华中科技大学 2020-2021 学年第二学期

“ 微积分（一） ”期中考试试卷解答

一、 基本计算题（每小题 6 分，共 60 分）

1．求 $xy'-y=x^2\cos x$ 的通解.

解 因为$\left(\dfrac{y}{x}\right)'=\cos x$， （3 分）

所以方程的通解为 $y/x=C+\sin x$．(6 分)

另解 对应齐次方程 $xy'-y=0$ 的通解为 $y=Cx$， （3 分）

非齐次方程的通解解为 $y=x\left\{C+\int x\cos x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\right\}=x(C+\sin x)$ （6 分）

2. 求微分方程 $y''-xy'^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-2$ 的特解.

解 令 $p=y'$，(2 分） 则 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=xp^2$， $p\big|_{x=0}=-2$，解得 $p=\dfrac{-2}{1+x^2}$．(4 分)

进一步有 $y=1-2\arctan x$． （6 分）

3. 计算顶点为 $A(1,1,1)$、$B(2,2,2)$、$C(1,2,2)$、$D(0,1,2)$ 的四面体 $ABCD$ 的体积.

解 $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right]\right|$ （3 分）

$$=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&0&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\quad.$$ （6 分）

4. 设函数 f 有二阶连续偏导数，$z=yf(x,x^2y)$，计算混合偏导 z_{xy}.

解 $z_x=yf_1(x,x^2y)+2xy^2f_2(x,x^2y)$ ，(3 分)

$z_{xy}=f_1(x,x^2y)+x^2yf_{12}(x,x^2y)+4xyf_2(x,x^2y)+2x^3y^2f_{22}(x,x^2y)$．(6 分)

5. 设 $w=x^2yz$， $z=x^2+y^2$， $x+y+z=4$．求 $x=1,y=1$ 时导数 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ 的值.

解 由 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x+y+z=4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$， （2 分）

$x=1,y=1$ 时 $z=2$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1,\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$． （4 分）

进一步有 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=2xyz+x^2z\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2y\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$， $x=1,y=1$ 时， $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=2$． （6 分）

6．求 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在 $(1,1,1)$ 点沿曲面 $x^2+y^2+z^2=3$ 的外法线方向的方向导数.

解 $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$， （2 分）

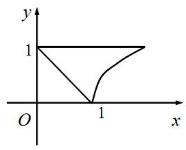
$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}=u_x(P)\cos\alpha+u_y(P)\cos\beta+u_z(P)\cos\gamma \qquad (4\text{ 分})$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}. \qquad (6\text{ 分})$$

7．交换二次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^{1+y^2}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的次序.

解 积分区域如图所示.交换积分区域，得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x-1}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

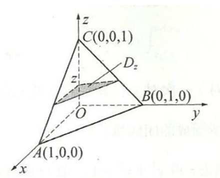


8．计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的空间区域.

解 由轮换对称性得

$$I=6\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (2\text{ 分})$$

$$=6\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4\text{ 分})$$



$=6\int_0^1 z\cdot\dfrac{(1-z)^2}{2}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{4}$.（6 分） （其中 D_z： $x+y\le 1-z,x\ge 0,y\ge 0$）.

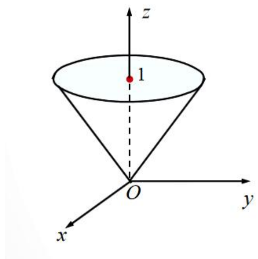
9．计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

解 $I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\sqrt{r^2+z^2}r\mathrm{d}r$ （3 分）

$=\dfrac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$. （6 分）

或利用球面坐标

$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi}\rho\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$ （3 分）



$=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{-1}{\cos^4\varphi}\mathrm{d}(\cos\varphi)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\cos^3\varphi}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$. （6 分）

10. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的面积 S .

解 联立 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 得投影区域 D_{xy}: $(x-1)^2+y^2\le 1$，（2 分）

又 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，（4 分）

所以 $S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi$. (6 分）

二、综合题（每小题 8 分，共 40 分）

11. 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足积分方程 $f(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ ，试求 $f(x)$.

解 方程 $f(x)=\mathrm{e}^x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 两边求导，得

$f'(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，

再求导，得 $f''(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$ ，且 $f(0)=f'(0)=1$ （ 3 分）

特征方程 $r^2+1=0$ 的根为 $r=\pm i$ ，因此对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 设特解为 $y^*=A\mathrm{e}^x$ ，代入原方程，解得 $A=\frac{1}{2}$，所以 $y^*=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ ，通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. （6 分）

由 $f(0)=f'(0)=1$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，故 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)$. (8 分）

12. 设 S 是曲线 L: $\begin{cases} z=1-x^2, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 oz 轴的旋转曲面，求 S 的切平面使其与已知平面 $x+y+z=1$ 平行.

解 S 的方程为：$z=1-x^2-y^2$. 设切点为 $(x_0,y_0,1-x_0^2-y_0^2)$，则切平面的法矢为

$\vec{n}=\{-z_x,-z_y,1\}=\{2x_0,2y_0,1\}$. （4 分）

由 $\vec{n}\parallel\{1,1,1\}$ 得 $x_0=y_0=\dfrac{1}{2}$, （6 分）

故切平面为 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$. （8 分）

13. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面的距离的最大值.

解 问题为求 $\max z$，约束条件为 $x^2+2y^2-z=6,\quad 4x+2y+z=30$. （2 分）

作拉格朗日辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)\text{ ，}\qquad\text{（4 分）}$$

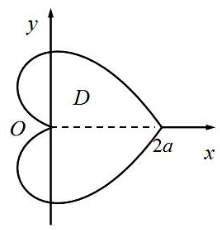
令 $L_x=2\lambda x+4\mu=0,\ L_y=4\lambda y+2\mu=0,\ \ L_z=1-\lambda+\mu=0$, 及 $L_\lambda=0, L_\mu=0$

解得(4, 1, 12), (-8, -2, 66)为条件极值问题得驻点， （7 分）

由实际意义知：C 上的点到 xoy 坐标面的距离的最大值为 66. （8 分）

14. 计算 $I=\iint\limits_D(ye^x+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 围成的区域.

解 由对称性，D_1 为 D 在 ox 轴的上方一半.



$$I=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad\text{（3 分）}$$

$$=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2\mathrm{d}r \qquad\text{（6 分）}$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi}(2\cos^2\frac{\theta}{2})^3\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3\cdot 8\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{32}{3}a^3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{3}\pi a^3\ . \qquad\text{（8 分）}$$

15. 讨论 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数的存在性、可微性.

解 因 $f(x,0)\equiv 0$，所以 $f_x(0,0)=0$，同理 $f_y(0,0)=0$.

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{(\sqrt{|xy|}-0)-(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

而取 $y=x$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.