華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

算法设计与分析

刘渝
Liu_yu@hust.edu.cn

2022秋季-华科-计算机
21级大数据

算法分析与设计
第一十六章
贪婪算法

贪心算法

贪心算法是这样一种方法：分步骤实施，它在每一步仅作出当时看起来最佳的选择，即局部最优的选择，并寄希望这样的选择最终能导致全局最优解

- 经典问题：最小生成树问题的Prim算法、Kruskal算法，单源最短路径Dijkstra算法等，以及一些近似算法。
- 贪心方法可以很好地解决很多问题。但贪心算法不总能对所有问题能求解，只是对一些问题确实有效，可以求出最优解或近似最优解。

目　录

活动选择问题

假定有一个活动的集合S含有n个活动$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，每个活动a_i都有一个开始时间s_i和结束时间f_i，$0\le s_i<f_i<\infty$。同时，这些活动都要使用同一资源(如演讲会场)，而这个资源在任何时刻只能供一个活动使用。

分析

活动的兼容性：如果选择了活动a_i，则它在半开时间区间$[s_i, f_i)$内占用资源。若两个活动a_i和a_j满足$[s_i, f_i)$与区间$[s_j, f_j)$不重叠，则称它们是兼容的。

- 也就是说，当$s_i \geq f_j$或$s_j \geq f_i$时，活动a_i与活动a_j兼容。

分析

对给定的包含n个活动的集合S，在已知每个活动开始时间和结束时间的条件下，从中选出最多可兼容活动的子集合，称为最大兼容活动集合

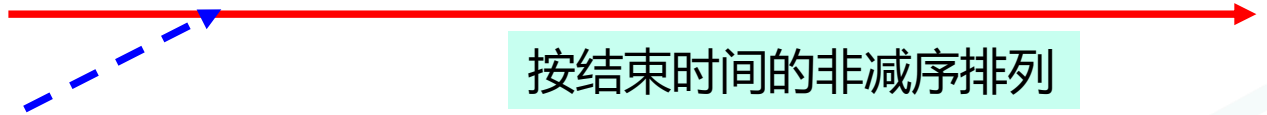
不失一般性，设活动已经按照结束时间单调递增排序：

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq f_{n-1} \leq f_n .$$

Example

设有11个待安排的活动,它们的开始时间和结束时间如下，并设活动按结束时间的非减次序排列：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16



按结束时间的非减序排列

则 $\{a_3, a_9, a_{11}\}$ 、$\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$、 $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$都是兼容活动集合。

其中 $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$ 、$\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$ 是最大兼容活动集合。显然最大兼容活动集合不一定是唯一的。

分析

- 可以用动态规划方法求解。
- 贪心算法更简单一些。贪心算法将解决活动选择问题转化成一个迭代算法，可以更快地求解

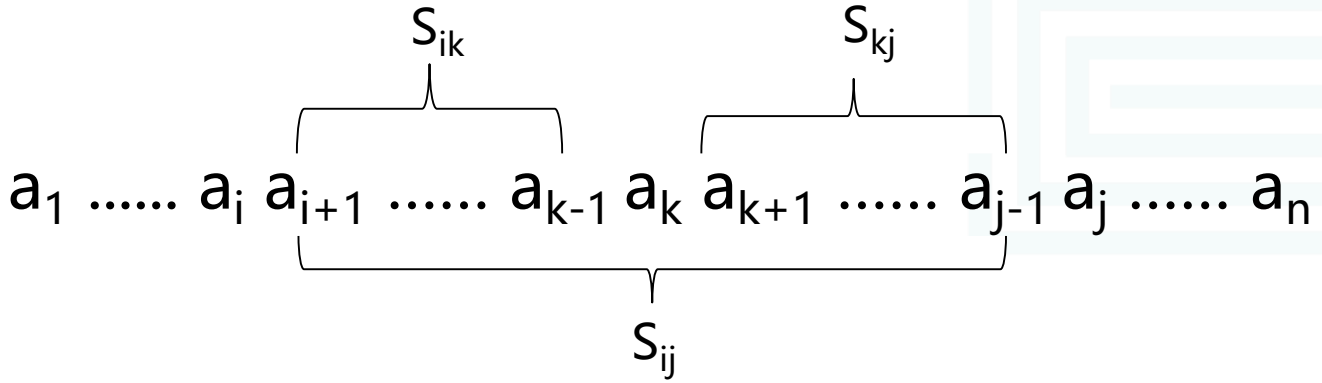
最优子结构

令S_{ij}表示在a_i结束之后开始且在a_j开始之前结束的那些活动的集合。问题和子问题的形式定义如下：

设A_{ij}是S_{ij}的一个最大兼容活动集，并设A_{ij}包含活动a_k，则有：A_{ik}表示A_{ij}中a_k开始之前的活动子集，A_{kj}表示A_{ij}中a_k结束之后的活动子集

