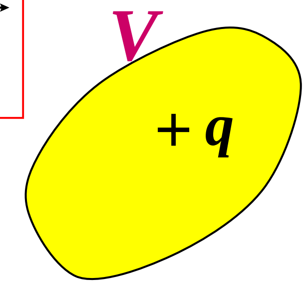
九、电容

1.孤立导体的电容

$$V=\int_{p}^{V=0}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



若一孤立导体带电$+q$，

则该导体具有一定的电势V，且$q\uparrow$、$V\uparrow$

即有： $\dfrac{q}{V}=C$ C=比例系数 $\begin{cases}\text{与}q\text{、}V\text{无关}\\ \text{与导体的尺寸形状有关}\end{cases}$

C：称为孤立导体的**电容**。 单位：F(法拉)

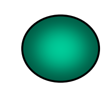
物理意义：导体每升高一个单位的电势所需要的电量。

一般地，导体不同，C就不同。

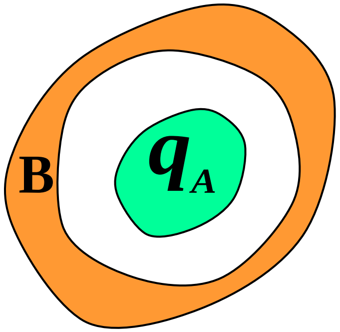
例：求一个带电导体球的电容。设球带电q.

$$\because V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \therefore C=\frac{q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$$

地球半径 $R=6.4\times10^{6}\mathrm{m}$ $C=700\times10^{-6}\mathrm{F}=700\ \mu\mathrm{F}$



2. 电容器及其电容



$V_A - V_B \propto q_A$ ，且附近其它的带电体无关。

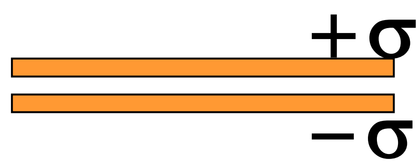
这种导体系统 → 电容器

A、B称为电容器的极板。

其电容为：

$$C_{AB} = \frac{q}{V_A - V_B}$$

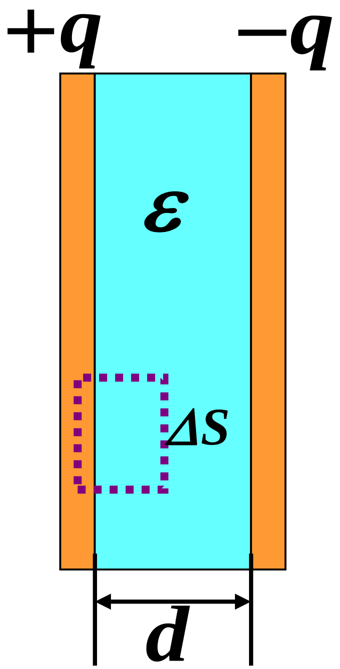
例如：一对靠得很近的平行平面导体板构成平行板电容器。



例: 求平行板电容器的电容C。

应用：键盘，触摸屏，...

设:平行金属板的面积为S，间距为d，充满介电常数为ε的电介质，左极板$+q$，右极板$-q$



分析：$C \to \Delta V \to E \to D \to q_{自}$

解： 取底面积为ΔS的高斯柱面，如图所示

由高斯定理有

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{左} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\int_{侧} \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\int_{右} \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{0} = D\cdot\Delta S$$

$$\sum q_{自} = \sigma\cdot\Delta S \longrightarrow D = \sigma \longrightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

两极间的电势差：$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot d = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon}$

$$\therefore C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad C \propto \varepsilon、S、\frac{1}{d}$$

