2017-2 期末试题

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分）

1. 函数 $f(x,y)=|x|\cos y$ 在原点 $(0,0)$ 处 （　　　）.

A. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 存在　　　B. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

C. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在　　D. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

2. 设 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v$ 化为球面坐标系下的逐次积分, 下列结果正确的是（　　　）.

A. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$　　B. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} f(\rho)\mathrm{d}\rho$

C. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$　　D. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\mathrm{d}\rho$

3. 设 $\Omega:0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\Omega_1$ 为 Ω 在第一卦限的部分区域, 则下面式子正确的是（　　　）.

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v$　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} x^2\mathrm{d}v$　C. $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=0$　D. $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}v$

4. 关于数项级数的敛散性, 下面说法正确的是（　　　）.

A. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l<1$.　　B. 若 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum a_n^2$ 收敛.

C. 若 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛, 则 $\sum(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.　　D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$, 则 $\sum a_n$ 收敛.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 以下结论正确的是（　　　）.

A. 在 $x=1$ 处条件收敛　　　　B. 在 $x=3$ 处发散

C. 在 $x=2$ 处绝对收敛　　　　D. 在 $x=0$ 处条件收敛

6. 在 xoy 面上, 若积分 $\int_L(2x\mathrm{e}^{x^2}y^3+ax\cos y)\mathrm{d}x+(b\mathrm{e}^{x^2}y^2-x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 则（　　　）.

A. $a=2,b=-3$　B. $a=-2,b=3$　C. $a=-2,b=-3$　D. $a=2,b=3$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分）

7. 函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在 $(1,1,1)$ 点的全微分 $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=$ ________.

8. 设区域$D:|x|+|y|\le 1$，则$\iint\limits_D (1-x)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

9. 设 $f(x)=x+1$ ，$-\pi\le x\le\pi$ ，将 $f(x)$ 展成以 2π 为周期的傅立叶级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 则 $a_{2018}=$ ________.

10. 设矢量函数$\boldsymbol{F}=\{x,y,z\}$，$\boldsymbol{G}=\{y,z,x\}$，则$\mathrm{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=$ ________.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分）

11. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x^2+y^2-5z=0 \end{cases}$在点$P(1,2,1)$处的切线方程.

12. 设$u=f(x+y^2,xy)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

13. 设 $x=r^2\cos\theta, y=r\sin\theta$（$r\ne 0$）确定的隐函数为 $r=r(x,y),\theta=\theta(x,y)$ ，求 $\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x}$.

14. 求$I=\int_L (x+y^2)\mathrm{d}s$, 其中$L$是圆弧$y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$与$x$轴和$y$轴所围平面图形的整个边界.

15. 求$I=\iint\limits_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le 1$）取上侧.

16. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$的和函数，并求数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$的和.

四、 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分）

17. 已知函数$u=\ln(xy^2z^3)$在椭球面$x^2+2y^2+3z^2=6R^2$（$R>0$）的第一卦限部分上存在最大值．求出该最大值点，并由此证明：对任意正实数a,b,c，成立 $ab^2c^3\le\left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18. 设Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$、柱面$x^2+y^2=2x$以及xy坐标面围成的空间区域．求（1）Ω的体积V；（2）Ω表面上锥面块的面积S.

五、分析证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分）

19. 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心，以 $R(R>0$，$R\neq 1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，证明 $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geq 1$.

2017-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. D　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** B　**6.** D

二、填空题

7. $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z$　　8. $7/3$　　9. 0　　10. $x+y+z$

三、基本计算题

11. 由于 P 为切点，所求切线的方向矢量为

$$\tau=\{2x,2y,2z\}\times\{2x,2y,-5\}|_P=-14\{2,-1,0\}.$$

故切线方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$.

12. 由于 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+yf_2$，　$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_{11}+xf_{12}+f_2+2y^2f_{21}+xyf_{22}$，

由于 f 具有二阶连续导数，所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_{11}+(x+2y^2)f_{12}+f_2+xyf_{22}$.

13. 将两个隐函数代入方程组，两边关于 x 求偏导得 $\begin{cases}1=2rr_x\cos\theta+r^2(-\sin\theta)\theta_x,\\ 0=r_x\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta_x.\end{cases}$

解上述方程组得到 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\cos\theta}{r(1+\cos^2\theta)}$，$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r^2(1+\cos^2\theta)}$.