并得到两个子问题：**寻找S_{ik}的最大兼容活动集合**和**寻找S_{kj}的最大兼容活动集合。**

最优子结构



寻找S_{ik}的最大兼容活动集合和
寻找S_{kj}的最大兼容活动集合

活动选择问题具有最优子结构性，即：

必有：A_{ik}是S_{ik}一个最大兼容活动子集，A_{kj}是S_{kj}一个最大兼容活动子集。而$A_{ij} = A_{ik} \cup \{a_k\} \cup A_{kj}$。—— 最优子结构性成立

证明

- 用剪切-粘贴法证明最优解A_{ij}必然包含两个子问题S_{ik}和S_{kj}的最优解

设S_{kj}存在一个最大兼容活动集A_{kj}'，满足$|A_{kj}'|>|A_{kj}|$，则可以将A_{kj}'作为S_{ij}最优解的一部分。

这样就构造出一个兼容活动集合，其大小

$$|A_{ik}|+|A_{kj}'|+1>|A_{ik}|+|A_{kj}|+1=A_{ij}$$

与A_{ij}是最优解相矛盾。 得证。

动态规划求解

活动选择问题具有最优子结构性，所以可以用动态规划方法求解：

令c[i,j]表示集合S_{ij}的最优解大小，可得递归式如下：

$$c[i,j] = c[i,k] + c[k,j] + 1 .$$

为了选择k，有：

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{if } S_{ij} = \emptyset , \\ \max\limits_{a_k \in S_{ij}} \{c[i,k] + c[k,j] + 1\} & \text{if } S_{ij} \neq \emptyset . \end{cases}$$

可以设计带备忘机制的递归算法或自底向上的填表算法求解

贪心算法求解

每次总选择具有最早结束时间的兼容活动加入到集合A中。

直观上，按这种方法选择兼容活动可以为未安排的活动留下尽可能多的时间。也就是说，该算法的贪心选择的意义是使剩余的可安排时间段最大化，以便安排尽可能多的兼容活动

贪心选择：在贪心算法的每一步所做的当前最优选择（局部最优选择）就叫做贪心选择

活动选择问题

Example

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

结束时间递增

由于输入的活动已经按照结束时间的递增顺序排列好了，所以，首次选择的活动是a_1，其后选择的是结束时间最早且开始时间不早于前面已选择的最后一个活动的结束时间的活动 （活动要兼容）。

- 当输入的活动已按结束时间的递增顺序排列，贪心算法只需O(n)的时间即可选择出来n个活动的最大兼容活动集合。
- 如果所给出的活动未按非减序排列，可以用O(nlogn)的时间重排。

思考：

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

按照上述的贪心选择方法选择的活动集是问题的最优解吗?

证明

定理16.1 考虑任意非空子问题S_k，令a_m是S_k中结束时间最早的活动，则a_m必在S_k的某个最大兼容活动子集中

证明：

令A_k是S_k的一个最大兼容活动子集，且a_j是A_k中结束最早的活动。若$a_j=a_m$，则得证。否则，令 $A_k' = A_k-\{a_j\}\cup\{a_m\}$。

因为A_k中的活动都是不相交的，a_j是A_k中结束时间最早的活动，而a_m是S_k中结束时间最早的活动，所以$f_m \le f_j$。即A_k'中的活动也是不相交的。

由于$|A_k'|=|A_k|$，所以A_k'也就是S_k的一个最大兼容活动子集，且包含a_m。

得证

递归贪心伪代码

采用**自顶向下**的设计：**首先做出一个选择，然后求解剩下的子问题。**每次选择将问题转化成一个规模更小的问题

```
RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, k, n)
1  m = k + 1
2  while m ≤ n and s[m] < f[k]        // find the first activity in S_k to finish
3      m = m + 1
4  if m ≤ n
5      return {a_m} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, m, n)
6  else return ∅
```

初次调用：RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,0,n)