若要增大C：增大S、 减小d、 或选用ε_r大的电介质

求C的步骤： 由 $q_{自} \to D \to E \to \Delta V \to C = \dfrac{q}{\Delta V}$

C与q无关，但为求出ΔV，可先假设极板带电。

注：

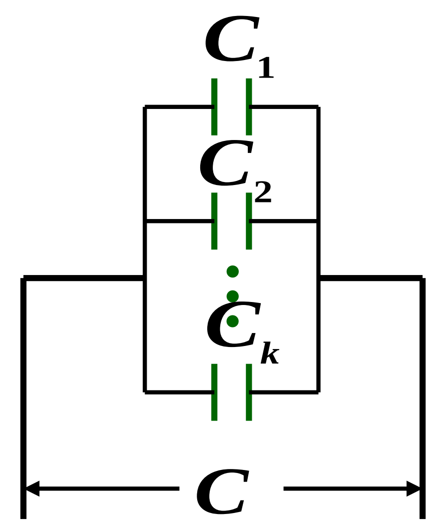
(1)衡量一个实际的电容器的性能主要指标 $\left\{\begin{array}{l}C\text{的大小}\\ \text{耐压能力}\end{array}\right.$

常用电容：100μF25V、470pF60V

(2)在电路中，一个电容器的电容量或耐压能力不够时，

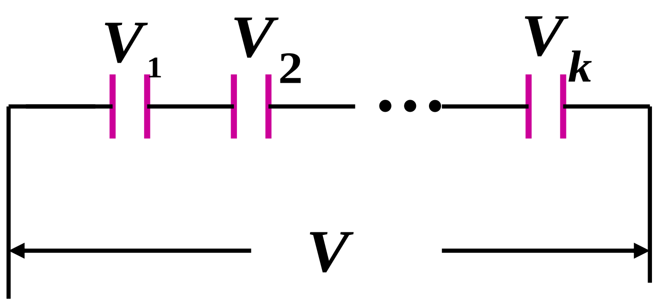
可采用多个电容连接：

如增大电容，可将多个电容并联：



$$\boxed{C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k}$$

若增强耐压，可将多个电容串联：

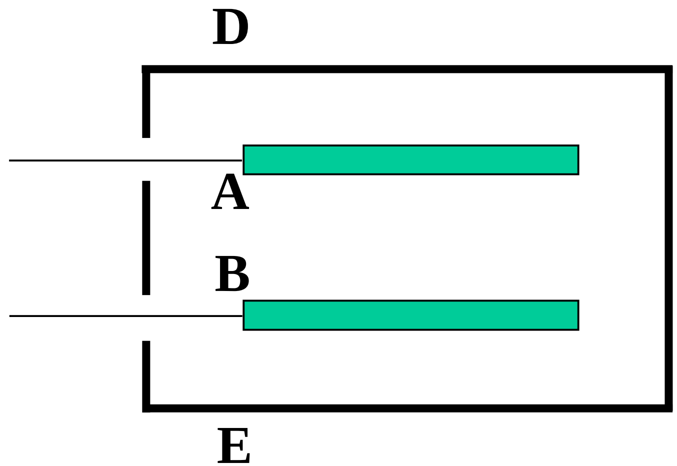


耐压强度：$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_K$

但是电容减小：$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k}}$$

例:如图, 把由金属薄板A、B 组成的空气平行板电容器放入金属盒中后，其电容变为原来的几倍？若A极板与金属盒连接，则又如何？已知AB间距为d，AD、BE的间距均为$d/2$. 忽略边缘效应。

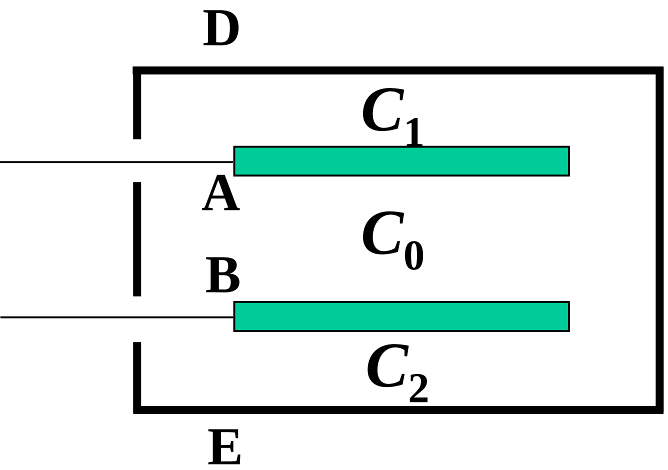
解：按串并联考虑.



