2016 级《 微积分（一）下》课程考试试卷(A 卷)及 解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分。将选择结果涂填在答题卡上。）

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的下面四条性质：

（1）连续； （2）两个偏导存在； （3）可微； （4）沿方向 $\{1,0\}$ 的方向导数存在。

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q，则成立【 D 】.

A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ B. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

C. $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ D. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$

2. 将逐次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)dx$ 化为先对 y 后对 x 的逐次积分，正确结果是【 C 】.

A. $I=\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{-x}^{1} f(x,y)dy$

B. $I=\int_{-y}^{y}dx\int_0^1 f(x,y)dy$

C. $I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{x}^{1} f(x,y)dy$

D. $I=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} f(x,y)dy$

3. 设 L 表示圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$，取顺时针方向，则积分 $\int_L -x^2ydx+xy^2dy=$【 B 】.

A. πR^4 B. $-\dfrac{\pi R^4}{2}$ C. $-\pi R^4$ D. $\dfrac{\pi R^4}{2}$

4. 关于数项级数的敛散性，下列说法中正确的是【 A 】

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，$a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散 .

B. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

C. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则当 n 充分大时，$a_n \ge \dfrac{1}{n}$.

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

5. 二阶常系数线性微分方程 $y''-3y'-4y=x+e^{-x}$ 的特解的待定形式为【 C 】

A． $y^*=ax+b+ce^{-x}$　　B． $y^*=x(ax+b)+(cx+d)e^{-x}$

C． $y^*=ax+b+cxe^{-x}$　　D． $y^*=x(ax+b)+cxe^{-x}$

6. 设 $f(x)=x+1(0\le x\le\pi)$ 展开成的傅立叶级数为 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$，则 $S(-\frac{5\pi}{2})=$【 C 】

A． $-\frac{\pi}{2}+1$　B． $\frac{\pi}{2}+1$　C． $-\frac{\pi}{2}-1$　D． $\frac{\pi}{2}-1$

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 设函数 $z=xe^{y}$，则 $dz\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\underline{edx}$.

解：$dz\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=e^{y}dx+xe^{y}dy\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=edx$.

8. 设 D：$x^2+y^2\le1,y\ge0$，则 $\iint\limits_D[(x+1)^2+y^2]dxdy=\underline{\frac{3\pi}{4}}$.

解：原式 $=\iint\limits_D(x^2+y^2+2x+1)dxdy=\iint\limits_D(x^2+y^2+1)dxdy=\frac{3\pi}{4}$.

9. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\int_L(x^2+xy)ds=\underline{\pi}$

解 利用奇偶性，轮换性和等量代换，知

$$\int_L(x^2+xy)ds=\int_L x^2ds=\frac{1}{2}\int_L(x^2+y^2)ds=\pi.$$

10. 设曲面 $S=\{(x,y,z):z=1,|x|\le1,|y|\le1\}$，

则 $\iint\limits_S(x+y+z)\,dS=\underline{4}$.

解 利用奇偶性和几何意义，原式 $=\iint\limits_S zdS=\iint\limits_S dS=4$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求经过直线 $L:\begin{cases}2x+3y-z-8=0\\ y-3z+4=0\end{cases}$，且与平面 $\pi:x+y+z-6=0$ 平行的平面方程 π_1.

解 1(平面束法)注意到平面 $y-3z+4=0$ 与平面 π 不平行，不是所求平面。

所以设过直线 L 的平面束方程为 $(2x+3y-z-8)+\lambda(y-3z+4)=0$,

其法矢量为 $\vec{n}_1=\{2,3+\lambda,-1-3\lambda\}$. ....(3 分)

平面 π 的法矢量为 $\vec{n}=\{1,1,1\}$，$\vec{n}_1 // \vec{n}$ 时，平面束中对应的平面即为所求平面。

即 $2=3+\lambda=-1-3\lambda$，得到 $\lambda=-1$， ....(6 分)

所以所求平面为 $x+y+z-6=0$. ....(7 分)

解 2（平行平面法）

设所求平面为 $\pi_1: x+y+z+D=0$， ....(3 分)

取直线 L 上的一个点 $P(10,-4,0)$ (或 $P(14/3,0,3/4)$)，

将点 P 代入平面 π_1，则 $D=-6$， ....(6 分)

所以 $\pi_1: x+y+z-6=0$. ....(7 分)

12. 设 $z=f(e^{2x},xy)$，其中 f 具有二阶连续导数，且 $f_2'(1,0)=2$，

求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}}$.

