte Energie wird dann vollständig in Reibungswärme umgewandelt.

Für die vom System pro Schwingungsperiode T aufgenommene Energie gilt:

$$\begin{aligned} W &= \int_t^{t+T} b\dot{x}^2 dt = b\omega^2 A_2^2 \int_t^{t+T} \sin^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{b}{2} \omega^2 A_2^2 T. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Die aufgenommene Leistung ist daher mit $b = 2\gamma m$:

$$P = \frac{W}{T} = m\gamma\omega^2 A_2^2. \quad (11.36)$$

Sie ist proportional zum Dämpfungsfaktor γ und zum Quadrat von Frequenz ω und Schwingungsamplitude A_2 .

Setzt man für A_2 den Ausdruck (11.26) ein, so sieht man, dass $dP/d\omega = 0$ wird für $\omega = \omega_0$, d.h. im Resonanzfall erreicht die in das System hineingesteckte Energie ein Maximum

$$P_{\text{max}}(\omega_0) = \frac{F_0^2}{4m \cdot \gamma}. \quad (11.37)$$

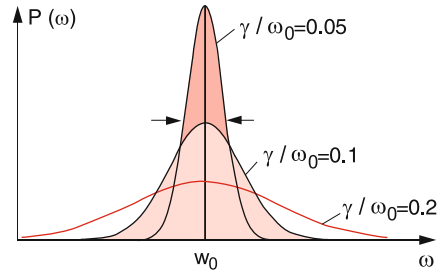


Abb. 11.24. Aufgenommene Leistung $P(\omega)$ der gedämpften erzwungenen Schwingung

Die Kurve der aufgenommenen Leistung $P(\omega)$ hat also, anders als die Schwingungsamplitude, immer ein Maximum bei $\omega = \omega_0$ (Abb. 11.24).

Die Resonanz von erzwungenen Schwingungen spielt eine große Rolle bei Maschinen, Autos und allen anderen technischen Apparaten, auf die eine periodische Kraft wirkt. Man versucht, die Eigenfrequenzen der Systeme so zu wählen, dass sie möglichst weit entfernt sind von der Frequenz ω der erregenden Kraft.

11.7 Parametrischer Oszillator

In der Schwingungsgleichung (11.1b)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

des freien Oszillators können wir die Eigenfrequenz ω_0 als einen Parameter auffassen, dessen Wert durch die Eigenschaften des Systems (hier die Federkonstante $D = m\omega_0^2$ und die Masse m) bestimmt sind.

Wenn jetzt der Parameter ω_0 nicht zeitlich konstant ist, sondern im Laufe der Zeit eine periodische Änderung erfährt, müssen sich die Eigenschaften des Oszillators, wie Amplitude, Frequenz und Phase ändern. Ein solches schwingendes System, dessen Schwingungsparameter sich zeitlich ändern, heißt **parametrischer Oszillator**. Seine Bewegungsgleichung heißt dann:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (11.38)$$

Ein einfaches Beispiel ist ein Fadenpendel, dessen Fadenlänge eine periodische Variation (z. B. durch

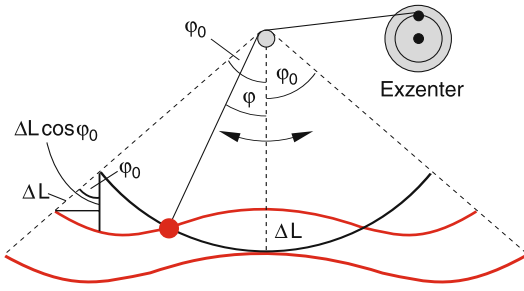


Abb. 11.25. Parametrischer Oszillator als Fadenpendel mit periodisch variiert Fadenlänge. Die untere rote Kurve entspricht der Bahn des Schwerpunktes bei der Kinderschaukel, die obere dem hier diskutierten Fall der Fadenlängen-Modulation

