第五章　运算方法与运算器（二）

秦磊华　计算机学院

本节主要内容

基于补码数据表示研究运算方法和设计运算器(简)

5.2 浮点数据表示

5.3 浮点数加/减运算

本讲教学目标

知识目标

1.能比较不同浮点数数据表示的优缺点;
2.能进行十进制数与浮点数之间的转换;

能力目标

1.能进行浮点数的加/运算并判断溢出;
2.能分析浮点数运算的特殊情况;

素质目标

1.树立科学精神;

5.2 浮点数据表示

为什么要引入浮点数?

- 问题：三位十进制数能表示的最大数?
- 表示太阳质量 2×10^{30}kg需要多少十进制位?

3 or 5

- 机器字长确定时，浮点数能表示更大范围或更高精确度的数据；

  如电子的质量 9×10^{-28}g

- 科学记数法用幂和尾数来表示浮点数, 机器数中采用阶码和尾数来表示
- 浮点数可表示纯整数和纯小数以外的实数。

1. 浮点数据表示

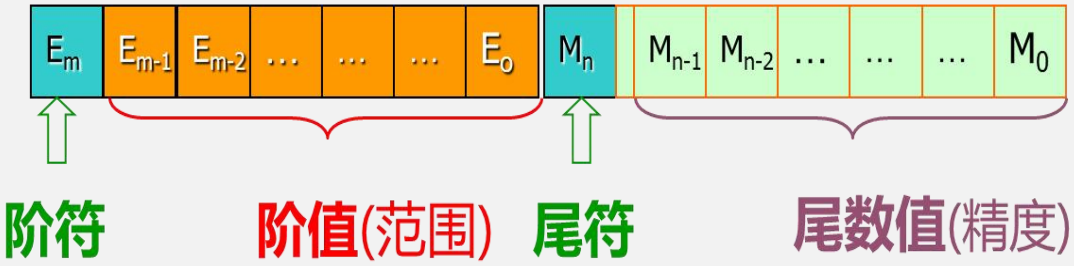
1) 计算机内浮点数的一般格式

$$N=2^{E}\times M$$

$$N= 2^{\pm e}\times (\pm m)$$

E_m	E_{m-1}	E_{m-2}	…	…	…	E_0	M_n	M_{n-1}	M_{n-2}	…	…	…	M_0
阶符	阶码值(范围)						尾符	尾数值(精度)					
整数							小数						

2) 计算机内浮点数的一般格式特点分析



- 机器字长确定的情况下，尾数位越长则阶码越短，如何取舍?
- 早期各计算机公司不同型号计算机，浮点数表示千差万别;
- 数据交换、软件可移植性、计算机协同工作等都受到影响。

3) IEEE 754格式

1985年完成浮点数标准IEEE 754制定，至今仍被许多CPU浮点运算采用 。

UC Berkeley math professor
William Kahan.

www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/754story.html

5.2 浮点数据表示

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST

What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic。DAVID GOLDBERG。ACM Computing Surveys, Vol 23, No 1, March 1991

IEEE 754格式

32浮点数 *float*	S(1bit)	E(23~30共8bit)	M(0~22共23bit)
64浮点数 *double*	S(1bit)	E(52~62共11bit)	M(0~51共52bit)

- 机器数构成：阶码E，尾数M，符号位S.
- $N = (-1)^S \times 1.M \times 2^e$ (规格化尾数，1隐藏)
- 阶码E移码表示，偏移量127/1023，E=e + 127/1023 ;尾数原码表示
- 偏移值127/128：综合考虑表示更大数据范围和表示特殊值。

$e_{min} = -127$，$e_{max} = 126$（E=128）；$e_{min} = -126$，$e_{max} = 127$（E=127）；

5.2 浮点数据表示

符号位	阶码	尾数	表示的数据
0/1	255	1xxxx	NaN Not a Number *
0/1	255	非零 0xxxx	sNaN Signaling NaN **
0	255	0	+∞
1	255	0	- ∞
0/1	1~254	M	$(-1)^S\times(1.M)\times2^{(E-127)}$ **(规格化)**
0/1	0	M (非零)	$(-1)^S\times(0.M)\times2^{(-126)}$ **(非规格化)**
0/1	0	0	+0/-0

** sNaN 是NaN的一种，例如可以用来检查变量是否被初始化

返回NaN的运算有如下三种

1)至少有一个参数是NaN的运算

2)不定式

♦除法运算：0/0、∞/∞、∞/−∞、−∞/∞、−∞/−∞

♦乘法运算：0×∞、0×−∞

♦加法运算：∞ + (−∞)、(−∞) + ∞

♦减法运算：∞ - ∞、(−∞) - (−∞)

