例：平行板电容器，极板面积为S，间距为d，接在电源上以保持电压为V。将极板的距离拉开一倍，计算：
(1)静电能的改变ΔW_e=？；(2)电场对电源做功A=？；
(3)外力对极板做功$A_外$=？

解：(1) 拉开前 $C_1=\dfrac{\varepsilon S}{d}$ $W_1=\dfrac{1}{2}C_1V^2$

拉开后 $C_2=\dfrac{\varepsilon S}{2d}$ $W_2=\dfrac{1}{2}C_2V^2$

$$\Delta W=W_2-W_1=-\frac{\varepsilon S}{4d}V^2$$

$\Delta W<0$ 静电能减少了

(2) 电场对电源做功 = -电源克服电场力做功

$$A_{电源}=\int_{Q_1}^{Q_2}V\mathrm{d}q=(Q_2-Q_1)V$$

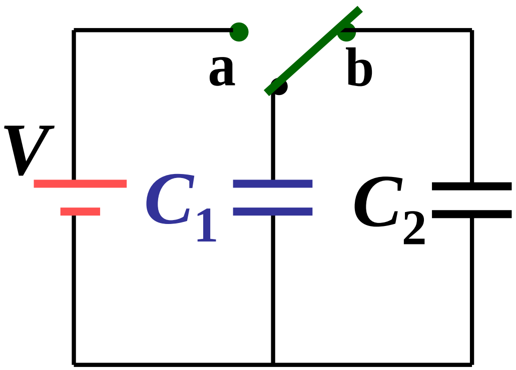
$$A_{电场}=-A_{电源}=-(Q_2-Q_1)V\xrightarrow{Q=CV}=(C_1-C_2)V^2$$

$$A_{电场}=\frac{\varepsilon S}{2d}V^2>0$$ 但 $A_{电场}\neq-\Delta W$

(3)外力对极板做功$A_外+A_{电源}=\Delta W$

$$A_外=\Delta W+A_{电场}=-\frac{\varepsilon S}{4d}V^2+\frac{\varepsilon S}{2d}V^2=\frac{\varepsilon S}{4d}V^2$$

例: 有一电容器 C_1= 20 μF，用 V=1000v 的电源使之带电，然后拆去电源，使其与另一个未充电的电容器 C_2= 5 μF 相连接。求：(1)两电容器各带电多少？(2)第一个电容器两端的电势差为多少？(3)能量损失多少？



解：(1)充电后C_1所带电荷为: $Q = C_1 V$

与C_2相接后： $Q_1 + Q_2 = C_1 V$

并且 $V_1 = V_2$ 即 $\dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_2}{C_2}$

联立

求得: Q_1= 1.6×10^{-2} c
Q_2= 0.4×10^{-2} c

(2) $V_1 = V_2 = \dfrac{Q_1}{C_1} = 8 \times 10^2$ V

(3) $\Delta W = W_{末} - W_{初}$ → $W_{末} = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2)V_1^2$, $W_{初} = \dfrac{1}{2}C_1 V^2$

焦耳热

$\therefore \Delta W = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2)V_1^2 - \dfrac{1}{2}C_1 V^2 = -2$ J

能量哪去了？

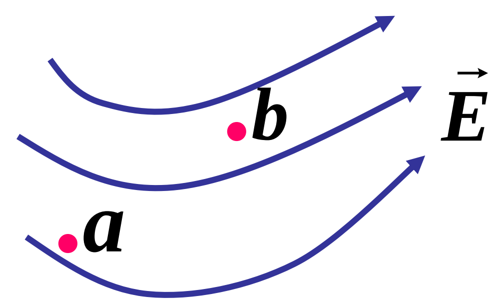
十一、电荷在外电场的静电势能

任何电荷在静电场中都具有势能——*静电势能*

并且：电场力做功(A) = 电荷电势能的减少$(-\Delta W)$

设q在电场中a、b两点的电势能分别为W_a、W_b，

将q由$a \to b$电场力所做的功为：



$$A_{ab} = -(W_b - W_a)$$
$$= W_a - W_b$$

又：$A_{ab} = \int_a^b q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q(V_a - V_b)$