einen rotierenden Exzenter) erfährt (Abb. 11.25). Wenn Frequenz f und Phase φ dieser Variation richtig gewählt werden, kann sich ein Aufschaukeln der Schwingungsamplitude ergeben. Wenn z. B. für $\varphi = 0$ die Fadenlänge um ΔL verkürzt wird, gewinnt das System die potentielle Energie $mg\Delta L$. Wird L an den Umkehrpunkten ($\varphi = \varphi_0$) wieder um ΔL verlängert, so verringert sich E_p nur um $mg\Delta L \cos \varphi_0$. Insgesamt wird also Energie in das System „hineingepumpt“. Ein uns allen bekanntes Beispiel ist ein schaukelndes Kind, das beim Schaukeln durch Strecken der Beine und Neigen des Körpers in der richtigen Phase der Schaukelperiode seinen Schwerpunkt so verlagert, dass dadurch die Schwingungsamplitude wächst. In Abb. 11.25 ist die optimale Phasenlage der Schwerpunktverlagerung eingezeichnet, die dazu führt, dass Energie in das System hineingepumpt wird.

Durch die Verlängerung der Fadenlänge L (Abstand Aufhängepunkt A –Schwerpunkt S) wird die Frequenz $\omega = \sqrt{g/L}$ des Pendels (siehe Abschn. 2.9) verändert. Wir wollen hier eine periodische Änderung der Länge L und damit des Quadrates der Frequenz

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t) \quad (11.39)$$

betrachten, wobei der maximale relative Frequenzhub $h = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega_0^2 \approx 2(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ sein soll. Die Bewegungsgleichung (11.38) wird damit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos \Omega t] \cdot x = 0. \quad (11.40)$$

Dies ist eine Mathieusche Differentialgleichung [11.7]. Am Beispiel der Schaukel (Abb. 11.25) sieht man, dass die optimale Energiezufuhr in das schwingende

System geschieht, wenn die Änderung der effektiven Fadenlänge (Aufhängepunkt–Schwerpunkt) etwa mit der doppelten Eigenfrequenz ω des schwingenden Systems erfolgt, d. h. unsere Erregerfrequenz sollte durch

$$\Omega = 2\omega_0 + \varepsilon \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| \ll \omega_0 \quad (11.41)$$

beschrieben werden. Das System führt dann eine erzwungene Schwingung mit der Frequenz $\Omega/2$ aus. Wir machen deshalb für die Lösung von (11.40) analog zu (11.4c) den Ansatz:

$$x = c_1(t) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + c_2(t) \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right), \quad (11.42)$$

wobei jetzt aber die Koeffizienten (im Vergleich zu 1/ Ω) langsam veränderliche Funktionen der Zeit sind, d. h. \ddot{c}_1 und \ddot{c}_2 können vernachlässigt werden.

Geht man mit (11.42) in (11.40) ein, so erhält man bei Verwendung der Relation $\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = (\cos \alpha + \cos 3\alpha)/2$ und Vernachlässigung derjenigen Terme, die $\cos(3\Omega/2)t$ oder ε/ω_0 enthalten, die Gleichung

$$\begin{aligned} & - \left[2\dot{c}_1 + \left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) c_2 \right] \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ & + \left[2\dot{c}_2 - \left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) c_1 \right] \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) = 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten t erfüllt sein soll, müssen die eckigen Klammern Null werden (siehe die analoge Argumentation bei (11.24)), d. h. wir erhalten:

$$\dot{c}_1 = -\frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) c_2,$$

$$\dot{c}_2 = +\frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) c_1.$$

Differenziert man die erste Gleichung nach t und setzt für \dot{c}_2 die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$\ddot{c}_1 = -\frac{1}{4} \left[\varepsilon^2 - \left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 \right] c_1 = -\beta^2 c_1,$$

deren Lösung

$$c_1(t) = A \cdot e^{-i\beta t} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - \left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2}$$

ist. Für $\beta^2 < 0$, d. h. für $\varepsilon^2 < (h \cdot \omega_0/2)^2$ wird

$$c_1(t) = A \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} t \right\} \quad (11.43)$$

eine exponentiell ansteigende Funktion, d. h. nur im Frequenzbereich $2\omega - \varepsilon \leq \Omega \leq 2\omega_0 + \varepsilon$ mit

$$|\varepsilon| < \frac{h\omega_0}{2}$$

wird die Amplitude der Schwingung ohne Dämpfung exponentiell anwachsen, in den Nachbarbereichen bleibt sie endlich.