$$C=\frac{Q}{\Delta V}$$

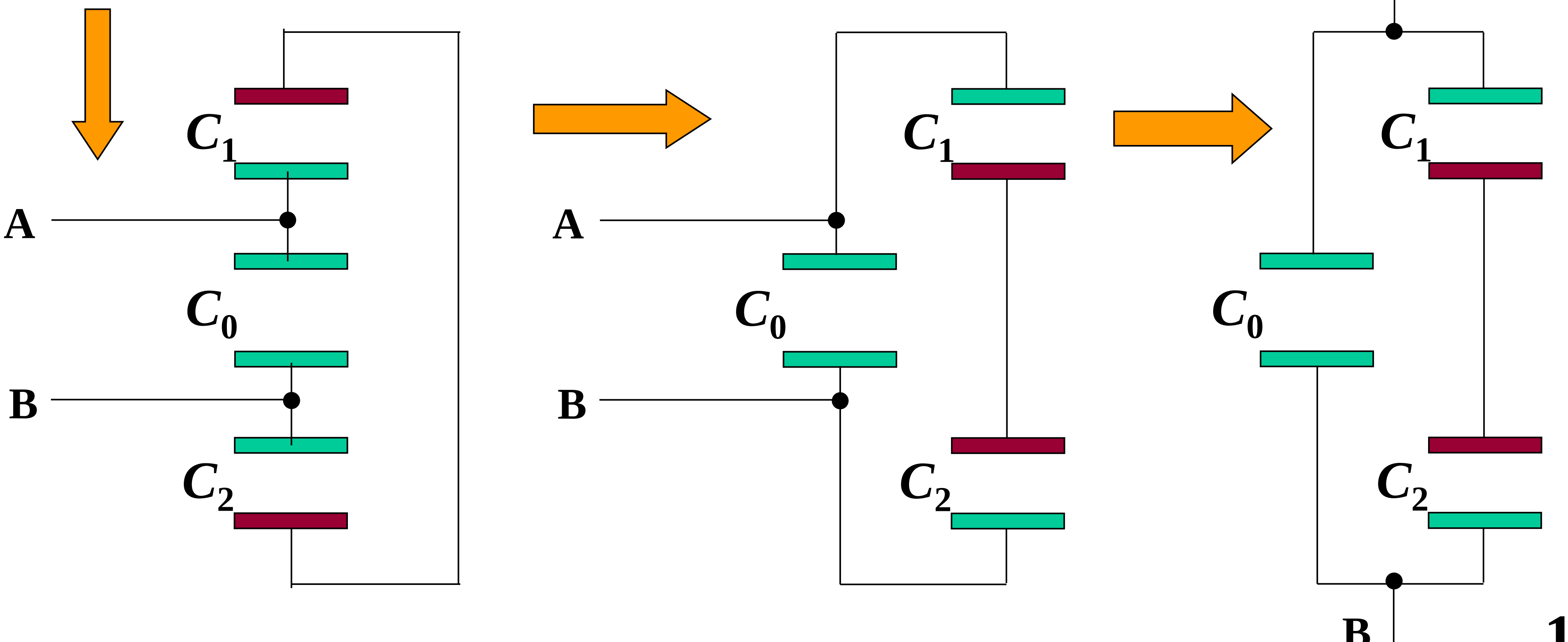
解：按串并联考虑．

$C_1=C_2$



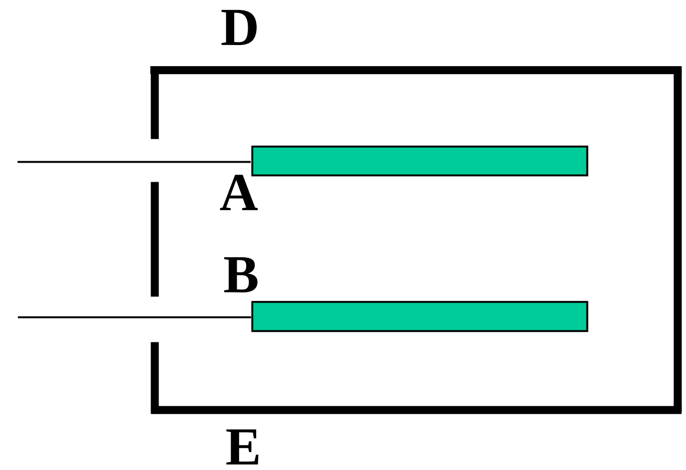
所以，C_1和C_2串联后再和C_0并联．

$$C=C_0+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=2C_0$$



例: 如图，把由金属薄板A、B 组成的空气平行板电容器放入金属盒中后，其电容变为原来的几倍？若A极板与金属盒连接，则又如何？已知AB间距为d，AD、BE的间距均为$d/2$. 忽略边缘效应。

解：设未放入金属盒时的电容为C_0，放入后为C_1， A极板与金属盒连接后的电容为C_2；极板的面积为S 。



设A极板的上下两面的面电荷密度分别为σ_1及σ_2，则B极板的上下两面的面电荷密度分别为$-\sigma_2$及$-\sigma_1$。于是，

$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta V}}$$

