高斯定理运用技巧：

（1）根据电荷分布分析电场分布是否有对称性；

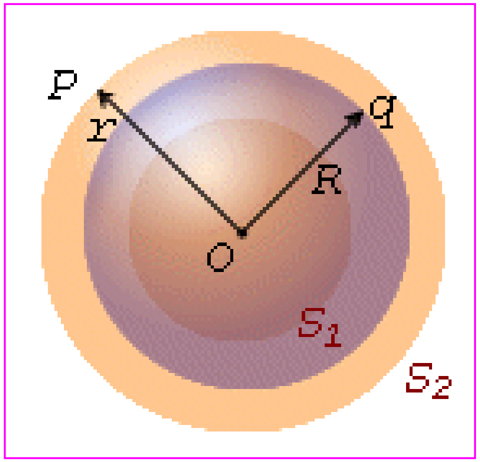
（2）依电场分布的对称性取合适的高斯面；

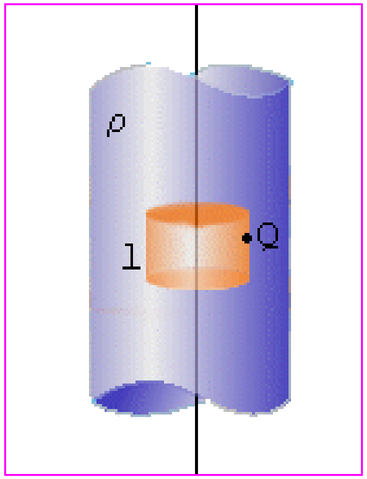
高斯面(封闭面)应取在场强相等的曲面上；若场强相等的面不构成闭合面，要另取与场强方向垂直的面与之一起构成高斯面。

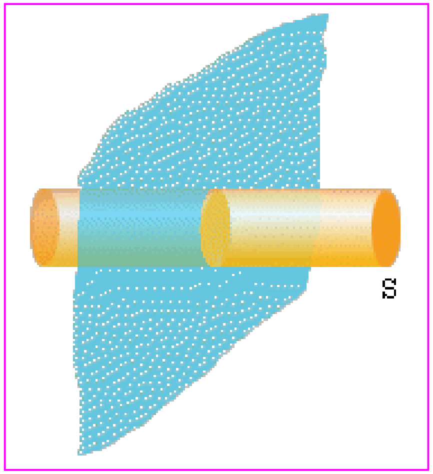
- 球对称——选与带电体同心的球面
- 轴对称——选与带电体同轴圆柱面
- 面对称——选轴与带电平面垂直，两底与平面等距的圆柱面

（3）由 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$ 求出场强的大小，说明其方向。

常见的具有对称性分布的源电荷有：







球对称分布：

包括均匀带电的球面，球体和多层同心球壳等；

轴对称分布：

包括无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等；

无限大平面电荷：

包括无限大的均匀带电平面，平板等。

1. 均匀带电球面

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

1'. 均匀带电球体

$$E=\begin{cases}\dfrac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

2. 均匀带电圆柱面

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r>R\end{cases}$$

2'. 均匀带电圆柱体

$$E=\begin{cases}\dfrac{\lambda\,r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r>R\end{cases}$$

