# 2014-2 期中试卷解答

1. $\overrightarrow{AB}=\{0,1,1\},\overrightarrow{AC}=\{-1,2,3\}$， $a=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

2．旋转面 $z=1-x^2-y^2$，由 $\{1,1,1\}//\{2x,2y,1\}$ 得到切点 $P(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$， 所求方程为：

$x+y+z-\frac{3}{2}=0$。

3. $du=y^2z^3dx+2xyz^3dy+3xy^2z^2dz$，$du(P)=dx+2dy+3dz$

4. $\nabla u=\{y^2,2xy\}_P=\{1,2\}$，于是所求矢量为：$\mathbf{n}=\{1,2\}/\sqrt{5}$，最大方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}=\sqrt{5}$。

5. $\frac{dz}{dt}=2t\cdot f_1+\cos t\cdot f_2$

6. $z_x=f_1+2xyf_2$，$z_{xx}=f_{11}+4xyf_{12}+2yf_2+4x^2y^2f_{22}$。

7. $z_x=2xyf'$，$z_{xy}=2xf'+2x^3yf''$。

8. 所给方程对 $x$ 求偏导，得

$w_x=2x+2zz_x,3z^2z_x-(1+y)(z+xz_x)+3x^2=0$ ，代入点 $P$ 坐标，解出 $\frac{\partial w}{\partial x}=0$

9. 两边微分得：$F_1\cdot(dx+\frac{ydz-zdy}{y^2})+F_2\cdot(dx+\frac{xdz-zdx}{x^2})=0$

代入点 $P$ 坐标，得 $a(dx+dz-dy)+b(dy+dz-dx)=0$

解出 $dz=\frac{(b-a)dx+(a-b)dy}{a+b}$，$z_x=\frac{b-a}{a+b},z_x=\frac{a-b}{a+b}$

10. 切矢量 $s=\{x,y,z\}_P\times\{x-1,y,0\}_P=\{-\sqrt{2},0,1\}$，所求切线为

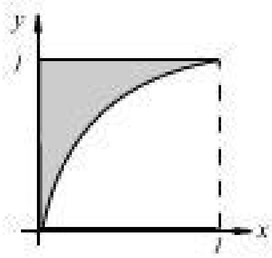
$$\frac{x-1}{-\sqrt{2}}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\sqrt{2}}{1}，或\begin{cases}x+\sqrt{2}z=3\\ y=1\end{cases}$$

11. 交换积分次序，$I=\int_0^1dy\int_0^{y^2}e^{y^3}dx=\int_0^1e^{y^3}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^1e^{y^3}dy^3=\frac{e-1}{3}$

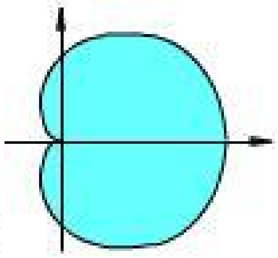
12. 由于区域上下对称，函数 $e^xy$ 是关于 $y$ 的奇函数，于是

$$I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3d\theta$$

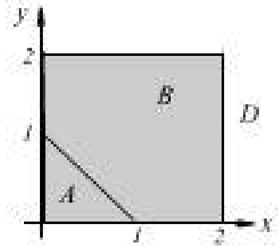
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta)d\theta=\frac{5}{3}\pi a^3$$




11 题图



12 题图




13 题图

**13.** 用直线 $x+y=1$ 将区域 $D$ 分成左下部分 A 与右上部分 B。B 上的积分不易定限，可以用增减区域法归到 A 和 $D$：（依据质心坐标法和几何意义）

$$I=\iint_A(1-x-y)dxdy+\iint_B(x+y-1)dxdy$$

$$=2\iint_A(1-x-y)dxdy+\iint_D(x+y-1)dxdy=\frac{13}{3}$$

**14.**（1）函数在原点连续。因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\sqrt{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^4)}=0=f(0,0)$。

（2）因为 $f(0,y)=y^2$ 在 $y=0$ 处可导，$f_y(0,0)=0$ 存在；因为 $f(x,0)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，$f_x(0,0)$ 不存在；

（3）由于一个偏导数不存在，所以不可微。（4）依据定义考虑，沿任何方向 $\mathbf{n}=\{a,b\}$，

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\lim_{s\to0^+}\frac{\sqrt{a^2s^2+b^4s^4}}{s\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$，所以方向导数存在。

**15.** 由 $\nabla u=\{z,z,x+y\}=\vec{0}$，得驻点集合的特征为 $\begin{cases}x+y=0\\ z=0\end{cases}$。取 $L=(x+y)z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，则约束条件下的驻点满足方程

$\begin{cases}z+2\lambda x=0\\ z+2\lambda y=0\\ x+y+2\lambda z=0\end{cases}$，于是 $\begin{cases}x=y\\ z^2=x^2+xy\end{cases}$，结合球面方程（注意消 $\lambda$），得四个条件驻点：

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$，比较所有驻点的函数值得知：

$\max u=\frac{\sqrt{2}}{2},\min u=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。