$$V_A - V_B = E_{AB}d = \sigma_2 d/\varepsilon_0 \qquad (1)$$

$$V_A - V_B = (V_A - V_D) + \underbrace{(V_D - V_E)}_{0} + (V_E - V_B)$$

$$= (V_A - V_D) + (V_E - V_B) = 2\sigma_1 (d/2)/\varepsilon_0 \qquad (2)$$

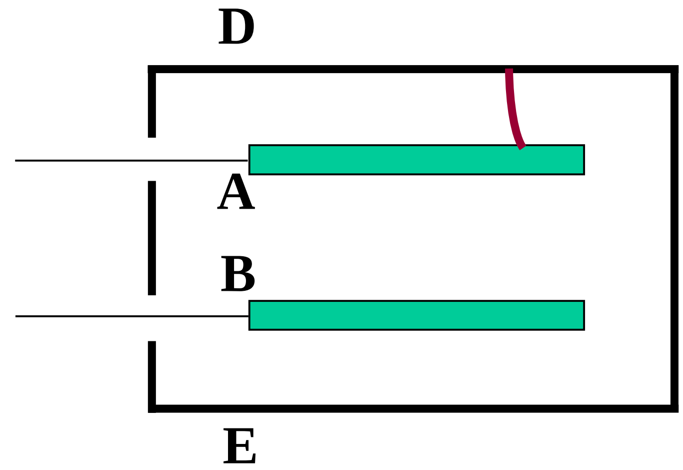
由(1) (2)得： $\sigma_1 = \sigma_2$，所以

$$C_1 = Q/V = (\sigma_1 + \sigma_2)\, S/(E_{AB}d) = 2\sigma_2\, S/(\sigma_2/\varepsilon_0\, d)$$

$$= 2\varepsilon_0\, S/d = 2C_0.$$

若A极板与金属盒连接，

可设A极板上的面电荷密度分别为σ_1，B极板的上下两面的面电荷密度分别为 $-\sigma_1$ 及 $-\sigma_2$，E 上的面电荷密度为σ_2. 于是，