14. 记 $A(1,0)$，$B(0,1)$. 则 $I=\int_{OA}(x+y^2)\mathrm{d}s+\int_{AB弧}(x+y^2)\mathrm{d}s+\int_{OB}(x+y^2)\mathrm{d}s$.

$\int_{OA}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，$\int_{OB}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$，

$\int_{AB弧}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=1+\frac{\pi}{4}$.

所以 $I=\frac{\pi}{4}+\frac{11}{6}$.

15. 补 $\Sigma: z=1, x^2+y^2\le 1$，下侧. 记 V:$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，

利用高斯公式，有 $I=-\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v-\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由于 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 (r^2+z^2)\mathrm{d}z=\dfrac{3\pi}{10}$；

$\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{\pi}{4}$.

故 $I=-\dfrac{\pi}{20}$.

16. 收敛半径为 1, 收敛域为 $[-1,1]$. 设和函数为 $S(x)$.

则 $xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t^2)^n\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,$$

注意 $x=0$ 时， $S(0)=1$.

并利用和函数的连续性，则 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}, & 0<|x|\le 1\\ 1, & x=0\end{cases}$.

从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\arctan\dfrac{1}{2}$.

四、 应用题

17. 作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x^2+2y^2+3z^2-6R^2)$.

令 $\nabla F=\vec{0}$，则有：

$F_x=y^2z^3+2\lambda x=0$， $F_y=2xyz^3+4\lambda y=0$， $F_z=3xy^2z^2+6\lambda z=0$，

$F_\lambda=x^2+2y^2+3z^2-6R^2=0$.

在第一卦限, 解得唯一驻点 (R,R,R).

由于函数有最大值，且驻点唯一，故最大值点为 (R,R,R).

因此对于任意的$x, y, z > 0$，$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6R^2$的点(x, y, z)都成立

$\ln(xy^2z^3) \le \ln R^6$，即$xy^2z^3 \le R^6 = \left(\dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{6}\right)^3$.

特别地，取$x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$，则有：$ab^2c^3 \le \left(\dfrac{a + 2b + 3c}{6}\right)^6$.

18.（1）$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \mathrm{d}r = \dfrac{32}{9}$.

（2）锥面块的方程为$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 在xy面投影的区域为$D: x^2 + y^2 \le 2x$, 面积微元为$\mathrm{d}S = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $S = \iint\limits_D \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi$.

五、分析证明题

19. 令$P = \dfrac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \dfrac{x}{4x^2 + y^2}$, 则$P_y = \dfrac{-4x^2 + y^2}{(4x^2 + y^2)^2} = Q_x \left(x^2 + y^2 \ne 0\right)$.

当$0 < R < 1$时，区域$D: (x-1)^2 + y^2 \le R^2$不包含原点, 用 *Green* 公式, 有

$$I = \iint\limits_D 0\mathrm{d}\sigma = 0.$$

当$R > 1$时，作$l: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$（$\varepsilon > 0$足够小, 使得$L$包围$l$在其内, 取逆时针方向), 在复连通区域$D^*: (x-1)^2 + y^2 \le R^2, 4x^2 + y^2 \ge \varepsilon^2$上用 *Green* 公式

$$\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \iint\limits_{D^*} 0\mathrm{d}\sigma = 0,$$

故 $I = \oint_{L+l^-} - \oint_{l^-} = \oint_l = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint_l x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\varepsilon^2} 2\sigma = \pi$，

其中l^-是l的反向曲线, $\sigma = \pi \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon$是椭圆$4x^2 + y^2 \le \varepsilon^2$的面积.

20. 证法 1 记区域$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)} \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)} \mathrm{d}x = \iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x) - f(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由二重积分的轮换对称性，则

$$I=\frac{1}{2}\iint_{D}[e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}]dxdy\ge\iint_{D}1dxdy=1\ .$$

证法 2 记区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

$$I=\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx=\iint_{D}e^{f(x)-f(y)}dxdy\ .$$

对任意 x ，有 $e^x\ge 1+x$.

所以 $I=\iint\limits_{D}e^{f(x)-f(y)}dxdy\ge\iint\limits_{D}(1+f(x)-f(y))dxdy$ ，

由轮换对称性知 $\iint\limits_{D}(f(x)-f(y))dxdy=0$, 故 $I\ge\iint\limits_{D}1dxdy=1$.

证法 3 由 *Cauchy-Schwartz* 不等式得

$$I=\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx\ge\left(\iint_{D}e^{\frac{f(x)}{2}}\cdot e^{-\frac{f(x)}{2}}dxdy\right)^2=1\ .$$