$$= qV_a - qV_b$$

两式比较有：$W_a = qV_a \quad W_b = qV_b$

一点电荷q在电场中具有电势能：

$$W = qV$$

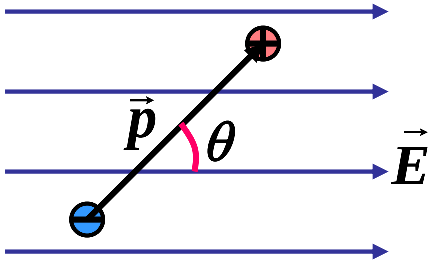
电荷与场源电荷的相互作用能

例：求电偶极子在均匀电场中的静电势能。

点电荷的静电势能

$$W = qV$$

解：两电荷的静电势能分别是：



$$W_+ = qV_+ \qquad W_- = -qV_-$$

$$W = W_+ + W_- = q(V_+ - V_-)$$

$$= q\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\int_-^+ E\cos\theta dl$$

$$= -qlE\cos\theta$$

即： $W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$$

电荷系的静电能:

当系统由多个静止的电荷组成时, 这些电荷之间的静电相互作用能的总和称为该电荷系的静电能。

静电能的数值是相对的。一般取该电荷相距无限远时的静电能为零。

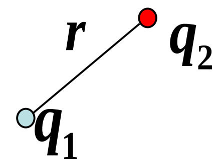
电荷系统的静电能等于将系统中各电荷从现有的位置到彼此分散到无限远的过程中，它们之间的静电力所做的功；或等于将各电荷从无限远移动到现有位置过程中，外力做的功。

电荷系的静电能的计算公式：

1. 两个点电荷q_1, q_2组成的系统

设电荷q_1静止，将q_2由现有位置移到无穷远处，在此过程中，q_1的电场力对q_2做的功为

$$A_{12}=\int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_r^\infty q_2\vec{E}_1\cdot d\vec{r}$$



$$=q_2\int_r^\infty \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{r}=q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}=q_2V_{21}$$

约定：V_{ij} ——电荷j在电荷i处产生的电势

静电能： $W=A_{12}=q_2V_{21}$ $\boxed{W=\frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2)}$

类似地，若电荷q_2静止，将q_1由现有位置移到无穷远处，

可得： $W=A_{21}=q_1V_{12}$ $\boxed{\therefore W=\frac{1}{2}(q_1V_{12}+q_2V_{21})}$ （对称）

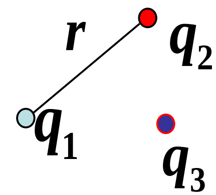
2. 三个点电荷组成的系统

$$\boxed{W=\frac{1}{2}(q_1V_{12}+q_2V_{21})}$$

两个点电荷组成的系统

设q_1和q_2静止, 先将q_3由现有位置移到无穷远处,

q_1和q_2的电场力做功为



$$A=A_{13}+A_{23}$$

$$=\frac{1}{2}(q_3V_{31}+q_1V_{13})+\frac{1}{2}(q_3V_{32}+q_2V_{23})$$

$$W=A_{13}+A_{23}+A_{12}$$

$$=\frac{1}{2}(q_3V_{31}+q_1V_{13})+\frac{1}{2}(q_3V_{32}+q_2V_{23})+\frac{1}{2}(q_1V_{12}+q_2V_{21})$$

$$=\frac{1}{2}[q_1(V_{12}+V_{13})+q_2(V_{21}+V_{23})+q_3(V_{31}+V_{32})]$$

$$=\frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2+q_3V_3)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iV_i$$

