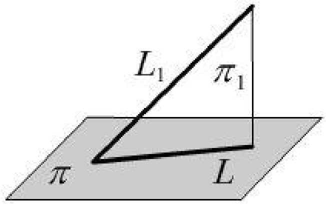
2015-2 期中试卷参考解答

1. $\overrightarrow{OA}=\{2,3,1\}$，$\overrightarrow{OB}=\{1,2,2\}$，$\overrightarrow{OC}=\{3,-1,4\}$，

四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}\left|(\vec{O}A\times\vec{O}B)\cdot\vec{O}C\right| =\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&3&1\\1&2&2\\3&-1&4\end{matrix}\right\|=\dfrac{19}{6}$.

2. 思路：求过直线 L_1 且与平面 π 垂直的平面 π_1 的方程，与 π 联立即可。



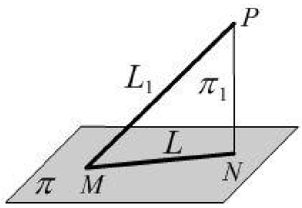
解法 1 利用平面束，过直线 L_1：$\begin{cases}x-y+z+1=0\\x-y-z-1=0\end{cases}$ 的平面束为

$$x-y+z+1+\lambda(x-y-z-1)=0$$

由 π_1 与 $x+y+z=0$ 垂直，得 $\{1+\lambda,-1-\lambda,1-\lambda\}\cdot\{1,1,1\}=0$，解得 $\lambda=1$，

故 π_1 为 $2x-2y=0$ 或 $x-y=0$ ，从而投影直线 L 的方程为 $\begin{cases}x-y=0\\x+y+z=0\end{cases}$.

解法 2 由已知直线 L_1 的方程知该直线过 $(0,0,-1)$，且方向矢量 $\vec{s}=\{1,1,0\}$，于是过该直线且与平面 $x+y+z=0$ 垂直的平面 π_1 的法矢量 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\{1,-1,0\}$，



故平面 π_1 为 $x-y=0$，从而投影直线 L 的方程为 $\begin{cases}x-y=0\\x+y+z=0\end{cases}$

3. **解法 1** 过 P 在垂直于平面 π 的直线的参数方程为：$\begin{cases}x=t+1\\y=4t-2\\z=t+3\end{cases}$（$t$ 为参数），将其代入平面 π 的方程，得到 $t=1$， 根据参数方程几何意义，则当 $t=2$ 时对应的点就是的对称点。所以对称点为 $Q(3,6,5)$。

解法 2 设对称点为 $Q(a,b,c)$，由 $\overrightarrow{PQ}\ /\!/\ \{1,4,1\}\Rightarrow\dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-2}{4}=\dfrac{c-3}{1}\overset{\text{令其为}}{=\!=\!=}t$， 得 $\begin{cases}a=t+1\\b=4t-2\\c=t+3\end{cases}$， 由 PQ 的中点 $(\dfrac{1+a}{2},\dfrac{b-2}{2},\dfrac{c+3}{2})$ 在 π 上，得

$\dfrac{1+1+t}{2}+4\cdot\dfrac{4t-4}{2}+\dfrac{t+6}{2}=14$ 即 $18t=36$，$t=2$，

所以对称点为$Q(3,6,5)$。

4. 因$0<\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\dfrac{x^2}{|x|+|y|}+\dfrac{y^2}{|x|+|y|}\le |x|+|y|\to 0(x\to 0,y\to 0)$，由夹挤准则得$l=0$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'\cdot 2x$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi+y\varphi'\cdot(-2y)$，

于是 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\varphi'+\dfrac{1}{y}\varphi-2y\varphi'=\dfrac{z}{y^2}$ （或$\dfrac{\varphi}{y}$）

6. 方程 $xe^x-ye^y-ze^z=0$ 两边微分：

$$e^xdx+xe^xdx-e^ydx-ye^ydy-e^zdz-ze^zdz=0,$$

求得 $dz=\dfrac{e^x(x+1)dx-e^y(y+1)dy}{e^z(z+1)}$,

$$du=f_xdx+f_ydy+f_zdz=f_xdx+f_ydy+f_z\frac{e^x(x+1)dx-e^y(y+1)dy}{e^z(z+1)}$$

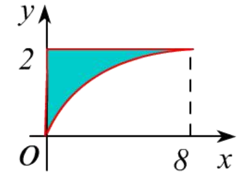
$$=(f_x+f_z\frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)})dx+(f_y-f_z\frac{e^y(y+1)}{e^z(z+1)})dy$$

7. $\vec{n}=\{2x,4y,-4z\}\big|_{(1,1,1)}=\{2,4,-4\}\ //\ \{1,2,-2\}$， $\vec{n}^0=\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\}$.

$\nabla u(1,1,1)=\{\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y},\dfrac{3}{z}\}\Big|_{(1,1,1)}=\{1,2,3\}$，所以 $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial\vec{n}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}-2=-\dfrac{1}{3}$.