解 1：由于，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}f_1'(e^{2x},xy)+yf_2'(e^{2x},xy)$ ....(3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_2'(e^{2x},xy)+2e^{2x}xf_{12}''(e^{2x},xy)+xyf_{22}''(e^{2x},xy)$$ ....(6 分)

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}}=f_2(1,0)=2$. ....(7 分)

解 2：由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}f_1'(e^{2x},xy)+yf_2'(e^{2x},xy)$, ...(3 分)

将 $x=0$ 代入，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y)=f_1(1,0)+yf_2(1,0)$，

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y))=f_2(1,0)$， ....(6 分)

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}}=f_2(1,0)=2$. ....(7 分)

解 3：由于以及 e^{2x}, xy f 都具有二阶连续导数，所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$； . . . . (3 分)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x f_2^{'}(e^{2x}, xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_2^{'}(e^{2x}, xy) + 2e^{2x} x f_{21}^{"}(e^{2x}, xy) + xy f_{22}^{"}(e^{2x}, xy);$$ . . . . (6 分)

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0 \\ y=3}} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x=0 \\ y=3}} = 2$$ . . . . (7 分)

13. 设变量 x, y, t 满足方程 $x = F(t, y)$ 和 $f(x + y + t) = 3y$，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导数，记 $F_1' = \dfrac{\partial F(t, y)}{\partial t}$，且 $1 + F_1' \neq 0, f' \neq 0$，求 $\dfrac{dx}{dy}$.

解 1（偏导法）根据题意，上述方程组 $\begin{cases} x = F(t, y) \\ f(x + y + t) = 3y \end{cases}$

确定了两个隐函数 $t = t(y), x = x(y)$， . . . . (2 分)

方程组两边对 y 求导：$\begin{cases} x'(y) = F_1 t'(y) + F_2 \\ (x'(y) + t'(y) + 1) f' = 3 \end{cases}$ . . . . (3 分)

消去 $t'(y)$，得到 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f' F_2' + (3 - f') F_1'}{(1 + F_1') f'}$. . . . . (2 分)

解 2（微分法）对上述方程组 $\begin{cases} x = F(t, y) \\ f(x + y + t) = 3y \end{cases}$ 两边微分，有：

$$\begin{cases} dx = F_1 dt + F_2 dy \\ f'(dx + dy + dt) = 3dy \end{cases} \qquad (*)$$ . . . . (3 分)

所以在（*）中消去 dt，有：$dx = \dfrac{3F_1 - f' F_1 + f' F_2}{(1 + F_1) f'} dy$， . . . . (2 分)

根据微分与导数的关系，得到：$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f' F_2 + (3 - f') F_1}{(1 + F_1) f'}$.. . . . . (2 分)

14. 求曲线积分 $I = \int_L (1 - y - e^x \sin y) dx + (1 - e^x \cos y) dy$，其中 L 是依逆时针方向的下半圆周 $x^2 + y^2 = x (y \leq 0)$.

解 设 $A(1,0)$，取 $L_1: A\to O$ 的直线段。D 是 L,L_1 所围成的半圆盘。则

$$I=\int_{L+L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy-\int_{L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy$$

$$I=\int_{L+L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy-\int_{L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy\,.\quad .....(2 分)$$

由格林公式，$\int_{L+L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy=\iint_D dxdy=\dfrac{\pi}{8}$ ....(2 分)

又 $\int_{L_1}(1-y-e^x\sin y)dx+(1-e^x\cos y)dy=\int_{L_1}dx=\int_1^0 dx=-1$ ....(2 分)

所以 $I=\dfrac{\pi}{8}+1$. ....(1 分)

15. 设 S 为曲面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，求积分

$$I=\iint_S xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy\,.$$

曲面增减 2 分，用高斯公式求封闭积分 2 分，求补充平面积分 2 分，合并 1 分

解：补充曲面 $\Sigma: z=0, x^2+y^2\le 1$，下侧， V 是 S,Σ 所围成的半球体。则

$$I=\iint_{S+\Sigma} xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy-\iint_{\Sigma} xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy\quad .....(2 分)$$

由高斯公式，$\iint_{S+\Sigma} xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy=-\iiint_V(x^2+yz+z^2)dv$

$$=-\frac{2}{3}\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dv=-\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4d\rho=-\frac{4\pi}{15}\,,\quad ...(2 分)$$

【注】三重积分也可以分项后直接计算（因为轮称性理由不明显），例如用截面法的过程：

$$\iiint_V x^2dv=2\int_0^1 x^2\frac{\pi(1-x^2)}{2}dx=\frac{2}{15}\pi\,,\quad \iiint_V z^2dv=\int_0^1 z^2\pi(1-z^2)dz=\frac{2}{15}\pi$$