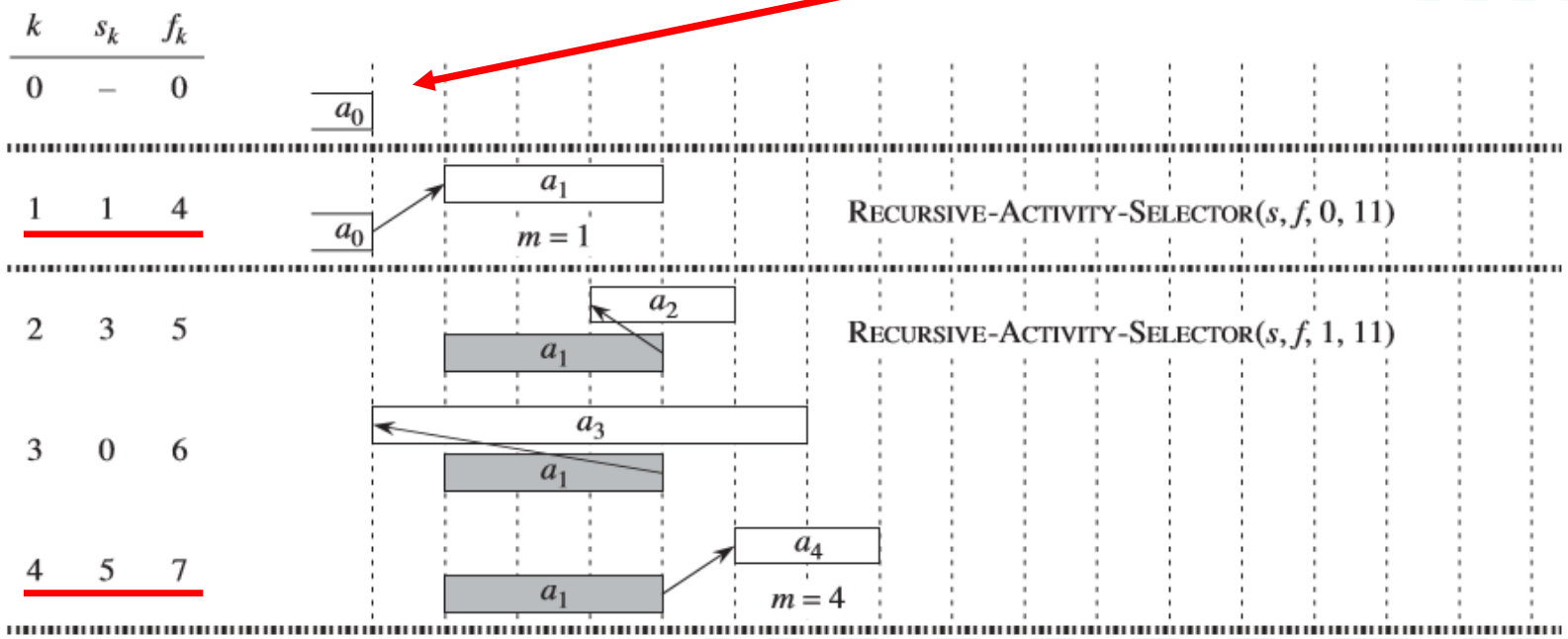
这里，数组s、f分别表示n个活动的开始时间和结束时间。并假定n个活动已经按照结束时间单调递增排列好。对当前的k，算法返回S_k的一个最大兼容活动集

