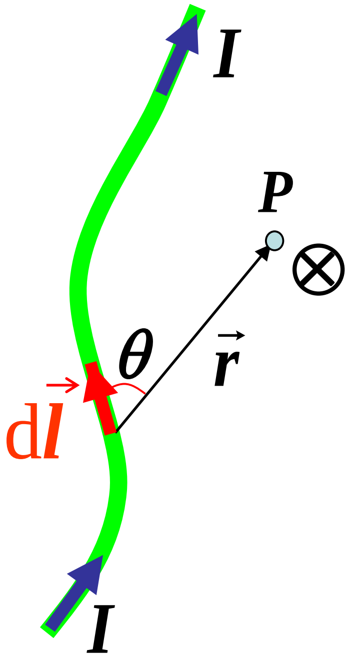
●毕奥—萨伐尔定律 ——电流激发磁场的规律

实验表明：

任一电流激发的磁场 = 各小段电流产生的磁场的叠加



毕奥—萨伐尔定律：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

真空的磁导率 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{Tm/A}$

P点总的磁感应强度为：

$$\vec{B}=\int\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

●无限长载流直导线：

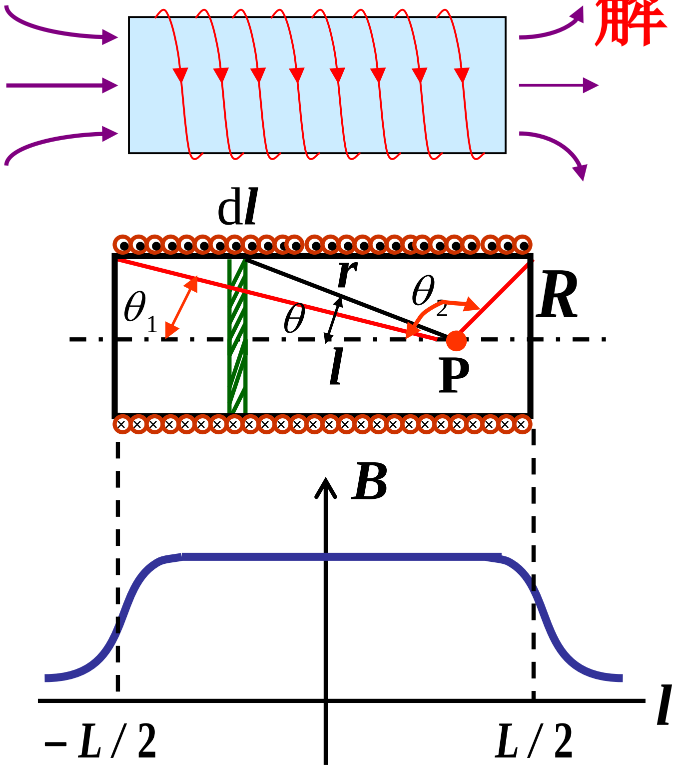
$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

磁力线是沿着垂直导线平面内的同心圆，
其方向与电流方向成右手螺旋关系。

例: 长直螺线管轴线上的磁场 $\vec{B}=?$

导线通有电流I，单位长度上匝数为n。

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



解: 在管上取一小段dl，电流为d$I=nI$dl，该电流在P点的磁场为:

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 R^2 nI\mathrm{d}l}{2\left(l^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$l=R\,ctg\,\theta \rightarrow \mathrm{d}l=\frac{-R\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

$$l^2=R^2 ctg^2\theta$$

则: $$\mathrm{d}B=\frac{-\mu_0 nI}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{-\mu_0 nI}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

管外空间$\vec{B}\approx 0$

讨论: P点不同，B不同。

(1) 若$L>>R$，则管内有很大一部分场是均匀的。

管内为均匀场

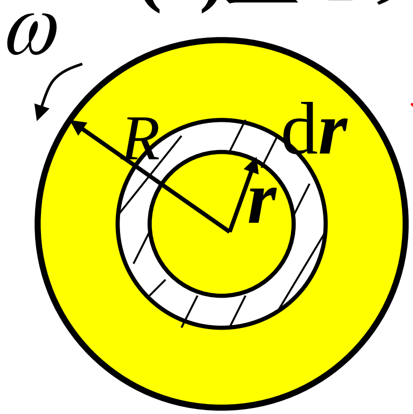
(2) $L\rightarrow\infty,\theta_1=0,\theta_2=\pi,B=\mu_0 nI$

(3)半无限长螺线管端头 $B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$

在整个管内空间成立

例： 一个塑性圆盘，半径为R，圆盘表面均匀分布电荷q，如果使该盘以角速度ω绕其轴旋转，试证：

(1)盘心处 $B=\dfrac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$ (2)圆盘的磁偶极矩 $P_m=\dfrac{\omega qR^2}{4}$



