B A B II

D E T E R M I N A N

Permutasi Dan Inversi

<u>Definisi</u> :

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat {1, 2, … , n} adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut:

Dengan perkataan lain permutasi adalah susunan n bilangan.

<u>Contoh</u> :

1) Himpunan bilangan-bilangan bulat {1, 2, 3}

   Permutasi-permutasinya adalah :

   (1, 2, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 2)

   (1, 3, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)

   Semuanya ada 3! = 3.2.1 = 6 buah permutasi.

2) Himpunan bilangan-bilangan bulat {1, 2, 3, 4}

   Permutasi-permutasinya adalah :

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	.	.
(1, 3, 2, 4)	.	.	.
(1, 3, 4, 2)	.	.	.
(1, 4, 2, 3)	.	.	.
(1, 4, 3, 2)	.	.	.

   Semuanya ada 4! = 4.3.2.1 = 24 buah permutasi.

3) Himpunan bilangan-bilangan bulat {1, 2, 3, 4, 5}

   Permutasi-permutasinya adalah :

(1, 2, 3, 4, 5)	(2, 1, 3, 4, 5)	…..	(5, 1, 2, 3, 4)
.	.		.
.	.		.
.	.		.
.	.		.
(1, 5, 4, 3, 2)	(2, 5, 4, 3, 1)		(5, 4, 3, 2, 1)

Semuanya ada 5! = 5.4.3.2.1=120 buah permutasi.

Definisi :

Dalam suatu permutasi, angka besar yang mendahului angka yang lebih kecil disebut *inversi.*

Contoh :

1) Permutasi (2, 3, 1, 5, 6, 4) inversi-inversinya adalah :

   (2,1) (3,1) (5, 4) (6, 4)

   Ada 4 inversi.

2) Permutasi (6, 1, 3, 4, 5, 2) inversi-inversinya adalah :

   (6, 1) (6, 3) (6, 4) (6, 5)

   (6, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2)

   Ada 8 inversi.

3) Permutasi (2, 4, 1, 3) inversi-inversinya adalah :

   (2, 1) (4, 1) (4, 3)

   Ada 3 inversi.

Definisi :

Suatu permutasi disebut genap jika jumlah inversinya genap, dan disebut ganjil jika jumlah inversinya ganjil.

Contoh :

1) Permutasi (2, 3, 1, 5, 6, 4) adalah genap karena memiliki 4 inversi (lihat contoh 1 di atas).
2) Permutasi (6, 1, 3, 4, 5, 2) adalah genap karena memiliki 8 inversi (lihat contoh 2 di atas).
3) Permutasi (2, 4, 1, 3) adalah ganjil karena memiliki 3 inversi (lihat contoh 3 di atas).

Definisi Determinan

Determinan dari matriks bujursangkar A_{nxn}, ditulis $|A|$, didefinisikan sebagai bilangan yang dihitung dari penjumlahan :

$$|A| = \sum (\pm) a_{1i} \; a_{2j} \; ..... \; a_{nr}$$

Dimana penjumlahannya meliputi semua permutasi dari (i, j, ….., r). Tandanya adalah positif jika (i, j, ….., r) adalah permutasi genap dan negatif jika permutasinya ganjil.

Karena banyaknya permutasi (i, j, ….., r) dari bilangan-bilangan (1, 2, 3, ….. n) adalah n! maka dalam penjumlahan di atas terdapat n! hasilkali (suku).

Contoh :

1) Jika $A = (a_{11})$ adalah matriks 1×1, maka permutasi nya hanya 1, jadi permutasi nya genap. Jadi $|A| = a_{11}$

2) Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a_{11}\,a_{22}; \text{permutasi}\,(1,2)\ \text{genap} \\ a_{12}\,a_{21}; \text{permutasi}\,(2,1)\ \text{ganjil} \end{matrix}$

Jadi $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

3) Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lllll} a_{11}a_{22}a_{33} & : \text{permutasi} & (1,2,3) & \text{adalah} & \text{genap} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & : \text{permutasi} & (1,3,2) & \text{adalah} & \text{ganjil} \\ a_{12}a_{21}a_{33} & : \text{permutasi} & (2,1,3) & \text{adalah} & \text{ganjil} \\ a_{12}a_{23}a_{31} & : \text{permutasi} & (2,3,1) & \text{adalah} & \text{genap} \\ a_{13}a_{21}a_{32} & : \text{permutasi} & (3,1,2) & \text{adalah} & \text{genap} \\ a_{13}a_{22}a_{31} & : \text{permutasi} & (3,2,1) & \text{adalah} & \text{ganjil} \end{array}$$