3. 均匀带电无限大平面

$$\mathbf{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

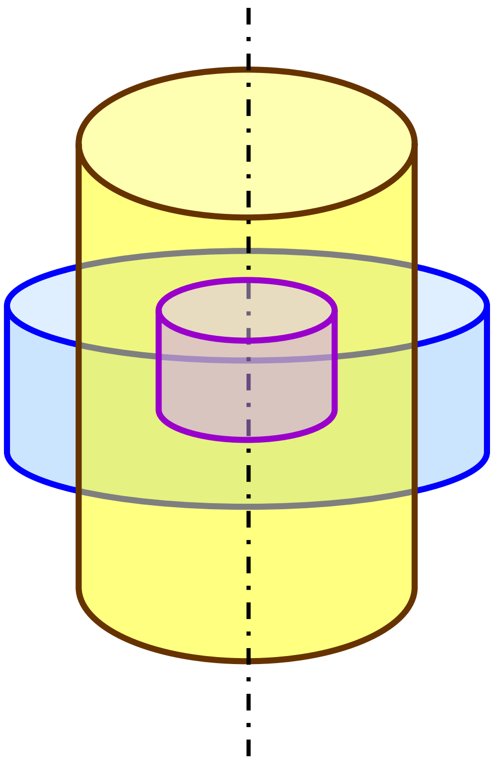
4. 均匀带电球体空腔

填补法

求均匀带电圆柱体的场强分布，已知R，λ

$r < R$ $$E\,2\pi r l = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \pi R^2}\pi r^2 l$$

$r > R$ $$E\,2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$



$$E = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & r < R \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

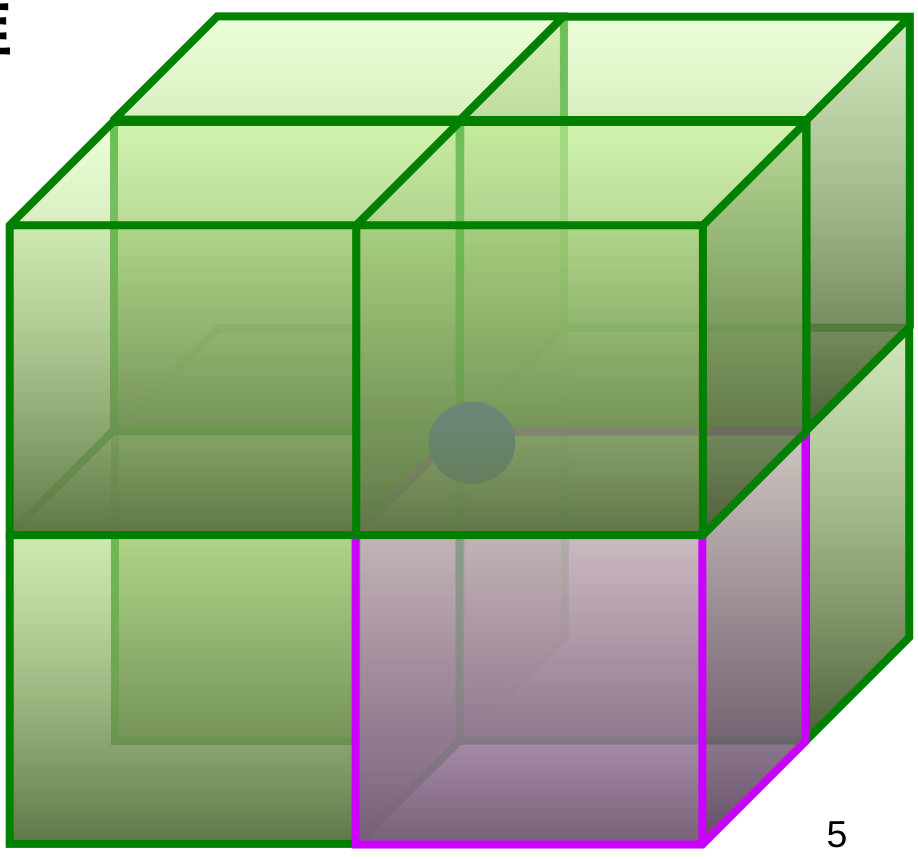
$$\rho \pi R^2 l = \lambda l$$

例： 一点电荷位于边长为 a 的立方体的顶角上，
求： 通过该立方体表面总的电通量。

解： 顶角所在的三个面上的通量为零。

其余三个面上直接计算困难

考虑用 8 个这样的立方体将点电荷拥在中心。

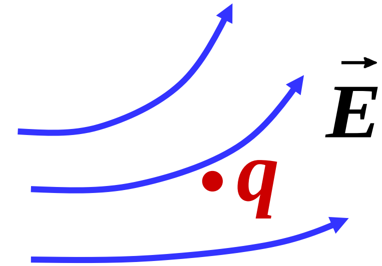


其外表面上的电通量为：

$$\Phi'_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由对称性：$\Phi_e = \dfrac{3}{24}\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