证： (1)将盘看成一系列的宽为dr的圆环构成

每一环在中心产生的磁场：$\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}$

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}q\,\frac{\omega}{2\pi}=\sigma\mathrm{d}s\,\frac{\omega}{2\pi}=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega r\mathrm{d}r}{2r}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0 q}{2\pi R}\vec{\omega}$$

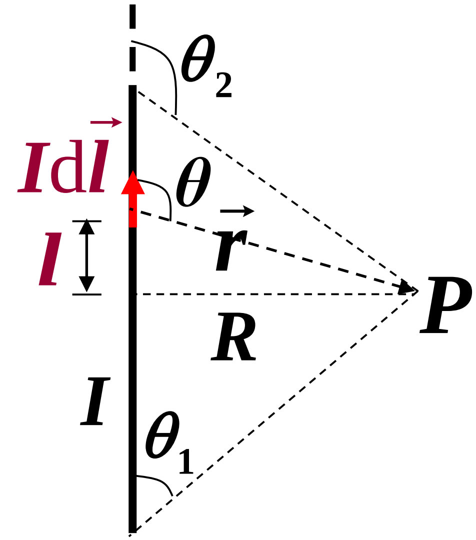
$$\sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

$$(2)\quad P_m=\int\mathrm{d}P_m=\int S\mathrm{d}I=\int_0^R\pi r^2\sigma\omega r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$$

$$\therefore\vec{P}_m=\frac{qR^2}{4}\vec{\omega}$$

旋转的均匀带电球体的磁偶极矩？

例: 求一段载流直导线的磁场。



解: 任意一个电流元在P点产生的磁感应强度的方向均垂直向里，故

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

$$B_P=\int \mathrm{d}B$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

而 $l=r\cos(\pi-\theta)=-r\cos\theta$

$$R=r\sin(\pi-\theta)=r\sin\theta$$

由此两式得

$$l=-R\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$\mathrm{d}l=\frac{R\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta},\quad r=\frac{R}{\sin\theta}$$

代入积分式可得:

$$B_P=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{R}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

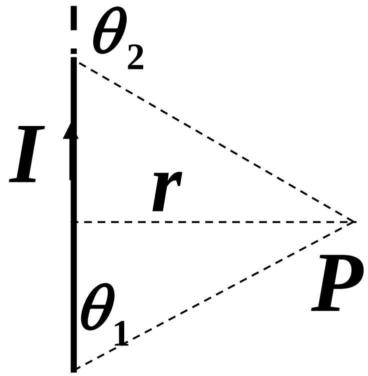
导线无限长，$\theta_1\to0$, $\theta_2\to\pi$

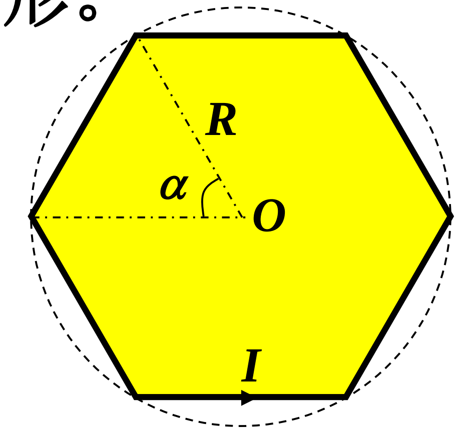
$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

(P点距导线足够近时亦然)

例: 有一正n边形线圈，外接圆半径为R，通有电流I，求其中心O点的磁感应强度，并讨论$n\to\infty$的情形。

解:





$$\alpha=\frac{2\pi}{n}$$

$$B_P=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

这里，对任意一条边，

$$\theta_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

$$\theta_2=\pi-\theta_1$$

$$B'=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1+\cos\theta_1)$$

$$\therefore\ B'=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta_1$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\frac{\alpha}{2}$$

