2018-2 期末试题

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分）

1. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=x^2$ 的解，则以下函数中也是该微分方程的解的是（　　）.

A. $y_1+y_2+y_3$　　B. $\frac{3}{2}y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3$　　C. y_1-y_2　　D. $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是（　　）.

A. $z=x^2+y^2$　　B. $z=\sqrt{x^2+y^2}$　　C. $z=|x-y|$　　D. $z=\sqrt{|xy|}$

3. 设 $F(x,y)=0$ 是一条平面光滑曲线，则以下说法中正确的是（　　）.

A. $\{F_x,\ F_y\}$ 是该曲线的切矢量　　B. $\{F_y,\ F_x\}$ 是该曲线的法矢量

C. $\{-F_y,\ F_x\}$ 是该曲线的切矢量　　D. $\{-F_x,\ F_y\}$ 是该曲线的法矢量

4. 设平面区域 D 由 $x^2+y^2\le 1$ 表示，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=$（　　）.

A. 0　　B. $4\iint\limits_{D_1} xyd\sigma$　　C. $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$　　D. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成，$I=\iiint\limits_\Omega f(z)dv$，则以下表达式***错误***的是（　　）.

A. $I=\pi\int_0^1 zf(z)dz$　　B. $I=2\pi\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 f(z)dz$

C. $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(z)dz$　　D. $I=2\pi\int_0^1 f(z)dz\int_0^z rdr$

6. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则以下说法中正确的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$ 收敛　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分）

7. 微分方程 $y''+2y'+y=x+2$ 的通解为______________.

8. 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$，其中 f 有连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$_____________.

9. 设 $f(x,y,z)=x+y^3+z^5$，则 div **grad** $f=$ _________ .

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}=$________.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分）

11. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 $L:\frac{x-6}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$ 的距离.

12. 设方程组 $\begin{cases}x^2-2x+y^2+\ln z+z^3=1,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 在包含点 $(0,0,1)$ 的一个邻域上确定隐函数 $y=y(x), z=z(x)$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$.

13. 求函数 $f(x,y)=4x+2xy-x^2-3y^2$ 的极值.

14. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

15. 求曲线积分 $I=\int_L(2xy-y^2\cos x)dx+(x^2-2y\sin x)dy$，其中曲线 L 沿抛物线 $y=\pi x-x^2+1$ 从 $A(0,1)$ 到 $B(\pi,1)$.

16. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 的敛散性，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛，说明你的理由。

四、 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分）

17. 求曲面 $z=x^2+y^2, 0\le z\le 2$ 的面积.

18. 计算曲面积分 $I=\oiint_S 3xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

五、综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分）

19. 设 L 是圆周曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$（取正向），$f(x)$ 为正值连续函数.证明:

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi.$$

20. 证明：当 $-\pi<x<\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$.

2018-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. B **2.** A **3.** C **4.** A **5.** D **6.** B

二、填空题

7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x$. **8.** $2xf_1' + yf_2'$. **9.** $6y + 20z^3$. **10.** $\ln 3$.

三、基本计算题

11. 取直线 L 上的点 $B(6,1,6)$，则 $\overrightarrow{AB} = \{5,-1,3\}$，直线的方向矢为 $\boldsymbol{s} = \{-1,1,-2\}$.

所求距离为 $d = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|} = \dfrac{|\{-1,7,4\}|}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}$.

12. 方程组对 x 求导得到

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2yy' + \dfrac{1}{z}z' + 3z^2 z' = 0, \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases} \text{代入点 } (0,0,1) \text{ 得到} \begin{cases} 4z'(0) = 2, \\ 1 + y'(0) + z'(0) = 0 \end{cases}.$$

解得 $y'(0) = \dfrac{-3}{2}, z'(0) = \dfrac{1}{2}$.

13. 令 $\begin{cases} f_x = 4 + 2y - 2x = 0, \\ f_y = 2x - 6y = 0 \end{cases}$,

解得唯一驻点 $x = 3, y = 1$. （4 分）

继续求二阶导数得到 $f_{xx} = -2, f_{yy} = -6, f_{xy} = 2$，所以 $\Delta = AC - B^2 = 8 > 0$.

函数在 $(3,1)$ 取得极大值 $f(3,1) = 6$.

14. 由轮换性得 $I = 3\iiint\limits_{\Omega} z dv$

$$= 3\int_0^1 z\sigma(z) dz \quad （\sigma(z) \text{ 为 } z = \text{常数截 } \Omega \text{ 所得三角形的面积}）$$

$$= 3\int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{1}{8}.$$

15. 因 $Q_x = P_y = 2x - 2y\cos x$.

所以 $(2xy - y^2\cos x)dx + (x^2 - 2y\sin x)dy$ 是某个二元函数的全微分，直接凑微分的

$$I = [x^2 y - y^2 \sin x]_{(0,1)}^{(\pi,1)} = \pi^2$$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!!}$ 为正项级数，因 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2}=0<1$，

由比值判别法可得， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!!}$ 收敛.

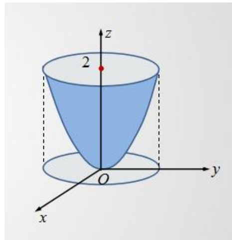
同理 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)!!}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 绝对收敛，所以原级数为绝对收敛.

四、应用题

17. 解 $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$.故

$$S=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy(D:x^2+y^2\le 2)$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\cdot\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13\pi}{3}.$$

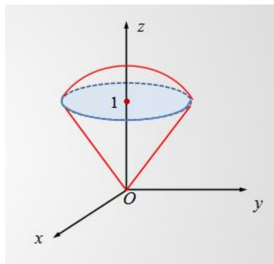


2018-2（期末）-17 图

18. 由 Gauss 公式得

$$I=\iiint_\Omega 2zdv$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3d\rho=\pi.$$



2018-2（期末）-18 图

五、 综合题

19. 由 Green 公式，得

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy,$$

因为 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$ 具有轮换性，所以

$$\iint_D f(y)dxdy=\iint_D f(x)dxdy,$$

从而 $\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\ge\iint_D 2dxdy=2\pi.$

20. 将函数 $f(x)=\frac{x}{2},-\pi<x<\pi$ 展开为正弦级数. 则

$a_n=0,n=0,1,2,\cdots.$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n = 1,2,3,\cdots.$$

根据收敛定理$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi.$