活动选择问题

Example

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

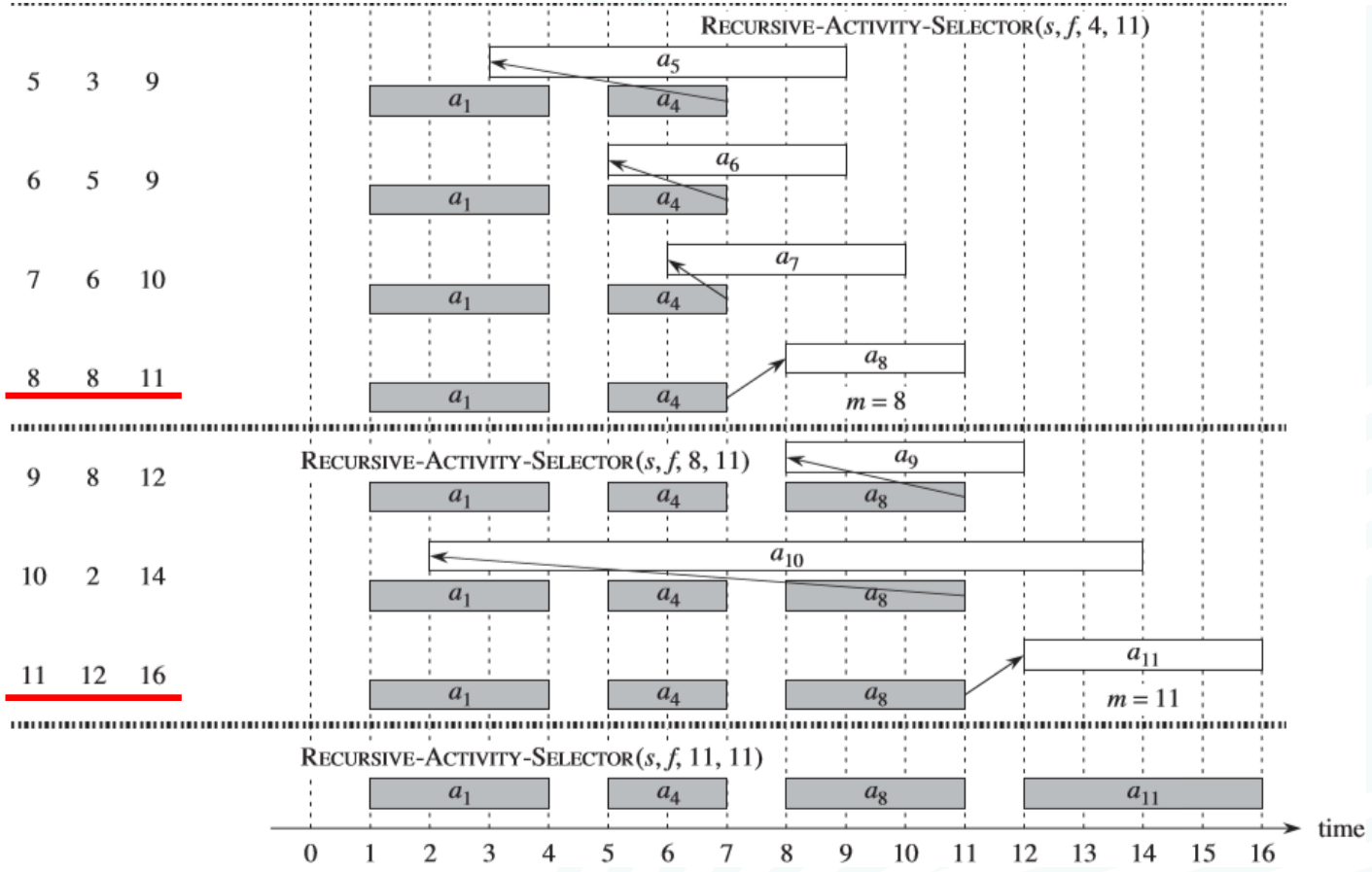
注：为了处理的方便，这里引入一个虚拟活动a_0，其结束时间$f_0=0$



活动选择问题

Example

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16



迭代贪心伪代码

“尾递归”过程，可以很容易地转换成迭代形式。假定活动已经按照结束时间单调递增的顺序排列好

```
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s, f)
1  n = s.length
2  A = {a_1}
3  k = 1
4  for m = 2 to n
5      if s[m] ≥ f[k]
6          A = A ∪ {a_m}
7          k = m
8  return A
```

k对应最后一个加入A的活动，f_k是A中活动的最大结束时间，若m的开始时间大于f_k，则m就是下一个被选中的活动。

算法的运行时间是O(n)。

总结： 贪心求解的一般步骤

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

1）确定问题的最优子结构；

2）将最优化问题转化为这样的形式：每次对其作出选择后，只剩下一个子问题需要求解；

3）证明作出贪心选择后，剩余的子问题满足：其最优子解与前面的贪心选择组合即可得到原问题的最优解(具有最优子结构)。

注：对应每个贪心算法，都有一个动态规划算法，但动态规划算法要繁琐得多。

总结： 贪心算法的适用性

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

- 贪心选择性质和最优子结构性是两个关键要素。
  - 如果能够证明问题具有这两个性质，则基本上就可以实施贪心策略

贪心选择性质：可以通过做出局部最优（贪心）选择来构造全局最优解的性质

Huffman编码

Huffman编码问题是一个典型的贪心算法问题。

Huffman编码：最佳编码方案，通常可以节省20%~90%的空间。

设压缩有10万个字符的数据文件，文件中出现的所有字符和它们的出现频率如下：

	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5
Fixed-length codeword	000	001	010	011	100	101
Variable-length codeword	0	101	100	111	1101	1100

只有六个字符

分析

采用二进制字符编码（简称**编码**），每个字符用唯一的二进制串表示，称为**码字**。

定长编码

每个字符的编码长度一样

- 如上例，考虑到有六个字符，可以用3位码字对每个字符编码，如表中的定长编码方案。
- 10万个字符需要用30万个二进制位来对文件编码。

变长编码

每个字符赋予不同长度的码字

- 思路：赋予高频字符短码字，低频字符长码字，**字符的码字互不为前缀，这样才能唯一解码**
- 如表中变长编码方案：a用1位的串0表示，b用3位的串101表示，f用4位的串1100表示等。
- 10万个字符仅需22.4万个二进制位，节约了25%的空间。

设计

前缀码

任何码字都不是其它码字的前缀

文件编码

将文件中的每个字符的码字连接起来即可完成文件的编码过程

如，设文件中包含3个字符：abc

字符编码（前缀码）：

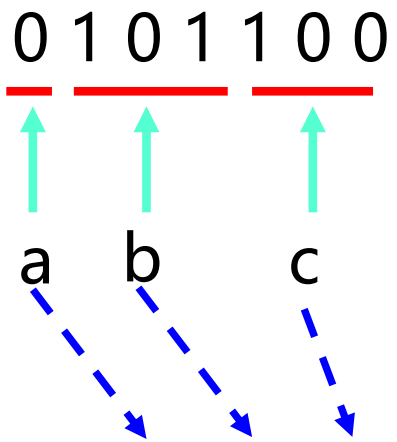
	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5
Variable-length codeword	0	101	100	111	1101	1100