五、静电场的环路定理



1. 静电场对带电体的作用力

（1）一个点电荷q 处在外电场 $\vec{E}$ 中

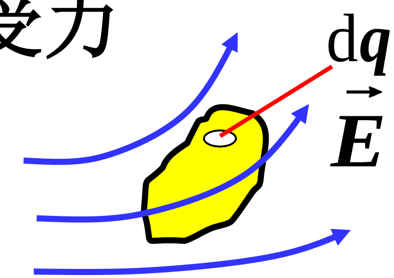
q受到电场力：$\vec{F} = q\vec{E}$（$\vec{E}$为所在点的场强）

（2）点电荷系处在外电场 $\vec{E}$ 中

每个点电荷受力：$\vec{F}_1 = q_1\vec{E}_1 \quad \vec{F}_2 = q_2\vec{E}_2 \cdots\cdots \vec{F}_k = q_k\vec{E}_k$

点电荷系受的合力：$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_k = \sum_i q_i\vec{E}_i$

（3）连续分布的带电体在外电场$\vec{E}$中受力



电荷元dq受力：$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q \cdot \vec{E}$

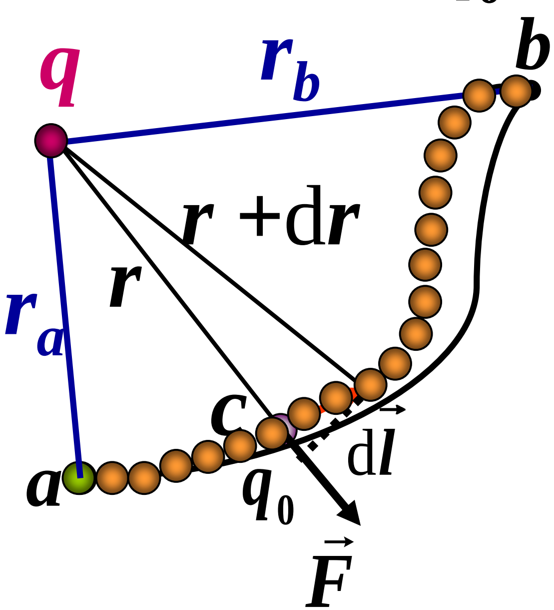
带电体受合力：$\vec{F} = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}q$

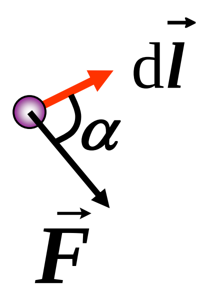
2. 静电场力的功

q的场强：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

（1）单个点电荷产生的电场中

将电荷q_0从a点移动到b点，电场力做功 A=?





在任意点c，q_0发生位移 $\mathrm{d}\vec{l}$，

受电场力$\vec{F} = q_0\vec{E}$

电场力做功为： $|\mathrm{d}\vec{l}|\cos\alpha = \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = F\cdot|\mathrm{d}\vec{l}|\cos\alpha = F\mathrm{d}r$$

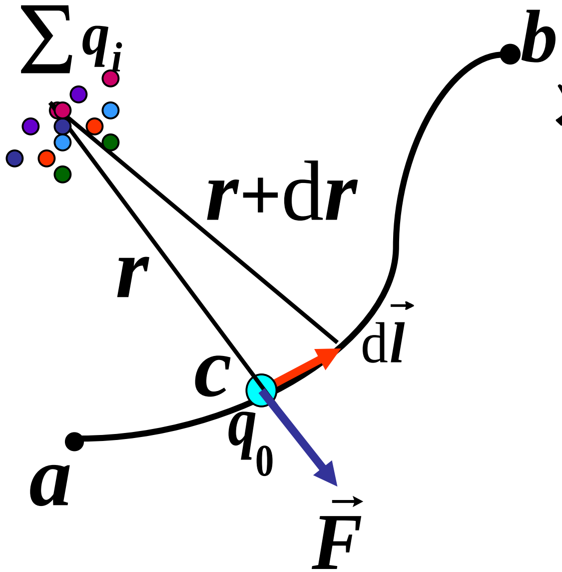
$$A = \int F\cdot\mathrm{d}r = \int q_0 E\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_a^b \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

