微积分学试卷及解答

（2016—2018 期中期末）

华中科技大学微积分学课程组　编

往年微积分学试卷及解答

华中科技大学出版社

中国·武汉

第一学期试卷

2016-1 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分,共 60 分)

1. 设 $x_1>0, x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+10}{3n-2}(n>1)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a,b,c>0$ 是常数).

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)+x^2\sin(1/x)}{(\cos x+1)\ln(1+x)}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}=b$,求常数 a,b 的值.

5. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$.

6. 指出函数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x(x-1)\mid x-2\mid}$ 的间断点,并判断间断点的类型.

7. 设函数 $y=\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}}\sqrt{e^x+1}(x>-1)$,求微分 $dy\mid_{x=0}$.

8. 设函数 $v=f(u)$ 有反函数 $u=\varphi(v)$,满足 $f(0)=0$,且 $\varphi(v)$ 是可导的,在 $v=0$ 的某个邻域中有 $\varphi'(v)=\dfrac{1}{2+\sin v}$,求复合函数 $y=f(2x+x^2)$ 在 $x=0$ 的导数.

9. 设 $y=\ln(2x^2-3x+1)$,求 $y^{(10)}(0)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$确定,求在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时的$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

二、综合题(每小题 6 分,共 30 分)

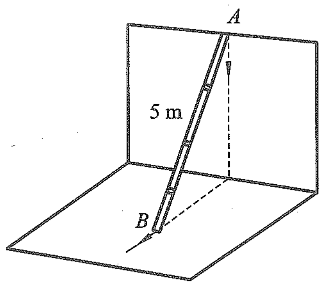
11. 设函数 $f(x)$ 在点 a 处连续,$F(x)=(e^x-e^a)f(x)$,求 $F'(a)$.

12. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,求 $f'(x)$,并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导,且 $f(1+x)-3f(1-x)\sim 3x^2(x\to 0)$. 求 $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$.

14. 求无穷小量 $u(x)=\arcsin x-\arctan x(x\to 0)$ 的主部与阶数.

15. 如图所示,一根长为 5 m 的竹竿斜靠着墙,地面与墙面垂直,竹竿在地面的投影也与墙面垂直. 设墙面和地面是光滑的,使得竹竿顶端 A 沿着墙壁竖直往下滑动,同时,底端 B 沿着其投影线向外滑动. 如果在底端 B 距离墙根为 3 m 时,点 B 的速度为 4 m/s,问此时顶端 A 下滑的速度为多少?



2016-1(期中)-15 图

三、分析证明题(每小题 5 分,共 10 分)

16. 由函数在一点可导可否推出它在该点的某个邻域内连续?认为可以请证明,认为不行请举反例.

17. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,在区间$(0,1)$上可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$. 设正实数 λ_1, λ_2, λ_3,满足 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. 证明:存在三个不相等的实数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$,使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1.$$

2016-1 期中试题解答

一、基本计算题

1. 当 $n>22$ 时, $0<x_{n+1}<\frac{x_n}{2}<\cdots<\frac{1}{2^{n-22}}x_{22}$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-22}}x_{22}=0$,所以由夹挤原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2. $l=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\left[\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{x}\right]}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}$.

3. $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)+x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$.

4. 由 $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+(2-b)x+1+b}{x-1}$,得 $a=0, 2-b=0$,所以 $a=0, b=2$.

5. 因 $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$;又因 $\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$,故 $l=1$.

6. 间断点为 $x=0,1,2$.

因 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$,所以 $x=0$ 为无穷间断点(或第二类间断点);

又 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x\,|\,x-2\,|}=-1$,所以 $x=1$ 为可去间断点;

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(2-x)}=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $x=2$ 为跳跃间断点.

7. 因
$$y'=\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\left[\frac{1}{2}\left(x-\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(\mathrm{e}^x+1)\right)\right]'$$
$$=\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right).$$

$\mathrm{d}y\,|_{x=0}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{8}\mathrm{d}x$.

8. $y'(0)=f'(2x+x^2)(2+2x)\,|_{x=0}=2f'(0)=\dfrac{2}{\varphi'(0)}=\dfrac{2}{1/2}=4$.

9. 因 $y=\ln(x-1)+\ln(2x-1)$,所以 $y^{(10)}(x)=\dfrac{(-1)^9 9!}{(x-1)^{10}}+\dfrac{2^{10}(-1)^9 9!}{(2x-1)^{10}}$.

于是 $y^{(10)}(0)=-9!(2^{10}+1)$.

10. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t$,所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-\tan t)'}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}$$,所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

二、综合题

11. $F'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{(e^x-e^a)f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{e^a(x-a)f(x)}{x-a}=e^af(x)$.

12. 因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$,

所以 $f'(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$ 为初等函数,所以连续;而

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,从而 $f'(x)$ 处处连续.

13. 由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+x)-3f(1-x)]=-2f(1)=0$,所以 $f(1)=0$;

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-3f(1-x)}{x}=4f'(1)=0$,所以 $f'(1)=0$;

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-3f(1-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(1+x)+3f'(1-x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(1+x)-f'(1)}{2x}\right]+3\left[\frac{f'(1-x)-f(1)}{2x}\right]=-f''(1)=3,$$

所以 $f''(1)=-3$.

14. 要成立

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{cx^r}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\frac{1+x^2-\sqrt{1-x^2}}{crx^{r-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{crx^{r-1}},$$

必须有 $r=3$,$c=\frac{1}{2}$,因此,所求主部是 $\frac{1}{2}x^3$,阶数为 3.

15. 设 $x(t)$ 为 t 时刻竹竿底端据墙根的水平距离,竹竿顶端距墙根的垂直距离为 $y(t)$,则 $x^2(t)+y^2(t)=25$,两边求导,得 $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$,由题设取 $x=3$ m,$y=4$ m 时,$\frac{dx}{dt}=4$ m/s,故此时 $\frac{dy}{dt}=-3$ m/s,即竹竿顶端下滑速度为 3 m/s.

三、分析证明题

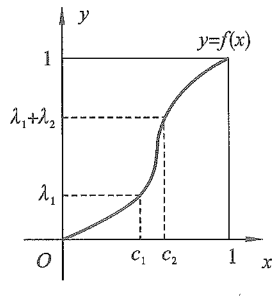
16. 不能. 比如

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$,其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数集. 由于 $0\leqslant\left|\frac{f(x)-0}{x-0}\right|\leqslant|x|$,所以由夹逼定理知,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}=0$,即在原点可导. 而对非零点 x_0,若 $x_0\in\mathbf{Q}$,取点列

$\{x_n, x_n \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\}$ 使 $x_n \to x_0$，那么 $f(x_n)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0\neq f(x_0)=x_0^2$，即在点 $x_0\in\mathbf{Q}$ 处不连续. 类似可证当 $x_0\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ 时，函数也不连续. 即函数除 $x=0$ 外处处不连续. 因此，由函数在一点可导不能推出它在该点的某个邻域内连续.

17. 根据介值定理，对于 $0<\lambda_1<1$，存在实数 $0<c_1<1$，使得 $f(c_1)=\lambda_1$；对于 $\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，存在实数 $c_2\in(c_1,1)$，使得 $f(c_2)=\lambda_1+\lambda_2$.

在区间 $[0,c_1]$，$[c_1,c_2]$，$[c_2,1]$ 上，对函数 $f(x)$ 分别使用 Lagrange 中值定理，则至少存在 $\xi_1\in(0,c_1)$，$\xi_2\in(c_1,c_2)$，$\xi_3\in(c_2,1)$，成立：



2016-1(期中)-17 图

$$\frac{f(c_1)-f(0)}{c_1-0}=\frac{\lambda_1}{c_1}=f'(\xi_1),$$

$$\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}=\frac{\lambda_2}{c_2-c_1}=f'(\xi_2),$$

$$\frac{f(1)-f(c_2)}{1-c_2}=\frac{1-(\lambda_1+\lambda_2)}{1-c_2}=\frac{\lambda_3}{1-c_2}=f'(\xi_3),$$

于是 $\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\dfrac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=c_1+c_2-c_1+1-c_2=1$，即结论成立.

2017-1 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分，共 60 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1$，$x_{n+1}=\sin x_n\ (n>1)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+n})$.

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{(\cos x-1)\ln(1+x)}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}=b$，求常数 a,b 的值.

5. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}-\dfrac{|\sin(x-1)|}{x-1}\right]$.

6. 指出函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{\tan x}$ 的间断点，并确定间断点的类型.

7. 设函数 $y=(2+x)^{\sin x}+\dfrac{1}{x+1}\ (x>-2)$，求微分 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

8. 设函数 $v=f(u)$ 有反函数 $u=\varphi(v)$，满足 $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$，且 $\varphi(v)$ 是可导的，在 $v=\dfrac{\pi}{2}$ 的某个邻域中有 $\varphi'(v)=\dfrac{1}{2+\sin v}$，求复合函数 $y=f^2(x)$ 在 $x=0$ 的导数.

9. 设 $y=(x-1)\ln x$，求 $y^{(10)}(1)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\end{cases}$ 确定，求在 $t=0$ 时的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、综合题(每小题 6 分，共 30 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在原点附近有界，$F(x)=f(x)\cdot\sin(x^2)$，计算导数 $F'(0)$.

12. 求函数 $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域中有界，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，其中 n 为正整数.

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

14. 求无穷小量 $u(x)=x-\arctan x(x\to 0)$ 的主部与阶数.

15. 一个长方体的铁皮盒子，其对角线的长度随着长宽高的变化而连续变化. 当长宽高分别是 3 m、4 m、5 m 时，如果此时对角线长度增加的速率为 $5\sqrt{2}$ m/s，长宽增加的速率分别为 8 m/s 和 9 m/s，问此时高是在增加还是在减少?增加或减少的速率为多少?

三、分析证明题(每小题 5 分，共 10 分)

16. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$（这里的 $\mathbf{Q}$ 表示有理数）在 $x=0$ 可导，但函数本身除零点外处处不连续.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内一阶可导，且 $f(0)=0, f(1)=3, f(3)=1$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2017-1 期中试题解答

一、基本计算题

1. $0<x_2=\sin x_1<\dfrac{\pi}{2}$，设 $0<x_k<\dfrac{\pi}{2}$，则 $0<x_{k+1}=\sin x_k<x_k<\dfrac{\pi}{2}$，所以数列单调递减有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，对于 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边关于 $n\to+\infty$ 取极限，则有 $l=\sin l$，解得 $l=0$.

2. 利用 $\cos(n\pi+\theta)=(-1)^n\cos\theta$，有

$$\cos(\pi\sqrt{n^2+n})=(-1)^n\cos(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)=(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right),$$

所以原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cos\left(\dfrac{\pi}{1+\sqrt{1+n^{-1}}}\right)=0$.

3. 因为 $(\cos x-1)\ln(1+x)\sim-\dfrac{x^3}{2}, x\to 0$，所以

$$l=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}.$$

4. 由于分母趋于零，所以分子也趋于零. 由 $0=\lim\limits_{x\to 1}(ax^3+2x+1)=a+3$，得 $a=-3$，从而

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{-3x^3+2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-9x^2+2)=-7.$$

5. 注意到 $x\to 1^-$ 时，$e^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty$，$\dfrac{|\sin(x-1)|}{x-1}\to-1$；而 $x\to 1^+$ 时，$e^{\frac{x}{1-x}}\to 0$，$\dfrac{|\sin(x-1)|}{x-1}\to 1$，所以

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{2}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}-\frac{|\sin(x-1)|}{x-1}\right]=0-(-1)=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}-\frac{|\sin(x-1)|}{x-1}\right]=2-1=1,$$

从而 $l=1$.

6. 间断点为 $x=k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$,所以 $x=0$ 为跳跃间断点;

又 $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷间断点;

$\lim\limits_{x\to k\pi+\pi/2}f(x)=0$,所以 $x=k\pi+\pi/2(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为可去间断点.