Jadi :

$$\begin{aligned} |A| = & + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

4) Untuk determinan orde 4 :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{(i,\, j,\, k,\, l) \text{ permutasi dari } (1,\, 2,\, 3,\, 4)} (\pm)\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l}}_{4! \,=\, 24 \text{ suku}}$$

$$= \left.\begin{matrix} + a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} \\ - a_{11}\, a_{22}\, a_{34}\, a_{43} \\ - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44} \\ \vdots \\ + a_{14}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{41} \end{matrix}\right\} 24 \text{ suku}$$

Sifat-Sifat Determinan

<u>Teorema 1</u>:

Jika A suatu matriks bujursangkar, maka :

$|A^t| = |A|$

<u>Contoh</u>:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

<u>Teorema 2</u> :

Jika matriks B berasal dari matriks A dengan pertukaran dua baris / kolom dari A, maka $|B| = -|A|$

Contoh:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \text{baris 1 dan 3 dipertukarkan tempatnya}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & b & c & a \\ h & f & g & e \\ l & j & k & i \\ p & n & o & m \end{vmatrix} \quad \text{kolom 1 dan 4 dipertukarkan tempatnya}$$

Teorema 3 :

Sebuah determinan dengan 2 baris / kolom yang sama, harganya nol.

Misal dalam A ada 2 baris yang sama. Kalau kedua baris dipertukarkan maka determinan = $-|A|$.
Jadi $|A| = -|A|$ sehingga $|A| = 0$.

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -7 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{karena baris 1 = baris 4.}$$

Teorema 4 :

Jika B diperoleh dari A dengan mengalikan suatu baris / kolom dari A dengan bilangan riel p, maka $|B| = p|A|$

Contoh:

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\,(4-1) = 6.3 = 18$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(0) = 0$$

3) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)(0) = 0 \\ (\text{karena brs } 1 = \text{brs } 2) \end{matrix}$$

4) $$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ -2 & -4 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)(0) = 0 \\ (\text{karena brs } 1 = \text{brs } 3) \end{matrix}$$

Akibat :

Jika sebuah baris / kolom adalah kelipatan dari baris / kolom lainnya maka determinannya nol.

Teorema 5 :

Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan menambahkan setiap unsur pada baris r dengan c kali baris s ($r \neq s$) maka $|B| = |A|$

Teorema 6 :

Jika F adalah matriks sejajar nxn, maka determinan A adalah hasilkali unsur-unsur pada diagonal utama, yaitu $|F| = a_{11}\, a_{22} \ldots .. a_{nn}$

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

Teorema 7 :

Jika G dan H adalah matriks bujursangkar yang ordenya sama, maka :

$$|GH| = |G| \,.\, |H|$$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \text{ dan } |AB| = -23$$

Maka $|A| = 1, \quad |B| = -23$

Sehingga $|AB| = |A| \,.\, |B|$

Teorema 8 :

Matriks bujursangkar A mempunyai invers jika dan hanya jika $|A| \neq 0$

Akibat:

Jika A mempunyai invers, maka:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Ekspansi Kofaktor

Definisi :

Jika A adalah matriks bujursangkar, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Contoh:

1) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16, \qquad C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

2) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}, \qquad C_{11} = M_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}, \qquad C_{12} = -M_{12} = -(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31})$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}, \qquad C_{13} = M_{13} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}$$

Tinjaulah matriks 3x3 umum:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Telah diperlihatkan bahwa :

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$-a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

Yang dapat ditulis kembali sebagai :

$$|A| = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) + a_{21}\,(a_{13}\,a_{32} - a_{12}\,a_{33}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

Karena ekspresi-ekspresi dalam kurung tak lain dari kofaktor-kofaktor c_{11}, c_{21} dan c_{31} (buktikan) maka akan diperoleh :

$$|A| = a_{11}\,c_{11} + a_{21}\,c_{21} + a_{31}\,c_{31}$$

Metode menghitung $|A|$ ini dinamakan ekspresi kofaktor sepanjang kolom pertama A.

<u>Contoh</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Hitung $|A|$ dengan ekspresi kofaktor sepanjang kolom pertama
b) Hitung $|A|$ dengan ekspresi kofaktor sepanjang baris kedua

Jawab :

a) $|A| = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3(-4) + 2(-2) + 5(3)$

$= -12 - 4 + 15$

$= -1$

b) $|A| = -(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(-2) - 4(-6) - 3(7)$

$= -4 + 24 - 21$

$= -1$

Ternyata menghasilkan angka yang sama.