电场力做功与路径无关。

（2）点电荷系产生的电场中

任意点c处的电场为：$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k$



将电荷q_0从a点移动到b点电场力做功：

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0 \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

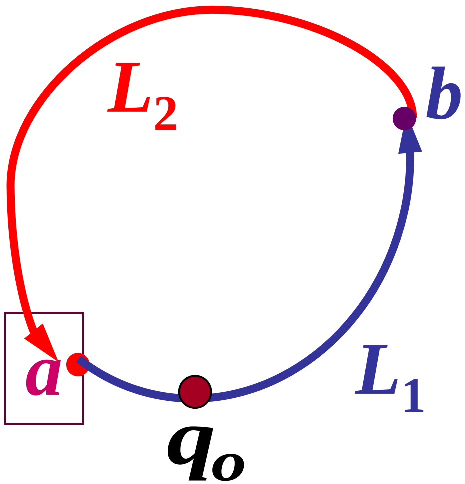
$$= \underbrace{q_0 \int \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + q_0 \int \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + q_0 \int \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{\text{每一项都与路径无关}}$$

（3）连续带电体的电场：一系列点电荷系的电场叠加

结论： 电场力做功与路径无关，电场力是保守力，静电场是保守力场。

3. 环路定理

在任意电场中，将q_0从$a \xrightarrow[\text{经}L_2]{\text{经}L_1} b$ 电场力做功：



$$A = \oint_L q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{a\,(L_1)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{b\,(L_2)}^{a} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{a\,(L_1)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{a\,(L_2)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\because \int_{a\,(L_1)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\,(L_2)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore A = \oint_L q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$——静电场的环路定理

即：沿闭合路径移动单位正电荷，电场力做功为零。

若一矢量场的任意环路积分始终为零，则称该矢量场为无旋场。

静电场两个基本性质：

高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$ 有源场

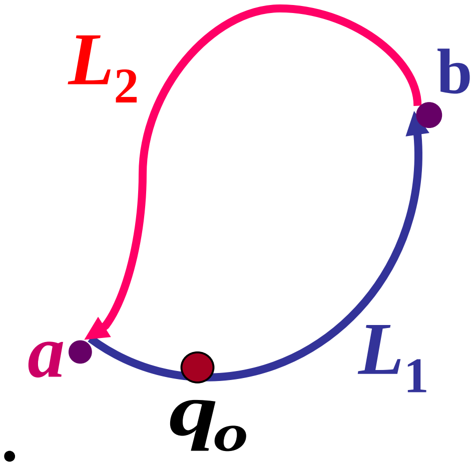
环路定理：$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ 无旋场

环路定理可说明静电场中电场线的性质：

（3）电场线不会形成闭合曲线。

六、电势差和电势

由刚才的讨论可知：



$$\int_{a\,(L_1)}^{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\,(L_2)}^{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$\downarrow$

a、***b***两点存在某个固定的差别.