3)产生复数结果的实数运算。例如：

♦对负数进行开偶次方的运算

♦对负数进行对数运算

♦对正弦或余弦到达域以外的数进行反正弦或反余弦运算

5.2 浮点数据表示

符号位	阶码	尾数	表示的数据
0/1	255	1xxxx	NaN Not a Number *
0/1	255	非零 0xxxx	sNaN Signaling NaN **
0	255	0	+∞
1	255	0	-∞
0/1	1~254	M	$(-1)^S\times(1.M)\times2^{(E-127)}$ (规格化)
0/1	0	M (非零)	$(-1)^S\times(0.M)\times2^{(-126)}$ (非规格化)
0/1	0	0	+0/-0

** sNaN 是NaN的一种，例如可以用来检查变量是否被初始化

```
main()
{
  float a=1.0,b=-1.0;
  a=a/0;  b=b/0;
  printf("a=%f b=%f",a,b);
  return;
}
```

a=1.#INF00 b=-1.#INF00

0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5.2 浮点数据表示

```
main()
{
  float a=0.0, b;
  a=a/0;  b=-sqrt(-1);
  printf ("a=%f b=%f",a,b);
  return;
}
```

符号位	阶码	尾数	表示的数据
0/1	255	1xxxx	NaN Not a Number *
0/1	255	非零 0xxxx	sNaN Signaling NaN **
0	255	0	$+\infty$
1	255	0	$-\infty$
0/1	1~254	M	$(-1)^S \times (1.M) \times 2^{(E-127)}$ (规格化)
0/1	0	M (非零)	$(-1)^S \times (0.M) \times 2^{(-126)}$ (非规格化)
0/1	0	0	+0/-0

** sNaN 是NaN的一种，例如可以用来检查变量是否被初始化

a=1.#IND00   b=1.#QNAN0

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	→ FFC0-0000
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	→ 7FC0-0000

4) IEEE 754格式与浮点数真值的转换

浮点数真值　十进制数N

N → $(-1)^s \times 2^e \times 1.M$

$E = e + 127$

保存S、E、M

单精度 float　32位二进制

从32位二进制中提取S、E、M

$e = E - 127$

计算$(-1)^s \times 2^e \times 1.M$，按权展开

浮点数真值　十进制数N

5.2 浮点数据表示

浮点数真值　十进制数N

转换为二进制	从二进制还原
N → $(-1)^s \times 2^e \times 1.M$	计算$(-1)^s \times 2^e \times 1.M$，按权展开
E = e + 127	e = E - 127
保存S、E、M	从32位二进制中提取S、E、M

单精度 float　32位二进制

例　3.3_{10} → IEEE 754 float

$3.3_{10} = 11.01001100110011001100110011\ldots_2$

$= 1.10100110011001100110011 \times 2^1$

S = 0 , e = 1,

E = 01111111 +1= 100000000

M= 10100110011001100110011

符号	阶码	尾码
0	10000000	10100110011001100110011

4	0	5	3	3	3	3	3

5.2 浮点数据表示

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST

```
main()
{
  double a,b,c;   int d;
  b=3.3;   c=1.1;
  a=b/c;
  d=b/c;
  printf("%f,%d",a,d);
  if (3.0!=a)
  printf("\nReally? 3.0!=a");
}
```

```
3.000000,2
```

```
Really? 3.0!=a
```

$(2^{-126}+10^{20})\ -10^{20} = ?\qquad 2^{-126} + (10^{20} - 10^{20}) =?$

由于精确度损失问题，浮点运算不满足结合律

1. 浮点数加/减运算方法

$X = 2^{E_X} M_X \qquad Y = 2^{E_Y} M_Y$

X ± Y= ?