Für ein gedämpftes System mit der Dämpfungskonstante γ (siehe (11.15)) wird der Frequenzbereich, in dem die Schwingungsamplitude anwächst, eingeengt auf

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \gamma^2} < \varepsilon < +\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \gamma^2}. \quad (11.44)$$

Außerdem tritt eine Amplitudenerhöhung nur auf für $h \geq 2\gamma/\omega_0$, d. h. der Frequenzhub h muss eine Mindestgröße besitzen, um die Dämpfungsverluste durch die zugeführte Energie zu überwinden.

Parametrische Oszillationen spielen nicht nur bei mechanischen Schwingungsproblemen eine Rolle, sondern auch beim Quadrupol-Massenspektrometer und bei optischen parametrischen Oszillatoren (siehe Bd. 3), welche als kohärente, in weiten Grenzen durchstimmbare intensive Lichtquellen eine große Bedeutung für die Spektroskopie haben.

11.8 Gekoppelte Oszillatoren

Gekoppelte, schwingende Systeme spielen in der Physik und Technik eine große Rolle. Die Kopplung bewirkt, dass Schwingungsenergie zwischen den schwingenden Systemen übertragen werden kann. Sind viele räumlich getrennte Oszillatoren miteinander gekoppelt, so kann sich die Schwingung, die an einem Oszillator angefacht wird, in Form von Wellen ausbreiten. Ohne eine Kopplung zwischen Oszillatoren gäbe es daher keine (mechanischen) Wellen.

Wir wollen zuerst den einfachsten Fall schwingender Massenpunkte behandeln, die miteinander gekoppelt sind.

11.8.1 Gekoppelte Federpendel

Sind zwei Massenpunkte m_1 bzw. m_2 durch Federn mit den Rückstellkonstanten D_1 bzw. D_2 an ihre Ruhelagen $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ gebunden und außerdem durch eine Feder mit der Federkonstanten D_{12} miteinander verbunden (Abb. 11.26), so wird die Ausdehnung der mittleren Feder von den jeweiligen Positionen x_i beider Massen abhängen. Deshalb hängt auch die Kraft auf jede Masse nicht nur von ihrer eigenen Position, sondern auch von der der anderen Masse ab. Die beiden schwingenden Systeme sind miteinander gekoppelt.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -D_1 x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \quad (11.45a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -D_2 x_2 - D_{12}(x_2 - x_1), \quad (11.45b)$$

wobei x_1 und x_2 die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen bedeuten. Die Gleichungen (11.45) stellen ein **gekoppeltes Differentialgleichungssystem** dar, weil jede der beiden Gleichungen beide Variablen x_1 und x_2 enthält.

Durch eine geeignete Variablensubstitution gelingt es oft, gekoppelte Gleichungen zu entkoppeln. So liefert z. B. für gleiche Massen $m_1 = m_2 = m$ und gleiche Federkonstanten $D_1 = D_2 = D$ die Addition bzw. Subtraktion von (11.45a) und (11.45b) die entkoppelten Gleichungen

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -D(x_1 + x_2)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2).$$

In den neuen Koordinaten

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad \xi^- = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

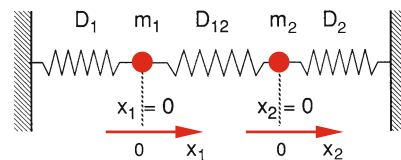


Abb. 11.26. Zwei gekoppelte Federpendel

ergibt dies die einfachen Gleichungen

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\xi}^+ &= -D \cdot \xi^+ \\ m \cdot \ddot{\xi}^- &= -(D + 2D_{12}) \cdot \xi^-, \end{aligned} \quad (11.46)$$

deren allgemeine Lösung durch die harmonischen Schwingungen

$$\begin{aligned} \xi^+(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \text{mit } \omega_1^2 &= D/m \end{aligned} \quad (11.47a)$$

$$\begin{aligned} \xi^-(t) &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \text{mit } \omega_2^2 &= (D + 2D_{12})/m \end{aligned} \quad (11.47b)$$

gegeben sind. Man nennt diese harmonischen Schwingungen des gekoppelten Systems auch **Normalschwingungen** und die Koordinaten ξ^\pm die **Normalkoordinaten**. In diesem einfachen Beispiel geben die Normalkoordinaten den Mittelwert $\xi^+ = (x_1 + x_2)/2$ der beiden Koordinaten bzw. den halben Relativabstand $\xi^- = (x_1 - x_2)/2$ an. Die Transformation auf die Normalschwingungskordinaten ξ erlaubt also die Darstellung der gekoppelten Schwingung als Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 .