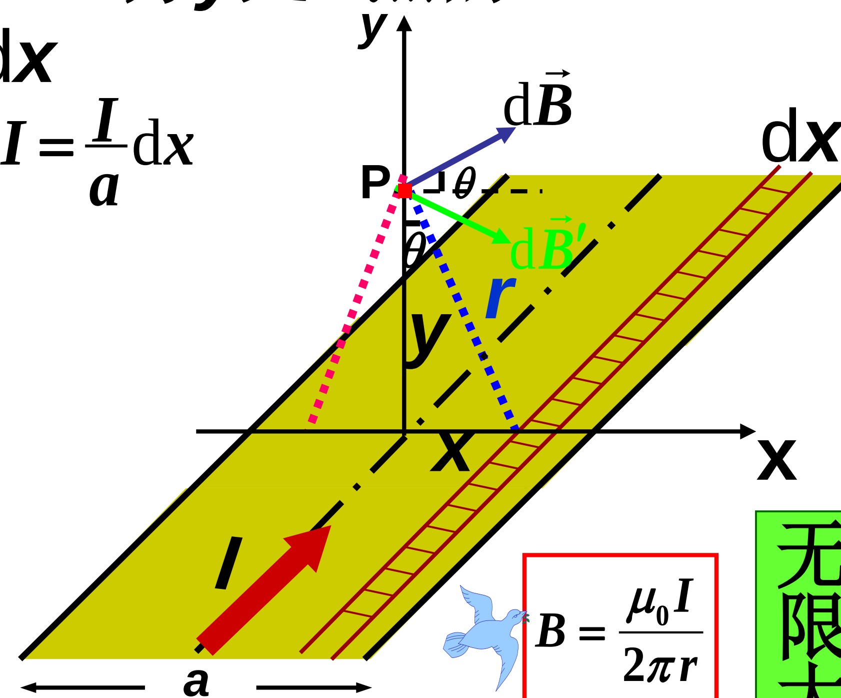
$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore B_o=n\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\mu_0 I}{2R\cos\frac{\pi}{n}}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}B_o=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_0 I}{2R\cos\frac{\pi}{n}}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

例： 一条无限长传送电流的扁平铜片，宽为*a*，厚度忽略，电流为*I*，求离铜片中心线正上方*y*处P点的 $\vec{B}=?$

解： 把铜片划分成无限个宽为d*x*的细长条，每条有电流：$\mathrm{d}I=\dfrac{I}{a}\mathrm{d}x$



该电流在P点产生的磁场为：

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2\pi r}\mathrm{d}I=\frac{\mu_0 I}{2\pi ay/\cos\theta}\mathrm{d}x$$

由对称性知：$\Sigma \mathrm{d}B_y=0$

$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\cos\theta=\frac{\mu_0 I\cos^2\theta}{2\pi ay}\mathrm{d}x$$

其中：$x=y\tan\theta \quad \therefore \mathrm{d}x=y\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$B=\int \mathrm{d}B_x=\int\frac{\mu_0 I\cos^2\theta}{2\pi ay}y\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\theta_m=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\arctan\frac{a}{2y}$$

平行于X轴

当*y* >>*a* 时

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\quad(\theta_m\to$$

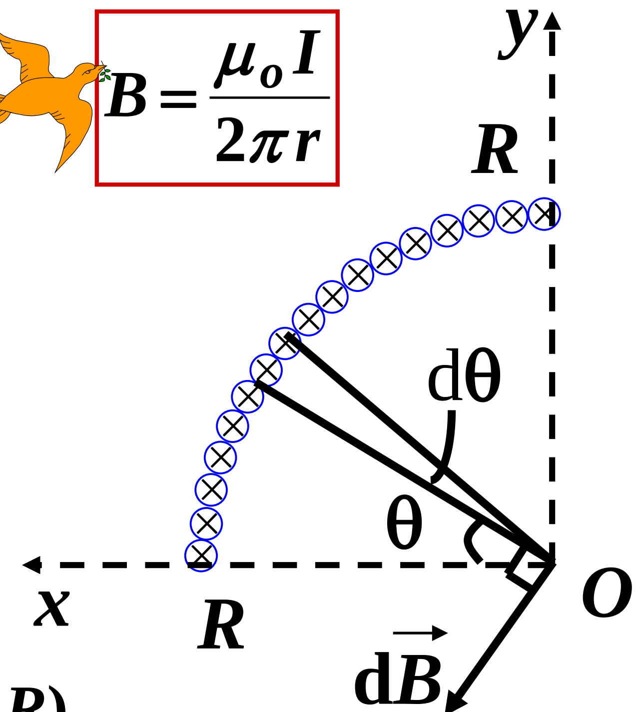
当*y* <<*a* 时

$$B=\frac{\mu_0 I}{2a}=\frac{\mu_0 i}{2}$$

无限大载流平面

例: 一半径为R的无限长1/4圆柱形金属片，沿轴向通有电流I. 设电流在金属片上均匀分布。试求圆柱轴线上任一点O的磁感应强度。

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



解: 以O为原点建立坐标系如图。z 轴沿电流方向，并与圆柱轴线重合。

单位弧长上的电流密度$\lambda = I/(2\pi R/4) = 2I/(\pi R)$.