7. 记 $u=(2+x)^{\sin x},v=\dfrac{1}{x+1}$,则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$,而

$$\mathrm{d}u=(2+x)^{\sin x}\{\sin x\ln(2+x)\}'\mathrm{d}x=(2+x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(2+x)+\frac{\sin x}{2+x}\right]\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}v=-\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x,$$

将上面两式相加,并代值得 $\mathrm{d}y\,|_{x=0}=(\ln2-1)\mathrm{d}x$.

8. $y'(0)=2f(x)f'(x)\,|_{x=0}=2f(0)f'(0)=\dfrac{2f(0)}{\varphi'(\pi/2)}=3\pi$.

9. $y'=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$,所以 $y^{(10)}=(\ln x)^{(9)}-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(9)}$,即 $y^{(10)}=\dfrac{(-1)^8 8!}{x^9}-\dfrac{(-1)^9 9!}{x^{10}}$,

所以 $y^{(10)}(1)=8!+9!=10\cdot 8!$.

10. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$,所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,|_{t=0}=0$;

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right)'}{\cos t-t\sin t}=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3},\text{所以}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\,|_{t=0}=2.$$

二、综合题

11. $F'(0)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x^2)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}xf(x)=0$.

12. 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\cos x}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,

$$\text{所以 } f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ 1/2, & x=0\end{cases}.$$

在区间$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上,$f'(x)$ 为初等函数,所以连续;又

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.综上所述,$f'(x)$ 处处连续.

13. 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域中有界,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin x=0$,那么 $x\to 0$,$\sqrt[n]{1+f(x)\sin x}-1\sim\dfrac{f(x)\sin x}{n}$,$e^{3x}-1\sim 3x$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x}{3nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3n}=2$,从而$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6n$.

14. 要成立 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{cx^r}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{x^2}{crx^{r-1}}$,

必须有 $r=3,c=\dfrac{1}{3}$,因此,所求主部是$\dfrac{1}{3}x^3$,阶数为 3.

15. 设 t 时刻长方体的长宽高及对角线分别为 $x(t),y(t),z(t),s(t)$,则

$$s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)+z^2(t),$$

两边关于变量 t 求导,得 $s(t)s'(t)=x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)$,

由题设取 $x=3\text{ m},y=4\text{ m},z=5\text{ m},s=5\sqrt{2}\text{ m},x'(t)=8\text{ m/s},y'(t)=9\text{ m/s},s'(t)=5\sqrt{2}\text{ m/s}$ 代入上式,求得 $z'(t)=-2\text{ m/s}$,说明此时长方体的高在减少,减少的速率为 2 m/s.

三、分析证明题

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2D(x)}{x}=0$,即在原点可导,且 $f'(0)=0$.

考虑非零点 a,若 $a\in\mathbf{Q}$,取点列$\{x_n,x_n\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\}$ 使 $x_n\to a$,那么

$$f(x_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=0\neq f(a)=a^2,$$

即在点 $a\in\mathbf{Q}$ 处不连续. 类似可证当 $a\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$,函数也不连续. 所以函数除零点外处处不连续.

17. 由于函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=0,f(1)=3$,由介值定理,有至少存在一点 $\eta\in(0,1)$,使得 $f(\eta)=1$. 因 $f(x)$ 在$[\eta,3]$上连续,在$(\eta,3)$ 可导,$f(\eta)=f(3)=1$,由 Rolle 定理,至少存在一点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.

2018-1 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分,共 60 分)

1. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^{\alpha}}$,其中 $\alpha\in(0,1)$.

2. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{2\tan x}+\sin x^2)}{x}$.

3. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+bx+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=2$,求常数 a,b 的值.

5. 设可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $y+y\mathrm{e}^x=2\cos y\sin x-4x$ 确定,求 $y'(0)$.

6. 求曲线 $r=2\sin 3\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$,求微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

8. 设函数 $y=x+x^3$ 的反函数为 $x=g(y)$,求 $g''(2)$.

9. 设 $y=x^2\cos 2x$,求 $y^{(5)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程$\begin{cases}x=t\cos t-\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、综合题(每小题 6 分,共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$ 的连续性,并对函数的间断点判别类型.

12. 求无穷小量 $u(x)=\left(\dfrac{1+2\cos x}{3}\right)^{x^2}-1\ (x\to 0)$ 的主部与阶数.

13. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$,并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 已知 $a>1,n\geqslant 1$,证明不等式 $\dfrac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}}{\ln a}<\dfrac{\sqrt[n]{a}}{n^2}$.

15. 一架飞机在 H 米高空以 a 米 / 秒的速度水平匀速飞行. 设在 $t=0$ 时刻有一探照灯位于飞机正下方的地下跟踪飞机. 问 t 秒以后探照灯应以怎样的角速度转动才能照到飞机?

三、分析证明题(每小题 5 分,共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1=1,x_{n+1}=x_n+\dfrac{2}{x_n^2}$ 给出. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

17. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有定义并且对于任何 $x,y\in[a,b](x\neq y)$ 成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M(x-y)^2,$$

其中 M 为常数. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

2018-1 期中试题解答

一、基本计算题

1. 因 $\dfrac{n}{n+n^\alpha}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}<1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+n^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+n^{\alpha-1}}=1$,所以 $l=1$.

2. $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\tan x}+\sin x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x}=2$.

3. 先求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=1$,

所以 $l=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}\right)=e$.

4. 由于分母趋于零,所以分子也趋于零. 从而有 $0=\lim\limits_{x\to 1}(ax+bx+b)=a+2b$,得 $a=-2b$.

代入原式并进行分母有理化得到 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-b(x-1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{2(x-1)}=2$. 解得 $b=-1$,

$a=2$.

5. 显然当 $x=0$ 时 $y=0$. 方程两边对 x 求导,得

$$y'+y'e^x+ye^x=-2y'\sin y\sin x+2\cos y\cos x-4,$$

代入 $x=0,y=0$,解得 $y'(0)=-1$.

6. 曲线的参数方程为 $x=2\sin 3\theta\cos\theta,y=2\sin 3\theta\sin\theta$. 于是得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos 3\theta\sin\theta+\sin 3\theta\cos\theta}{3\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta}.$$

代入 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 得到 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{3}$. 又知切点坐标为 $(0,0)$,因此切线方程为 $y=\sqrt{3}x$.

7. 求导并化简得 $f'(x)=2\sqrt{1-x^2}$,代值,得 $dy|_{x=0}=2dx$.

8. 显然函数 $y=x+x^3$ 严格单调可导且 $y'=1+3x^2\neq 0$,于是得到 $x=g(y)$ 也是严格单

调可导，且 $g'(y)=\dfrac{1}{1+3x^2}$. 注意到 $g'(y)$ 仍然可导，对 y 求导得

$$g''(y)=-\frac{6x}{(1+3x^2)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{6x}{(1+3x^2)^3}.$$

代入 $x=1,y=2$ 得到 $g''(2)=\dfrac{-3}{32}$.

9. 根据 Leibniz 法则得到

$$y^{(5)}=x^2(\cos 2x)^{(5)}+10x(\cos 2x)^{(4)}+20(\cos 2x)^{(3)},$$

于是得到 $y^{(5)}=-32x^2\sin 2x+160x\cos 2x+160\sin 2x$，

所以 $y^{(5)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-80\pi$.

10. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t}{-t\sin t}=\dfrac{1}{t},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(t^{-1})'}{-t\sin t}=\dfrac{1}{t^3\sin t}$.

二、综合题

11. 当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 连续. 注意到

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{2x}=-\frac{\pi}{2},\lim_{x\to -1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{2x}=\frac{\pi}{2},$$

所以 $x=-1,1$ 均为可去间断点.

12. $u(x)=\exp\left(x^2\ln\left(\dfrac{1+2\cos x}{3}\right)\right)-1\sim x^2\ln\left(\dfrac{1+2\cos x}{3}\right)\sim\dfrac{2x^2}{3}(\cos x-1)\sim-\dfrac{1}{3}x^4$.

故所求主部为 $-\dfrac{1}{3}x^4$，阶数为 4.

13. 在 $x=0$ 点处 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,f'_-(0)=1$. 所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，$f'(x)$ 显然连续；又 $f'(0^+)=f'(0^-)=f'(0)=1$，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 综上所述，$f'(x)$ 处处连续.

14. 令 $f(x)=a^x$. 在区间$\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$上应用 Lagrange 中值定理得

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}=\frac{a^{\xi}\ln a}{n(n+1)}<\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}\ln a.$$

15. 根据几何关系得 $\tan\theta=s/H$. 两边对 t 求导得 $\sec^2\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{H}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. 代入 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=a$ 以及 $\cos\theta=\dfrac{H}{\sqrt{H^2+a^2t^2}}$ 得$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{aH}{H^2+a^2t^2}$.

三、分析证明题

16. 用反证法. 显然有 $x_n\geqslant 1$ 并且严格单调增加. 若$\{x_n\}$有界，则根据单调有界收敛准则知数列极限存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$. 根据极限的保序性知 $L\geqslant 1$. 根据递推关系两边取极限得到 $L=L+\dfrac{2}{L^2}$，但此方程无解推出矛盾. 因此数列$\{x_n\}$无界.

17. 根据已知条件，对于任何 $x,y\in[a,b](x\neq y)$ 成立

$$0\leqslant\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\leqslant M|y-x|.$$

令 $y \to x$，据夹挤原理得到$\lim\limits_{y\to x}\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = 0$，从而有$\lim\limits_{y\to x}\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = 0$.

即对任何 $x \in [a,b]$ 都有 $f'(x) = 0$. 因此 $f(x)$ 在$[a,b]$上恒为常数.

2016-1 期末试题

一、单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n = 0$，则下列命题正确的是(　　).

A. 若$\{x_n\}$发散，则$\{y_n\}$必发散　　B. 若$\{x_n\}$收敛，则$\{y_n\}$必收敛

C. 若$\{x_n\}$有界，则$\{y_n\}$必为无穷小　　D. 若$\{\dfrac{1}{x_n}\}$有界，则$\{y_n\}$必为无穷小

2. 设函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = a \neq 0$，$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$，则 $x = 0$ 是函数 $g(x)$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 可去间断点

3. 当 $x \to 1$ 时，无穷小量 $\ln x^2$ 的主部为(　　).

A. x　　B. $x^2 - 1$　　C. $2(1-x)$　　D. $2(x-1)$

4. 若函数 $f(x)$ 在原点连续，$F(x) = f(x)\,|\sin x|$，则 $f(0) = 0$ 是 $F'(0)$ 存在的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

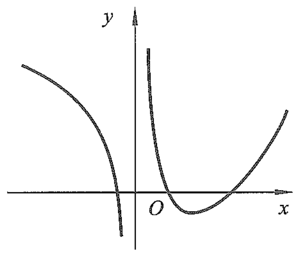
5. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，其导函数图形如图所示，则 $f(x)$ 的极值点的个数为(　　).

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个



2016-1(期末)-5 图

6. 若函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arctan\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$，下面哪一条直线不是此函数的渐近线(　　).

A. $x = 0$　　B. $y = 1 - \dfrac{\pi}{4}$　　C. $x = 2$　　D. $y = 1 + \dfrac{\pi}{4}$

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

7. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{\sin x^3} =$ ________.

8. $\int_0^1 x(1-x)^{99}\,dx =$ ________.

9. 设点$(1,4)$为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点，则 $a =$ ________，$b =$ ________.

10. 定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x^3}{1+\sin^4 x} + \sin^4 x\cos x\right)dx =$ ________.

三、基本计算题(每小题 7 分,共 42 分)

11. 设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定的隐函数,求导数 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 确定,求导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

13. 求定积分 $I = \int_0^{\pi} \sin^5 x \sqrt{1-\sin^2 x}\, dx$.