$$V_A - V_B = E_{AB} d = \sigma_1 d/\varepsilon_0 \qquad (1)$$

$$V_A - V_B = V_E - V_B = E_{EB} d/2 = \sigma_2 (d/2)/\varepsilon_0 \qquad (2)$$

由(1) (2)得：$\sigma_2 = 2\sigma_1$，所以

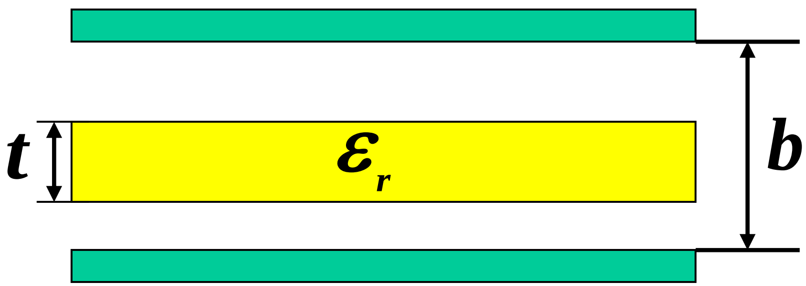
$$C_1 = Q/V = (\sigma_1 + \sigma_2) S/(E_{AB} d) = 3\sigma_1 S/(E_{AB} d)$$

$$= 3\sigma_1 S/(\sigma_1/\varepsilon_0 \, d) = 3\varepsilon_0 S/d = 3C_0.$$

3. 电容器电容的计算

另解：看作三个电容器的串联.

例: 一平行板电容器，两极板间距为b、面积为S，其中置一厚度为t 的平板均匀电介质，其相对介电常数为ε_r，求该电容器的电容C。



应用：
油量计，
测ε_r，
…

解： 根据定义 $C=\dfrac{q}{\Delta V}$

设极板面密度为σ、$-\sigma$

由高斯定理可得：

空气隙中 $D=\sigma$ 则：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 　介质中 $D=\sigma$ 则：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$

$$\Delta V=V_+-V_-=\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{l}=\left(\int_0^{t_1}+\int_{t_1}^{t_1+t}+\int_{t_1+t}^{b}\right)\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\left[\varepsilon_r b-\left(\varepsilon_r-1\right)t\right]$$

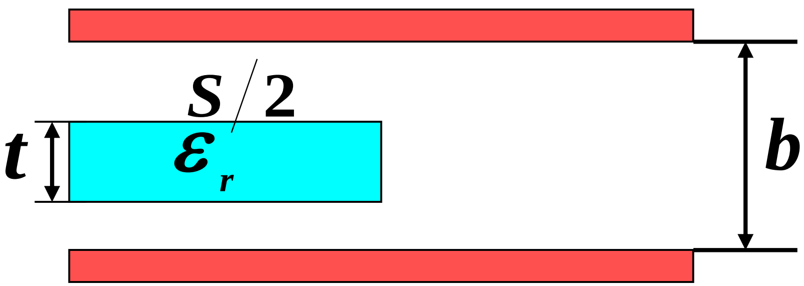
$$\therefore C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r b-\left(\varepsilon_r-1\right)t}=\frac{\varepsilon_0 S}{b-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}>\frac{\varepsilon_0 S}{b}$$

与t的位置无关

$t\uparrow$、$C\uparrow$

$t=b$ 　$C=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{b}$

例： 一平行板电容器，两极板间距为b、面积为S，在其间平行地插入一厚度为t，相对介电常数为ε_r，面积为$S/2$的均匀介质板。设极板带电Q，忽略边缘效应。求 (1)该电容器的电容C，(2)两极板间的电势差ΔV。



解：（1） 等效两电容的并联

左半部：$C_{左} = \dfrac{\varepsilon_0 S/2}{b - \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} t}$

右半部：$C_{右} = \dfrac{\varepsilon_0 S/2}{b}$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{b - \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} t}}$$

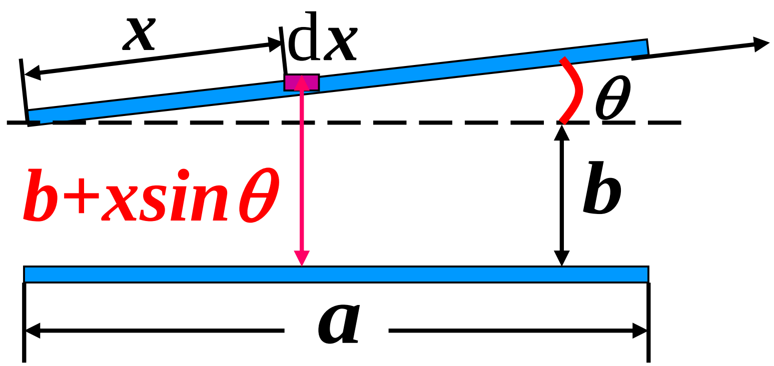
电容并联相加：$C = C_{左} + C_{右} = \dfrac{\varepsilon_0 S[2\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)t]}{2b[\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)t]}$