是什么样的差别？电势差。

定义：***a***、***b***两点的电势分别为V_a、V_b，

则两点间的电势差为 $\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$

即：***a***、***b***两点的电势差 = 将单位正电荷从***a***→***b***电场力做的功

定义： 电场中任意点P的电势：

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$V_P = \int_P^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad (若V_b = 0)$$

单位：伏特　记为V或J/C

注意：

1° 电场中某点的"V"由场源电荷及场点位置决定，与q_o无关。

2° 电势是标量，有正、负。

3° 电势是相对量，是相对于V =0 处而言。
原则上可选电场中任意一点的电势为零。

一般地：

理论上,电荷分布在有限空间，取无穷远为 $V = 0$ 点。
电荷分布在无限空间，取有限远点为$V = 0$ 点。

工程上，通常选大地或设备外壳为$V = 0$ 点。

根据定义，若已知电势分布V，则可求移动电荷q时，电场力做的功：

$$\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$A = q\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q(V_a - V_b)$$

例： 在示波器、电视机、计算机显示器中，均有电子在电场中被加速而获得动能的情况。已知电子在1000V的电压中加速，求电子获得的速度。

解： 电场力做功$A = (-e)\cdot(V_- - V_+) = -1.6\times10^{-19}\times(-1000)$

由动能定理: $\Delta E_k = A = 1.6\times10^{-16}\,\mathrm{J}$

$$v_0 = 0 \qquad \frac{1}{2}mv^2 = 1.6\times10^{-16}\,\mathrm{J}$$

$$v = 1.87\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

若电子经过 $\Delta V=1\mathrm{v}$ 的电场：

$$\Delta E_k = A = (-e)\cdot(V_- - V_+) = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J} = 1\ \mathrm{eV}$$

$$v = 5.93\times10^5\ \mathrm{m/s}$$

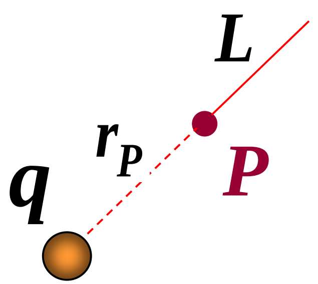
2. 电势的计算

$$V_P = \int_P^{V=0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

1) 用定义法求V

例： 点电荷q电场中任意一点P 的电势$V = ?$

解： 设 $r \to \infty \quad V = 0$



已知q的电场：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

则P点的电势为：

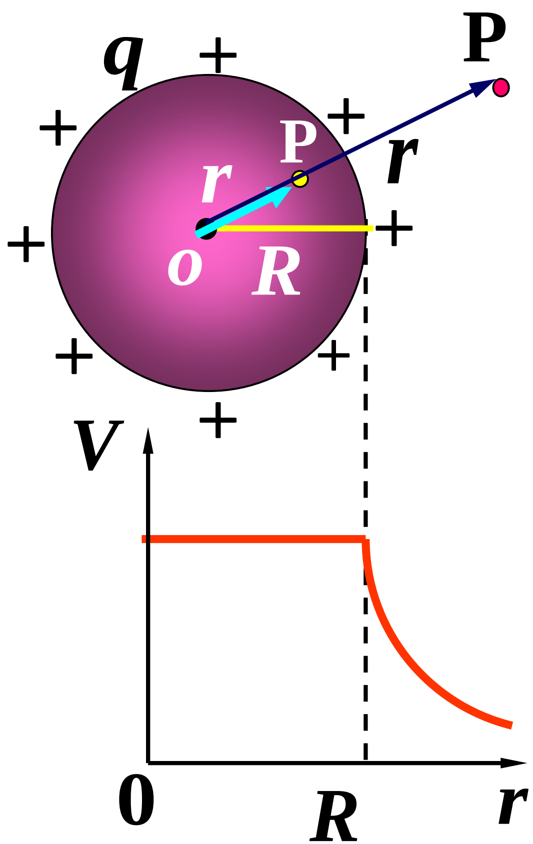
$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P \atop L}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_P}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

$$\begin{cases} q > 0 \text{时}, V_P \text{为正}, \ r\uparrow V\downarrow, \ r_\infty \text{处} V_\infty = 0 \ \text{最小} \\ q < 0 \text{时}, V_P \text{为负}, r\uparrow V\uparrow, \ r_\infty \text{处} V_\infty = 0 \ \text{最大} \end{cases}$$

例: 计算均匀带电球面的电场中任一点P的电势。

解: 用定义法, 选$V_\infty = 0$, $r \geq R$处



$$V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_P}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r \leq R$处