14. 求极限 $l = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

15. 求微分方程 $y' - e^{x-y} = 1$ 满足 $y(1) = -1$ 的特解.

16. 求反常积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x^2} dx$.

四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

17. 设曲线段 $y = ax^2 (a > 0, 0 \leqslant x \leqslant 1)$ 与 x 轴及直线 $x = 1$ 围成一个曲边三角形 A,图形 A 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积记为 V_1,图形 A 绕直线 $x = 1$ 旋转一周所得旋转体的体积记为 V_2,求 a 取何值时体积差 $V_2 - V_1$ 最大?

18. 应用微分学知识讨论方程 $x\ln x + a = 0$ 的根问题:(1)a 取何值时,该方程有一个实根?(2)a 取何值时,该方程有两个实根?

五、综合题(每小题 5 分,共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上有二阶连续导数,最小值为 -1,$f(a) = f(b) = 1$,证明存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi) = \frac{16}{(b-a)^2}$.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单调递减的连续函数,则有 $\int_a^b (x-a)^3 f(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)dx$.

2016-1 期末试题解答

一、单项选择题

1. D **2.** A **3.** D **4.** A **5.** D **6.** C

二、填空题

7. $\frac{1}{3}$ **8.** $\frac{1}{10100}$ **9.** $a = -2, b = 6$ **10.** $\frac{2}{5}$

三、基本计算题

11. 方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 对 x 求导,得

$$e^{2x+y}(2+y') + \sin(xy)(y + xy') = 0.$$

将 $x = 0$ 代入原方程得到 $y = 1$,所以 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = -2$.

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t)$,$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3/2}{2(1-t)} = \frac{3}{4(1-t)}$.

13. $I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^5 x \cdot \cos x d\theta = \frac{\sin^6 x}{6}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^6 x}{6}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}$.

14. $l=\exp\left\{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\right\}$

$=\exp\left\{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\right\}=\mathrm{e}^{2\ln2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}.$

15. 原方程可转化为$(\mathrm{e}^y)'-\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x$，由通解公式得

$$\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int-\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x(x+C).$$

16. 令 $t=\sqrt{x}$，则 $I=2\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t^3}\mathrm{d}t$，

利用分部积分得 $I=-\int_1^{+\infty}\ln(t+1)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2}\right)=\left[-\frac{\ln(t+1)}{t^2}-\frac{1}{t}+\ln\frac{t+1}{t}\right]\Big|_1^{+\infty}=1.$

四、应用题

17. $V_1=\int_0^1\pi y^2\mathrm{d}x=\pi a^2\int_0^1x^4\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{5}$，$V_2=\int_0^a\pi(1-x)^2\mathrm{d}y=2\pi a\int_0^1(1-x)^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi a}{6}$，所以 $f(a)=\frac{\pi}{30}(5a-6a^2)$，$a>0$. 令 $f'(a)=\frac{\pi}{30}(5-12a)=0$，得到 $a=\frac{5}{12}$. 且 $0<a<\frac{5}{12}$ 时，$f'(a)>0$；$a>\frac{5}{12}$ 时，$f'(a)<0$. 所以当 $a=\frac{5}{12}$ 时，体积差 $V_2-V_1=f(a)$ 达到最大值.

18. 设 $f(x)=x\ln x+a$，$0<x<+\infty$；令 $f'(x)=\ln x+1=0$，得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$. 当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，函数 $f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处取得最小值，且 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=a-\frac{1}{\mathrm{e}}$. 又 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，所以，由零点定理并结合单调性可得：

(1) 当 $a\leqslant0$ 时，方程 $x\ln x+a=0$ 在$(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 内有一根；

(2) 当 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 0，方程 $x\ln x+a=0$ 仅有一根 $f(\frac{1}{\mathrm{e}})=0$；

(3) 当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程 $x\ln x=a$ 在$(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$ 与$(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 内各有一根，即方程有两个实根.

五、综合题

19. 由 $f(x)$ 在某个 $x=c(a<c<b)$ 处取得极小值知 $f(c)=-1$，$f'(c)=0$，利用泰勒公式有

$f(a)=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2$，$a<\xi_1<c$，即 $f''(\xi_1)=\frac{4}{(a-c)^2}$；

$f(b)=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2$，$c<\xi_2<b$，即 $f''(\xi_2)=\frac{4}{(b-c)^2}$；

若 $c=\frac{b+a}{2}$，则取 $\xi=\xi_1$ 或 $\xi=\xi_2$，$f''(\xi)=\frac{16}{(b-a)^2}$；

若 $c\neq\frac{b+a}{2}$，则 $f''(\xi_1)$ 和 $f''(\xi_2)$ 一个大于$\frac{16}{(b-a)^2}$，一个小于$\frac{16}{(b-a)^2}$，故由介值定理

知,存在 $\xi \in [\xi_1,\xi_2] \subset (a,b)$ 或($\xi \in [\xi_2,\xi_1] \subset (a,b)$),$f''(\xi) = \dfrac{16}{(b-a)^2}$.

20. 设 $F(t) = \dfrac{(t-a)^3}{4}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \int_a^t (x-a)^3 f(x)\mathrm{d}x$,

$$F'(t) = \frac{3}{4}(t-a)^2\int_a^t f(x)\mathrm{d}x + \frac{(t-a)^3}{4}f(t) - (t-a)^3 f(t)$$

$$= \frac{3}{4}(t-a)^2\left[\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - (t-a)f(t)\right] = \frac{3}{4}(t-a)^2(t-a)(f(\xi)-f(t)) \geqslant 0,$$

于是由连续性有 $F(b) \geqslant F(a) = 0$.

2017-1 期末试题

一、单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 下列函数在其定义域内有界的是(　　).

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\tan x$　　C. $\dfrac{\ln x}{x}$　　D. $x\mathrm{e}^{-x}$

2. 设 $x \to 0$ 时,变量 $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}$ 与 x^a 是同阶无穷小量,则常数 $a =$ (　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

3. 关于函数 $y = x\ln x, x \in (0,+\infty)$,以下描述不正确的是(　　).

A. 在区间 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 单调递减　　B. 在 $x = \mathrm{e}^{-1}$ 处取最小值

C. $(\mathrm{e}^{-1},-\mathrm{e}^{-1})$ 是曲线 $y = x\ln x$ 的拐点　　D. 曲线 $y = x\ln x$ 无渐近线

4. 关于曲线 $f(x) = \dfrac{\sin x}{(1-x)\ln x}$ 的渐近线,恰当的说法是(　　).

A. 没有水平渐近线,但有斜渐近线　　B. 没有渐近线

C. 有水平渐近线,没有垂直渐近线　　D. 有水平渐近线,也有垂直渐近线

5. 设 $f(x)$ 是定义在实轴上的连续函数,a 是任给的非零实数,则以下命题中正确的是(　　).

A. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,则 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数

B. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,则 $F(x) = \int_x^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数

C. 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数

D. 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x) = \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数

6. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2} = 1$,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处(　　).

A. 连续,且 $f'_+(0)$ 存在　　B. 连续,且 $f'(0)$ 存在

C. 连续,但不可导　　D. 不一定连续

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

7. 设函数 $f(x) = \int_0^x \cos(x-t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x) =$ __________.

8. 用 $a,b,c,\cdots$ 等表示待定常数，则二阶微分方程 $y''+y'=x+e^x$ 的一个待定特解形式可设为__________.

9. 设函数 $y=(\ln(e+x))^{\frac{1}{1+x}}$，则 $dy\big|_{x=0}$ __________.

10. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin x\cos x}{1+e^{x^2}}+\cos^4 x\right)dx=$ __________.

三、基本计算题(每小题 7 分，共 42 分)

11. 设数列 $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=2t-\ln(1+t)\\ e^{2y+t}-yt=1\end{cases}$ 确定，求 $t=0$ 时对应点 (x_0,y_0) 处的切线方程.

13. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\arcsin x}{x}$，求不定积分 $I=\int(1+x^2)f(x)dx$.

14. 求积分 $I=\int_3^{+\infty}\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$.

15. 求微分方程 $(1+x\sin y)dy-\cos y dx=0$ 的通解.

16. 设 $\varphi(u)$ 是具有连续一阶导数的函数，$f(x)=x\varphi(x^2)$，求 $f''(0)$.

四、应用题(每小题 7 分，共 14 分)

17. 设曲线 $y=f(x)(f(x)>0,f(0)=1)$ 与 x 轴、y 轴及直线 $x=t(t>0)$ 围成一个曲边梯形 A，其面积记为 $S(t)$，A 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积记为 $V(t)$，若成立 $V(t)=\pi tS(t)+\frac{\pi}{6}t^4$，求函数 $f(x)(x\geqslant 0)$ 的表达式.

18. 应用微分学知识讨论方程 $\sqrt{x}=ax+b(x\geqslant 0,a>0)$ 的根问题：(1) a,b 满足什么关系时，该方程仅有一个实根？(2) a,b 满足什么关系时，该方程有两个实根？(3) a,b 满足什么关系时，该方程无实根？

五、综合题(每小题 5 分，共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b]$ 上可导.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=A$，证明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右导数 $f'_+(a)$ 存在，且 $f'_+(a)=A$.

(2) 反过来，当 $f'_+(a)$ 存在时，极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$ 是否一定存在？若存在，请证明；若可能不存在，请举反例.

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$|f''(x)|\leqslant M$ (M 为一个正常数)，证明 $\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant\frac{M}{12}$.

2017-1 期末试题解答

一、单项选择题

1. A　**2.** C　**3.** C　**4.** D　**5.** B　**6.** D

二、填空题

7. $\cos x$　**8.** $y^*=x(ax+b)+ce^x$　**9.** $e^{-1}dx$　**10.** $3\pi/4$

三、基本计算题

11. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1/n}{1+(1/n)^2}+\dfrac{2/n}{1+(2/n)^2}+\cdots+\dfrac{n/n}{1+(n/n)^2}\right]$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

12. 当 $t=0$ 时，有 $x=0, y=0$.

因$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2-\dfrac{1}{1+t}, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=1$；又 $\mathrm{e}^{2y+t}\left[2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+1\right]-y-t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}$.

所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}$. 从而所求切线方程为 $x+2y=0$.

13. 由原函数的定义，有

$$I=\int(1+x^2)\mathrm{d}\frac{\arcsin x}{x}=(1+x^2)\cdot\frac{\arcsin x}{x}-\int\frac{\arcsin x}{x}\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$=(x+x^{-1})\arcsin x-2\int\arcsin x\mathrm{d}x.$$

$$=(x+x^{-1})\arcsin x-2x\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C.$$

14. 令 $t=\sqrt{x}$，则 $I=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{\arctan t}{(1+t^2)t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan^2 t\Big|_{\sqrt{3}}^{+\infty}=\frac{5\pi^2}{36}$.

15. 原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\tan y\cdot x=\sec y$，所以

$$x=\mathrm{e}^{\int\tan y\mathrm{d}y}\left[C+\int\sec y\mathrm{e}^{-\int\tan y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{|\cos y|}\left[C+\int\sec y\,|\cos y|\,\mathrm{d}y\right]=(C+y)\sec y.$$

16. $f'(x)=\varphi(x^2)+2x^2\varphi'(x^2), f'(0)=\varphi(0)$.

利用导数定义，有

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x^2)+2x^2\varphi'(x^2)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\varphi(x^2)-\varphi(0)}{x}+2x\varphi'(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\varphi(x^2)-\varphi(0)}{x^2}x+2x\varphi'(x^2)\right]=0.$$

四、应用题

17. $V(t)=2\pi\displaystyle\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x, S(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. 由条件知

$$2\pi\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x+\frac{\pi}{6}t^4.$$

两边关于变量 t 两次求导，则有 $f'(t)=2t$，所以 $f(t)=t^2+C$. 将条件 $f(0)=1$ 代入上式，得 $C=1$，从而 $f(x)=x^2+1(x\geqslant0)$.