3. 电荷系的静电能的计算公式：

设n个点电荷组成的电荷系,第i个电荷的电量为q_i,

其它电荷在q_i处产生的电势为V_i, 则此电荷系的静电能为

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i}$$

如果系统是一个电荷连续分布的带电体,可将其看成由无限多个电荷元组成, 则系统的静电能

$$W = \frac{1}{2}\int_q V \mathrm{d}q$$

严格讲, 是除dq之外的其它所有电荷在dq处产生的电势

上式中的V可以近似取为包括dq的所有电荷在dq处电势的总和，而积分是对该带电体上所有电荷积分。

例： 求一均匀带电球面的静电能。
已知球面半径为R，总电量为Q。

解： 带电球面是一等势面，其电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

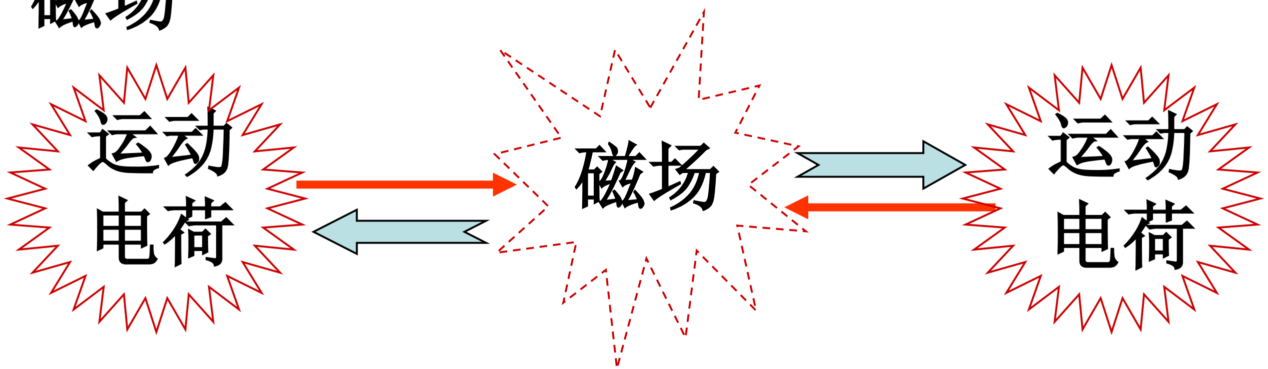
该带电球面的静电能为

$$W=\frac{1}{2}\int_Q V\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int_Q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int_Q \mathrm{d}q=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

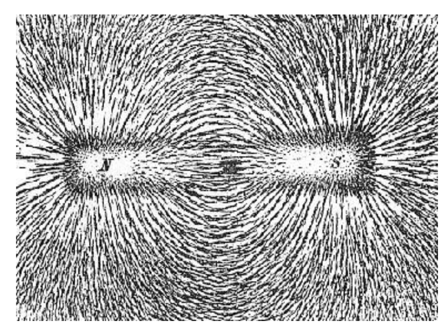
第7章　稳恒磁场

一、磁场



1.磁场的特征:
- （1）在磁场中的运动电荷、载流导体、磁性介质等受磁场力作用
- （2）运动电荷、载流导体在磁场中运动时，磁力做功 —— 磁场具有能量

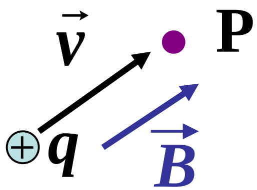
稳恒电流周围 ⟶ 稳恒磁场



磁场的描述:
- 形象化：磁场线
- 定量化：磁感应强度$\vec{B}$

2. 磁感应强度 $\vec{B}$ 的定义

$\vec{B}$ ——描述磁场强弱及方向的物理量



用运动电荷q来确定：

设电荷q以速度 $\vec{v}$ 进入磁场 $\vec{B}$中的P点.

(1) 当 $\vec{v}$ 沿某一特定方向时，q受力$\vec{F}=0$，

定义该方向为该点处$\vec{B}$ 的方向。

(2) 改变 $\vec{v}$ 的方向通过P点，总是有 $\vec{F} \perp \vec{v}$,

并且有 $\vec{F} \perp \vec{B}$， $\therefore$ $\vec{F}$是侧向力

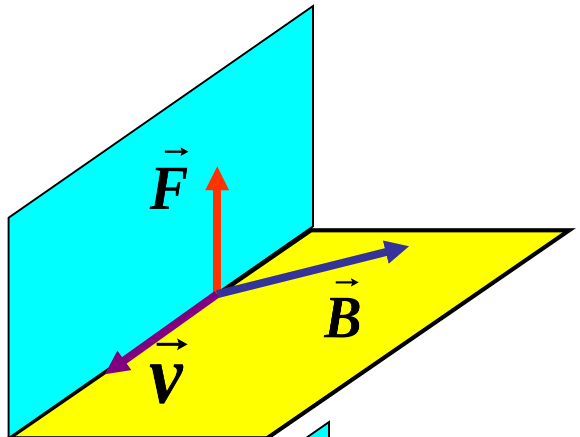
(3) 使 q 沿 $\vec{v} \perp \vec{B}$ 的方向运动时，$F=F_{max}$