文件编码：0101100

设计

文件解码

由于没有码字是其它码字的前缀，所以编码文件的开始部分是没有歧义的，可以唯一地转换回原字符，然后对编码文件剩余部分重复解码过程，即可“解读”出原来的文件



	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5
Variable-length codeword	0	101	100	111	1101	1100

对每一个二进制子位串，在码字表里都只有一个字符唯一地与之对应

编码树

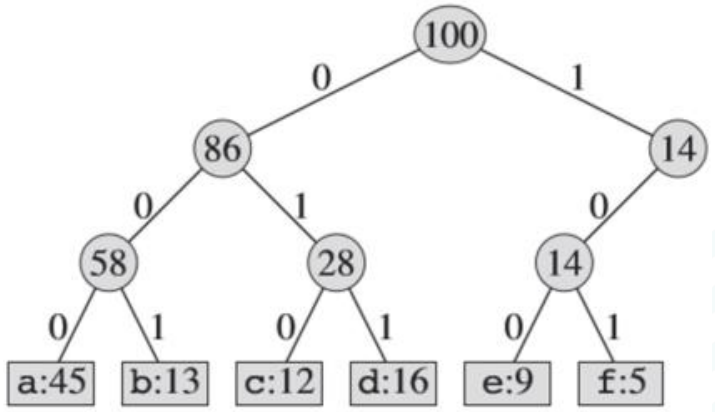
为表示字符二进制编码而构造的二叉树

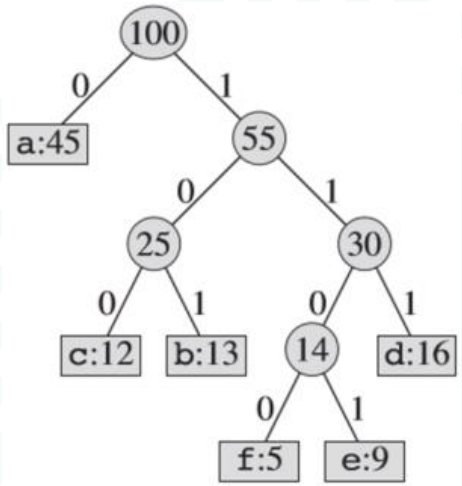
叶子结点

对应给定的字符，每个字符对应一个叶子结点

编码构造

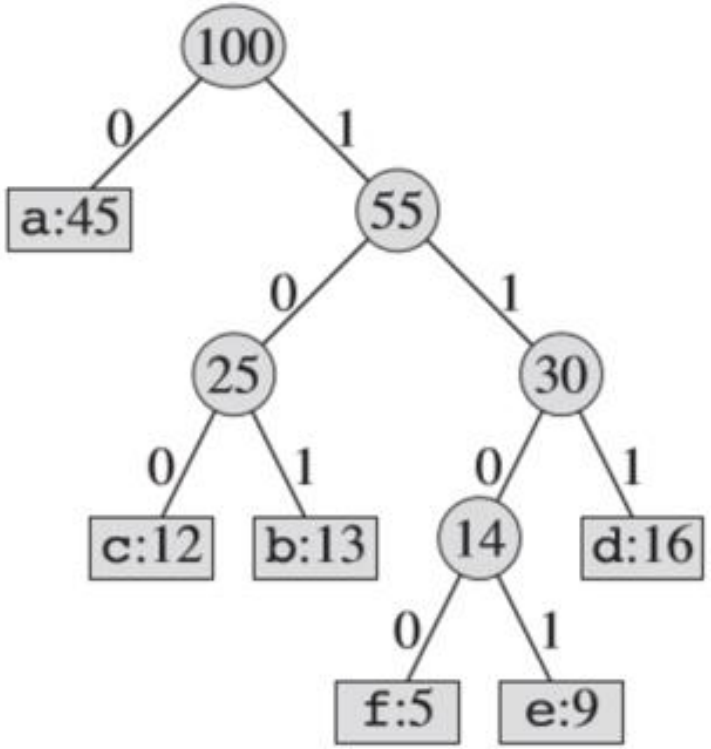
字符的二进制码字由根结点到该字符叶子结点的简单路径表示：
0代表转向左孩子，1代表转向右孩子