（2）$\Delta V = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{2b[\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)t]Q}{\varepsilon_0 S[2\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)t]}$

问：

$Q_{左} \overset{?}{=} Q_{右}$

例：一电容器两极板都是边长为a的正方形金属平板，但两板不严格平行有一夹角θ。证明：当$\theta \ll \dfrac{b}{a}$ 时，该电容器的电容为：$C=\varepsilon_0\dfrac{a^2}{b}(1-\dfrac{a\theta}{2b})$ (忽略边缘效应)



$$\boxed{C=\frac{\varepsilon S}{d}}$$

证明：整体不是平行板电容器

但在小块面积 $a\mathrm{d}x$ 上，可认为是平行板电容器,其电容为：

$$\mathrm{d}C=\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{b+x\sin\theta}$$

$$C=\int\mathrm{d}C=\int_0^a\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{b+x\sin\theta}=\frac{\varepsilon_0 a}{\sin\theta}\ln(1+\frac{a}{b}\sin\theta)$$

$$\because\ \theta\ll\frac{b}{a}\qquad \sin\theta\ll\frac{b}{a}\qquad \text{则:}\ \frac{a}{b}\sin\theta\ll 1$$

$$\ln(1+\frac{a}{b}\sin\theta)=\frac{a}{b}\sin\theta-\frac{1}{2}(\frac{a}{b}\sin\theta)^2+\cdots$$

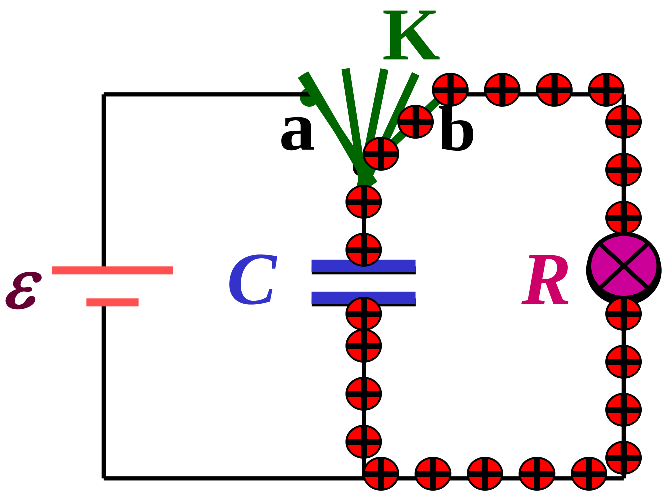
$$\therefore\ C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}(1-\frac{1}{2}\frac{a}{b}\sin\theta)=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}(1-\frac{a\theta}{2b})$$ 证毕

十、电容器的能量和电场的能量

应用：闪光灯…

1. 电容器的能量

电容器带电时具有能量，实验如下：



将K倒向a端→电容充电

再将K到向b端→ 灯泡发出一次强的闪光

能量从哪里来？→ 电容器释放

计算当电容器带有电量Q、相应的电压为V时，所具有的能量W=？

利用放电时电场力做功来计算：

放电到某t时刻，极板还剩电荷q，极板的电位差 $u=\dfrac{q}{C}$

将$(-\mathrm{d}q)$的正电荷，从正极板→负极板，电场力做功为：

$$A=\int \mathrm{d}A=\int u(-\mathrm{d}q)=-\int_Q^0 \frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

即电容器带有电量Q时具有的能量：$W=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}\begin{cases}=\dfrac{1}{2}CV^2\\ =\dfrac{1}{2}QV\end{cases}$

