LOGIKA MATEMATIKA

By : Sri Rezeki Candra Nursari

Komposisi nilai

- UAS = 36% Open note
- UTS = 24% Open note
- ABSEN = 5 %
- TUGAS = 35%

==============================

100%

Blog : **reezeki2011.wordpress.com**

MATERI

- Teori Himpunan
- Aksioma aljabar boolean
- **Fungsi boolean,**
- Komplemen fungsi
- Konversi bentuk fungsi,
- Operasi dan gerbang logika,
- Penyederhanaan fungsi boolean
- Kalkulus proposisi,
- Kalkulus predikat

Fungsi BOOLEAN

Fungsi Boolean

- Fungsi booleamdapat disederhanakan dalam tiga cara :
  1. Secara Aljabar dengan menggunakan rumus /aksioma yang berlaku pada fungsi boolean
  2. Menggunakan Peta Karnaugh
  3. Menggunakan metode Quine Mc Cluskey (metode Tabulasi)

Definisi

- Fungsi Boolean dengan n variabel adalah fungsi yang dapat dibentuk dari aturan aturan sebagai berikut :
  - Fungsi Identitas → fungsi proyeksi satu variabel, dimana **$f(x)=x$**
  - Fungsi Konstan

    $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots x_n) = a$$
  - Fungsi Proyeksi

    $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots x_n) = x_i \quad i=1,2,3\ldots.n$$
  - Fungsi Komplemen

    $$g(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots x_n) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots x_n)$$
  - Fungsi Gabungan

    $$h(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) = f(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n) + g(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$$

    $$h(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) = f(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n) \,.\, g(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$$

Contoh

- Fungsi Boolean dengan variabel **x, y, z, a** yang merupakan suatu elemen dalam aljabar
  - $f(x) = x + x'a$
  - $g(x,y) = x'y + xy' + y'$
  - $h(x,y,z) = x'y + xy' + y'$

Contoh

- Fungsi Boolean dengan variabel **x, y, z, a** yang merupakan suatu elemen dalam aljabar

$f(x) = x + x'a$

$g(x,y) = x'y + xy' + y'$

$h(x,y,z) = x'y + xy' + y'$

Teorema

- Jika f adalah fungsi Boolean dengan satu variabel, maka untuk semua nilai x, adalah

$$f(x) = f(1)x + f(0)x'$$

Teorema

- Untuk kemungkinan bentuk f, ada 5, yaitu
  1. f adalah fungsi konstan,
     - $f(x)=a$
     - $f(1)x = f(0)x' = ax + ax' = a(x+x)' = a1 = a = f(x)$
  2. f adalah fungsi identitas, $f(1)x+f(0)x' = 1x+0x' = x+0 = x= f(x)$

Teorema

- Untuk kemungkinan bentuk f, ada 5, yaitu

3. $g(x) = (f(x))'$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (f(x))' \\
(f(x))' &= (f(1)x + f(0)x')' \\
&= (f(1)x)' + (f(0)x')' \\
&= ((f(1))' + x')\,((f(0))' + x) \\
&= (f(1))'(f(0))' + (f(1))'x + (f(0))'x' + xx' \\
&= (f(1))'(f(0))'x + (f(1))'x + (f(1))'(f(0))'x' + (f(0))'x' \\
&= (f(1))'x + (f(0))'x' \\
&= g(1)x + g(0)x'
\end{aligned}
$$

Teorema

- Untuk kemungkinan bentuk f, ada 5, yaitu

4. $h(x) = f(x) + g(x)$

$= f(1)x + f(0)x' + g(1)x \; + \; g(0)x'$

$= f(1) + g(1))\ x + f(0) + g(0))x'$

$= h(1)x + h(0)x'$

Teorema

- Untuk kemungkinan bentuk f, ada 5, yaitu

5. $k(x) = f(x)\,g(x)$

$$f(x)g(x) = (f(1)x + f(0)x')(g(1)x + g(0)x')$$
$$= f(1)g(1)xx + f(1)g(0)xx' + f(0)g(1)x'x + f(1)g(1)xx$$