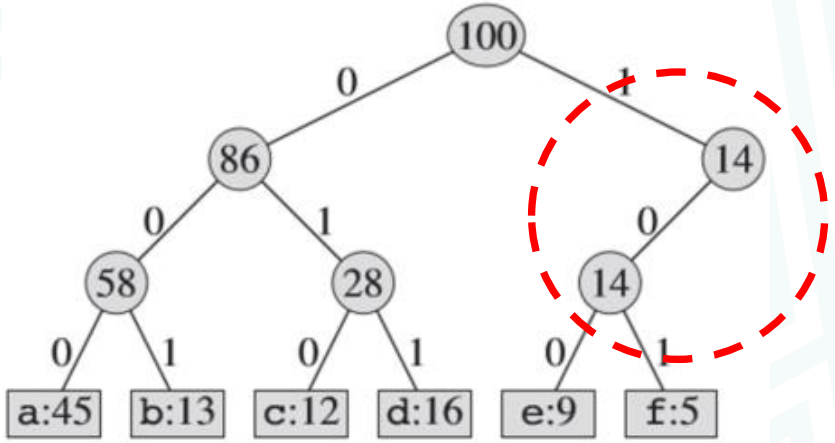




最优编码方案

一个文件的最优字符编码方案总对应一棵**满(full)二叉树**，即**每个非叶子结点都有两个孩子结点**





定长编码实例不是最优的，因为它的二叉树不是满二叉树，包含以10开头的码字，但不包含以11开头的码字。

最优编码方案

一个文件的最优字符编码方案总对应一棵**满二叉树（full binary tree）**

- 设C为字母表
  - 对字母表C中的任意字符c，令属性c.freq表示字符c在文件中出现的频率（设所有字符的出现频率均为正数）。
  - 最优前缀码对应的树中恰好有|C|个叶子结点，每个叶子结点对应字母表中的一个字符，且恰有|C|-1个内部结点。
- 令T表示一棵前缀编码树；
- 令$d_T(c)$表示c的叶子结点在树T中的深度（根到叶子结点的路径长度，即**码长**）。

最优编码方案

一个文件的最优字符编码方案总对应一棵**满二叉树（full binary tree）**

令B(T)表示采用编码方案T时文件的编码长度，则：

$$B(T) = \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_T(c) ,$$

- 即文件要用B(T)个二进制位表示。

- 称B(T)为T的代价。
- **最优编码**：使得B(T)最小的编码称为最优编码。
  - 对给定的字符集和文件，Huffman编码是一种最优编码。

贪心伪代码

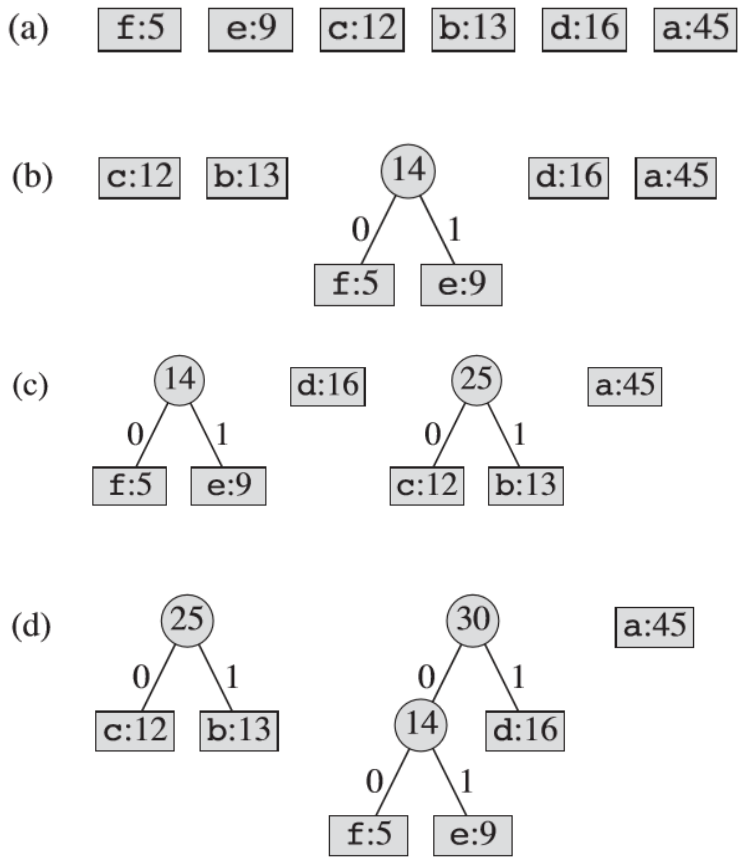
算法HUFFMAN从|C|个叶子结点开始，每次选择频率最低的两个结点合并，将得到的新结点加入集合继续合并，这样执行|C|-1次“合并”后即可构造出一棵编码树——Huffman树。

```
HUFFMAN(C)
1  n = |C|
2  Q = C
3  for i = 1 to n − 1
4       allocate a new node z
5       z.left = x = EXTRACT-MIN(Q)
6       z.right = y = EXTRACT-MIN(Q)
7       z.freq = x.freq + y.freq
8       INSERT(Q, z)
9  return EXTRACT-MIN(Q)      // return the root of the tree
```

