B A B III

S I S T E M P E R S A M A A N L I N I E R (S P L)

Sebuah garis dalam bidang xy secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan yang berbentuk :

$$a_1 x + a_2 y = b$$

Persamaan semacam ini dinamakan persamaan linier dalam variabel x dan y (karena pangkat dari x dan y masing-masing sama dengan satu).

Secara lebih umum didefinisikan persamaan linier dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots x_n$ sebagai persamaan yang dinyatakan dalam bentuk :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

dimana $a_1, a_2, \ldots a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Contoh :

1. $x + 3y = 7$
2. $y = 2x - 3z + 1$
3. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5$

Jika banyaknya persamaan linier lebih dari satu buah, maka dinamakan **Sistem Persamaan Linier (SPL).**

Contoh :

1. $$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - 2y - 3z &= 1 \\ 2x + y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}+x_4} &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Secara umum SPL terbagi atas 3 jenis :

1. SPL tidak mempunyai jawab
2. SPL mempunyai satu jawab
3. SPL mempunyai banyak jawab

<u>Contoh</u> :

SPL tidak mempunyai jawab :

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

SPL mempunyai satu jawab :

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

SPL mempunyai banyak jawab :

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

SPL yang akan dicari jawabnya adalah :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

dimana a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$) dan b_i ($i = 1, 2, \ldots m$) adalah konstanta-konstanta yang diketahui.

Dari SPL di atas, maka

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ disebut matriks koefisien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ disebut matriks yang diperbesar (augmented matrix)

<u>Contoh</u> :

SPL | Matriks yang diperbesar

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 2 \rightarrow \text{brs } 2 - 2\text{brs } 1$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 3 \rightarrow \text{brs } 3 - 3\text{ brs } 1$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & 3y & - & 11z & = & -27 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 2 \rightarrow \tfrac{1}{2}\text{brs } 2$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 3 \rightarrow \text{brs } 3 - 3 \text{ brs } 2$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 3 \rightarrow (-2) \text{ brs } 3$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 1 \rightarrow \text{brs } 1 - \text{brs } 2$$

$$\begin{aligned} x + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{brs } 1 \rightarrow \text{brs } 1 - \tfrac{11}{2} \text{ brs } 3$$

$$\text{brs } 2 \rightarrow \text{brs } 2 + \tfrac{7}{2} \text{ brs } 3$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi jawabnya adalah $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Proses di atas disebut ELIMINASI GAUSS - YORDAN

Definisi :

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris 1} \\ \\ \rightarrow \text{baris 3} \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{kolom 2} & & \text{kolom 4} & \end{array} &
\end{array}$$

Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berorde m x n.

III.2 Matriks Dalam Bentuk Eselon Baris Tereduksi (reduced row – echelon form)

<u>Definisi</u> :

Suatu matriks A berordo m x n disebut matriks Eselon Baris Tereduksi jika :

1. Terdapat bilangan bulat k dimana $1 \leq k \leq m$ sehingga semua unsur pada baris k+1, k+2, … m adalah nol.
2. Unsur tak nol pertama pada baris i adalah 1 untuk i = 1, 2, … k (dinamakan 1 utama).
3. Jika unsur 1 utama pada baris I terjadi pada kolom c_i maka $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_k$.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Sebuah matriks yang hanya mempunyai sifat-sifat 1, 2 dan 3 dikatakan berada dalam *bentuk eselon baris* (row-echelon form)

Contoh : Matriks bentuk eselon baris tereduksi

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\0 & 1 & 0 & 7\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $k = 3$, $c_1 = 1, c_2 = 2$, $c_3 = 3$

$\downarrow$ $k = 3$, $c_1 = 1, c_2 = 2$, $c_3 = 3$

$\downarrow$ $k = 2$, $c_1 = 2, c_2 = 4$

Matriks bentuk eselon baris :

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 7\\0 & 1 & 6 & 2\\0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 6 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $k = 3$, $c_1 = 1, c_2 = 2$, $c_3 = 3$