8. 旋转面方程为$x^2+4y^2+z^2=1$，其上任意一点的法矢量为$\{2x,8y,2z\}$，又已知平面的法矢量为$\{1,-2,\dfrac{1}{2}\}$， 由题设$\dfrac{x}{1}=\dfrac{4y}{-2}=2z$，即$x=-2y$， $z=-y$，代入旋转面方程，得$(-2y)^2+4y^2+(-y)^2=1\to y=\pm\dfrac{1}{3}$。解出切点为 $(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3})$与$(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$，因此，所求切平面方程为$x-2y+\dfrac{1}{2}z\pm\dfrac{2}{3}=0$

9. 交换积分次序得 $I=\int_0^2dy\int_0^{y^3}\sin\dfrac{x}{y}dx$



$$=\int_0^2ydy\int_0^{y^3}\sin\frac{x}{y}d(\frac{x}{y})=-\int_0^2y[\cos\frac{x}{y}]_0^{y^3}dy=\int_0^2(y-y\cos y^2)dy=2-\frac{\sin 4}{2}.$$

10. 由于区域D关于x轴对称，所以$\iint\limits_D ydxdy=0$；记$D_1: x^2+y^2\le 2x, y\ge 0$，则

$$\iint\limits_D (y+\sqrt{x^2+y^2})dxdy \quad =2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy \quad =2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr \quad =\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$$

11. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1$； $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{1}{y}\cdot(-\frac{y}{z^2})f_{12}=-\frac{1}{z^2}f_{12}$；

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=\frac{2}{z^3}f_{12}-\frac{1}{z^2}\cdot(-\frac{y}{z^2})f_{122}=\frac{2}{z^3}f_{12}+\frac{y}{z^4}f_{122}.$$

12. 解法 1 视x,z为因变量，方程组两边对y求导：$\begin{cases}(1-\frac{dx}{dy})F_1+(1-\frac{dz}{dy})F_2=0\\(x+y\frac{dx}{dy})G_1+\frac{dz}{dy}G_2=0\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}F_1\frac{dx}{dy}+F_2\frac{dz}{dy}=F_1+F_2\\ yG_1\frac{dx}{dy}+G_2\frac{dz}{dy}=-xG_1\end{cases}$，

于是$\frac{dz}{dy}=\frac{yG_1(F_1+F_2)+xF_1G_1}{yF_2G_1-F_1G_2}$ $\qquad (yF_2G_1-F_1G_2\neq 0)$

解法 2 方程组两边微分 $\begin{cases}F_1(dy-dx)+F_2(dy-dz)=0\\G_1(ydx+xdy)+G_2dz=0\end{cases}$，解得

$\frac{dz}{dy}=\frac{yG_1(F_1+F_2)+xF_1G_1}{yF_2G_1-F_1G_2}$。

13. 思路：同时将x换做$-x$，将y换做$-y$，发现方程不变，因此椭圆中心为坐标原点。记(x,y)是椭圆上任意一点，问题归结于在约束条件$5x^2+4xy+2y^2-1=0$下求距离$d=\sqrt{x^2+y^2}$的最大值与最小值。

解法 1 构造 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2+4xy+2y^2-1)$

令 $\begin{cases}F_x=2x+10\lambda x+4\lambda y=0\\F_y=2y+4\lambda x+4\lambda y=0\\F_\lambda=5x^2+4xy+2y^2-1=0\end{cases}$ 求得 $x=2y$或者$y=-2x$，

将 $x=2y$ 代入约束条件得 $y^2=\frac{1}{30}$，$x^2=\frac{4}{30}$，从而 $d=\sqrt{\frac{1}{6}}$；

将 $y=-2x$ 代入约束条件得 $x^2=\frac{1}{5}$，$y^2=\frac{4}{5}$，从而 $d=1$，所以，长半轴的长为 1，短半轴的长为 $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

解法 2 利用梯度法，所求驻点满足 $\{x,y\}//\{10x+4y,4y+4x\}$，即 $4x^2+4xy=10xy+4y^2$，亦即 $2x^2-2y^2-3xy=0$。解得得 $x=2y$ 或者 $y=-2x$ ………（6 分，求对一个给 2 分）其余同解法 1.

解法 3 曲线上的点到原点距离可以用利用极坐标变量 r 表示，因此问题转化为求曲线上 r 的最值。

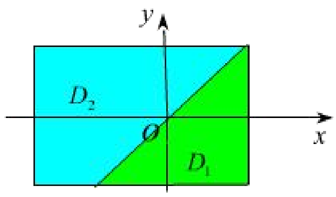
$$r^2=\frac{1}{5\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta}=\frac{1}{2+\dfrac{3+5\sin 2\theta}{2}}$$

直接从正弦函数性质得出所求最大值和最小值。

解法 4 用 $y=kx$ 去交曲线，得到参数化的交点坐标 $P(x(k),kx(k))$，于是目标函数是一元函数

$d^2=x(k)^2[1+k^2]=\frac{1+k^2}{2k^2+4k+5}$，然后求其最值。

14. $I=\iint\limits_{D_1}(x-y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x-y)dxdy$ D_1 与 D_2 见图



$=2\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{x}(x-y)dy+\int_{-1}^{1}dy\int_{-2}^{y}(x-y)dx=\frac{8}{3}+3=\frac{17}{3}$

15.（1）证：取路径 $y=kx^2$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在，从而不连续。

（2）因为 $f(x,0)=0$，所以 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x^4}=0$；同理 $f_y(0,0)=0$.

（3）因 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续，所以不可微。

（4）因 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不可微，所以只能用定义讨论和计算方向导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial n}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho^3(\rho^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$