(bentuk kanonik)

$$= f(1)g(1)x + f(0)g(0)x'$$
$$= k(1)x + k(0)x'$$

Bentuk Kanonik

- $f(x,y)=f(1,1)xy+f(1,0)xy'+f(0,1)x'y+f(0,0)x'y'$
- Rumus pembentukan bentuk kanonik f fungsi boolean dengan n variabel adalah

$$f(x_1, \ldots\ldots x_n) = \Sigma\, f(e1,\ldots.en)x_1{}^{e}{}_{1}\, x_2{}^{e}{}_{2}\ldots.. X_n{}^{e}{}_{n}$$

Dimana

e_i bernilai 0 dan 1

$x_i{}^{e}{}_{i}$ diartikan xi atau x_i' sesuai dengan e_1

bernilai 0 dan 1

Bentuk Fungsi

- Suatu fungsi boolean dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk berbeda, tetapi mempunyai arti yg sama. Dgn hukum De Morgan h & k fungsi yg sama
- Contoh fungsi-fungsi Boolean
  - $f(x) = x + x'a$
  - $g(x,y) = x'y + xy' + y'$
  - $h(x,y) = x'y'$
  - $k(xy) = (x+y)'$
  - $f1(xy) = (x' . Y')$
  - $f2(xy) = (x+y)'$

Bentuk Fungsi Boolean

- $f(x) = x + x'a$
- f mempunyai 4 elemen aljabar Boolean yaitu 0,a,a',1

X =1	f(x)
0	$0 + 1 . a = a$
a	$a + a' . a = a + 0 = a$
a'	$a' + a . a = a' + a = 1$
1	$1 + 0 . a = 1 + 0 = 1$

Bentuk Kanonik dari f(x)=x+x'a

- $f(x) = f(1)\,x + f(0)x'$

  $= 1.x + a.x'$

  $= x + a.x'$

  $= (x + a) + (x+x')$

  $= (x + a) \,.\, 1$

  $= x + a$

Kegunaan Bentuk Kanonik

- Untuk menentukan apakah dua ekspresi merupakan fungsi yang sama

Cara Representasi Tabel Kebenaran

1. Representasi secara Aljabar
   - $F = xyz'$
2. Representasi dengan Tabel Kebenaran

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Jumlah elemen pada tabel kebenaran 2^n, dimana n adalah banyaknya variabel biner

Konversi Tabel Kebenaran Menjadi Bentuk Aljabar

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

F1 = x’y’z + xy’z’ + xyz

= m1 + m4 + m7

F1’ = x’y’z’ + x’yz’ + x’yz + xy’z + x’y’z

F1 =(x+y+z) (x+y’+z) (x+y’+z’) (x’+y+z’) (x+y+ z’)

= (F1’)’ = M0 M2 M3 M5 M6

Fungsi Boolean Dalam Bentuk Sum Of Product (SOP) / Product Of Sum (POS)

x	y	Sum Of Product (SOP)		Product Of Sum (POS)	
		term	nilai	Term	nilai
0	0	x'y'	m_0	x + y	M_0
0	1	x'y	m_1	x + y'	M_1
1	0	xy'	m_2	x' + y	M_2
1	1	xy	m_3	x' + y'	M_3

Metode Peta Karnaugh (K-Map)

- Penjelasan tentang fungsi tabel kebenaran Boolean dalam bentuk gambar
- Tujuan K-Map untuk menyederhanakan fungsi bolean sampai enam variabel
- Diagram/peta yang terdiri dari beberapa kotak yang bersisian, setiap bujursangkar merepresentasikan sebuah minterm

Peta Karnaugh (K-Map) untuk 2 variabel

x \ y	0	1
0	$x'y'$	$x'y$
1	xy'	xy

Fungsi Boolean Dalam Bentuk Sum Of Product (SOP) / Product Of Sum (POS)

x	y	z	Sum Of Product (SOP)		Product Of Sum (POS)	
			term	nilai	Term	nilai
0	0	0	x'y'z'	m_0	x + y + z	M_0
0	0	1	x'y'z	m_1	x + y + z'	M_1
0	1	0	x'yz'	m_2	x + y' + z	M_2
0	1	1	x'yz	m_3	x + y' + z'	M_3
1	0	0	xy'z'	m_4	x' + y + z	M_4
1	0	1	xy'z	m_5	x + y' + z	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	x' + y' + z	M_6
1	1	1	xyz	m_7	x' + y' + z'	M_7