$\downarrow$ $k = 2$, $c_1 = 1, c_2 = 2$

$\downarrow$ $k = 3$, $c_1 = 2, c_2 = 3$, $c_3 = 5$

Contoh :

Misal bahwa matriks yang **diperbesar** untuk SPL telah direduksi oleh operasi baris menjadi bentuk eselon baris tereduksi sbb:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2\\0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Tentukan jawab dari sistem persamaan linier yang bersesuaian.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 6x_2 & & & + & 4x_5 & = & -2 \\ & & & x_3 & & + & 3x_5 & = & 1 \\ & & & & x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \end{array}$$

<u>Jadi</u> :

$$\begin{array}{lcccccc} x_1 & = & -2 & - & 4x_5 & - & 6x_2 \\ x_3 & = & 1 & - & 3x_5 & & \\ x_4 & = & 2 & - & 5x_5 & & \end{array}$$

Jika dipilih $x_5 = t$ (sembarang) dan $x_2 = s$ (sembarang), maka jawabnya adalah :

$$\left.\begin{array}{lcccccc} x_1 & = & -2 & - & 4t & - & 6s \\ x_2 & = & s & & & & \\ x_3 & = & 1 & - & 3t & & \\ x_4 & = & 2 & - & 5t & & \\ x_5 & = & t & & & & \end{array}\right\rangle \text{Jadi terdapat banyak jawab.}$$

Jadi jika SPL yang dinyatakan dalam matriks yang diperbesar diubah menjadi bentuk eselon baris tereduksi, maka jawabnya mudah dicari.
Persoalannya menjadi bagaimana mengubah matriks yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris yang tereduksi.

<u>Contoh</u> 1 :

Matriks yang diperbesar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{brs 1} \Leftrightarrow \text{brs 2 (tukar tempat)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{brs 1} \rightarrow \frac{1}{2}\ \text{brs 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{brs 3} \rightarrow \text{brs 3 - 2brs 1}$$

1 utama

$\uparrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \text{brs } 2 \rightarrow -\frac{1}{2}\text{ brs } 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \text{brs } 3 \rightarrow \text{brs } 3 - 5 \text{ brs } 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{brs } 3 \rightarrow 2\text{brs } 3$$

$\downarrow$

1 utama

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

1 u t a m a

Langkah-langkah di atas dinamakan **ELIMINASI GAUSS** (untuk mendapatkan bentuk eselon baris). Jika proses di atas dilanjutkan untuk mendapatkan bentuk eselon baris tereduksi, maka dinamakan **ELIMINASI GAUSS-YORDAN** sbb:

$(*)$: $\text{brs } 2 \rightarrow \text{brs } 2 + \frac{7}{2}\text{brs } 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{brs } 1 \rightarrow \text{brs } 1 - 6 \text{ brs } 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{brs } 1 \rightarrow \text{brs } 1 + 5 \text{ brs } 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sudah dalam bentuk eselon baris tereduksi.}$$

Ini berarti SPL nya dalah :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & & & = & 7 \\ & & & & x_3 & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array}$$

Atau !

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 7 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 & = & 1 \\ x_5 & = & 2 \end{array}$$

Jika dipilih $x_2 = s$ (sembarang) dan $x_4 = t$ (sembarang), maka jawab dari SPL nya :

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & = & 7 - 2s - 3t \\ x_2 & = & s \\ x_3 & = & 1 \\ x_4 & = & t \\ x_5 & = & 2 \end{array}\right\} \text{Hasil dari eliminasi Gauss - Yordan.}$$

<u>Contoh</u> 2 :

Pecahkan dengan menggunakan Eliminasi Gauss - Yordan :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6 \end{array}$$

<u>Jawab</u> :