又 $\iint_{\Sigma} xyzdydz+x^2ydzdx+(\frac{1}{3}z^3+1)dxdy=\iint_{\Sigma}dxdy=-\iint_D dxdy=-\pi$， ....(2 分)

所以 $I=-\dfrac{4\pi}{15}+\pi=\dfrac{11}{15}\pi$. 其中 D: $x^2+y^2\le 1$； ....(1 分)

16. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 在点 $x_0=0$ 展开为幂级数。

解：由于 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ |x|<1$， ....（2 分）

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)=\int_0^x f'(x)dx+\dfrac{\pi}{4}$，

$\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x\ (-1)^n x^{2n}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$，（*）

$f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$， ....（5 分）

展开式成立的范围是 $[-1,1)$． ....（7 分）

四.　应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

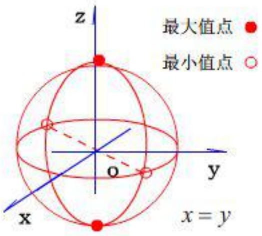
17. 求函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$ 在平面 $x=y$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆周上的最大值和最小值。

分数段：求极值可疑点 4 分（方法 2 分，结果 2 分），最值 3 分

解 1（拉格朗日乘数法）

令拉格朗日函数为 $L=xy+z^2+\lambda(x-y)+\mu(x^2+y^2+z^2-4)$， ....（2 分）

令 $\nabla L=\vec{0}$，则有：



$L_x=y+\lambda+2\mu x=0$，

$L_y=x-\lambda+2\mu y=0$，

$L_z=2z+2\mu z=0$，

$L_\lambda=x-y=0$，$L_\mu=x^2+y^2+z^2-4=0$．

解得条件极值驻点:　$(0,0,\pm 2)$，$(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)$． ....（2 分）

将上述点代入函数 $f(x,y,z)$，并比较，得到最大值为 $f(0,0,\pm 2)=4$，

最小值为 $f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)=2$． ....（3 分）

解 2（矢量法，三梯度共面）

令 $g(x,y,z)=x-y$，$h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$，

则 $\nabla f,\nabla g,\nabla h$ 共面， ....（2 分）

即$\begin{vmatrix} y & x & 2z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=0$，　从而得到：$xz=0$，

与$x=y$与球面$x^2+y^2+z^2=4$联立，

得到极值可疑点为　$(0,0,\pm 2)$　和$(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)$ ....（2 分）

比较上述点函数值，得

最大值为$f(0,0,\pm 2)=4$，最小值为$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)=2$. ....（3 分）

解 3 （消y，代入平面方程） 将$x=y$代入函数

$f(x,y,z)=xy+z^2$和球面$x^2+y^2+z^2=4$，

$f(x,x,z)=x^2+z^2$，条件 $2x^2+z^2-4=0$，（$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$）； ....（2 分）

令$F(x,z;\lambda)=x^2+z^2+\lambda(2x^2+z^2-4)$，令$\nabla F=\vec{0}$，

得到$F_x=2x+4\lambda x=0$，$F_z=2z+2\lambda z=0$，$F_\lambda=2x^2+z^2-4=0$

解得极值可疑点$(0,0,\pm 2)$和端点$(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)$ ....（2 分）

代入函数$f(x,y,z)$，得到

最大值为$f(0,0,\pm 2)=4$，最小值为$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)=2$. ....（3 分）

解 4 （消z，代入球面方程） 将$x^2+y^2+z^2=4$

代入函数$f(x,y,z)=xy+z^2$，得到

$f(x,x,z)=xy+4-x^2-y^2$，条件$y-x=0$，（$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$）； ....（2 分）

令$F(x,z;\lambda)=xy+4-x^2-y^2+\lambda(x-y)$，令$\nabla F=\vec{0}$，

得到$F_x=y+\lambda-2x=0$，$F_y=x-\lambda-2y=0$，$F_\lambda=x-y=0$

解得极值可疑点:$(0,0,\pm 2)$. 以及$(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)$ ....（2 分）

代入函数$f(x,y,z)$，得到

最大值为$f(0,0,\pm 2)=4$，最小值为$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)=2$. ....（3 分）

解 5（消 y,z，条件全部代入目标函数）

将 $x=y$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 代入函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$，

得到 $f=4-x^2$，（$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$）； .... (2 分)

得到目标函数的可疑点是驻点 $x=0$ 和区间端点 $x=\pm\sqrt{2}$ .... (2 分)

最大值为 $f(0,0,\pm 2)=4$，最小值为 $f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0)=2$. ..... (3 分)

解 5（参数化方法）

将约束曲线参数化为 $x=y=\sqrt{2}\cos\varphi, z=2\sin\varphi, 0\le\varphi\le 2\pi$ ， .... (2 分)

则 $f=4-2\cos^2\varphi$， .... (2 分)

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$f_{\max}=4$；$\varphi=0,\pi$ 时，$f_{\min}=2$. .... (3 分)

18．设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $\varphi(0)=0$，

$\varphi'(x)+\int_0^x\varphi(t)dt=e^x$，求 $\varphi(x)$.