18. 令 $f(x)=\sqrt{x}-ax-b, 0\leqslant x<+\infty$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-a(0<x<+\infty)$.

令 $f'(x)=0$，得到 $x=\dfrac{1}{4a^2}$，且当 $0<x<\dfrac{1}{4a^2}$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x>\dfrac{1}{4a^2}$ 时，

函数 $f(x)$ 单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4a^2}$ 处取得最大值，且 $f\left(\dfrac{1}{4a^2}\right)=\dfrac{1}{4a}-b$.

若 $4ab=1$，$f(x)$ 的最大值为零；若 $4ab>1$，$f(x)$ 的最大值小于零；若 $4ab<1$，$f(x)$ 的最大值大于零.

又 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-b, f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

所以,由零点定理并结合单调性可得:

(1) 当 $4ab=1$ 时,方程$\sqrt{x}=ax+b(x>0,a>0)$ 只有一个实根 $f\left(\frac{1}{4a^2}\right)=0$.

(2) 当 $4ab<1$ 时,若 $-b>0$,则 $4ab<0$ 时,方程$\sqrt{x}=ax+b(x>0,a>0)$ 仅在$(0,\frac{1}{4a^2})$内有一个实根;若 $-b\leqslant 0$,则 $0<4ab<1$ 时,方程$\sqrt{x}=ax+b(x>0,a>0)$ 在$(0,\frac{1}{4a^2})$与$(\frac{1}{4a^2},+\infty)$ 内各有一个实根,即方程有两个实根;

(3) 当 $4ab>1$ 时,方程$\sqrt{x}=ax+b(x>0,a>0)$ 无实根.

五、综合题

19. (1) $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}^{0/0}=\lim\limits_{x\to a^+}f'(\xi)=A$.

(2) 可能不存在. 比如

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}, f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 不存在.

20. $\forall x\in(0,1)$,由泰勒公式得 $f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$,

两边在区间$[0,1]$上积分,有 $0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f'(x)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)x^2\mathrm{d}x$

用分部积分得到$\int_0^1 f'(x)x\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,故有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^1 f''(\xi)x^2\mathrm{d}x,$$

所以 $$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|f''(\xi)|x^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{4}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{M}{12}.$$

2018-1 期末试题

一、单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 以下关于数列的命题,正确的是(　　).

A. 一个有界数列与一个无界数列的和是无界数列

B. 两个无界数列的和是无界数列

C. 一个有界数列与一个无界数列的乘积是无界数列

D. 两个无界数列的乘积是无界数列

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x=a$ 处(　　).

A. 可导　　B. 不连续

C. 连续但不一定可导　　D. 不可导

3. 设函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 内连续,则 $f(x)$ 在区间(a,b) 内(　　).

A. 有界　　　　B. 可导　　　　C. 存在最大值　　　　D. 原函数存在

4. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 有(　　).

A. 一个极小值和一个极大值　　　　B. 一个极小值

C. 两个极小值　　　　D. 两个极大值

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内满足 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$. 则在区间 (a,b) 内(　　).

A. $f(x)$ 单调减少,曲线 $y = f(x)$ 下凸　　　　B. $f(x)$ 单调减少,曲线 $y = f(x)$ 上凸

C. $f(x)$ 单调增加,曲线 $y = f(x)$ 下凸　　　　D. $f(x)$ 单调增加,曲线 $y = f(x)$ 上凸

6. 设 $M = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin x}\,dx, N = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec x}\,dx, K = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,dx$, 则 M, N, K 的大小关系为(　　).

A. $M < N < K$　　　　B. $M < K < N$　　　　C. $N < M < K$　　　　D. $K < N < M$

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

7. 设 $u = x + a\ln(1-x) + bx\sin(3x)$ 是 x 的 3 阶无穷小, 则 $a =$ __________, $b =$ __________.

8. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 的拐点坐标为__________.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{1-\cos x} \tan t\,dt}{\sin x^4}$ __________.

10. 曲线 $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的长度为__________.

三、基本计算题(每小题 7 分,共 42 分)

11. 求曲线 $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 5}\,(x > 0)$ 的渐近线.

12. 写出 $f(x) = \ln(1+x)$ 带 Lagrange 余项的 n 阶麦克劳林公式.

13. 求不定积分 $I = \int \dfrac{\sqrt{x-3}}{2x}\,dx$.

14. 求定积分 $I = \int_0^{1/2} x\arcsin x\,dx$.

15. 求反常积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x\,dx$.

16. 求微分方程 $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\ln x$ 的通解.

四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \\ e, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

18. 求平面图形 $0 \leqslant y \leqslant \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积.

五、综合题(每小题 5 分,共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶可导,且 $f(a) = f(b)$, $|f''(x)| \leqslant M$. 证明:

$$|f'(a) + f'(b)| \leqslant M(b-a).$$

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导,并且 $f''(x) \leqslant 0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$

2018-1 期末试题解答

一、单项选择题

1. A **2.** C **3.** D **4.** B **5.** A **6.** B

二、填空题

7. $a=1, b=1/6$ **8.** $(2,-3)$ **9.** $\frac{1}{8}$ **10.** 12

三、基本计算题

11. $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+5}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+2x^{-1}+5x^{-2}}=2$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+2x+5}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+2x+5}+2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+5x^{-1}}{\sqrt{4+2x^{-1}+5x^{-2}}+2}=\frac{1}{2},$$

于是得斜渐近线 $y=2x+\dfrac{1}{2}$,曲线没有其他渐近线.

12. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}, f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

$f(0)=0, f'(0)=1, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

所以 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, 0<\theta<1, x>-1.$

13. 作代换 $\sqrt{x-3}=t, x=t^2+3, t>0, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,得到

$$I=\int\frac{t^2}{t^2+3}\mathrm{d}t=t-3\int\frac{1}{t^2+3}\mathrm{d}t=\sqrt{x-3}-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}+C.$$

14. $$I=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^{1/2}-\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/6}\cos 2t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{48}=\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{48}.$$

15. $$J=\int\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-\cos x)=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-\int(-\cos x)(-2\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\left(\mathrm{e}^{-2x}\sin x-\int\sin x(-2\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x\right)$$

所以 $J=-\mathrm{e}^{-2x}\dfrac{2\sin x+\cos x}{5}+C$,

故 $I=\left[-\mathrm{e}^{-2x}\dfrac{2\sin x+\cos x}{5}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{5}.$

16. 所给方程是伯努利方程. 令 $u=1/y$,将原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{u}{x}=-\ln x$. 根据通解公式得到

$$u=x\left(\int-\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(C-\frac{\ln^2 x}{2}\right).$$

所以原方程通解为 $$xy\left(C-\frac{\ln^2 x}{2}\right)=1.$$

四、应用题

17. 当 $x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$ 时，

$$f'(x) = (1+x)^{1/x} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

而 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x} = \mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x} = \mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

又因 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x} = -\dfrac{\mathrm{e}}{2} = f'(0)$.

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续. 在其他地方 $f'(x)$ 显然连续. 综上 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 处处连续.

18. $V = 2\pi\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = 2\pi[x\sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \pi^2 - 2\pi$.

五、综合题

19. 由罗尔定理知存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f'(c) = 0$,再用拉格朗日中值定理可得

$$|f'(a) - f'(c)| = |f''(\xi)(a-c)| \leqslant M(c-a), \text{即 } |f'(a)| \leqslant M(c-a),$$

$$|f'(b) - f'(c)| = |f''(\eta)(b-c)| \leqslant M(b-c), \text{即 } |f'(b)| \leqslant M(b-c),$$

进而得

$$|f'(a) + f'(b)| \leqslant |f'(a)| + |f'(b)| \leqslant M(b-a).$$

20. 设 $F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \dfrac{(t-a)(f(a)+f(t))}{2}$,则 $F(a) = 0$.

对 $F(t)$ 求导得到

$$F'(t) = \frac{f(t)-f(a)-(t-a)f'(t)}{2} = \frac{(t-a)(f'(\xi)-f'(t))}{2} \geqslant 0,$$

从而 $F(t)$ 单调递增,$F(b) \geqslant F(a) = 0$,即不等式成立.

第二学期试卷

2016-2 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分,共 60 分)

1. 已知微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$,$f(x)\neq 0$ 有三个解 $y_1=x$,$y_2=e^x$,$y_3=e^{3x}$,求此微分方程满足初始条件 $y(0)=2$,$y'(0)=3$ 的特解.

2. 设 $y=y(x)$ 在区间 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 满足微分方程 $y''-(y')^2=1$,$y|_{x=0}=0$,$y'|_{x=0}=0$,求特解.

3. 求过点 $M(2,-2,3)$ 与直线 L_1:$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{0}$ 垂直相交的直线 L 方程.

4. 设 $\begin{cases}x+y-z=1\\x^2+y^2+z^2=3\end{cases}$,求其在点$(1,1,1)$处的切线方程和法平面方程.

5. 设 $z=f(xe^y)$,其中 f 有一阶导数,$f'(0)=2$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,1)$.

6. 设函数 $f(u,v,w)$ 二阶偏导连续,$z=f(x,x+y,xy)$,求混合偏导函数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 计算 $I=\int_0^1 dy\int_y^{y^{1/3}} e^{x^2}dx$.

8. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x^3\sin y+(x+y)^2)dxdy$,其中 D:$x^2+y^2\leqslant 2y$.

9. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V xy^2z^3 dxdydz$,其中 V 位于第一卦限,由曲面 $z=0$,$z=xy$,$y=x$,$y=1$ 围成.

10. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V (x+z)dv$,其中 V:$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}$.

二、综合计算题(每小题 8 分,共 40 分)

11. 设方程组$\begin{cases}F(x+y,y-z)=0\\z=f(xy)\end{cases}$,其中 F,f 具有连续的一阶偏导,且 $F_1-yf'F_2\neq 0$,求$\dfrac{dz}{dy}$.

12. 在椭球面 $x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点,使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n}=\{1,-2,3\}$ 的方向导数最大.

13. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+3f(x)+2x\int_0^1 f(xt)dt=e^{-x}$,且 $f(0)=1$,求 $f(x)$.

14. 计算 $I=\iint\limits_D |x+y-1|dxdy$,其中 D 是圆域:D:$x^2+y^2\leqslant 1$.

15. 设 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$,讨论 $f(x,y)$ 在原点$(0,0)$处的(1) 连续性,(2) 偏导数存在性,(3) 可微性,(4) 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 的方向导数的存在性,对存在情形计算出结果.

2016-2 期中试题解答

一、基本计算题

1. 因 $e^x-x, e^{3x}-x$ 是 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的解，且不成比例，所以，原微分方程的通解为

$$y=C_1(e^x-x)+C_2(e^{3x}-x)+x.$$

将 $y(0)=2, y'(0)=3$ 代入上式，得到 $C_1=C_2=1$，所以所求特解为 $y=e^x+e^{3x}-x$.

2. 令 $p(x)=y'$，则原方程化为 $p'=p^2+1, p|_{x=0}=0$，分离变量，得 $\dfrac{dp}{1+p^2}=dx$；积分，得 $\arctan p=x+C$，由初始条件 $C=0$，有 $p=y'(x)=\tan x$，再积分，并代入 $y|_{x=0}=0$，得

$$y(x)=-\ln(\cos x),\ |x|<\frac{\pi}{2}.$$

3. 过 $M(2,-2,3)$ 与直线 $L_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{0}$ 垂直的平面方程为 $(x-2)+2(y+2)=0$，将 L_1 的参数式方程 $x=-1+t, y=2+2t, z=4$ 代入平面方程，得 $t=-1$，从而得交点 $P(-2,0,4)$；所求的直线就是过点 M 和点 P 的直线，其方程为 $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

4. 令 $F(x,y,z)=x+y-z-1, G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$，则

$$\nabla F=\{1,1,-1\}, \nabla G=2\{x,y,z\}|_{(1,1,1)}=2\{1,1,1\},$$

切线的方向矢量为 $\boldsymbol{s}=\{1,1,-1\}\times\{1,1,1\}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\{1,-1,0\}$,

所以所求的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$，法平面方程为 $x-y=0$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^y f'(xe^y), \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y)=e^y f'(0)=2e^y$,

由于 $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y)\right)=2e^y$，所以由偏导定义知 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,1)=2e$.