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$r = R$ 处 $V_R = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

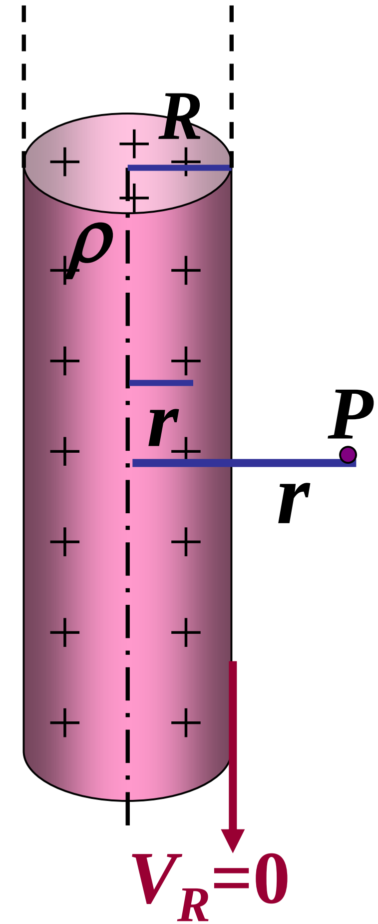
$E = 0$的区域 “V ”不见得为零。

$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = |\vec{E}||\mathrm{d}\vec{r}|\cos\pi = -E|\mathrm{d}\vec{r}| = -E(-\mathrm{d}r) = E\,\mathrm{d}r$$

例: 求半径为R, 电荷体密度为ρ的无限长均匀带电圆柱体的电势分布?

解: 由高斯定理求得各处的电场

$$\begin{cases} \text{柱外 } r \ge R & E = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \\ \text{柱内 } r < R & E = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$



若令$\cancel{V_\infty = 0}$ 则:

$$r \ge R \quad V_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_P}^\infty \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{r_P}$$

无意义

∞

令柱面处$V_R=0$, 则:

$$r > R \quad V = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r} < 0$$

$$r < R \quad V = \int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) > 0$$

$$r = 0\text{处}, \quad V = V_{max} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$$

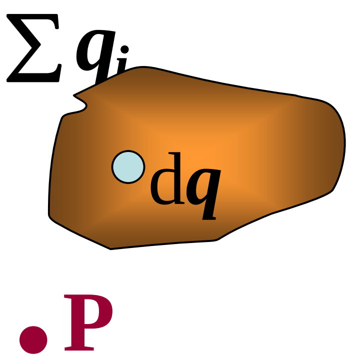
$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2) 用叠加法求V

a. 点电荷系场中的电势:

在点电荷系$q_1, q_2\cdots q_k$ 的电场中，

任意点P处的电势：



$$V_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_P^{\infty}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_P^{\infty}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_P^{\infty}\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_P^{\infty}\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=V_1+V_2+\cdots+V_k$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\cdots+\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_k}$$

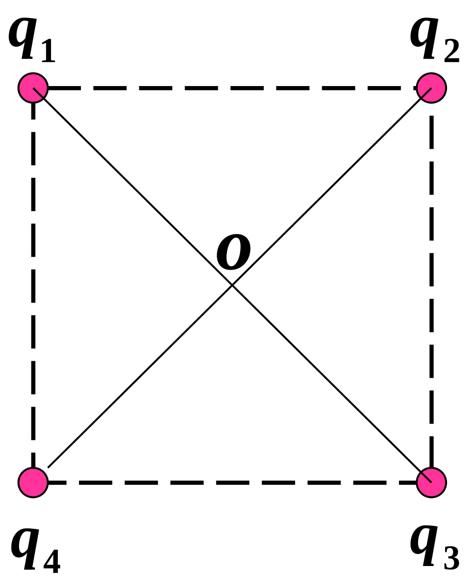
$$\boxed{V_P=\sum_i V_i=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}\longrightarrow \text{电势叠加原理}$$

b. 任意带电体场中的电势: $\boxed{V_P=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

例: 点电荷$q_1=q_2=q_3=q_4=4\times10^{-9}$C,放置在一正方形的四个顶角上，各顶角距中心5cm.