Für gleiche Amplituden $A_1 = A_2 = A$ lassen sich durch Rücktransformation auf die x -Koordinaten x_1, x_2 die Schwingungen der Massenpunkte im x -Raum darstellen als:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\xi^+ + \xi^-) = A [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ &= 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right), \end{aligned} \quad (11.48a)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (\xi^+ - \xi^-) = A [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ &= -2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (11.48b)$$

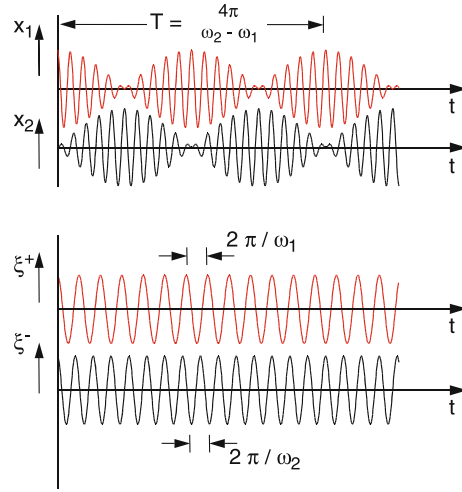


Abb. 11.27. Schwingungsamplituden $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gekoppelter Oszillatoren mit der Schwebungsperiode T und die beiden Normalschwingungen $\xi^+(t)$ und $\xi^-(t)$

Dies sind die in Abb. 11.27 gezeigten Schwebungen, deren Maxima für die beiden Massenpunkte gegeneinander versetzt sind, wobei die Versetzung von den Phasen φ_1, φ_2 abhängt.

Die halbe Schwebungsperiode

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \\ &= 2\pi \left/ \left(\sqrt{\frac{D + 2D_{12}}{m}} - \sqrt{\frac{D}{m}} \right) \right. \end{aligned} \quad (11.49a)$$

gibt die Zeit an, in der die Schwingungsenergie vom ersten auf das zweite Pendel und wieder zurück übertragen wird. Die halbe Schwebungsperiode ist also die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels. Für $D_{12} \ll D$ ergibt (11.49a) bei Entwicklung der ersten Wurzel:

$$\tau = 2\pi \sqrt{m \cdot \frac{D}{D_{12}^2}}. \quad (11.49b)$$

Für $D_{12} = 0,1D$ wird die halbe Schwebungsperiode also 10mal so lang wie die Schwingungsperiode des ungekoppelten Pendels, d. h. nach 5 Schwingungen ist die Energie völlig auf das andere Pendel übertragen.

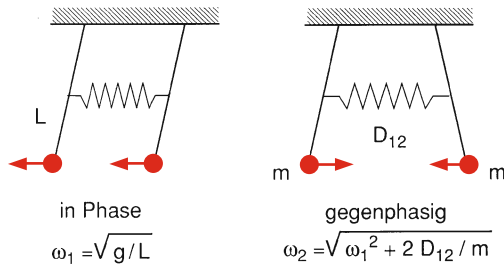


Abb. 11.28. Anfangsbedingungen für die Anregung der beiden Normalschwingungen $\xi^+(t)$ und $\xi^-(t)$

Bei speziellen Anfangsbedingungen (Abb. 11.28) lassen sich die Normalschwingungen direkt anregen, sodass man in diesen Fällen rein harmonische Schwingungen erhält. Um ξ^+ anzuregen, müssen beide Pendel genau in Phase schwingen ($x_1(t) = x_2(t)$), sodass die Kopplung nicht beansprucht wird. Dann wird in (11.47)

$$\begin{aligned} \xi^- &= 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad \text{und} \quad A_1 = A_2 \Rightarrow \\ x_1 &= x_2 = \xi^+ = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi). \end{aligned} \quad (11.50a)$$