采用以freq为关键字的最小优先队列Q。提取两个最低频率的对象将之合并。

Example:构造

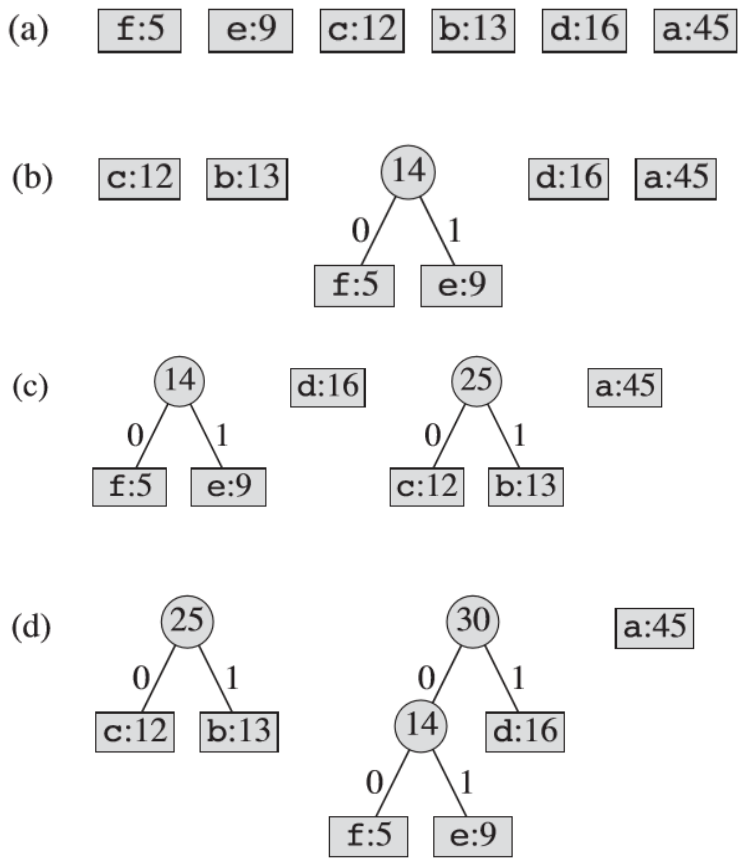
	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5

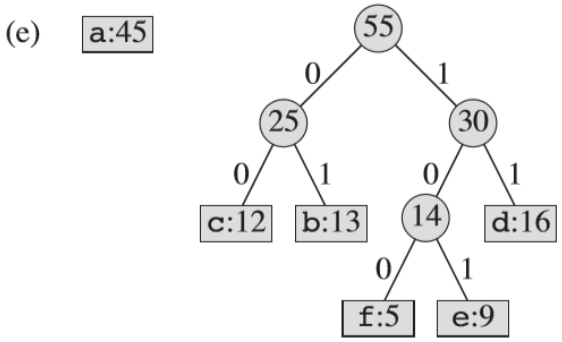


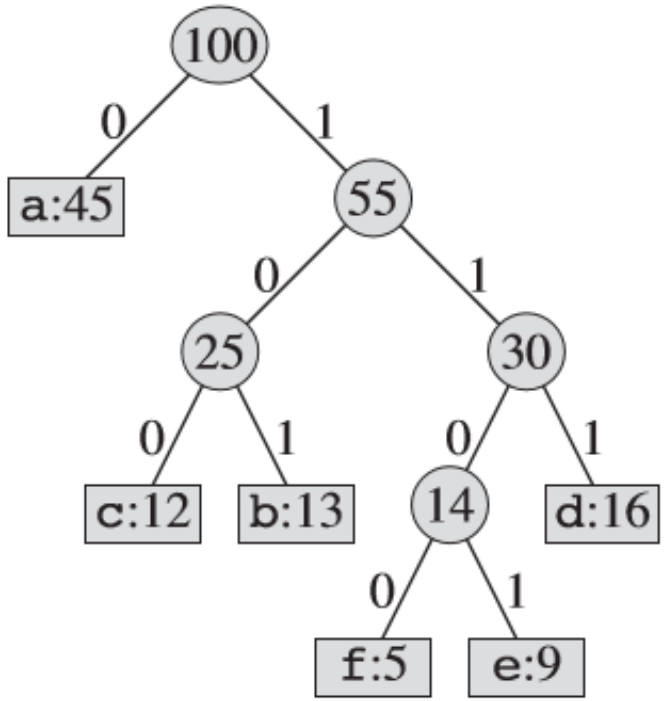
- 每一步选择频率最低的两棵树进行合并。
- 叶子结点用矩形表示，每个叶子结点包含一个字符及其频率。
- 内结点用圆形结点表示，频率等于其孩子结点的频率之和。
- 内结点指向左孩子的边标记为0，指向右孩子的边标记为1。
- **一个字母的码字对应从根到其叶子结点的路径上的边的标签序列。**如 f 的码字是：1000，e的码字是1001

Example:构造

	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5







(b)

