BAB I

M A T R I K S

A. Definisi Matriks

Matriks adalah suatu susunan empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang dinyatakan dengan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berorde m x n
Jika A adalah sebuah matriks, maka a_{ij} adalah entri yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Dengan demikian matriks A_{mxn} yang umum dapat dilihat pada matriks A di atas.

B. Jenis-Jenis Matriks:

1. Matriks Bujursangkar

Jika m = n maka matriks A disebut matriks bujursangkar, dan entri-entri a_{11}, a_{22}, ….., a_{nn} dikatakan berada pada *diagonal utama* dari a.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) \text{ disebut } \underline{\text{diagonal utama}}$$

2. Matriks Transpose

Jika A berorde mxn, maka *transpose* A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan sebagai matriks nxm yang kolom pertamanya = baris pertama dari A, kolom 2 = baris 2 dari A, dan seterusnya.

Dengan perkataan lain :

$$B = A^t \leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, m$$

<u>Contoh</u> :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Jadi jika $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Teorema</u> :

a) $(A^t)^t = A$
b) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
c) $(kA)^t = kA^t$, dimana k sembarang skalar
d) $(AB)^t = B^t A^t$

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemennya sama dengan nol, kecuali elemen pada diagonal utamanya.

Contoh :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4. Matriks Satuan (Identity)

Matriks satuan (identity) adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya sama dengan satu. Matriks satuan dinyatakan dengan I.

Contoh :

$$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \ldots \text{ dan seterusnya}$$

Jika A adalah matriks m x n , maka $A.I_n = A$

$I_m.A = A$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

Maka :

$$I_2A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} = A$$

$$AI_3 = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} = A$$

5. Matriks Singular

Matriks bujur sangkar yang tidak mempunyai invers (berarti determinannya = 0)

6. Matriks Non Singular

Matriks bujur sangkar yang mempunyai invers (berarti determinannya ≠ 0)

7. Matriks Simetris

Matriks *bujur sangkar* adalah matriks berorde m x m

Matriks bujur sangkar $[a_{ij}]$ disebut *simetrik* jika $a_{ij} = a_{ji}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$, matriks tersebut simetris dengan diagonal utamanya

Perhatikan $A = A^t$

8. Matriks Asimetris

Matriks bujur sangkar $[a_{ij}]$ disebut *anti-simetrik (asimetris)* jika $a_{ij} = -a_{ji}$

Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 9 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$, dalam hal ini $B = -B^t$

9. Matriks Idempotent

Matriks bujur sangkar di mana berlaku $A^2 = A$ atau $A^n = A$, dengan n = 2, 3, 4, …

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

10. Matriks Nilpotent

Matriks bujur sangkar di mana $A^3 = 0$

<u>Contoh</u> :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A.A.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

11. Matriks Nol

Semua unsurnya nol :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0_{mxn}$$

Jika AB = 0 (matriks 0), belum tentu A = 0 atau B = 0

<u>Contoh</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{maka } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> :

a) A + 0 = 0 + A = A (0 = matriks nol)

b) A – A = 0

c) 0 – A = -A

d) A0 = 0; 0A = 0

12. Matriks Segitiga (Triangular Matriks) :

12.1 Matriks Segitiga Atas

Matriks bujursangkar, apabila elemen yang terletak di bawah diagonal utamanya sama dengan nol.

Contoh :

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

12.2 Matriks Segitiga Bawah

Matriks bujursangkar, apabila elemen yang terletak di atas diagonal utamanya sama dengan nol.

Contoh :

$$B_{3x3} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

C. Operasi –Operasi Matriks

1. Definisi Penjumlahan Matriks :

Jika diketahui A_{mxn} maka entri-entri :

C = A + B di definisikan sebagai :

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad$ i = 1, 2, 3, …, m

j = 1, 2, 3, …, n

Matriks-matriks yang ordenya berbeda tidak dapat ditambahkan.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Maka :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 9 \\ 4 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Sedangkan $A + C$ dan $B + C$ tidak didefinisikan.