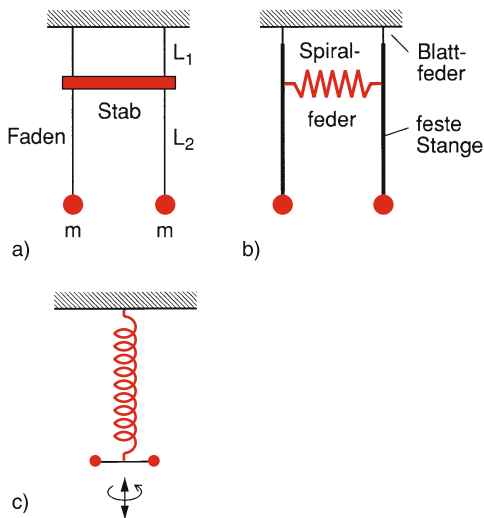


Abb. 11.29a–c. Verschiedene experimentelle Anordnungen gekoppelter Oszillatoren. In (a) bestimmt das Verhältnis von L_1/L_2 den Grad der Kopplung; in (b) die Stärke der koppelnden Feder; in (c) werden Drehschwingungen und lineare Schwingungen durch die Feder gekoppelt, weil sich bei der Dehnung die Verdrillung ändert

Schwingen beide Pendel genau gegenphasig, d.h. $x_1 = -x_2$, so wird

$$\begin{aligned} \xi^+ &= 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad \text{und} \quad A_1 = -A_2 \Rightarrow \\ x_1(t) &= -x_2(t) = \xi^-(t) \\ &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi). \end{aligned} \quad (11.50b)$$

Gekoppelte Oszillatoren lassen sich mit vielfältigen Anordnungen demonstrieren. In Abb. 11.29) sind einige Beispiele gezeigt.

11.8.2 Erzwungene Schwingungen zweier gekoppelter Pendel

Wir betrachten die in Abb. 11.26 gezeigten gekoppelten Oszillatoren, die jetzt aber durch eine an m_1 angreifende periodische Kraft $F = F_0 \cdot \cos \omega t$ zu Schwingungen angeregt werden (Abb. 11.30). Die Bewegungsgleichungen (11.45) werden dann für $m_1 = m_2 = m$ bei zusätzlicher Berücksichtigung der Dämpfung (siehe Abschn. 11.4):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -D_1 x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\ &\quad - 2m\gamma \dot{x}_1 + F_0 \cdot \cos \omega t \end{aligned} \quad (11.51a)$$

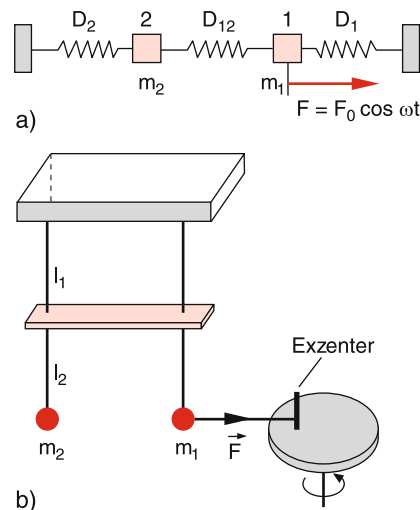


Abb. 11.30a,b. Erzwungene Schwingungen gekoppelter Oszillatoren

$$m\ddot{x}_2 = -D_2x_2 + D_{12}(x_1 - x_2) - 2m\gamma\dot{x}_2, \quad (11.51b)$$

wobei $\gamma = b/2m$ die Dämpfungskonstante ist.

Für $\gamma = 0$ und $F_0 = 0$ erhalten wir die Gleichung (11.45) der gekoppelten ungedämpften Pendel des vorigen Abschnittes. Führen wir wie dort wieder die Normalkoordinaten

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad \xi^- = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

ein, so ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion von (11.51a,b) für $D_1 = D_2 = D$ die entkoppelten Gleichungen

$$m\ddot{\xi}^+ = -D\xi^+ - 2m\gamma\dot{\xi}^+ + \frac{1}{2}F_0 \cos \omega t, \quad (11.52a)$$

$$m\ddot{\xi}^- = -(D + 2D_{12})\xi^- - 2m\gamma\dot{\xi}^- + \frac{1}{2}F_0 \cos \omega t. \quad (11.52b)$$

Jede dieser Gleichungen entspricht formal der Gleichung einer erzwungenen gedämpften Schwingung, d.h. die beiden Normalschwingungen können als erzwungene Schwingungen von Systemen mit den Eigenfrequenzen $\omega_1 = \sqrt{(D/m) - \gamma^2}$ bzw. $\omega_2 = \sqrt{(D + 2D_{12})/m - \gamma^2}$ und der Dämpfungskonstanten γ angesehen werden. Ihre Amplituden $\xi(\omega)$ können durch (11.26) beschrieben werden, wobei für ξ^+ $\omega_0 = \omega_1$ gesetzt wird, für ξ^- $\omega_0 = \omega_2$.