如：$E_x=E_y$ $\qquad S=2^{E_x}(M_x \pm M_y)$

如：$E_x \neq E_y$ $\qquad$? 使两数的阶码变成相等 ⟹ 对阶

浮点运算步骤： **对阶、尾数运算、规格化、舍入、溢出判断**

1. 浮点数加/减运算方法

1)对阶 (使得两者的阶码相等)

大变小 or 小变大 ? ⟹ 小变大！，对阶的同时，尾数要同步右移

$2^8*(0.11000) + 2^6*(0.00111)$

♦大阶变小阶:

$2^8*(0.11000) \rightarrow 2^6*(11.000) \rightarrow 2^5*(110.000)$

♦小阶变大阶:

$2^6*(0.00111) \rightarrow 2^7*(0.000011\underline{1}) \rightarrow 2^8*(0.0000011\underline{1})$

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST

2) 运算结果规格化

(1) 为什么需要进行规格化 -浮点数可表达的多样性

$$2^7*(00.11000) = 2^8*(00.01100)$$

$$2^7*(10.11000) = 2^8*(11.01100)$$

$$2^7*(01.11000) = 2^8*(00.11100)$$

5.3 浮点运算(加/减)-- 一般格式的浮点数

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST

2) 运算结果规格化

(2)规格化的标准是什么?

尾数不为零时，其绝对值大于等于1/2

♦真值规格化数	0.1XXXX	-0.1XXXX
♦原码规格化数	0.1XXXX	1.1XXXX
♦补码规格化数	00.1XXXX	11.0XXXX
♦补码非规格化数	00.0XXXX	11.1XXXX
	01.XXXXX	10.XXXXX

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST

2) 运算结果规格化

(3) 如何规格化? - 使非规格化尾数变成规格化尾数，同步变化阶码

补码规格化数　00.1XXXX　11.0XXXX

00.0XXXX　11.1XXXX ⟹ 左移规格化 ⟹ 左移几位?

01.XXXXX　10.XXXXX ⟹ 右移规格化 ⟹ 右移1位

5.3 浮点运算(加/减)-- 一般格式的浮点数

3) 舍入处理

0	1	1	0	0	0	1	1

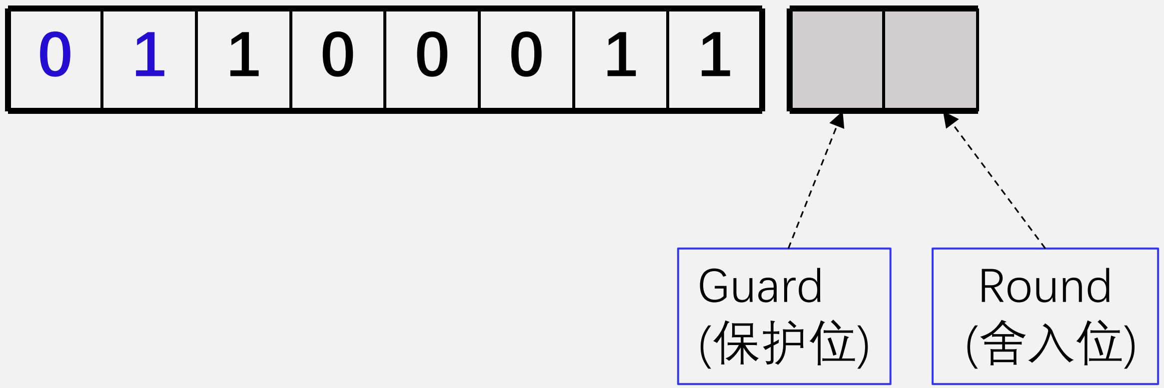
0	0	1	1	0	0	0	1	1

- ♦右移动规格化后低位部分丢失了数据位，从而产生误差
- ♦有多种处理方法：0舍1入，截去法
- ♦不同舍入方式对精度产生不同的影响！如果减少影响？

5.3 浮点运算(加/减)-- 一般格式的浮点数

3) 舍入处理

增加浮点运算附加位



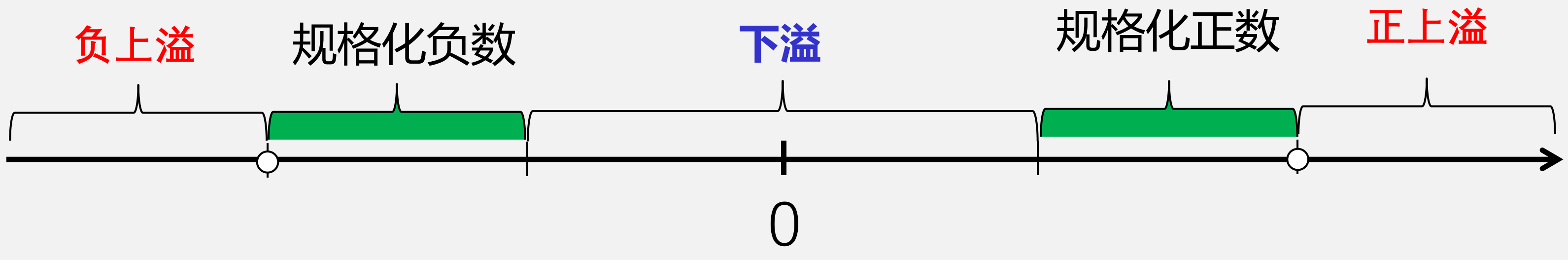
IEEE 754

增加浮点运算附加位 意义何在?