6. $z_x=f_1+f_2+yf_3$,

$$\begin{aligned} z_{xy}&=f_{12}+xf_{13}+f_{22}+xf_{23}+f_3+yf_{32}+xyf_{33} \\ &=f_{12}+xf_{13}+f_{22}+(x+y)f_{23}+f_3+xyf_{33}. \end{aligned}$$

7. 交换积分次序得 $I=\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx\int_{x^3}^x dy=\int_0^1 e^{x^2}(x-x^3)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t(1-t)dt=\frac{e-2}{2}$.

8. 利用对称性以及极坐标，得

$$I=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\cdot r dr$$

$$=4\int_0^\pi \sin^4\theta d\theta=8\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta d\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

9. $I=\displaystyle\iint_D dxdy\int_0^{xy} xy^2z^3dz$（$D$ 是由直线 $x=0, x=1, y=x, y=1$ 围成的区域）

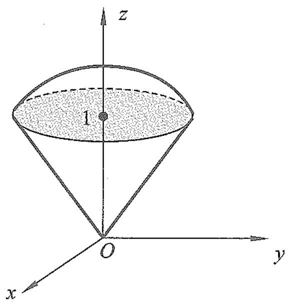
$$=\frac{1}{4}\iint_D x^5y^6dxdy=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_x^1 x^5y^6dy$$

$$=\frac{1}{28}\int_0^1(x^5-x^{12})\mathrm{d}x=\frac{1}{28}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{4\cdot 6\cdot 13}.$$

10. 区域 V 如图所示.利用奇偶性及柱面坐标,有

$$I=\iiint_V z\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z\,\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^1(2-2r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$



2016-2(期中)-10 图

二、综合计算题

11. 视 x,z 为因变量,方程组两边对 y 求导,有

$$\begin{cases}F_1\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+1\right)+F_2\left(1-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\left(x+y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)f'\end{cases},$$

于是$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\dfrac{f'[(x-y)F_1-yF_2]}{F_1-yf'F_2}(F_1-yf'F_2\neq 0)$.

12. 设所求点为 $M(x,y,z)$,$\nabla f(M)=\{2x,2y,-1\}$,$\boldsymbol{n}^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\{1,-2,3\}$,$f(x,y,z)$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的方向导数为$\dfrac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2x-4y-3)$.构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=(2x-4y-3)+\lambda(x^2+2y^2+2z^2-1),$$

令$\begin{cases}L_x=2+2\lambda x=0,\\ L_y=-4+4\lambda y=0,\\ L_z=4\lambda z=0,\\ L_\lambda=x^2+2y^2+2z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow x=-y,z=0,$

代入最后一个方程,得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},y=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{3},z=0$,即受检点为 $M_1(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$,$M_2(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$.

因$\dfrac{\partial f(M_1)}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{14}},\dfrac{\partial f(M_2)}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{-2\sqrt{3}-3}{\sqrt{14}}$,所以 $M_1(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$ 为所求.

13. 令 $u=tx$,则 $x\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(u)(\mathrm{d}u)$,从而

$$f'(x)+3f(x)+2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-x}.$$

求导得 $$f''(x)+3f'(x)+2f(x)=-\mathrm{e}^{-x}.\quad(*)$$

由特征方程 $r^2+3r+2=0$ 解得相异实根 $r=-2,r=-1$,所以,对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$,且可设 $y^*=Ax\mathrm{e}^{-x}$,代入方程$(*)$,得 $A=-1$,所以

$$y=f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}.$$

将 $f'(0)=-2,f(0)=1$ 代入,得 $C_1=0,C_2=1$,故 $y=f(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

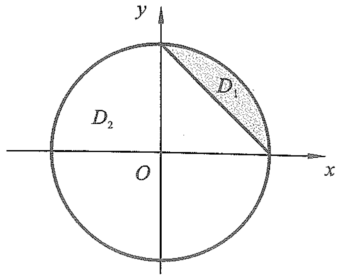
14. 用 $x+y=1$ 将区域 D 分成 $D_1=D\cap\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$ 和 $D_2=D\backslash D_1$ 两部分,如图所示.记 $f=x+y-1$.

$$I = \iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_2} f\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma - \left[\iint\limits_{D} f\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma\right] = 2\iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D} f\mathrm{d}\sigma.$$

因为$\iint\limits_{D} f\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x+y-1)\mathrm{d}\sigma$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{d}\sigma = -\pi,$$



2016-2(期中)-14 图

$$\iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y-1)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [1-x-\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x = \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4},$$

所以 $I = 2\iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D} f\mathrm{d}\sigma = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$

15. (1) 由于 $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ 为初等函数，且在全平面有定义，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 因为 $f(x,0) = 0$，所以 $f_x(0,0) = 0$；同理 $f_y(0,0) = 0$.

(3) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy^2|^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 极限不存在，所以 $f(x,y)$ 在原点不可微.

(4) 利用方向导数的定义，得

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos^{1/3}\alpha\sin^{2/3}\alpha = \cos^{1/3}\alpha\sin^{2/3}\alpha.$$

2017-2 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分，共 60 分)

1. 设直线 l 过点 $M_0(1,2,0)$，且平行于平面 $\pi: x-2y+z-4=0$，又与直线 $l_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 相交，求此直线的方程.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 6 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切矢量、法平面方程.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x^2+y^2 = ax \end{cases}$ $(a>0)$ 分别在 xOy 面和 zOx 面的投影曲线方程.

4. 已知 $z(x,y) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2} |x+y^2-t| \mathrm{d}t$，其中 $0 < x+y^2 < 1$，求 z_{xy}.

5. 设二元函数 $z = f(x,y)$ 满足方程 $F(x+z, xy) = 0$，且 $f(x,y)$，$F(s,t)$ 均具有连续的一阶偏导数，且 $f_2F_1 + yf_2F_2 - xf_1F_2 \neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$.

6. 求 $I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 x^2\cos(xy)\mathrm{d}x$.

7. 求 $I=\iint\limits_{D}(2x+3y-1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D:$|x|+|y|\leqslant 1$.

8. 设 $f(x,y)$ 连续,$f(x,y)=xy+\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是由 $y=0,y=x^2$ 和 $x=1$ 所围区域,求 $f(x,y)$.

9. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

10. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}v$,其中 Ω:$0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,$a>0$.

二、综合计算题(每小题 8 分,共 40 分)

11. 设函数 $u=f(x\sin y)$,其中 $f(t)$ 具有连续的二阶导数,矢量 $\boldsymbol{n}=\{3,4\}$,且 $f'(0)=5$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{n}\partial x}(0,0)$.

12. 在平面曲线 $x^2+2y^2-2x=88$ 上求一点,使函数 $f(x,y)=3x^2+y^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n}=\{3,4\}$ 的方向导数最大.

13. 求由抛物线 $y^2=ax$ 与圆 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所围的包含一段 x 轴的区域 D 的面积 S.

14. 求 $I=\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是矩形区域:$|x|\leqslant 2$,$|y|\leqslant 2$.

15. 设二元函数 $f(x,y)$ 在原点$(0,0)$处存在二阶偏导数 $f_{xx}(0,0)$ 和 $f_{yy}(0,0)$. 判断下列的结论是否正确,如果正确,请给出理由;如果不正确,给出反例.

(1) $f_x(x,0)$ 在原点$(0,0)$处关于 x 连续.

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在原点$(0,0)$处连续.

2017-2 期中试题解答

一、基本计算题

1. 设 l 与 l_1 的交点为 Q,则其坐标应为$(2+t,1+2t,2+t)$,从而直线 l 的方向矢量为 $s=\overrightarrow{M_0Q}=\{t+1,2t-1,t+2\}$. 因直线 l 平行于平面 π,有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$,即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$,

亦即$(t+1)+(-2)(2t-1)+(t+2)=0$,解得 $t=\dfrac{5}{2}$. 故直线 l 的方程为

$$\frac{x-1}{7/2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-0}{9/2}.$$

2. 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0$,$G(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$,则

$\nabla F(1,1,2)=2\{1,1,2\}$,$\nabla G(1,1,2)=\{2,2,-1\}$,

所以切矢量为 $\boldsymbol{\tau}=\{1,1,2\}\times\{2,2,-1\}=-5\{1,-1,0\}$,所求的法平面方程为 $x-y=0$.

3. 在 xOy 面的投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=ax\\z=0\end{cases}$;

在 zOx 面的投影曲线为 $\begin{cases}z^2=a^2-ax\\y=0\end{cases}$ $(-a\leqslant z\leqslant a)$.

4. $z=\int_0^{x+y^2}\mathrm{e}^{t^2}(x+y^2-t)\mathrm{d}t+\int_{x+y^2}^1\mathrm{e}^{t^2}(t-x-y^2)\mathrm{d}t$

$$=(x+y^2)\int_0^{x+y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\int_0^{x+y^2}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_{x+y^2}^1 t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-(x+y^2)\int_{x+y^2}^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

所以 $z_x=\int_0^{x+y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{x+y^2}^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t, z_{xy}=4y\mathrm{e}^{(x+y^2)^2}$.

5. 由题设知,方程组 $\begin{cases}z=f(x,y)\\F(x+z,xy)=0\end{cases}$ 确定隐函数 $x=x(z)$ 和 $y=y(z)$,方程组两边对 z 求导,得

$$\begin{cases}1=f_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+f_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z},\\F_1\cdot\left(1+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)+F_2\cdot\left(y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=0.\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{xF_2+f_2F_1}{f_2F_1+yf_2F_2-xf_1F_2}$.

6. 交换积分次序得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x^2\cos(xy)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\cos 1).$$

7. 利用奇偶对称性及轮换对称性(见图),得

$$I=\iint\limits_D(4x^2+9y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=13\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

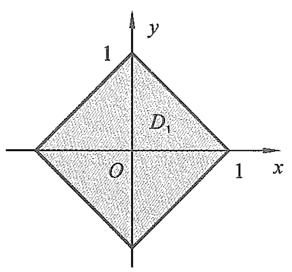
记 D_1 为区域 D 在第一象限的区域,则

$$I=52\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2=52\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\mathrm{d}y+2=\frac{19}{3}.$$

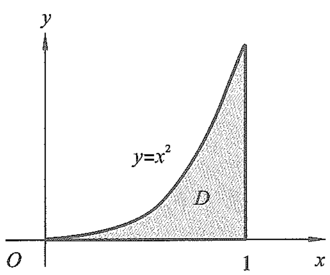
8. 如图所示,设 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $f(x,y)=xy+A$,从而

$$A=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D A\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}xy\,\mathrm{d}y+A\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A,$$

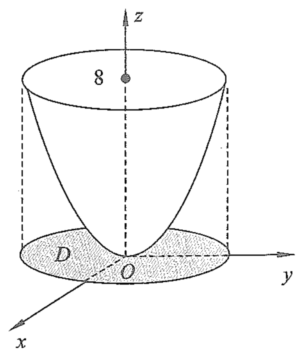
解得 $A=\dfrac{1}{8}$,故 $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$.