Bei Variation der Erregerfrequenz ω wird man daher Resonanzen bei den Frequenzen $\omega_1^* = \sqrt{D/m - 2\gamma^2}$ und $\omega_2^* = \sqrt{(D + 2D_{12})/m - 2\gamma^2}$ erwarten (siehe (11.27d)). Für die Bewegung der beiden Pendel 1 und 2 ergeben sich wegen

$$x_1 = \xi^+ + \xi^-, \quad x_2 = \xi^+ - \xi^-$$

die Amplituden $A_1 = x_1(\omega)$, $A_2 = x_2(\omega)$: Bei ω_1^* trägt nur ξ^+ wesentlich bei, bei ω_2^* nur ξ^- . In Abb. 11.31 sind die auf die Erregerkraft $F = F_0 \cos \omega t$ normierten Amplituden $A_1^* = 2(\omega_1^2/K)A_1(\omega)$ bzw. $A_2^* = 2(\omega_2^2/K)A_2(\omega)$ (schwarze Kurven) mit $K = F_0/m$ aufgetragen.

Die Phasenverschiebungen $\varphi_1(\omega)$ und $\varphi_2(\omega)$ zwischen $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ und der erregenden Kraft $F_0 \cos \omega t$ (siehe (11.25)) sind rot eingezeichnet.

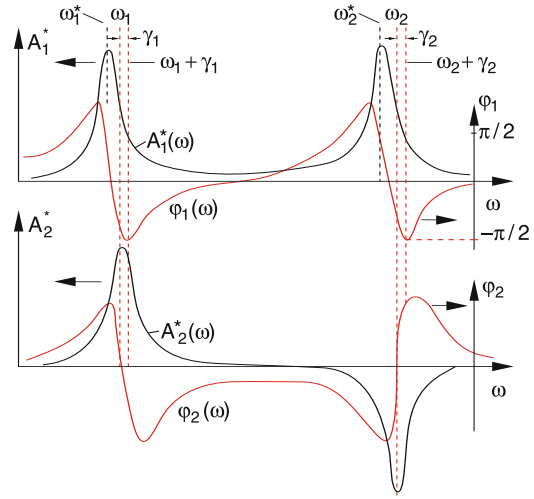


Abb. 11.31. Auf die Erregeramplitude F_0 normierte Amplituden A_i^* und Phasen φ_i für die erzwungene Schwingung zweier gekoppelter Pendel, wenn die Kraft $F_0 \cos \omega t$ wie in Abb. 11.30 am Pendel 1 angreift

Man kann solche erzwungenen Schwingungen gekoppelter Oszillatoren auf verschiedene Weise demonstrieren. Ein Beispiel ist in Abb. 11.30b gezeigt, wo zwei gekoppelte Pendel durch eine periodische Kraft angetrieben werden. Die Kopplungsstärke kann durch Wahl der Höhe des Kopplungsstabes variiert werden.

11.8.3 Normalschwingungen

In der Natur findet man viele Beispiele für gekoppelte Schwingungen. Die Zahl N der miteinander gekoppelten Oszillatoren ist dabei nicht auf 2 beschränkt, sondern kann sehr große Werte annehmen. So sind z. B. in einem Festkörperkristall im Prinzip alle N Atome durch ihre elektrischen Anziehungskräfte miteinander gekoppelt. Würde 1 Atom zu Schwingungen angeregt, so könnte sich die Schwingungsenergie auf sehr viele Atome verteilen. Bei einem Kristallvolumen von 1 cm^3 wird $N \approx 10^{23}$!

