2013-2 期中试卷解答

1. 由平行关系可以设所求平面方程为$2x+3y+6z=D$，其中$D\neq 0$。化为截距式方程

$\frac{x}{D/2}+\frac{y}{D/3}+\frac{z}{D/6}=1$。四面体的体积 $V=\frac{1}{6}\left|\frac{D}{2}\right|\left|\frac{D}{3}\right|\left|\frac{D}{6}\right|=\frac{|D|}{216}=1$，解出$D=\pm 6$。

于是，所求的平面方程为$2x+3y+6z=\pm 6$。

2. 解法 1　所求矢量为（$\overrightarrow{AB}^0+\overrightarrow{AC}^0)^0=\{-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\}$。

解法 2　设所求矢量为$\overrightarrow{AD}=\{x,y,z\}$,则可以依据夹角相等，$\Rightarrow 7x-3y-13z=0$

三矢量共面，$\Rightarrow 4x-11y+3z=0$，以及单位长关系来求结果。

3. $|P_0P|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$，$P$与平面$x=3$的距离为$|x-3|$，由题意得

$\frac{1}{\sqrt{3}}|x-3|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$，所求即椭球面

$\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(z-2)^2}{2}=1$。

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+yf_2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}+xf_{12}+f_2+yf_{21}+xyf_{22}$

5. 解 1：两边微分$dz+dx+dy-e^{z+x+y}(dz+dx+dy)=0$，所以$dz=-dx-dy$。

解 2：令$F=z+x+y-e^{z+x+y}$，则$F_x=1-e^{z+x+y}$，$F_y=1-e^{z+x+y}$，$F_z=1-e^{z+x+y}$，

于是$z_x=-1,\quad z_y=-1$，所以$dz=-dx-dy$。

解 3：两边同时对x求导$z_x+1-e^{z+x+y}(z_x+1)=0$，于是$z_x=-1$。同理$z_y=-1$，所以

$dz=-dx-dy$。

6. 方程对x求导，得 $\begin{cases}az'+f_1(y'-1)+f_2(z'+y')=0\\ by'+g_1(y'+z')+g_2(z'-1)=0\end{cases}$ 解得

$$z'=\frac{g_2(f_1+f_2)-f_1(b+g_1)}{(g_1+g_2)(f_1+f_2)-(b+g_1)(a+f_2)}$$

7. 原式$=\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}dxdy \quad =\dfrac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy+0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^3dr=\dfrac{15}{4}\pi$。

8. $I=\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^4-y^2}dx=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^4-y^2}dy=\int_0^1\dfrac{1}{4}\pi x^4dx=\dfrac{\pi}{20}$

9.用直线$x+y=1$将区域D分成上下两部分 A 与 B，（依据质心坐标法和几何意义）

$$I=\iint\limits_A(x+y-1)dxdy-\iint\limits_B(x+y-1)dxdy \quad =\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-(\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$$

或者$=\int_0^1dx\int_{1-x}^1(x+y-1)dy-\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x+y-1)dy=\dfrac{1}{3}$

10.解 1：视作$z-$型区域定限。截面区域$D_z:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}$，其面积为$\pi ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$，

因此，$I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_{-c}^c z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_{-c}^c z^2\pi ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)dz=\dfrac{4}{15}\pi abc^3$

解 2：换元法，取$au=x,bv=y,cw=z$，则区域化作球体。于是用球坐标计算。

$$I=abc^3\iiint\limits_V w^2dudvdw=abc^3\int_0^{2\pi c}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1\rho^4\sin\varphi\cos^2\varphi d\rho$$

11.解： 旋转曲面方程为$x^2+y^2=2z$， 选用柱面坐标系。投影区域$D:x^2+y^2\le 2\sqrt{2}$，

解 1：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}rdr\int_{r^2/2}^4(r^2+z)dz=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(8r+4r^3-\dfrac{5}{8}r^5\right)dr=\dfrac{256}{3}\pi$。

解 2：原式$=\int_0^4dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)rdr=4\pi\int_0^4 z^2dz=\dfrac{256}{3}\pi$。

12.设$P(x_0,y_0,z_0)$是抛物面上任意一点，过点P的切平面方程是

$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=z-z_0$或者 $z=2x_0x+2y_0y-z_0+2$

题中立体在xOy坐标面上的投影区域为$D:(x-1)^2+y^2\le 1$，在极坐标系下为

$D:-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le r\le 2\cos\theta$。因此立体的体积是

$$V=\iint\limits_D[x^2+y^2+1-2x_0x-2y_0y-z_0+2]dxdy$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy-2x_0\iint\limits_D xdxdy+(2-z_0)\iint\limits_D dxdy=\frac{3}{2}\pi-2x_0\pi+(2-z_0)\pi$$

问题归结为目标函数$V=\frac{3}{2}\pi-2x_0\pi+(2-z_0)\pi$ 在条件$z_0={x_0}^2+{y_0}^2+1$下的极值。根据拉格朗日乘数法（或者代入消元法，配方法均可以）求得唯一的切点$P(1,0,2)$，所求最小体积为$\frac{\pi}{2}$，所求切平面方程为$z=2x$。

13.（1）由于f是初等函数，在原点有定义，因此f在原点连续。

（2）因为$f(x,0)=|x|$，作为一元函数，它在$x=0$处不可导，所以$f_x(0,0)$不存在，类似，$f_y(0,0)$也不存在；

（3）由于偏导不存在，所以不可微；

（4）由于点(x,y)沿着$\mathbf{n}=\{1,1\}$变化时，$y=x$。于是$\frac{\partial f}{\partial n}=\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ y=x}}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ y=x}}\frac{|y-x|}{\rho}=0$，所求方向导数存在，等于 0；