定义： $B = \dfrac{F_{max}}{qv}$ 单位 $\begin{cases} \text{SI制} & \text{T(特斯拉)} \\ \text{高斯制} & \text{G} \quad 1\text{T}=10^4\text{G} \end{cases}$

或： $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 即: $F=qvB\sin\theta$

$\boxed{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}$ 即: $F=qvB\sin\theta$

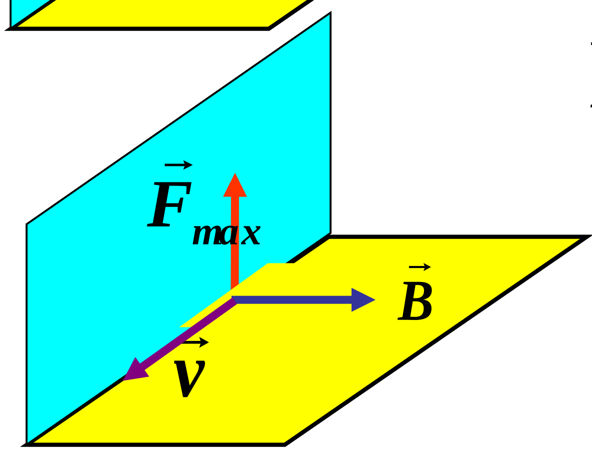
$\vec{F}$、$\vec{v}$、$\vec{B}$ 三者之间的关系如下：



1）$\vec{F}\perp(\vec{v}$、$\vec{B})$ 决定的平面

2）$\vec{v}\perp\vec{B}$ 时，$F=F_{\max}$

3）$\vec{v}\,//\,\vec{B}$ 或 $\vec{v}\,//-\vec{B}$ 及 $v=0$时，$F=0$

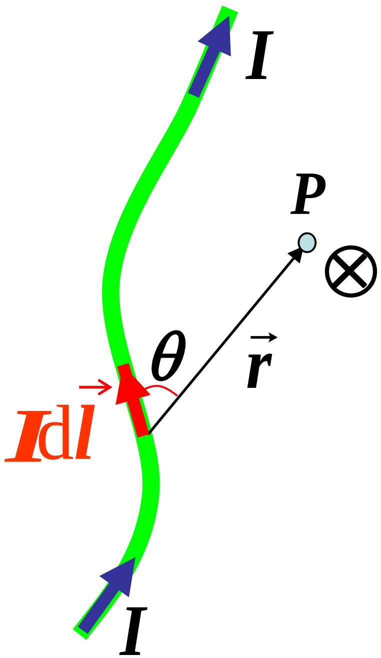


$$\vec{B}\begin{cases}\text{大小} B=\dfrac{F_{max}}{qv}\\ \text{方向} \vec{F}_{max}\times\vec{v}\end{cases}$$

如何计算$\vec{B}$？

两种方法 $\begin{cases}\text{毕奥—萨伐尔定律}\\ \text{安培环路定理}\end{cases}$

二、毕奥—萨伐尔定律 ——电流激发磁场的规律



实验表明：

$\boxed{\text{任一电流激发的磁场}} = \boxed{\text{各小段电流产生的磁场的叠加}}$

电流元 $Id\vec{l}$ 在P点产生的磁场

(1) $dB \propto \; Idl, \; \frac{1}{r^2}, \; \sin\theta$　　SI制中：$K = \frac{\mu_o}{4\pi}$

即：$dB = K\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$　　K—比例系数

真空的磁导率　$\mu_o = 4\pi\times 10^{-7}\mathrm{Tm/A}$

(2) $d\vec{B}$的方向垂直于$d\vec{l}$、$\vec{r}$所决定的平面，沿 $d\vec{l}\times\vec{r}$ 的方向。

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}} \longrightarrow \text{毕奥—萨伐尔定律}$$

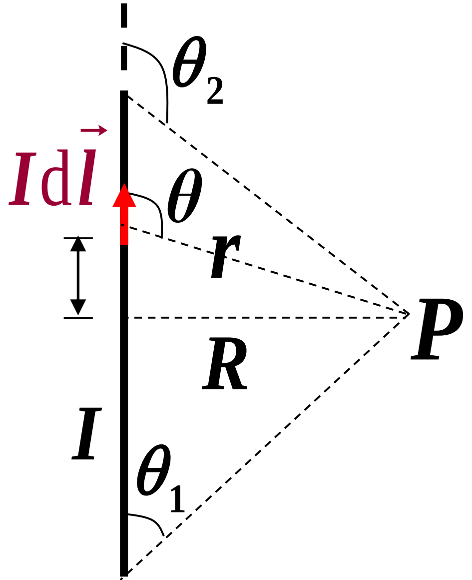
$d\vec{B}$ 大小为：$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$