求： (1)中心o点的电位,

(2)将$q_0=1\times10^{-9}$C从无穷远移到o点,电场力做的功。



(1)各点电荷在o点处的电位

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\therefore V_0 = 4V_1 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 r} = 28.8\times10^{-2}V$$

(2)由定义:

将电荷q_0从无穷远移到o点,
电场力做的功为:

$$\boxed{V_P = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

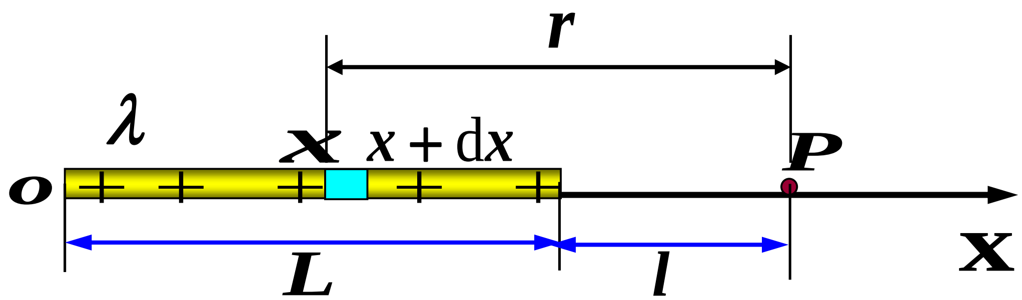
$$A = \int_\infty^0 q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -q_0\int_0^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -q_0V_o$$

$$= -28.8\times10^{-11}\ \mathrm{J}$$

例: 长为L 的均匀带电导线, 电荷线密度为+λ.

求: 延长线上任意一点 P 的电势。

解: 用叠加法



取电荷元: $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L + l - x)}$$

P 的电势: $$V_P = \int \mathrm{d}V = \int_0^L \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L + l - x)}$$

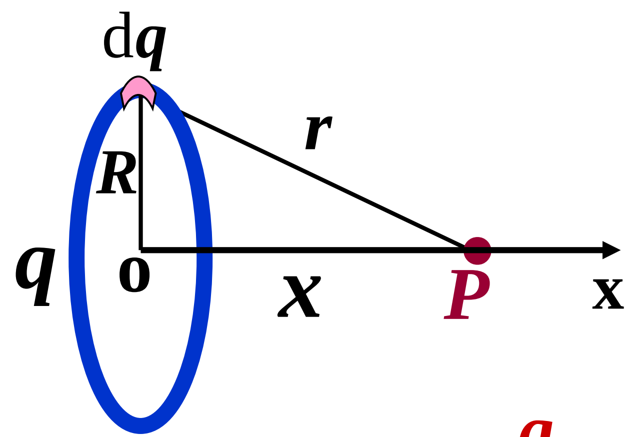
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{L + l}{l}$$

例： 求一均匀带电圆环轴线上任意点P 的电势.

解： 用叠加法，取电荷元dq,

其在P点产生的电势为:

$$\mathrm{d}V_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



所有电荷在P产生的电势:

$$V_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_0^q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

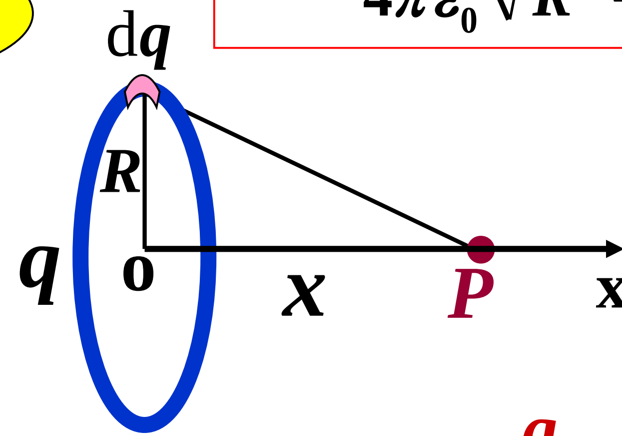
(环)