在θ处取一窄条，宽为$R\,\mathrm{d}\theta$，可视为无限长载流直导线，其上电流$i=\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta$. 金属片看作由无数个窄条拼接而成。

此窄条(无限长载流直导线) 在O点产生的磁感应强度的大小为$\mathrm{d}B = \mu_0 i/(2\pi R) = \mu_0/(2\pi R)\cdot\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta = \mu_0 I\,\mathrm{d}\theta/(\pi^2 R)$，方向如图。

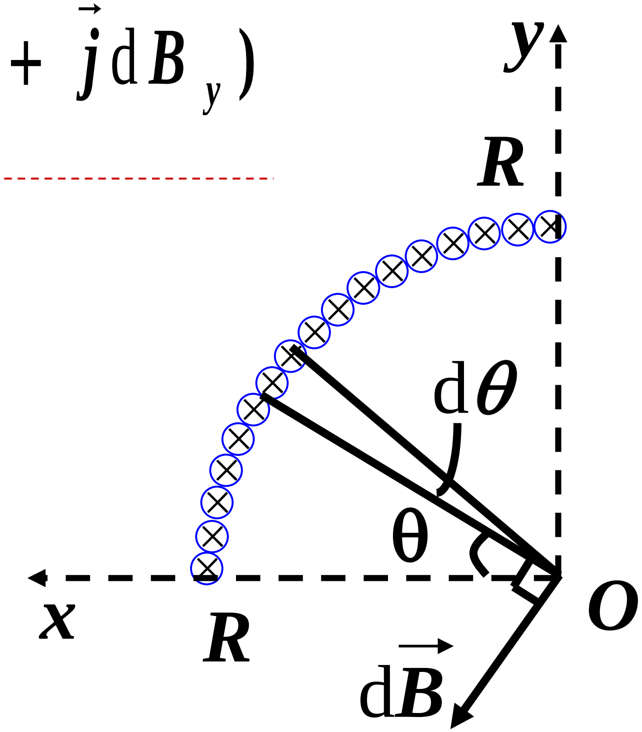
O点总的磁感应强度为

$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\int(\mathrm{d}\vec{B}_x+\mathrm{d}\vec{B}_y)=\int(\vec{i}\,\mathrm{d}B_x+\vec{j}\,\mathrm{d}B_y)$$

此窄条(无限长载流直导线) 在O点产生的磁感应强度的大小为dB＝$\mu_0 i/(2\pi R) = \mu_0/(2\pi R)\cdot\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta = \mu_0 I\,\mathrm{d}\theta/(\pi^2 R)$，方向如图。

O点总的磁感应强度为

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int (\mathrm{d}\vec{B}_x + \mathrm{d}\vec{B}_y) = \int (\vec{i}\,\mathrm{d}B_x + \vec{j}\,\mathrm{d}B_y)$$



$$= \int (\vec{i}\,\mathrm{d}B\sin\theta - \vec{j}\,\mathrm{d}B\cos\theta)$$

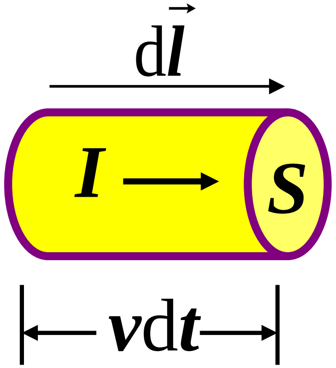
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{i}\,\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{j}\,\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\left(\vec{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \vec{j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}(\vec{i} - \vec{j})$$

三、运动电荷的磁场

设电流中载流子带电为$q(>0)$,以速度v沿电流I方向运动,并且载流子密度为n,导体截面积为S.



$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$

如图取一段长为$v\mathrm{d}t$ 的导体, 则有: $I=nqv\mathrm{d}t\,S/\mathrm{d}t$

$$\therefore I = nqvS$$

根据毕奥—萨伐尔定律:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nqS\,\mathrm{d}l\,\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

其中: $nS\mathrm{d}l=\mathrm{d}N$

$$\therefore \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\mathrm{d}N\,\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

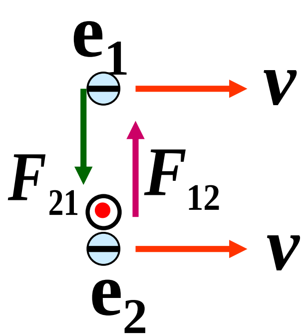
故,单个运动电荷所激发的磁场为:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$

(对低速运动的带电粒子成立)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$

例: 求两个以相同速度*v*，并排运动电子之间的相互作用力。



解：设两电子相距*r*,

e_2处的磁场: $B = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{e_1|\vec{v}\times\vec{r}|}{r^3}$

e_2受力: $F_{12} = -e|\vec{v}\times\vec{B}| = \dfrac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi r^2}$