Dapat diperlihatkan bahwa (untuk orde 3x3) :

$|A| = a_{11}\,c_{11} + a_{12}\,c_{12} + a_{13}\,c_{13}$ (sepanjang baris 1)

$= a_{11}\,c_{11} + a_{21}\,c_{21} + a_{31}\,c_{31}$ (sepanjang kolom 1)

$= a_{21}\,c_{21} + a_{22}\,c_{22} + a_{23}\,c_{23}$ (sepanjang baris 2)

$= a_{12}\,c_{12} + a_{22}\,c_{22} + a_{32}\,c_{32}$ (sepanjang kolom 2)

$= a_{31}\,c_{31} + a_{32}\,c_{32} + a_{33}\,c_{33}$ (sepanjang baris 3)

$= a_{13}\,c_{13} + a_{23}\,c_{23} + a_{33}\,c_{33}$ (sepanjang kolom 3)

Persamaan ini dinamakan ekspansi-ekspansi kofaktor $|A|$.

Hasil-hasil yang baru diberikan untuk matriks 3x3 membentuk kasus khusus dari teorema umum :

Teorema :

Determinan matriks A yang berukuran nxn dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris / kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasilkali-hasilkali yang dihasilkan, yakni untuk setiap

$1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$ maka :

$|A| = a_{1j}\, c_{1j} + a_{2j}\, c_{2j} + \ldots.. + a_{nj}\, c_{nj}$ (ekspansi sepanjang kolom j)

$|A| = a_{i1}\, c_{i1} + a_{i2}\, c_{i2} + \ldots.. + a_{in}\, c_{in}$ (ekspansi sepanjang baris i)

Contoh:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3\left\{2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-5\left\{1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-2\left\{1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-6\left\{1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\{2(-22)+1(-23)+1(13)\} \\
&\qquad -5\{1(-22)+1(-9)+1(7)\} \\
&\qquad\qquad -2\{1(-23)-2(-9)+1(2)\} \\
&\qquad\qquad\qquad -6\{1(13)-2(7)-1(2)\} \\
&= 3(-54)-5(-24)-2(-3)-6(-3) \\
&= -18
\end{aligned}
$$

<u>Definisi</u> :

Jika A adalah sembarang matriks nxn dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks :

$$
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & & & \\
c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}
\end{pmatrix}
$$

dinamakan *matriks kofaktor A.*

Transpose matriks ini dinamakan *adjoint A* dan dinyatakan dengan adj (A).

<u>Contoh</u>:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}
$$

Maka:

$$
\begin{array}{lll}
c_{11} = 12 & c_{12} = 6 & c_{13} = -16 \\
c_{21} = 4 & c_{22} = 2 & c_{23} = 16 \\
c_{31} = 12 & c_{32} = -10 & c_{33} = 16
\end{array}
$$

Sehingga matriks kofaktor adalah :

$$c = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{dan}$$

$$\text{adj(a)} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} = A^{+}$$

<u>Teorema</u> :

Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj(A)}}{|A|}$$

Teorema Cramer

Jika AX = B adalah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui sehingga $|A| \neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai jawab tunggal. Jawabnya adalah :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots\ldots\ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

dimana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan unsur - unsur dalam kolom ke - j dari A dengan unsur - unsur dalam matriks :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Soal

1. Tentukan harga-harga K jika $\begin{vmatrix} K & K \\ 4 & 2K \end{vmatrix} = 0$

2. Hitung determinan dari matriks-matriks berikut ini :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

3. Hitung determinan dari $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

4. Hitung determinan dari matriks-matriks berikut ini :

a) Uraikan menurut kolom 2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

b) Jumlahkan 2 kali kolom 1 pada kolom 3, dan kemudian uraikan menurut baris 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Hitung determinan dari matriks berikut ini $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

TUGAS

6. Hitung determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$

7. Tentukan kofaktor dari unsur 7 dalam matriks berikut : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

8. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

   a) Hitung $|A|$

   b) Tentukan A^{+}

   c) Tentukan A^{-1}

9. Pandang matriks ordo 2x2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   a) Tentukan A^{+}

   b) Perlihatkan bahwa $(A^{+})^{+} = A$

10. Pecahkan sistem persamaan dengan menggunakan determinan (Menurut metode Cramer) :

    $3y + 2x = z+1$

    $3x + 2z = 8-5y$

    $3z - 1 = x-2y$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, maka A^{-1} = ….? (dengan rumus invers ordo 2x2 dan OBE)

12. $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, maka B^{-1} = …. ?

13. Cari matrik invers dari $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dengan cara :

    a). $A.A^{-1} = I$

    b). OBE

    c). Cara Kofaktor