（x足够大时相当于点电荷产生的电势）

若是一均匀带电圆盘呢？

若是一均匀带电圆盘

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$



$dq = \sigma 2\pi r dr$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

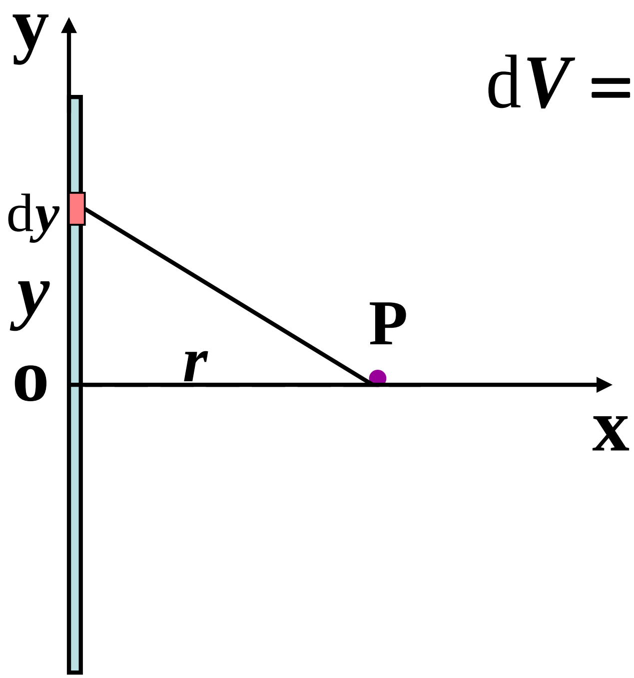
$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

(环)

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$$

例：无限长均匀带电细线的电荷线密度为λ，求离细线垂直距离为 r 处的电势V.

解：用叠加法．取电荷元$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}y$



$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+y^2}}=\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+y^2}}$$

$$V=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}V=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+y^2}}$$

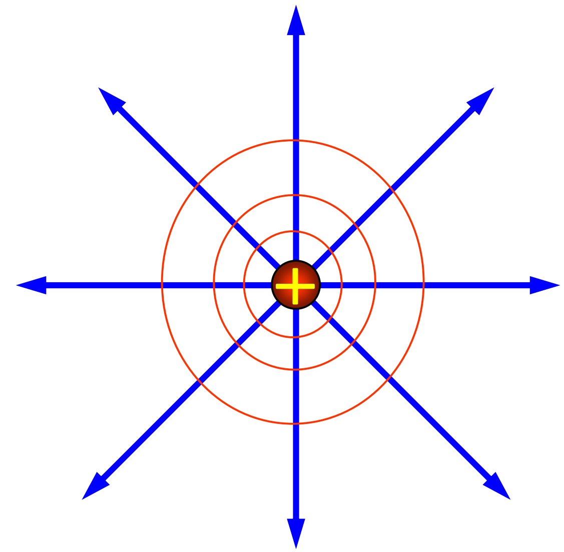
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log(y+\sqrt{y^2+r^2})\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$ 发散!

原因是什么？

3. 等势面

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

电场中所有电势相等的点构成的曲面称为**等势面**（实验可测定）。



等势面与电场分布的关系：

（1）电场线与等势面处处正交;

（2）电场线指向电势降低的方向;

（3）当相邻等势面电势差相等时，等势面密处的场强大，疏处的场强小。

（4）在同一等势面上移动电荷，电场力不做功。

$$A_{ab} = q(V_a - V_b)$$

作业：6 —T9、T10、T11、T12 、T13

本次课重点：

1.静电场的环路定理

2.电势的概念

3.电势以及基于电势计算电场