同理可得:

$$F_{21} = -F_{12}$$

四、高斯定理

1.磁通量Φ_B：磁场中任一给定面上的磁通量等于通过该面的磁感应线的总根数。

规定： $B=\dfrac{\Delta N}{S}$ （磁通密度）

1）$\vec{B}$为均匀场　　S面的磁通量：$\Phi_B=\vec{B}\cdot\vec{S}$

2) $\vec{B}$为非均匀场　　$\mathrm{d}\Phi_B=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

S面上的总通量：$\Phi_B=\int\mathrm{d}\Phi_B=\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

当S为闭合曲面时：$\Phi_B=\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

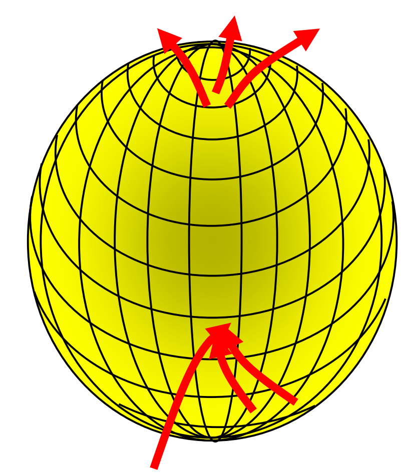
对闭合面的法线方向规定：

自内向外为法线的正方向。

磁感应线从曲面内向外穿出：$\Phi_B>0$

而从曲面外向内穿进：$\Phi_B<0$

Φ_B的单位：韦伯　Wb=Tm²　　1T=1Wb/m²



2.真空中稳恒磁场的高斯定理

1）高斯定理:通过任意闭合曲面S的磁通量恒等于零。

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$ （毕奥 — 萨伐尔定律的直接推论）

高斯定理表明:稳恒磁场是无源场（对变化的磁场亦成立）

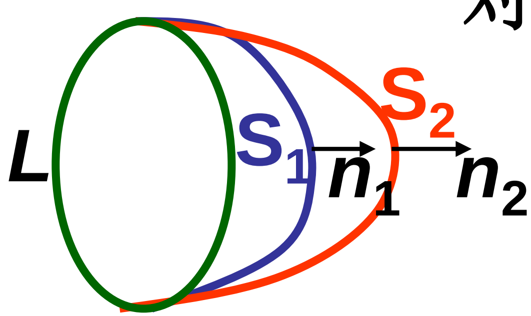
2）推论:

（1）稳恒磁场的磁力线是连续的闭合曲线。

即：在磁场的任何一点上磁力线既不是起点也不是终点。

（2）磁场中以任一闭合曲线L为边界的所有曲面的磁通量相等。曲面S_1、S_2均以L为边界,

对S_1、S_2构成的闭合曲面有:



$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{S_1}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}-\int_{S_2}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\int_{S_1}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{S_2}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