1. 浮点数加/减运算方法

4) 溢出的标准及处理

- 通过阶码是否溢出判断浮点数的溢出情况(双符号位检测)
- 阶码符号位为 01 → 浮点数上溢 $|X| \to \infty$
- 阶码符号位为 10 → 浮点数下溢 $|X| \to 0$



2. 浮点数加/减运算举例

例1 两浮点数 $x = 2^{101}\times 0.11011011$，$y = 2^{111}\times(-0.10101100)$。假设尾数在计算机中以补码表示，尾数位共12位，采用双符号位，阶码以补码表示，共5位，也采用双符号位, 求 x + y。

解：将x , y转换成浮点数据格式

$[x]_{浮}$ = 00 101, 00.11011011

$[Y]_{浮}$ = 00 111, 11.01010100

1) 对阶

$[E_x - E_y]_{补} = [E_x]_{补} + [-E_y]_{补} = 00101 + 11001 = 11110 = -2 < 0$

小阶对大阶， X阶码加2， X尾数右移2位

2. 浮点数加/减运算举例

$[x]_浮$ = **00 111, 00.0011011011** 保留位

$[Y]_浮$ = 00 111, 11.01010100

2)尾数求和

$[X+Y]_浮$ = **00** 111, **11**.10001010 11 保留位参与运算

3)结果规格化

$[X+Y]_浮$ = **00** 110, **11**.000101011 非规数，左归一位, 阶码减一

4)舍入处理

$[X+Y]_浮$ = **00** 110, **11**.00010110 (0舍1入法)

$[X+Y]_浮$ = **00** 110, **11**.00010101 (截去法)

5)溢出判断

$[X+Y]_浮 = 2^{110} \times (-0.11101011)$ **无溢出**

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST

2. 浮点数加/减运算举例

例2， 已知 **$X=2^{111}\times 0.11111111$，$Y=2^{111}\times 0.10000001$**， 求 **X+Y**

解： $[X]_{浮}$=00111, 00.1111 1111 ， $[Y]_{浮}$=00111, 00.1000 0001

1)尾数求和

$[X+Y]_{浮}$ = 00111, 01.1000 0000

2)结果规格化

$[X+Y]_{浮}$ = **01** 000, **00**.1100 0000 右移一位规格化, 阶码 +1

3)舍入处理

$[X+Y]_{浮}$ = **01** 000, **00**.11000000

4)溢出判断

阶码双符号位 01， 上溢

3. 计算机中关于运算的案例分析

```
union { char c[4]; float f;  int i;} t1,t2,t3;
main(){
   t1.i = 0X7F000000; t2.i = 0X7F7FFFFF;  // Max float
   t3.f = t1.f + t1.f;
   printf("%08X   %f\n",t1.i,t1.f);
   printf("%08X   %f\n",t2.i,t2.f);
   printf("%08X   %f\n",t3.i,t3.f);
}
```

7F000000	170141183460469230000000000000000000000.000000
7F7FFFFF	340282346638528860000000000000000000000.000000
7F800000	1.#INF00

5.3 浮点运算(加/减)

```
union { char c[4]; float f;  int i;}  t1,t2,t3,t4;
main()  {
     t1.i = 0X00000001;  t2.i = 0X00C00000; t3.i = 0X00800000; //Minus float
     t4.f = t2.f - t3.f;
     printf("%08X   %.61f\n",t1.i,t1.f);  printf("%08X   %.61f\n",t2.i,t2.f);
     printf("%08X   %.61f\n",t3.i,t3.f);  printf("%08X   %.61f\n",t4.i,t4.f);}
```

t2.f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⇨ 1.1(尾数)
t3.f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⇨ 1.0(尾数)

```
00000001   0.0000000000000000000000000000000000000000000014012984643248171
00C00000   0.0000000000000000000000000000000000000176324152623343130000000
00800000   0.0000000000000000000000000000000000000117549435082228750000000
00400000   0.0000000000000000000000000000000000000058774717541114375000000
```

第二部分完