2. Definisi Perkalian Skalar :

Jika diketahui A_{mxn} maka entri-entri $B = cA$ adalah :

$b_{ij} = ca_{ij}$ $\qquad$ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

$j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Contoh 1:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{maka } 2A = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan } (-1)A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 2:

$$\text{Jika } A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{dan } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } (-B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{dan}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -7 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Definisi Perkalian Matriks :

Jika diketahui A_{mxn} dan B_{nxr} maka hasilkali dari A dan B yaitu $C = AB$ adalah matriks C_{mxr} yang unsur-unsurnya adalah :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj} \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, \ldots, r$$

Dengan demikian unsur c_{ij} diperoleh dari baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B.

Jadi :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & c_{ij} & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix}$$

Hasil kali C = AB mempunyai jumlah baris yang sama dengan A dan jumlah kolom yang sama dengan B.

Contoh 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x(-2) + (2x4) + (-1)x2 & 1x5 + 2x(-3) + (-1)x1 \\ 3x(-2) + 1x4 + 4x2 & 3x5 + 1x(-3) + 4x1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$$

Contoh 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x3 + 3x1 & 1x(-2) + 3x2 \\ (-2)x3 + (-4)x1 & (-2)x(-2) + (-4)x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Syarat perkalian matriks AB adalah **banyaknya kolom A = banyaknya baris B.**

Tidak ada syarat mengenai banyaknya baris A dan banyaknya kolom B.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{AB tidak terdefinisi}$$

Misal A_{mxn} dan B_{nxr} sehingga AB terdefinisi.

Dalam memandang BA, terdapat beberapa kemungkinan :

a. BA tidak terdefinisi. Ini akan terjadi jika $r \neq m$.
b. Jika BA terdefinisi, maka BA mempunyai orde nxn dan AB berorde mxm.
c. Jika BA dan AB mempunyai orde yang sama, belum tentu BA = AB.

Contoh:

1. Misal A_{2x3} dan $B_{3x4} \rightarrow$ maka $(AB)_{2x4}$ dan BA tidak terdefinisi.
2. Misal A_{2x3} dan $B_{3x2} \rightarrow$ maka $(AB)_{2x2}$ dan BA_{3x3}
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $BA = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$

Suatu matriks hanya dapat dikuadratkan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar, yaitu matriks dengan jumlah baris = jumlah kolom.

Contoh :

Jika $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16+35 & 28+14 \\ 20+10 & 35+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 42 \\ 30 & 39 \end{pmatrix}$$

Aturan-Aturan Ilmu Hitung Matriks

Teorema :

a) $A + B = B + A$ (komutatif penjumlahan)

b) $A + (B+C) = (A+B) + C$ (assosiatif penjumlahan)

c) $A (BC) = (AB) C$ (assosiatif perkalian)

d) $A (B+C) = AB + AC$ (distributif)

e) $(B+C) A = BA + CA$ (distributif)

f) $A (B-C) = AB – AC$

g) $(B-C) A = BA – CA$

h) $a (B+C) = aB + aC$ (a=skalar)

i) $a (B-C) = aB – aC$

j) $(a+b) C = aC + bC$ (a, b = skalar)

k) $(a-b) C = aC – bC$

l) $(ab) C = a (bc)$

m) $a (BC) = (aB) C = B (aC)$

D. Matriks Invers

Jika A dan B adalah matriks bujursangkar, sehingga $AB = BA = I$, maka A dan B saling invers.

Notasi : invers A adalah A^{-1}

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Secara umum invers dari matriks berorde 2 x 2 adalah :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Jika $ad - bc \neq 0$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

<u>Teorema</u> :

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang mempunyai invers dan ukurannya sama, maka :

a). AB mempunyai invers

b). $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

<u>Perluasan</u> :

$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

$(ABCD)^{-1} = D^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-1}$, ... dan seterusnya.

c). $(A^{-1})^{-1} = A$

d). $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ $\quad$ n = 0, 1, 2, …….

e). Untuk setiap $k \neq 0$, maka $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Rumus Penyelesaian Matriks Invers

1. $A.A^{-1} = I$
2. $(A \mid I) \xrightarrow{OBE} (I \mid A^{-1})$
3. $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \mathrm{adj}(A) = \dfrac{A^{+}}{|A|}$

E. Matriks Elementer

<u>Definisi</u> :

Sebuah matriks nxn dinamakan *matriks elementer* jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) nxn yakni I_n dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal.