五、安培环路定理

1.安培环路定理 $\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$ （毕奥－萨伐尔定律的推论）

（对稳恒电流成立）

即：磁感应强度沿任意闭合曲线***L***的线积分=

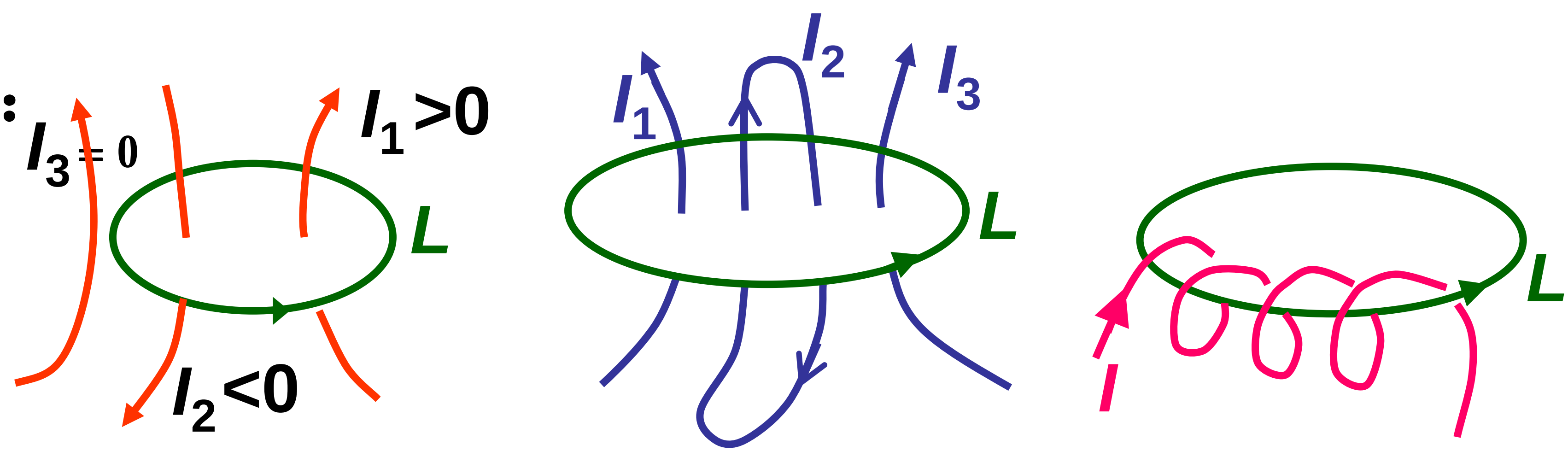
穿过这闭合曲线的所有传导电流强度的代数和

I的正负规定：

1）当***I***与***L***的绕行方向成右手关系时，***I*>0**，反之，***I*<0**。

2）若***I***不穿过***L***，则***I*=0**

例：



$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$

$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_3)$

$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -4\mu_0 I$

2.稳恒磁场的性质

高斯定理：$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$ → 无源场

安培环路定理：$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum I_i$ → 有旋场

与静电场比较：

静电场高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$ → 有源场

静电场环路定理：$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ → 无旋场

3.安培环路定理的应用

毕奥—萨伐尔定律可以计算任意电流的磁场$\vec{B}$

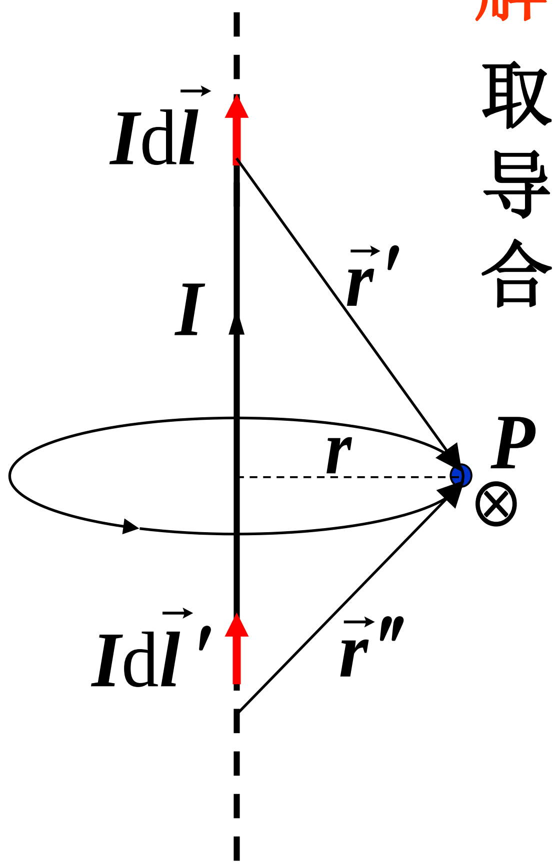
安培环路定理可以计算对称性磁场的$\vec{B}$

例: 求无限长载流直导线的磁场分布。

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum I_i}$$

解:



取包含P点在内的、以导线为对称轴的圆形闭合回路。

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum I=\mu_0 I$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cdot\mathrm{d}l$$

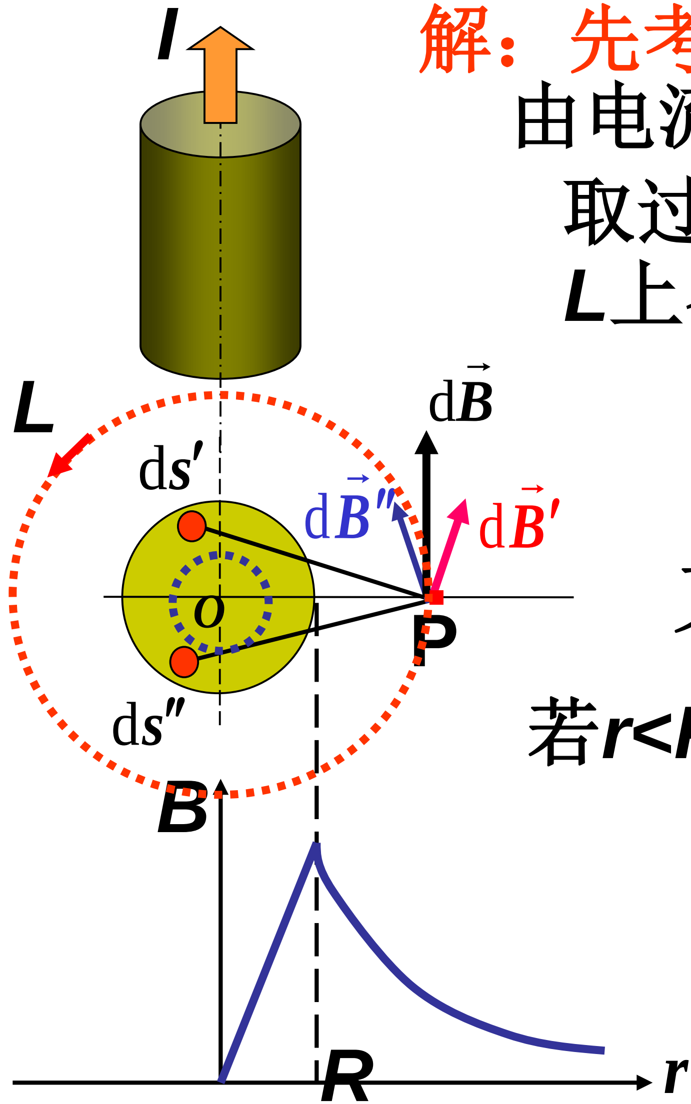
$$=B\oint_L \mathrm{d}l=B\cdot 2\pi r=\mu_0 I$$