$d\vec{B}$ 方向为：$Id\vec{l}\times\vec{r}$ 右手螺旋

(3) P点总的磁感应强度为

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

求一段载流直导线的磁场。



任意一个电流元在P点产生的磁感应强度的方向均垂直向里，故

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$B_P=\int \mathrm{d}B$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

而 $l=r\cos(\pi-\theta)=-r\cos\theta$

$$R=r\sin(\pi-\theta)=r\sin\theta$$

由此两式得 $l=-R\mathrm{ctg}\theta$

$$\mathrm{d}l=\frac{R\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta},\quad r=\frac{R}{\sin\theta}$$

代入积分式可得：

$$B_P=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{R}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

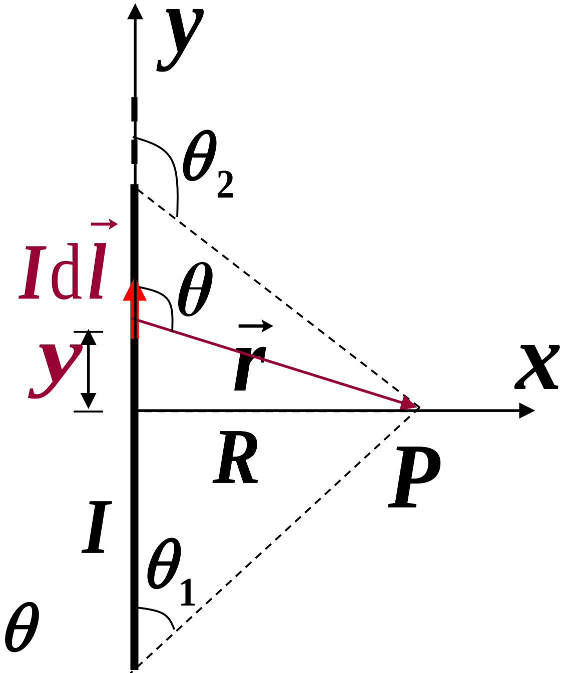
导线无限长，$\theta_1\to 0$, $\theta_2\to\pi$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

(P点距导线足够近时)

例: 求一段载流直导线的磁场。

另解: 对任意电流元，



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idy\vec{j}\times\vec{r}}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idy\vec{j}\times(R\vec{i}-y\vec{j})}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRdy\vec{k}}{(y^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\because tg(\pi-\theta)=\frac{R}{y}$$

$$\therefore y=-Rctg\,\theta$$

$$dy=\frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore \vec{B}=\int d\vec{B}$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}-\frac{\mu_0 I\vec{k}}{4\pi R}\sin\theta d\theta$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\vec{k}$$

若导线无限长，$\theta_1\to 0,\theta_2\to\pi$

$$\boxed{\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{k}}$$

(P点距导线足够近时)

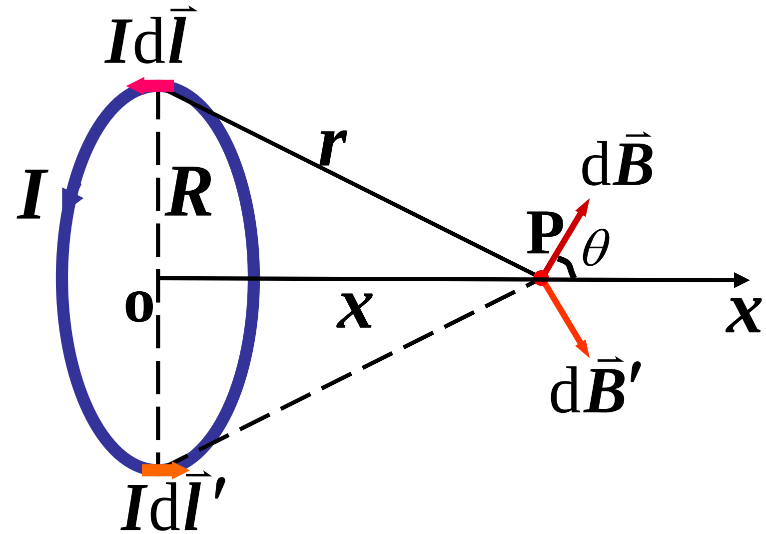
(1) 载流长直导线周围B与R成反比。

(2) 磁力线是沿着垂直导线平面内的同心圆，其方向与电流方向成右手螺旋关系。

例： 求载流圆线圈轴线上的磁场$\vec{B}$，已知半径为R，通电电流为I。

解： 先讨论$\vec{B}$的方向.