Contoh :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ kalikan baris kedua I_2 dengan -3

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertukarkan baris kedua dan baris keempat dari I_4

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tambahkan 3x baris ketiga dari I_3 pada baris kesatu

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ kalikan baris kesatu dari I_3 dengan 1

Teorema :

Jika matriks elementer E dihasilkan dengan melakukan sebuah operasi baris tertentu pada I_m dan jika A adalah matriks mxn, maka hasilkali EA adalah matriks yang dihasilkan bila operasi baris yang sama ini dilakukan pada A

Contoh :

Misal $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Matriks elementer $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dihasilkan oleh penambahan 3x baris kesatu dari I_3 ke baris ketiga.

Maka :

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow b_3 \to b_3 + 3b_1$$

merupakan matriks yang dihasilkan bila ditambahkan 3x baris kesatu dari A ke baris ketiga.

F. Matriks Eselon dan Matriks Eselon Tereduksi

Definisi :

$A = [adj]_{mxm}$ disebut matriks tereduksi bila memenuhi :

1. Bila ada baris yang tak semua nol, maka elemen pertama yang $\neq$ 0 harus bilangan 1.
2. Elemen pertama yang $\neq 0$ pada baris di bawahnya harus di sebelah kanan 1
3. Bila baris yang semua nol harus pada bagian bawah (baris-baris bawah)

Contoh : **Matriks Eselon (Eliminasi Gauss) :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh : **Matriks Eselon Tereduksi (Eliminasi Gauss Jordan) :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Operasi Baris Elementer (OBE)

Definisi :

1. Menukar baris ke-i dengan baris ke-j
2. Mengalikan baris ke-i dengan $p \neq 0$
3. Ganti baris ke-i dengan baris baru yang merupakan baris ke-i ditambah dengan baris ke-j yang dikalikan dengan p)

Contoh :

2. Cara penyelesaian Matriks Invers dengan OBE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{akan dicari } A^{-1}$$

Gandengkan matriks satuan I_3 disebelah kanan A, kemudian menerapkan operasi-operasi baris pada kedua ruas hingga ruas kiri tereduksi pada I_3. Maka matriks terakhir akan mempunyai bentuk $[I \mid A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} brs2 \rightarrow brs2 - 2brs1 \\ brs3 \rightarrow brs3 - brs1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{brs3} \rightarrow \text{brs3} + 2\text{brs2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \text{brs3} \rightarrow (-1)\text{brs3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{brs2} \rightarrow \text{brs2} + 3\text{brs3} \\ \text{brs1} \rightarrow \text{brs1} - 3\text{brs3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \text{brs1} \rightarrow \text{brs1} - 2\text{brs2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Jadi :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Akan tetapi dengan cara di atas, sebelumnya tidak bisa diketahui apakah matriks A mempunyai invers atau tidak. Seandainya dalam proses di atas muncul baris nol atau kolom nol disebelah kiri, maka ini berarti bahwa A tidak mempunyai invers, dan proses tidak dapat dilanjutkan.

Untuk jelasnya, pandang contoh berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{brs2} \rightarrow \text{brs2} - 2\text{brs1} \\ \text{brs3} \rightarrow \text{brs3} + \text{brs1} \end{array}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{brs2} \rightarrow \text{brs2} + \text{brs3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

baris nol

Karena muncul baris nol disebelah kiri, maka A tidak mempunyai invers.

LATIHAN SOAL:

1). Hitung :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

2). Misalkan $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan : 3A + 4B – 2C

3). Tentukan X, Y, Z dan W jika $3\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 6 \\ -1 & 2W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & X+Y \\ Z+W & 3 \end{pmatrix}$

4). Misalkan (rxs) menyatakan matriks berordo rxs. Tentukan ordo dari perkalian-perkalian berikut jika perkaliannya terdefinisi :

a) (2x3)(3x2) c) (1x2)(3x1) e) (3x4)(3x4)

b) (4x1)(1x2) d) (5x2)(2x3) f) (2x2)(2x4)

5). Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Tentukan AB dan BA

TUGAS 1

6). Misalkan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Tentukan AB dan BA

7). Tentukan matriks Inversnya dengan OBE

a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$