$$\therefore B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

例：半径为R的无限长圆柱载流直导线，电流I沿轴线方向流动，并且载面上电流是均匀分布。计算任意点P的$\vec{B}$=？

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i$$

解：先考虑磁感应强度的方向。



由电流对称分布可知：$\vec{B}\perp oP$

取过P点半径为 r =op 的圆周L，

L上各点B大小相等，方向沿切线

$r>R$时 由安培环路定理得：

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint B\,dl\cos 0=B\cdot 2\pi r$$

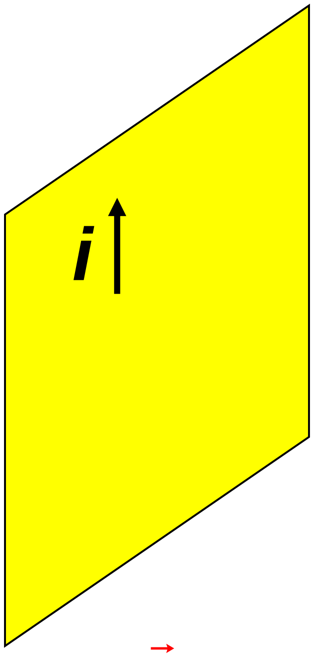
又 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$ $\quad\therefore B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

若$r<R$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint B\,dl\cos 0=B\cdot 2\pi r$

而 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\dfrac{I}{\pi R^2}\pi r^2$

$$\therefore B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r$$

例： 一无限大平面，有均匀分布的面电流，其横截线的电流线密度为 i，求平面外一点 $\vec{B}=?$



解： 由对称可知 $\vec{B}\perp\vec{i}$

并且离板等距离处$\vec{B}$的大小相等

过P点取矩形回路$abcd\rightarrow L$

其中ab、cd与板面等距离

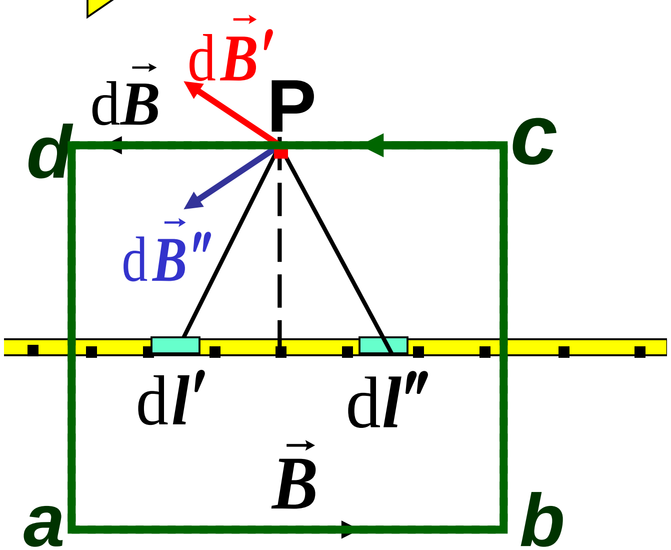
$$\oint\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{ab}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\underbrace{\int_{bc}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{0}+\int_{cd}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\underbrace{\int_{da}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{0}$$