Peta Karnaugh (K-Map) untuk 3 variabel

x \ yz	00	01	11	10
0	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
1	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'

Peta Karnaugh (K-Map) untuk 4 variabel

wx \ yz	00	01	11	10
00	w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz	w'x'yz'
01	wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz	wx'yz'
11	wxy'z'	wxy'z	wxyz	wxyz'
10	wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz	wx'yz'

Peta Karnaugh (K-Map) untuk 5 variabel

vw \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
00	v'w'x'y'z'	v'w'x'y'z	v'w'x'yz	v'w'x'yz'	v'w'xyz'	v'w'xyz	v'w'xy'z	v'w'xy'z'
01	v'wx'y'z'	v'wx'y'z	v'wx'yz	v'wx'yz'	v'wxyz'	v'wxyz	v'wxy'z	v'wxy'z'
11	vwx'y'z'	vwx'y'z	vwx'yz	vwx'yz'	vwxyz'	vwxyz	vwxy'z	vwxy'z'
10	vw'x'y'z'	vw'x'y'z	vw'x'yz	vw'x'yz'	vw'xyz'	vw'xyz	vw'xy'z	vw'xy'z'

Peta Karnaugh (K-Map) untuk 6 variabel

uvw \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
000	u'v'w'x'y'z'	u'v'w'x'y'z	u'v'w'x'yz	u'v'w'x'yz'	u'v'w'xyz'	u'v'w'xyz	u'v'w'xy'z	u'v'w'xy'z'
001	u'v'wx'y'z'	u'v'wx'y'z	u'v'wx'yz	u'v'wx'yz'	u'v'wxyz'	u'v'wxyz	u'v'wxy'z	u'v'wxy'z'
011	u'vwx'y'z'	u'vwx'y'z	u'vwx'yz	u'vwx'yz'	u'vwxyz'	u'vwxyz	u'vwxy'z	u'vwxy'z'
010	u'vw'x'y'z'	u'vw'x'y'z	u'vw'x'yz	u'vw'x'yz'	u'vw'xyz'	u'vw'xyz	u'vw'xy'z	u'vw'xy'z'
110	uvw'x'y'z'	uvw'x'y'z	uvw'x'yz	uvw'x'yz'	uvw'xyz'	uvw'xyz	uvw'xy'z	uvw'xy'z'
111	uvwx'y'z'	uvwx'y'z	uvwx'yz	uvwx'yz'	uvwxyz'	uvwxyz	uvwxy'z	uvwxy'z'
101	uv'wx'y'z'	uv'wx'y'z	uv'wx'yz	uv'wx'yz'	uv'wxyz'	uv'wxyz	uv'wxy'z	uv'wxy'z'
100	uv'w'x'y'z'	uv'w'x'y'z	uv'w'x'yz	uv'w'x'yz'	uv'w'xyz'	uv'w'xyz	uv'w'xy'z	uv'w'xy'z'

Soal

1. Jika C adalah fungsi Boolean dengan himpunan {0, a, a',b, b', c, c', 1} dan f adalah fungsi Boolean sehingga f(0,0,0)= f(0,0,1) = f(1,0,0) = a ; f(0,1,0) = f(0,1,1) = 1 ; f(1,0,1) = f(1,1,0) = c' dan f(1,1,1) = 1, Tentukan f(a',c,b)
2. Bentuk kanonik dengan 1 variabel
3. Bentuk kanonik dengan 2 variabel
4. Bentuk kanonik dengan 3 variabel
5. Bentuk kanonik dengan 4 variabel
6. Bentuk kanonik dengan 5 variabel
7. Bentuk kanonik dengan 6 variabel