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$



$\mathrm{d}\vec{B}$ 与 $\mathrm{d}\vec{B}'$ 是对x轴对称的

$$\sum \mathrm{d}B_{\perp x}=0$$

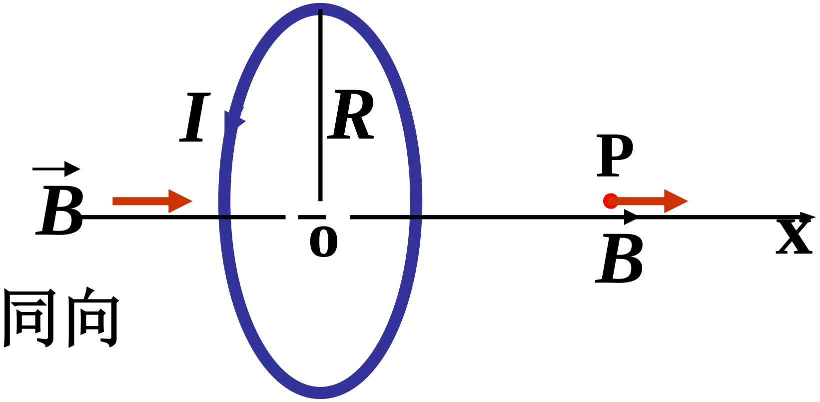
$$\therefore B=\int \mathrm{d}B_x=\int \mathrm{d}B\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{R}{r}$$

又$\because \mathrm{d}\vec{l}\perp\vec{r}$ $\qquad \left|I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}\right|=I\mathrm{d}l\cdot r$

$$\therefore B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\cos\theta\mathrm{d}l}{r^2}=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}l$$

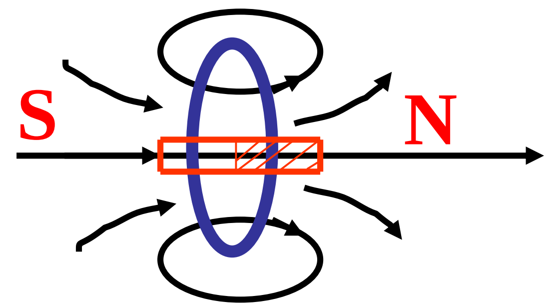
$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$ 方向沿 x 轴正向.

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



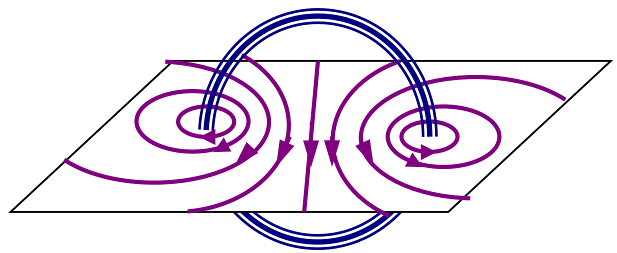
讨论： 1) 无论 $x>0$ 或 $x<0$， $\vec{B}$与X轴同向

2） 当 $x=0$时， 圆心处： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$



3） 轴线以外的磁场较复杂，
可定性给出磁场线

电流与磁场线仍服从右手螺旋关系。



定义： 磁偶极矩 $\vec{P}_m = IS\vec{n}$

$\vec{n}$与I的方向成右手关系

若有N匝线圈， 总磁矩为： $\vec{P}_m = NIS\vec{n} = N\vec{p}_m$

4) $x >> R$时：

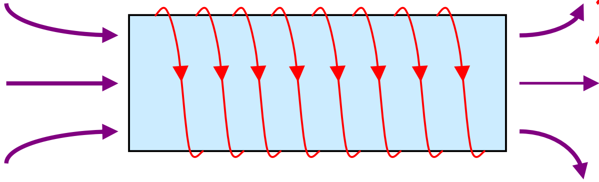
$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$