2017-2(期中)-7 图



2017-2(期中)-8 图



2017-2(期中)-9 图

9. 旋转曲面方程为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 记 Ω 在 xOy 面投影的区域(见图)为 $D:x^2+y^2\leqslant 16$,

所以

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}r^2}^{8}r^2\mathrm{d}z=2\pi\int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\frac{1024}{3}\pi.$$

10. $I=\int_0^a z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a z^2(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{15}a^5.$

二、综合计算题

11. 由于$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x\sin y)\sin y,\frac{\partial u}{\partial y}=f'(x\sin y)x\cos y$,所以

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{f'(x\sin y)}{5}(3\sin y+4x\cos y).$$

利用偏导数的定义,得$\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f'(0)x}{5x}=\frac{4f'(0)}{5}=4.$

12. 设所求点为$M(x,y)$,由$\nabla f(x,y)=\{6x,2y\},\boldsymbol{n}^\circ=\frac{1}{5}\{3,4\}$,得$f(x,y)$在点$M(x,y)$沿着方向$\boldsymbol{n}=\{3,4\}$的方向导数为$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)=\frac{2}{5}(9x+4y)$. 构造拉格朗日函数

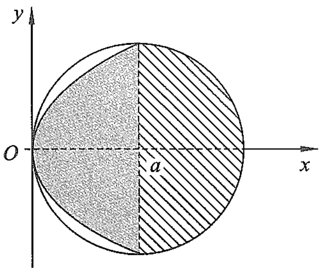
$$L(x,y,\lambda)=9x+4y+\lambda(x^2+2y^2-2x-45).$$

令$\begin{cases}L_x=9+2\lambda x-2\lambda=0,\\ L_y=4+4\lambda y=0,\\ L_\lambda=x^2+2y^2-2x-88=0.\end{cases}$ 由前2个方程可得$2(x-1)=9y$,代入最后一个方程,得$y=2,x=10$和$y=2,x=-8$,即受检点为$M_1(10,2),M_2(-8,-2)$. 将其代入$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)$,比较可得$M_1(10,2)$为所求.

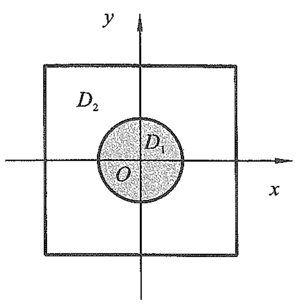
13. 区域D如图所示,联立$\begin{cases}y^2=ax\\ y^2=2ax-x^2\end{cases}$,得交点$(0,0),(a,a),(a,-a)$. 所求面积为半圆面积(阴影部分)与灰色部分面积之和,即

$$S=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_0^a\mathrm{d}y\int_{y^2/a}^{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_0^a\left(a-\frac{y^2}{a}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+2a^2-\frac{2}{3}a^2=\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{4}{3}a^2.$$



2017-2(期中)-13 图



2017-2(期中)-14 图

14. 如图所示,记区域$D_1:x^2+y^2\leqslant 1,D_2=D\backslash D_1$. 记函数$f(x,y)=x^2+y^2-1$,则

$$I=-\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y-16=\frac{80}{3}$,

$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r-\pi=-\frac{\pi}{2}$,

所以 $I=\frac{80}{3}+\pi$.

15. (1) 正确. 因为根据偏导数定义知 $f_{xx}(0,0)=\left.\frac{\mathrm{d}f_x(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,而由一元函数的可导必连续的结论知 $f(x,0)=0$ 在原点$(0,0)$处连续.

(2) 不正确. 如 $f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0\\ 1, xy\neq 0\end{cases}$在原点$(0,0)$处不连续. 但是因为 $f(x,0)=0$,所以 $f_x(x,0)=0$,进而有 $f_{xx}(0,0)=0$. 类似可得 $f_{yy}(0,0)=0$.

2018-2 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分,共 60 分)

1. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.
2. 设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)$ 为某二阶常系数齐次微分方程的通解,求此微分方程.
3. 已知点 $A(3,-3,1)$ 与点 $B(3,-2,2)$. 若$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$,求矢量$\overrightarrow{OM}$的方向余弦.
4. 判断直线 $L_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ 与直线 $L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-6}{5}$ 是否共面.
5. 讨论二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x+y}$. 若极限存在求其值,若不存在说明理由.
6. 已知平面曲线由方程 $x^2+y^3+\ln(x+y)-3=0$ 确定,求点 $x=2, y=-1$ 处的法线方程.
7. 设 $\varphi(u,v)$ 有连续偏导数,方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$. 证明 $az_x+bz_y=c$.
8. 计算 $I=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^2\max\{xy,1\}\mathrm{d}x$.
9. 计算 $I=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, |x|\geqslant|y|\}$(由 $x^2+y^2=4$ 和 $y^2=x^2$ 围成的包含 x 轴的区域).
10. 计算 $I=\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中区域 V 由曲面 $z=0, z=4-x^2-y^2$ 围成.

二、综合计算题(每小题 8 分,共 40 分)

11. 求解微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}$.
12. 求函数 $u=2x+y^2z$ 在点$(1,-1,-1)$沿椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 的外法线方向的方向导数.
13. 求函数 $u=x+3z$ 在曲线$\begin{cases}x+2y-3z=2\\ x^2+y^2=2\end{cases}$上的最大值与最小值.

14. 求积分 $I=\iiint\limits_{V}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中区域 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$.

15. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.(1) 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微；(2) 求 $z_{xy}(0,0)$.

2018-2 期中试题解答

一、基本计算题

1. 设 $y'=p(y)$，原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$. 根据初始条件舍去 $p=0$. 解一阶方程得到 $p=\dfrac{C_1}{y}$，代入初始条件得到 $C_1=\dfrac{1}{2}$. 于是有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2y}$，解得 $x=y^2+C_2$. 再利用初始条件得 $y=\sqrt{1+x}$.

   另解　由 $yy''+(y')^2=0$ 得 $(yy')^2=0$，所以 $yy'=C_1$，由 $y(0)=1, y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 得 $C_1=\dfrac{1}{2}$；分离变量 $y\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x$ 或 $2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，因此 $y^2=x+C$，由 $y(0)=1$ 得 $C=1$，所以 $y=\sqrt{1+x}$.

2. 直接观察到特征根 $r_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$，所以特征方程为 $r^2-2r+5=0$. 于是，所求微分方程为 $y''-2y'+5y=0$.

3. 易得 $\overrightarrow{AM}=\{0,3,3\}$，$\overrightarrow{OM}=\{3,0,4\}$. 单位化以后得到 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\dfrac{4}{5}$.

4. 由已知得到点 $P_1(-1,2,4)$，$P_2(1,-3,6)$，以及 $\boldsymbol{s}_1=\{2,-1,3\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{1,2,5\}$. 从而得到

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}2&-5&2\\2&-1&3\\1&2&5\end{vmatrix}=23\neq 0.$$

   因此两条直线为异面直线.

5. 极限不存在. 取路径 $y=0$，极限为 0. 取路径 $x=-y+y^3$，极限为 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^3+y^5}{y^3}=-1$. 因此二重极限不存在.

6. 设 $f(x,y)=x^2+y^3+\ln(x+y)-3$，则

$$\nabla f=\left\{2x+\frac{1}{x+y},3y^2+\frac{1}{x+y}\right\}.$$

   法线方向矢量为 $\boldsymbol{n}=\nabla f(2,-1)=\{5,4\}$. 所求的法线方程为 $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{4}$，即 $4x-5y-13=0$.

7. 根据隐函数求导得到 $z_x=\dfrac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}$，$z_y=\dfrac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$ 代入即得 $az_x+bz_y=c$.

8. 由题设知积分区域为正方形区域 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$. 用 $xy=1$ 将区域分成 D_1 与 D_2（见图），则

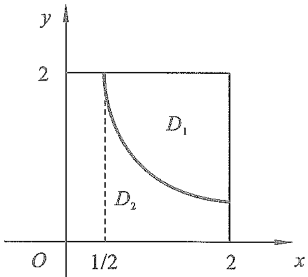
$$I=\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}\sigma=\int_{1/2}^{2}x\mathrm{d}x\int_{1/x}^{2}y\mathrm{d}y+1+\int_{1/2}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1/x}\mathrm{d}y=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

9. 区域包含两个部分(见图).根据对称性,采用极坐标得到 $I=4\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\cos r^2\,\mathrm{d}r$,积分得

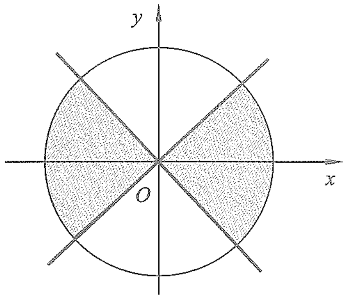
$$I=4\cdot\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^2=\frac{\pi\sin 4}{2}.$$

10. 区域如图所示,用柱面坐标

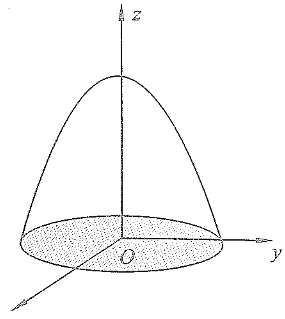
$$I=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{4-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2(4-r^2)\,\mathrm{d}r=\frac{128\pi}{15}.$$



2018-2(期中)-8 图



2018-2(期中)-9 图



2018-2(期中)-10 图

二、综合计算题

11. 方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,解得特征根 $r_1=1,r_2=2$,所以对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

分别求解非齐次项 $\mathrm{e}^{2x},\mathrm{e}^{3x}$ 所对应的特解.设 e^{3x} 对应的特解为 $y_1=A\mathrm{e}^{3x}$,解得 $A=1/2$.设 e^{2x} 对应的特解为 $y_2=Bx\mathrm{e}^{2x}$,解得 $B=1$.所求微分方程通解为

$$y=Y+y_1+y_2=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}+x\mathrm{e}^{2x}.$$

12. 在点$(1,-1,-1)$处椭球面的外法线方向为 $\boldsymbol{n}=\{2x,4y,6z\}\big|_{(1,-1,-1)}=\{2,-4,-6\}$.单位化得到 $\boldsymbol{n}^\circ=\dfrac{\{1,-2,-3\}}{\sqrt{14}}$.在点$(1,-1,-1)$处$\nabla u(1,-1,-1)=\{2,2,1\}$.故所求方向导数为$\dfrac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot\boldsymbol{n}^\circ=-\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

13. 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+3z+\lambda(x+2y-3z-2)+\mu(x^2+y^2-2).$$

$$令\begin{cases}L_x=1+\lambda+2\mu x=0,\\L_y=2\lambda+2\mu y=0,\\L_z=3-3\lambda=0,\\L_\lambda=x+2y-3z-2=0,\\L_\mu=x^2+y^2-2=0,\end{cases}$$

解得两个驻点 $\lambda_1=1,\mu_1=1,x_1=-1,y_1=-1,z_1=-\dfrac{5}{3}$ 以及 $\lambda_2=1,\mu_2=-1,x_2=1,y_2=1,z_2=\dfrac{1}{3}$.比较得到最大值为 2,最小值为 -6.

14. $I=\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\cos^2\theta\mathrm{d}\rho$

$=\dfrac{32}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\dfrac{32\pi}{5}\cdot\dfrac{1}{24}=\dfrac{4\pi}{15}.$

15. (1) 根据偏导数定义求得 $z_x(0,0)=0,z_y(0,0)=0$.

因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin^3\theta=0$. 因此 $f(x,y)$ 在$(0,0)$可微.

(2) 当$(x,y)\neq(0,0)$时, $z_x=\dfrac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$. 所以

$$z_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{z_x(0,y)-z_x(0,0)}{y}=1.$$

2016-2 期末试题

一、单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的下面四条性质:

(1) 连续; (2) 两个偏导存在;

(3) 可微; (4) 沿方向$\{1,0\}$的方向导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则成立(　　).

A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　B. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$　C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　D. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(4)$

2. 将逐次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 化为先对 y 后对 x 的逐次积分,正确结果是(　　).

A. $I=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$

B. $I=\int_{-y}^{y}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $I=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$

D. $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

3. 设 L 表示圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$,取顺时针方向,则积分$\int_L -x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=$(　　).