解：对方程两边求导，将 $x=0$ 代入方程有 $\begin{cases}\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x\\ \varphi(0)=0,\varphi'(0)=1\end{cases}$ .... (2 分)

齐次方程 $\varphi''+\varphi=0$ 的通解为 $\hat{\varphi}=C_1\cos x+C_2\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数。 ...... (2 分)

非齐次方程的一个特解为 $\varphi^*=\dfrac{1}{2}e^x$， .... (1 分)

代入初始条件到 $\hat{\varphi}=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^x$，有 $C_1=-1/2, C_2=1/2$.

原问题的解为 $\varphi=\dfrac{1}{2}(-\cos x+\sin x+e^x)$. .... (2 分)

五. 分析证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 当 $p>0$ 时，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\sin(\dfrac{(-1)^n}{n^p})-\cos(\dfrac{(-1)^n}{n^p})]$ 的敛散性.

解 1 看作是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\cos\dfrac{(-1)^n}{n^p}]$ 与交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{(-1)^n}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}$ 的差。

（1）由比阶法，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\cos\dfrac{(-1)^n}{n^p}]$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$ 敛散性一致，即

在 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$ 发散。 【可以就看结论】 .... (2 分)

（2）由莱布尼兹判别法，当 $p>0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$ 收敛。

而因为 $\left|(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}\right|=\sin\frac{1}{n^p}\sim\frac{1}{n^p}$，由比阶法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$

在 $p>1$ 时绝对收敛，在 $0<p\le 1$ 条件收敛； 【就看结论】 .... (2 分)

（3）综合以上结果，结合收敛性的线性性质得：

所论级数在 $p>1$ 时绝对收敛， $1\ge p>\frac{1}{2}$ 时条件收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$ 时发散。.... (1 分)

解 2 当 $p>0$ 时，利用泰勒公式，当 n 充分大时，有：

$$1-\sin(\frac{(-1)^n}{n^p})-\cos(\frac{(-1)^n}{n^p})=-\frac{(-1)^n}{n^p}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}}),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\sin(\frac{(-1)^n}{n^p})-\cos(\frac{(-1)^n}{n^p})]=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}+\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})]$ .... (1 分)

（1） 因为 $\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})\sim\frac{1}{2n^{2p}}$，所以由 p 级数和正项级数的比较判别法，知

$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})]$ 在 $p>\frac{1}{2}$ 收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$ 发散；【就看结论】 .... (1 分)

（2） 利用莱布尼兹判别法知当 $p>0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 收敛，取绝对值

后用比阶法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 当 $0<p\le 1$ 时条件收敛，

当 $p>1$ 时绝对收敛；【就看结论】 .... (2 分)

利用级数的线性性质综合可知，原级数

在 $p>1$ 时绝对收敛， $1\ge p>\frac{1}{2}$ 时条件收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$ 时发散。 .. (1 分)

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b xf(x)dx\int_a^b\frac{x}{f(x)}dx\ge\frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

证 1 由于 $\int_a^b xf(x)dx\int_a^b \frac{x}{f(x)}dx=\iint_D xy\frac{f(x)}{f(y)}dxdy$，其中 $D:[a,b]\times[a,b]$ ....（1 分）

由轮换对称性知， $\iint\limits_D xy\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint\limits_D xy\frac{f(y)}{f(x)}dxdy$， ....（2 分）

于是 $\iint\limits_D xy\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D xy\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)dxdy$ . ...（3 分）

再由 $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(x)}{f(y)}\geq 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(x)}{f(y)}}=2$ ， ....（4 分）

所以 $\int_a^b xf(x)dx\int_a^b \frac{x}{f(x)}dx\geq\iint_D xydxdy=\frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}$. ....（5 分）

证 2 利用柯西-施瓦兹不等式，得：

$$\int_a^b xf(x)dx\int_a^b \frac{x}{f(x)}dx\geq\left[\int_a^b \sqrt{xf(x)}\cdot\sqrt{\frac{x}{f(x)}}dx\right]^2$$ ....（3 分）

$$=\left(\int_a^b xdx\right)^2=\frac{(b^2-a^2)^2}{4}$$ . ...（5 分）