可见：C也标志电容器储能的本领。

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV$$ → 这些能量存在何处？

2. 电场的能量

以平行板电容器为例：$C=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{\varepsilon S}{d}$ 并且 $V=Ed$

$$W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{V}_{体积}$$

记为：$W_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{V}_{体积}$ → 能量储存在电场中

1）电场能量密度(单位体积内所储存电场能量) $w_e=\dfrac{W_e}{\mathrm{V}_{体积}}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

$$\because \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\quad \therefore w_e=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

$$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$ 对任意电场均成立

2）电场能量

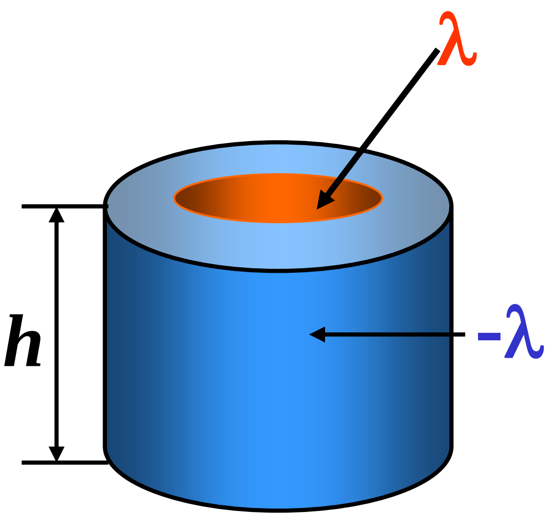
任何带电系统的电场中所储存的总能量为：

$$W=\int\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{dV}=\int\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{dV}$$

（对电场占据的整个空间积分）

$$W=\int\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}\mathrm{dV}=\int\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{dV}$$

例：求一圆柱形电容器的储能W=？



解：设电容器极板半径分别为R_1、R_2

带电线密度分别为λ、$-\lambda$,

则两极板间的电场为：$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

$$\therefore W_e=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^{2}\mathrm{dV}=\frac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

其中：$\mathrm{dV}=2\pi rh\mathrm{d}r$

另外：$W=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ $\quad C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\ln R_2/R_1}$ $\quad Q=\lambda h$

$$W=\frac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

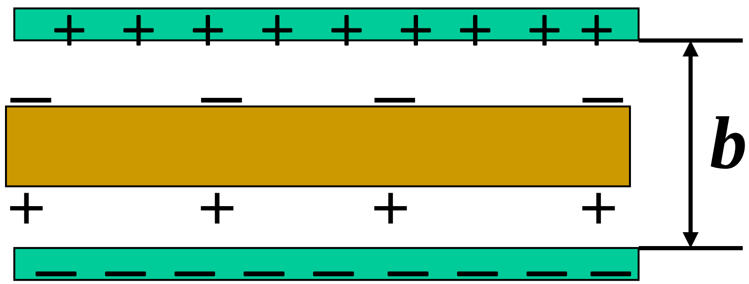
结论： 电场能 = 静电能

求C的另一方法：$E\rightarrow$ $W=\int\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}\mathrm{dV}\rightarrow C=\dfrac{2W}{Q^2}$

例：一平行板电容器，两极板间距为b=1.2cm、面积为S=0.12m^2，将其充电到120v的电位差后撤去电源，放入一厚度为t=0.4cm，ε_r=4.8的平板均匀电介质，

求：(1)放入介质后极板的电势差。

(2)放入介质板过程中外界做了多少功？



解：(1)充电后极板带电 $Q=CV$

放介质前$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{b}$

$\therefore Q=1.1\times10^{-8}c$

放介质后，从前例知$C'=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r b-(\varepsilon_r-1)t}$

$$V'=\frac{Q}{C'}=88\text{ v}$$

(2) $A_{外}=\Delta W=W_2-W_1=\dfrac{1}{2}C'V'^2-\dfrac{1}{2}CV^2=-1.7\times10^{-7}\text{J}<0$

即：外力做负功，电场力做正功。

作业：6 —T17、T18、T19、T20

本次课重点：

1.电容器的电容值计算

2.电场的能量计算