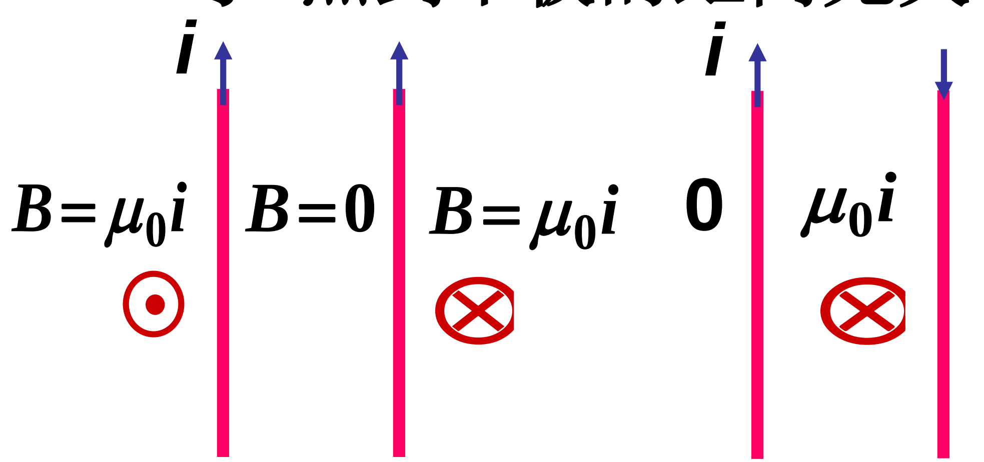
$$=B\cdot ab+B\cdot cd\quad =2B\cdot ab$$

而 $\mu_0\sum I_i=\ \mu_0 i\cdot ab$

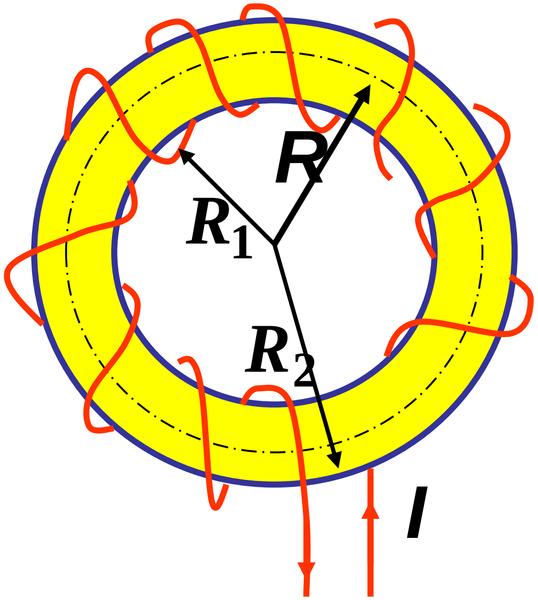
$$\left.\begin{array}{l}\oint\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=2B\cdot ab\\ \mu_0\sum I_i=\mu_0 i\cdot ab\end{array}\right\}\ B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

与P点到平板的距离无关





例： 求通电螺绕环的磁场分布。已知环管轴线的半径为R，环上均匀密绕N匝线圈，设通有电流I。

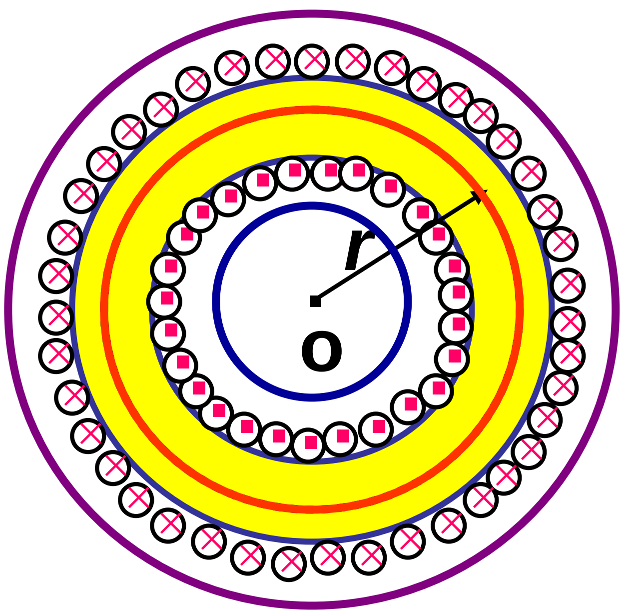


解：

取以o为中心，半径为r的圆周为L

当$R_1 < r < R_2$

$$\left.\begin{aligned}&\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B\,dl\cos 0 = B\cdot 2\pi r\\ &\text{而}\ \mu_0\sum I_i = \mu_0 NI\end{aligned}\right\} \quad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



若 $r < R_1$ $\quad \because \mu_0\sum I_i = 0 \quad \therefore B = 0$

若 $r > R_2$ $\quad \because \mu_0\sum I_i = \mu_0(NI - NI) = 0$

$\therefore B = 0$

当 $R_{管截面} << R$ 即 $r \approx R$

$B = \mu_0 nI \qquad n = \dfrac{N}{2\pi R}$

作业： 7 —T5-T10

本次课重点：
1.稳恒磁场的高斯定理
2.稳恒磁场的安培环路定理与应用