即： $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi x^3}$

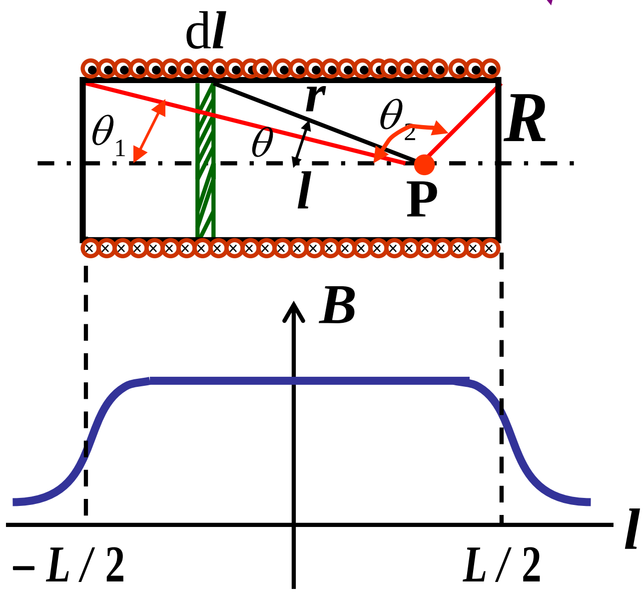
例: 长直螺线管轴线上的磁场 $\vec{B}=?$

导线通有电流I，单位长度上匝数为n。

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



解: 在管上取一小段dl，电流为dI=nIdl，该电流在P点的磁场为:



$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 R^2 nI\mathrm{d}l}{2\left(l^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$l=R\,ctg\,\theta \rightarrow \mathrm{d}l=\frac{-R\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

$$l^2=R^2ctg^2\theta$$

则: $\mathrm{d}B=\dfrac{-\mu_0 nI}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{-\mu_0 nI}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

管外空间$\vec{B}\approx 0$

讨论: P点不同，B不同。

(1) 若$L>>R$，则管内有很大一部分场是均匀的。

管内为均匀场

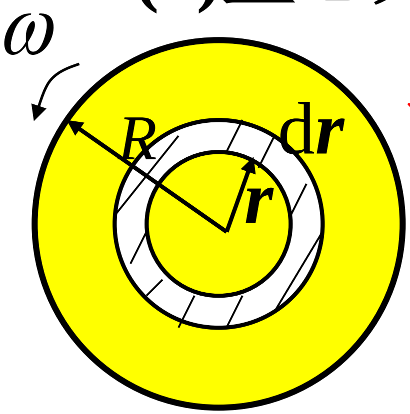
(2) $L\rightarrow\infty,\theta_1=0,\theta_2=\pi,B=\mu_0 nI$

(3)半无限长螺线管端头 $B=\dfrac{1}{2}\mu_0 nI$

在整个管内空间成立

例： 一个塑性圆盘，半径为R，圆盘表面均匀分布电荷q, 如果使该盘以角速度ω绕其轴旋转，试证：

(1)盘心处 $B=\dfrac{\mu_o\omega q}{2\pi R}$ (2)圆盘的磁偶极矩 $P_m=\dfrac{\omega qR^2}{4}$



证： (1)将盘看成一系列的宽为dr的圆环构成

每一环在中心产生的磁场：$\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}$

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}q\frac{\omega}{2\pi}=\sigma\mathrm{d}s\frac{\omega}{2\pi}=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega r\mathrm{d}r}{2r}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0 q}{2\pi R}\vec{\omega}$$

$$\sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

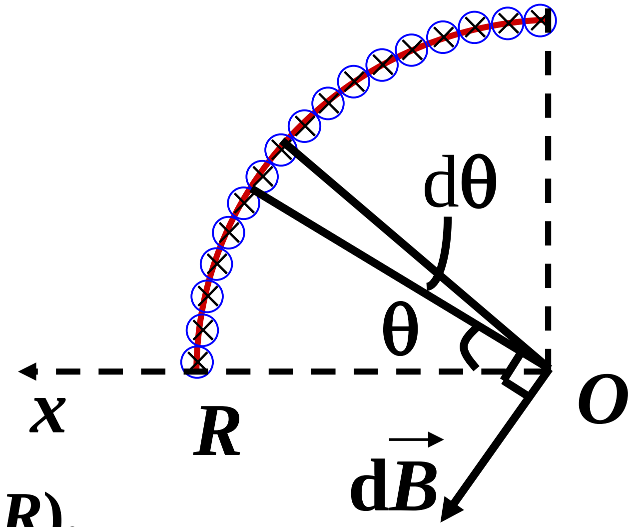
$$(2)\quad P_m=\int\mathrm{d}P_m=\int S\mathrm{d}I=\int_0^R\pi r^2\sigma\omega r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$$