A. πR^4　B. $-\dfrac{\pi R^4}{2}$　C. $-\pi R^4$　D. $\dfrac{\pi R^4}{2}$

4. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,下列说法中正确的是(　　).

A. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散

B. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散

C. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛

D. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则当 n 充分大时,$a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$

5. 二阶常系数线性微分方程 $y''-3y'-4y=x+\mathrm{e}^{-x}$ 的特解的待定形式为(　　).

A. $y^{*}=ax+b+c\mathrm{e}^{-x}$　　B. $y^{*}=x(ax+b)+(cx+d)\mathrm{e}^{-x}$

C. $y^{*}=ax+b+cx\mathrm{e}^{-x}$　　D. $y^{*}=x(ax+b)+cx\mathrm{e}^{-x}$

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 是将函数 $f(x)=x+1(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 做奇延拓后展开成的傅立叶级数,其和函数为 $S(x)(-\infty<x<+\infty)$,则 $S\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)=$(　　).

A. $-\dfrac{\pi}{2}+1$　　B. $\dfrac{\pi}{2}+1$　　C. $-\dfrac{\pi}{2}-1$　　D. $\dfrac{\pi}{2}-1$

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

7. 设函数 $z=x\mathrm{e}^{y}$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=$ ________.

8. 设 $D:x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0$,则 $\iint\limits_{D}[(x+1)^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

9. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=1$,则 $\int_L(x^2+xy)\mathrm{d}s=$ ________.

10. 设曲面 $S=\{(x,y,z):z=1,\ |x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_{S}(x+y+z)\mathrm{d}s=$ ________.

三、基本计算题(每小题 7 分,共 42 分)

11. 求经过直线 $L:\begin{cases}2x+3y-z-8=0\\ y-3z+4=0\end{cases}$,且与平面 $\pi:x+y+z-4=0$ 平行的平面方程 π_1.

12. 设 $z=f(\mathrm{e}^{2x},xy)$,其中 f 具有二阶连续导数,且 $f'_2(1,0)=2$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=3}}$.

13. 设变量 x,y,t 满足方程 $x=F(t,y)$ 和 $f(x+y+t)=3y$,其中 f 具有一阶连续导数,F 具有一阶连续偏导数,记 $F_1=\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial t}$,$F_2=\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y}$,且 $1+F_1\neq 0$,$f'\neq 0$,求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

14. 设 L 是依逆时针方向的下半圆周 $x^2+y^2=x(y\leqslant 0)$,求曲线积分

$$I=\int_L(1-y-\mathrm{e}^{x}\sin y)\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^{x}\cos y)\mathrm{d}y.$$

15. 设 S 为曲面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧,求曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}xyz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}z^3+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数.

四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

17. 求函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$ 在平面 $x=y$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆周上的最大值和最小值.

18. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数,且满足 $\varphi(0)=0$,$\varphi'(x)+\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x}$,求 $\varphi(x)$.

五、分析证明题(每小题 5 分,共 10 分)

19. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)-\cos\left(\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)\right](p>0)$ 的敛散性,收敛时指明是条件收敛还是绝对收敛.

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

2016-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. D　**2.** C　**3.** B　**4.** A　**5.** C　**6.** C

二、填空题

7. $\mathrm{e}\mathrm{d}x$　**8.** $\frac{3}{4}\pi$　**9.** π　**10.** 4

三、基本计算题

11. 设所求平面为 $\pi_1: x+y+z+D=0$，取直线 L 上的一个点 $P(10,-4,0)$，将点 P 代入平面 π_1，则 $D=-6$，所以 $\pi_1: x+y+z-6=0$.

12. $z_x = 2\mathrm{e}^{2x}f'_1(\mathrm{e}^{2x},xy)+yf'_2(\mathrm{e}^{2x},xy)$. 令 $G(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}f'_1(\mathrm{e}^{2x},xy)+yf'_2(\mathrm{e}^{2x},xy)$，则 $G(0,y)=2f'_1(1,0)+yf'_2(1,0)$，从而

$$G'_y(0,3)=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}} = f_2(1,0)=2,\text{所以}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}} = f_2(1,0)=2.$$

13. 依题意，方程组 $\begin{cases} x=F(t,y) \\ f(x+y+t)=3y \end{cases}$ 确定了 $t=t(y)$，$x=x(y)$，对 y 求导：

$$\begin{cases} x'(y)=F_1t'(y)+F_2 \\ (x'(y)+t'(y)+1)f'=3 \end{cases},\text{解得}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{f'F_2+(3-f')F_1}{(1+F_1)f'}.$$

14. 补 $L_1: y=0(x \text{ 从 } 1\to 0)$，则 $L+L_1$ 封闭，且取正向，所以

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+L_1}(1-y-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y \\ &\quad -\int_{L_1}(1-y-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\int_1^0\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+1. \end{aligned}$$

15. 补 $S_1: z=0, x^2+y^2\leqslant 1$，下侧，则 $S+S_1$ 封闭，指向内侧，所以

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S+S_1} xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}z^3+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad -\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}z^3+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iiint_V (yz+x^2+z^2)\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中 $\iint_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$. 由对称性 $\iiint_V (yz+x^2+z^2)\mathrm{d}v=\iiint_V (x^2+z^2)\mathrm{d}v$，且

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2\mathrm{d}v &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2\varphi-1)\mathrm{d}(\cos\varphi)\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}\pi, \end{aligned}$$

$$\iiint_V z^2\,\mathrm{d}v = \int_0^1 z^2\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{2}{15}\pi,$$

所以 $I = -\frac{4\pi}{15} + \pi = \frac{11}{15}\pi$.

16. 因 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$|x| < 1$，所以，当 $|x| < 1$ 时，

$$f(x) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x + f(0) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

又 $x = -1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 收敛，所以

$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$，$x \in [-1,1)$.

四、应用题

17. 将平面 $x = y$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 代入函数 $f(x,y,z) = xy + z^2$，得 $f = 4 - x^2(-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2})$. 令 $f'(x) = -2x = 0$，得唯一驻点 $x = 0$. 比较 $f(0) = 4$，$f(\pm\sqrt{2}) = 2$ 知，最大值为 $f(0,0,\pm 2) = 4$，最小值为 $f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0) = 2$.

18. 对方程两边求导，将 $x = 0$ 代入方程有

$$\begin{cases}\varphi''(x) + \varphi(x) = \mathrm{e}^x \\ \varphi(0) = 0,\varphi'(0) = 1\end{cases}.$$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$，有共轭复根 $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$，故对应的齐次方程的通解为

$$\varphi = C_1\cos x + C_2\sin x\text{，特解 }\varphi^* = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

因 $\lambda = 1$ 不是特征根，故设 $\varphi^* = A\mathrm{e}^x$，代入方程得 $A = \frac{1}{2}$. 从而方程的通解为

$$\varphi = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

将初始条件代入，得 $C_1 = -\frac{1}{2}$，$C_2 = \frac{1}{2}$. 所以，所求定解为

$$\varphi = \frac{1}{2}(-\cos x + \sin x + \mathrm{e}^x).$$

五、分析证明题

19. 将级数看作是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - \cos\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n^p}$ 的差.

因 $1 - \cos\frac{(-1)^n}{n^p} \sim \frac{1}{2n^{2p}}(n \to \infty)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - \cos\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛，当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散；

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$ 为交错级数，由莱布尼兹判别法，当 $p > 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$ 收敛，且 $\left|(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}\right| = \sin\frac{1}{n^p} \sim \frac{1}{n^p}$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$ 当 $p >$

1 时绝对收敛，当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛.

故原级数当 $p > 1$ 时绝对收敛，当 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时条件收敛，当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散.

20. $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x = \iint\limits_D xy\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$D$ 是正方形区域 $a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b$），

$$= \iint\limits_D xy\left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（轮换性）}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\iint\limits_D xy \cdot 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)} \cdot \frac{f(x)}{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（均值不等式）}$$

$$= \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

另证　由 Cauchy-Schwartz 不等式，得

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left[\int_a^b \sqrt{xf(x)} \cdot \sqrt{\frac{x}{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2 = \left(\int_a^b x\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{(b^2-a^2)^2}{4}.$$

2017-2 期末试题

一、单项选择题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 函数 $f(x,y) = |x|\cos y$ 在原点$(0,0)$ 处(　　).

A. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 存在　　B. $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 不存在

C. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　　D. $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

2. 设 Ω：$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$，将 $I = \iiint\limits_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v$ 化为球面坐标系下的逐次积分，下列结果正确的是(　　).

A. $I = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$　　B. $I = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} f(\rho)\mathrm{d}\rho$

C. $I = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$　　D. $I = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\mathrm{d}\rho$

3. 设 Ω：$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$，$\Omega_1$ 为 Ω 在第一卦限的部分区域，则下面式子正确的是(　　).

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v$　　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega_1} x^2\mathrm{d}v$

C. $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = 0$　　D. $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}v$

4. 关于数项级数的敛散性，下面说法正确的是(　　).

A. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l < 1$

B. 若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum a_n^2$ 收敛

C. 若 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛，则 $\sum(a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$，以下结论正确的是（　　）.

A. 在 $x=1$ 处条件收敛　　B. 在 $x=3$ 处发散

C. 在 $x=2$ 处绝对收敛　　D. 在 $x=0$ 处条件收敛

6. 在 xOy 面上，若积分 $\int_L (2xe^{x^2}y^3 + ax\cos y)\mathrm{d}x + (be^{x^2}y^2 - x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则（　　）.

A. $a=2, b=-3$　B. $a=-2, b=3$　C. $a=-2, b=-3$　D. $a=2, b=3$

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

7. 函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在 $(1,1,1)$ 点的全微分 $\mathrm{d}u\,|_{(1,1,1)} =$ ________.

8. 设区域 D：$|x|+|y| \leqslant 1$，则 $\iint_D (1-x)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

9. 设 $f(x)=x+1, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$，将 $f(x)$ 展成以 2π 为周期的傅立叶级数 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$. 则 $a_{2018} =$ ________.

10. 设矢量函数 $\boldsymbol{F}=\{x,y,z\}$，$\boldsymbol{G}=\{y,z,x\}$，则 $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) =$ ________.

三、基本计算题（每小题 7 分，共 42 分）

11. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+y^2-5z=0 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的切线方程.

12. 设 $u=f(x+y^2, xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

13. 设 $x=r^2\cos\theta, y=r\sin\theta (r \neq 0)$ 确定的隐函数为 $r=r(x,y), \theta=\theta(x,y)$，求 $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$.

14. 求 $I=\oint_L (x+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 是圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 与 x 轴和 y 轴所围平面图形的整个边界.

15. 求 $I=\iint_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 取上侧.

16. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$ 的和.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

17. 已知函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6R^2 (R>0)$ 的第一卦限部分上存在最大值. 求出该最大值点，并由此证明：对任意正实数 a,b,c，成立 $ab^2c^3 \leqslant \left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$、柱面 $x^2+y^2=2x$ 以及 xOy 面围成的空间区域. 求：(1) Ω 的体积 V；(2) Ω 表面上锥面块的面积 S.

五、分析证明题（每小题 5 分，共 10 分）

19. 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心，以 $R (R>0, R\neq 1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，证明 $\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x \int_0^1 e^{-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 1$.

2017-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. D **2.** C **3.** A **4.** C **5.** B **6.** D

二、填空题

7. $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z$ **8.** 7/3 **9.** 0 **10.** $x+y+z$

三、基本计算题

11. 由于 P 为切点，所求切线的方向矢量为

$$\tau=\{2x,2y,2z\}\times\{2x,2y,-5\}\big|_P=-14\{2,-1,0\}.$$

故切线方程为$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{0}$.