Wir wollen uns zuerst die möglichen Schwingungen von N Atomen anschauen, die alle auf einer Geraden liegen und durch gleich starke Kopplungsfedern miteinander verbunden sind (lineare Kette, Abb. 11.32). Die verschiedenen möglichen longitudi-

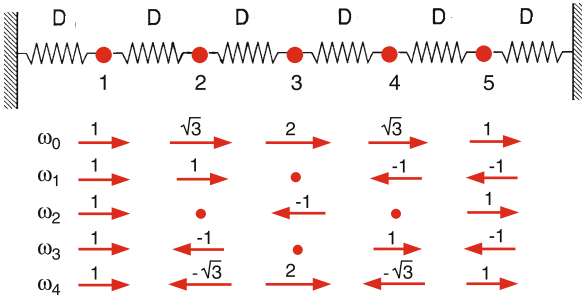


Abb. 11.32. Longitudinale Schwingungen einer linearen Kette aus fünf gleichen Massen

nalen Normalschwingungen sind in Abb. 11.32 für den Fall $N = 5$ dargestellt.

Analog zur Bewegungsgleichung (11.45) erhält man ein gekoppeltes System von 5 Gleichungen für die Abweichungen x_i der gleichen Massen m_i

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2D & D & 0 & 0 & 0 \\ D & -2D & D & 0 & 0 \\ 0 & D & -2D & D & 0 \\ 0 & 0 & D & -2D & D \\ 0 & 0 & 0 & D & -2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad (11.53a)$$

deren Lösungen die Frequenzen ω_k ($k = 0 \dots 4$) der Normalschwingungen ergeben:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{(2 - \sqrt{3})D/m}; & \omega_1 &= \sqrt{D/m} \\ \omega_2 &= \sqrt{2D/m}; & \omega_3 &= \sqrt{3D/m} \\ \omega_4 &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})D/m} \end{aligned} \quad (11.53b)$$

Bei diesen Normalschwingungen führen alle Massen harmonische Schwingungen mit derselben Frequenz ω aus. Jede mögliche Schwingung aller Massen kann immer als Linearkombination dieser Normalschwingungen beschrieben werden.

Ein einfaches Beispiel für gekoppelte Schwingungen eines Systems, bei dem die Massen nicht nur entlang einer Geraden schwingen, bieten die Schwingungen mehratomiger Moleküle (Bd. 3), die ebenfalls als Linearkombination weniger Normalschwingungen des Kerngerüsts dargestellt werden können. Diese Normalschwingungen kann man durch folgende Überlegungen erhalten:

Jedes der N Atome eines Moleküls hat drei Freiheitsgrade der Bewegung. Das N -atomige Molekül hat daher insgesamt $3N$ Freiheitsgrade für alle möglichen Bewegungen. Würde das Molekül ein starrer Körper sein (d. h. *nicht* schwingen), so könnte seine Bewegung dargestellt werden (siehe Abschn. 5.1) als Translation seines Schwerpunktes (3 Freiheitsgrade) und als Rotation um den Schwerpunkt (3 Freiheitsgrade), sodass für nichtlineare Moleküle $3N - 6$ Freiheitsgrade für alle möglichen Schwingungen übrig bleiben. Jedem dieser Schwingungs-Freiheitsgrade entspricht eine Normalschwingung, sodass ein nichtlineares Molekül $3N - 6$ Normalschwingungen hat. Dies sind alle Bewegungen des Kerngerüsts, bei dem sich der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls des Moleküls nicht ändern.

In Abb. 11.33 sind die drei Normalschwingungen eines dreiatomigen nichtlinearen Moleküls gezeigt. Bei linearen Molekülen gibt es nur zwei Freiheitsgrade der Rotation, weil die Rotationsenergie E_{rot} bei vorgegebenem Drehimpuls $L = I \cdot \omega$ durch

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I} \quad (11.54)$$

gegeben ist. Die Rotation um die Molekülachse kann wegen des extrem kleinen Trägheitsmomentes I bei vorgegebenem Rotationsdrehimpuls L nicht angeregt werden. Deshalb haben lineare Moleküle $3N - 5$ Normalschwingungen.

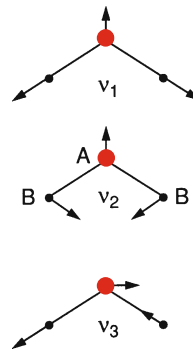


Abb. 11.33. Die drei Normalschwingungen eines nichtlinearen dreiatomigen Moleküls AB_2

11.9 Mechanische Wellen

Wenn ein schwingender Massenpunkt m_1 mit anderen, räumlich benachbarten Massenpunkten m_k gekoppelt ist, kann sich die Schwingung infolge dieser