Matriks yang diperbesar untuk SPL tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{brs 2} \rightarrow \text{brs 2} - 2\text{ brs 1} \\ \text{brs 4} \rightarrow \text{brs 4} - 2\text{ brs 1} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \text{brs 2} \rightarrow (-)\text{ brs 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{brs } 3 \rightarrow \text{brs } 3 - 5 \text{ brs } 2 \\ \text{brs } 4 \rightarrow \text{brs } 4 - 4 \text{ brs } 2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{brs } 3 \Leftrightarrow \text{brs } 4 \\ \text{brs } 3 \rightarrow \frac{1}{6} \text{ brs } 3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow \text{Sudah dalam bentuk eselon baris} \\ \text{brs } 2 \rightarrow \text{brs } 2 - 3 \text{ brs } 3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{brs } 1 \rightarrow \text{brs } 1 + 2 \text{ brs } 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sudah dalam bentuk eselon baris tereduksi}$$

Baris terakhir dari matriks ini (0 semua) berarti :

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 = 0$$

Yang pasti dipenuhi untuk sembarang harga-harga x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sehingga baris ini dapat dibuang (dalam matriks di atas).
Ini berarti bahwa SPL nya adalah

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jadi variabel yang dapat ditentukan secara bebas adalah :

$$x_2 = r$$
$$x_4 = s$$
$$x_5 = t$$

Sehingga jawab SPL nya adalah :

$$x_1 = -3r - 4s - 2t$$
$$x_2 = r$$
$$x_3 = -2s$$
$$x_4 = s$$
$$x_5 = t$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Dari contoh di atas, hal penting yang harus dijadikan pegangan adalah tetapkanlah nilai-nilai sembarang pada setiap variabel tak utama.

III.3 Sistem Persamaan Linier Homogen

Sebuah SPL dikatakan homogen jika semua suku konstan sama dengan nol:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_0 \end{array}$$

Setiap Spl homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots.., x_n = 0$ selalu merupakan solusi. Solusi tersebut dinamakan *solusi trivial (trivial Solution).*

Ada 2 kemungkinan untuk SPL homogen :

1. Solusinya trivial.
2. Solusinya banyak (tak terhingga).

Jika sistem persamaan homogennya memiliki lebih banyak bilangan tak diketahui dari banyaknya persamaan, maka dipastikan mempunyai solusi tak trivial.

<u>Contoh</u> :

Pecahkan sistem persamaan homogen berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Jawab Matriks yang diperbesar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{brs}\,2 \rightarrow \text{brs}\,2 - \text{brs}\,1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{brs}\,2 \rightarrow -\tfrac{1}{3}\,\text{brs}\,2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{brs}\,1 \rightarrow \text{brs}\,1 - 2\text{brs}\,2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \tfrac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ini berarti:

$$x_2 - \tfrac{4}{3}x_3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_2 = \tfrac{4}{3}x_3$$
$$x_1 + \tfrac{5}{3}x_3 = 0 \qquad\qquad x_1 = -\tfrac{5}{3}x_3$$

Ambil: $x_3 = s$

Maka: $x_2 = \frac{4}{3}s$

$x_1 = -\frac{5}{3}s$

Jika $s = 0$ → Solusi Trivial

$s \neq 0$ → Solusi Tak Trivial (banyak tak hingga solusi)

IKHTISAR

Teorema :

SPL homogen dengan lebih banyak bilangan tak diketahui dari banyaknya persamaan selalu mempunyai tak hingga banyaknya solusi.

Soal Latihan:

1) Tentukan SPL di bawah ini

$2x_1 - 3x_2 = -4$

$3x_1 + 5x_2 = 13$

a) Dengan cara eliminasi yuda
b) Dengan cara OBE Ade
c) Dengan cara: $\bar{x} = A^{-1}B$ Satria
d) Dengan cara aturan Cramer Ali

Tugas

2) Tentukan SPL di bawah ini

$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$x_1 - x_2 + x_3 = 1$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

a) Dengan cara eliminasi
b) Dengan cara OBE
c) Dengan cara: $\bar{x} = A^{-1}B$
d) Dengan cara aturan Cramer