12. 由于$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+yf_2$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_{11}+xf_{12}+f_2+2y^2f_{21}+xyf_{22}$，$f$ 具有二阶连续导数，所以$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_{11}+(x+2y^2)f_{12}+f_2+xyf_{22}$.

13. 在方程组$\begin{cases}x=r^2\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$两边对 x 求偏导，得$\begin{cases}1=2rr_x\cos\theta+r^2(-\sin\theta)\theta_x\\ 0=r_x\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta_x\end{cases}$，

解上述方程组得到$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\cos\theta}{r(1+\cos^2\theta)}$，$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-\sin\theta}{r^2(1+\cos^2\theta)}$.

14. 记 $A(1,0)$，$B(0,1)$. 则

$$I=\int_{OA}(x+y^2)\mathrm{d}s+\int_{\widehat{AB}}(x+y^2)\mathrm{d}s+\int_{OB}(x+y^2)\mathrm{d}s.$$

由于$\displaystyle\int_{OA}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，$\displaystyle\int_{OB}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$，

$$\int_{\widehat{AB}}(x+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=1+\frac{\pi}{4}.$$

所以 $I=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{11}{6}$.

15. 补 Σ：$z=1,x^2+y^2\leqslant 1$，下侧，则 $S+\Sigma$ 封闭，且取内侧. 记 V：$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$，利用高斯公式，有

$$I=-\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v-\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于$\displaystyle\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1(r^2+z^2)\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{10}$；

$$\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}.$$

故 $I=-\dfrac{\pi}{20}$.

16. 收敛半径为 1，收敛域为[-1，1]. 设和函数为 $S(x)$，则

$$\begin{aligned}xS(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t^2)^n\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,\end{aligned}$$

注意 $x=0$ 时，$S(0)=1$.

并利用和函数的连续性，则 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}, & 0<|x|\leqslant 1\\ 1, & x=0\end{cases}$.

从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\arctan\dfrac{1}{2}$.

四、应用题

17. 作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x^2+2y^2+3z^2-6R^2)$. 令 $\nabla F=\mathbf{0}$，则有

$F_x=y^2z^3+2\lambda x=0$,

$F_y=2xyz^3+4\lambda y=0$,

$F_z=3xy^2z^2+6\lambda z=0$,

$F_\lambda=x^2+2y^2+3z^2-6R^2=0$.

在第一卦限，解得唯一驻点 (R,R,R). 由于函数有最大值，且驻点唯一，故最大值点为 (R,R,R).

因此对于任意的 $x,y,z>0$，$x^2+2y^2+3z^2=6R^2$ 的点 (x,y,z) 都成立

$\ln(xy^2z^3)\leqslant \ln R^6$，即 $xy^2z^3\leqslant R^6=\left(\dfrac{x^2+2y^2+3z^2}{6}\right)^3$.

特别地，取 $x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{b}$，$z=\sqrt{c}$，则有 $ab^2c^3\leqslant\left(\dfrac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18. (1) $V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\dfrac{32}{9}$.

(2) 锥面块的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，在 xOy 面投影的区域为 $D: x^2+y^2\leqslant 2x$，面积微元为 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $S=\iint\limits_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi$.

五、分析证明题

19. 令 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则当 $x^2+y^2=0$ 时，P,Q 无定义；当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$P_y=\dfrac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}=Q_x$.

(1) 当 $0<R<1$ 时，区域 $D:(x-1)^2+y^2\leqslant R^2$ 不包含原点，用 Green 公式，有 $I=\iint\limits_D 0\,\mathrm{d}\sigma=0$.

(2) 当 $R>1$ 时，作 $l: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$ 足够小，使得 L 包围 l 在其内，取逆时针方向），L 与 l^-（l^- 表示与 l 反向的曲线）围成复连通区域 $D^*:(x-1)^2+y^2\leqslant R^2, 4x^2+y^2\geqslant\varepsilon^2$.

用 Green 公式，有 $\oint_{L+l^-}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_{D^*}0\,\mathrm{d}\sigma=0$，故

$$I=\oint_{L+l^-}-\oint_{l^-}=\oint_l=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}2\sigma=\pi,$$

其中 $\sigma=\pi\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon$ 是椭圆 $4x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$ 的面积.

20. 证法 1 记区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

$$I=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx=\iint\limits_D e^{f(x)-f(y)}\,dx dy.$$

由二重积分的轮换对称性，有

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}\right]dx dy\geqslant\iint\limits_D 1\,dx dy=1.$$

证法 2 记区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

$$I=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx=\iint\limits_D e^{f(x)-f(y)}\,dx dy.$$

对任意 x，有 $e^x\geqslant 1+x$. 所以 $I=\iint\limits_D e^{f(x)-f(y)}\,dx dy\geqslant\iint\limits_D(1+f(x)-f(y))\,dx dy$，

由轮换对称性知 $\iint\limits_D(f(x)-f(y))\,dx dy=0$，故 $I\geqslant\iint\limits_D 1\,dx dy=1$.

证法 3 由 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$I=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx\geqslant\left(\iint\limits_D e^{\frac{f(x)}{2}}\cdot e^{-\frac{f(x)}{2}}\,dx dy\right)^2=1.$$

2018-2 期末试题

一、单项选择题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 都是微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=x^2$ 的解，则以下函数中也是该微分方程的解的是(　　).

A. $y_1+y_2+y_3$　　B. $\frac{3}{2}y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3$

C. y_1-y_2　　D. $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是(　　).

A. $z=x^2+y^2$　　B. $z=\sqrt{x^2+y^2}$　　C. $z=|x-y|$　　D. $z=\sqrt{|xy|}$

3. 设 $F(x,y)=0$ 是一条平面光滑曲线，则以下说法中正确的是(　　).

A. $\{F_x,F_y\}$ 是该曲线的切矢量　　B. $\{F_y,F_x\}$ 是该曲线的法矢量

C. $\{-F_y,F_x\}$ 是该曲线的切矢量　　D. $\{-F_x,F_y\}$ 是该曲线的法矢量

4. 设平面区域 D 由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 表示，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则

$$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\,d\sigma=(\quad).$$

A. 0　　B. $4\iint\limits_{D_1}xy\,d\sigma$

C. $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,d\sigma$　　D. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,d\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成，$I=\iiint\limits_\Omega f(z)\,dv$，则以下表达式错误的是(　　).

A. $I=\pi\int_0^1 zf(z)\,dz$　　B. $I=2\pi\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^1 f(z)\,dz$

C. $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(z)\,dz$　　D. $I=2\pi\int_0^1 f(z)\,dz\int_0^z r\,dr$

6. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则以下说法中正确的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

二、填空题(每小题 4 分，共 16 分)

7. 微分方程 $y''+2y'+y=x+2$ 的通解为__________.

8. 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$，其中 f 有连续偏导数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

9. 设 $f(x,y,z)=x+y^3+z^5$，则 $\operatorname{div}\,\mathbf{grad}f=$__________.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n3^n}=$__________.

三、基本计算题(每小题 7 分，共 42 分)

11. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 L:$\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$ 的距离.

12. 设方程组$\begin{cases}x^2-2x+y^2+\ln z+z^3=1\\ x+y+z=1\end{cases}$在包含点$(0,0,1)$的一个邻域上确定隐函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

13. 求函数 $f(x,y)=4x+2xy-x^2-3y^2$ 的极值.

14. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

15. 求曲线积分 $I=\int_L(2xy-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(x^2-2y\sin x)\mathrm{d}y$，其中曲线 L 沿抛物线 $y=\pi x-x^2+1$ 从 $A(0,1)$ 到 $B(\pi,1)$.

16. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$的敛散性，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛，说明你的理由.

四、应用题(每小题 7 分，共 14 分)

17. 求曲面 $z=x^2+y^2$，$0\leqslant z\leqslant 2$ 的面积.

18. 计算曲面积分 $I=\oiint_S 3xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

五、综合题(每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 L 是圆周曲线$(x-1)^2+(y-1)^2=1$(取正向)，$f(x)$ 为正值连续函数. 证明：

$$\oint_L xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi.$$

20. 证明：当 $-\pi<x<\pi$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\dfrac{x}{2}$.

2018-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. B　**2.** A　**3.** C　**4.** A　**5.** D　**6.** B

二、填空题

7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x$　**8.** $2xf'_1 + yf'_2$　**9.** $6y + 20z^3$　**10.** $\ln 3$

三、基本计算题

11. 取直线 L 上的点 $B(6,1,6)$，则 $\overrightarrow{AB} = \{5,-1,3\}$，直线的方向矢量为 $s = \{-1,1,-2\}$.

所求距离为 $d = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times s|}{|s|} = \dfrac{|\{-1,7,4\}|}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}$.

12. 方程组对 x 求导，得到

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2yy' + \dfrac{1}{z}z' + 3z^2 z' = 0 \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases}，代入点(0,0,1)得到\begin{cases} 4z'(0) = 2 \\ 1 + y'(0) + z'(0) = 0 \end{cases}.$$

解得 $y'(0) = \dfrac{-3}{2}, z'(0) = \dfrac{1}{2}$.

13. 令 $\begin{cases} f_x = 4 + 2y - 2x = 0 \\ f_y = 2x - 6y = 0 \end{cases}$，解得唯一驻点 $x = 3, y = 1$. 继续求二阶导数得到 $f_{xx} = -2$，$f_{yy} = -6, f_{xy} = 2$，所以 $\Delta = AC - B^2 = 8 > 0$. 函数在 $(3,1)$ 取得极大值 $f(3,1) = 6$.

14. 由轮换性得

$$I = 3\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v = 3\int_0^1 z\sigma(z)\,\mathrm{d}z \ (\sigma(z) 为 z = 常数截 \Omega 所得三角形的面积)$$

$$= 3\int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}.$$

15. 因 $Q_x = P_y = 2x - 2y\cos x$，所以 $(2xy - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (x^2 - 2y\sin x)\mathrm{d}y$ 是某个二元函数的全微分，直接凑微分，得

$$I = [x^2 y - y^2 \sin x]_{(0,1)}^{(\pi,1)} = \pi^2.$$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(2n-1)!!}$ 为正项级数，因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{(2n+1)!!} \cdot \dfrac{(2n-1)!!}{2} = 0 < 1$，由比值判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(2n-1)!!}$ 收敛.

同理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{(2n-1)!!}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 绝对收敛.

所以原级数为绝对收敛.

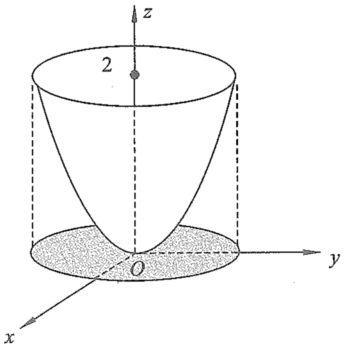
四、应用题

17. 如图所示. $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

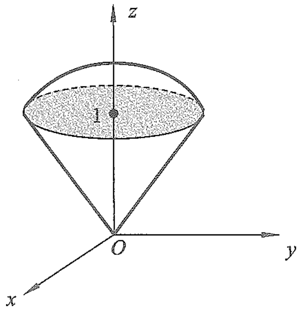
$$S = \iint\limits_{S} \mathrm{d}s = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ (D: x^2 + y^2 \leqslant 2)$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\,r\mathrm{d}r = 2\pi \cdot \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

18. 如图所示. 由 Gauss 公式得



2018-2(期末)-17 图



2018-2(期末)-18 图

$$I=\iiint_{\Omega}2z\mathrm{d}v=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\pi.$$

五、综合题

19. 由 Green 公式，得

$$\oint_L xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1$ 具有轮换性，所以

$$\iint_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而$\oint_L xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$

20. 将函数 $f(x)=\frac{x}{2},-\pi<x<\pi$ 展开为正弦级数. 则

$$a_n=0,n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n},n=1,2,3,\cdots.$$

根据收敛定理有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\frac{x}{2},-\pi<x<\pi.$