$$\therefore\vec{P}_m=\frac{qR^2}{4}\vec{\omega}$$

旋转的均匀带电球体的磁偶极矩？

例: 一半径为R的无限长1/4圆柱形金属片，沿轴向通有电流I. 设电流在金属片上均匀分布。试求圆柱轴线上任一点O的磁感应强度。

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



解: 以O为原点建立坐标系如图。z 轴沿电流方向，并与圆柱轴线重合。

单位弧长上的电流密度$\lambda = I/(2\pi R/4) = 2I/(\pi R)$.

在θ处取一窄条，宽为$R\,\mathrm{d}\theta$，可视为无限长载流直导线，其上电流$i=\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta$. 金属片看作由无数个窄条拼接而成。

此窄条(无限长载流直导线) 在O点产生的磁感应强度的大小为$\mathrm{d}B = \mu_0 i/(2\pi R) = \mu_0/(2\pi R)\cdot\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta = \mu_0 I\,\mathrm{d}\theta/(\pi^2 R)$，方向如图。

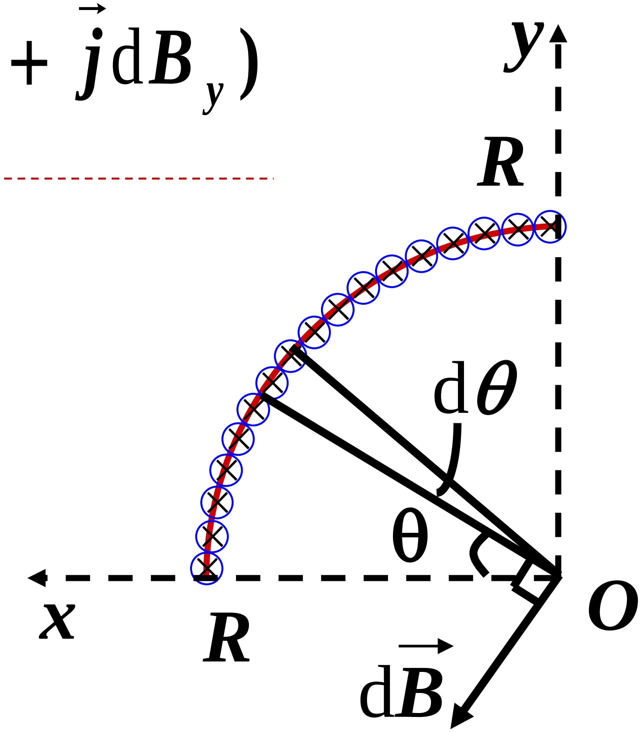
O点总的磁感应强度为

$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\int(\mathrm{d}\vec{B}_x+\mathrm{d}\vec{B}_y)=\int(\vec{i}\,\mathrm{d}B_x+\vec{j}\,\mathrm{d}B_y)$$

此窄条(无限长载流直导线) 在O点产生的磁感应强度的大小为dB＝$\mu_0 i/(2\pi R)=\mu_0/(2\pi R)\cdot\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta=\mu_0 I\mathrm{d}\theta/(\pi^2 R)$，方向如图。

O点总的磁感应强度为

$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\int(\mathrm{d}\vec{B}_x+\mathrm{d}\vec{B}_y)=\int(\vec{i}\,\mathrm{d}B_x+\vec{j}\,\mathrm{d}B_y)$$



$$=\int(\vec{i}\,\mathrm{d}B\sin\theta-\vec{j}\,\mathrm{d}B\cos\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{i}\,\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{j}\,\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\left(\vec{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta-\vec{j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}(\vec{i}-\vec{j})$$

作业： 7 —T1-T4

本次课重点：

1.静电能的计算

2.简单形状物体电流的磁感应强度计算