时间分析

假设Q使用最小二叉堆实现，则

- 首先，Q的初始化花费O(n)的时间。
- 其次，循环的总代价是O($n$lg$n$)。
  - for循环共执行了n-1次，每次从堆中找出当前频率最小的两个结点及把合并得到的新结点插入到堆中均花费O(lg$n$)，所以循环的总代价是O($n$lg$n$).

```
HUFFMAN(C)
1  n = |C|
2  Q = C
3  for i = 1 to n − 1
4      allocate a new node z
5      z.left = x = EXTRACT-MIN(Q)
6      z.right = y = EXTRACT-MIN(Q)
7      z.freq = x.freq + y.freq
8      INSERT(Q, z)
9  return EXTRACT-MIN(Q)      // return the root of the tree
```

所以，HUFFMAN的总运行时间O($n$lg$n$)。

正确性证明

令T是一个最优前缀码所对应的编码树——满二叉树。

令a和b是T中深度最大的兄弟叶结点。

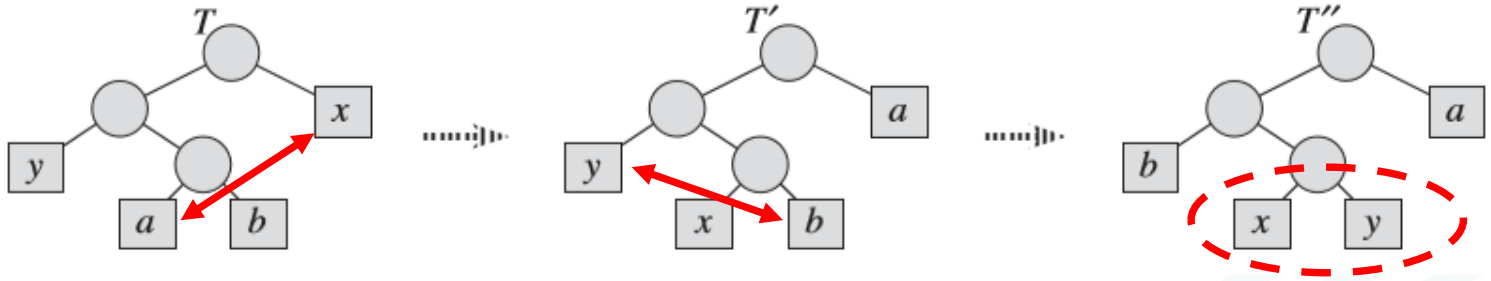
- 不是一般性，假设a.freq≤b.freq且x.freq≤y.freq。
- 由于x和y是叶结点中频率最低的两个结点，所以应有x.freq≤a.freq且y.freq≤b.freq。

- 若x.freq=b.freq，则有a.freq=b.freq=x.freq=y.freq，此时引理显然成立。

引理 16.2 令C为一个字母表，其中每个字符c∈C都有一个频率c.freq。令x和y是C中频率最低的两个字符。那么存在C的一个最优前缀码，x和y的码字长度相同，且只有最后一个二进制位不同。

正确性证明

- 假定x.freq≠b.freq，即x≠b。则在T中交换x和a，生成一棵新树T’；然后再在T’中交换b和y，生成另一棵新树T”，那么在T”中x和y是深度最深的两个兄弟结点。如图所示：



在最优树T中，叶子结点a和b是最深的叶子结点中的两个，并且是兄弟结点。叶子结点x和y为算法首先合并的两个叶子结点，它们可出现在T中的任意位置上。假设x≠b，叶子结点a和x交换得到树T’，然后交换叶子结点b和y得到树T”。

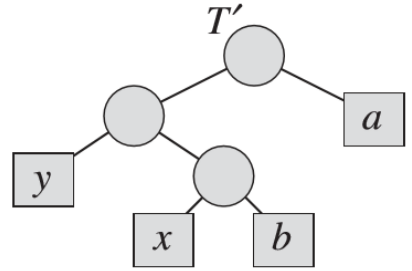
正确性证明

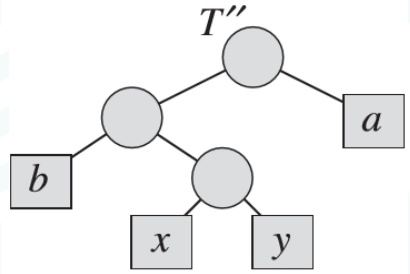
根据文件编码的计算公式，T和T′ 的**代价差**为：

$$B(T) = \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_T(c) ,$$

$$\begin{aligned} & B(T) - B(T') \\ = & \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_T(c) - \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_{T'}(c) \\ = & \; x.freq \cdot d_T(x) + a.freq \cdot d_T(a) - x.freq \cdot d_{T'}(x) - a.freq \cdot d_{T'}(a) \\ = & \; x.freq \cdot d_T(x) + a.freq \cdot d_T(a) - x.freq \cdot d_T(a) - a.freq \cdot d_T(x) \\ = & \; (a.freq - x.freq)(d_T(a) - d_T(x)) \\ \geq & \; 0 , \end{aligned}$$

注，其中a.freq-x.freq和$d_T(a)$-$d_T(x)$均为非负值。





- B(T)-B(T′)≥0 表示从T到T′ 并没有增加代价。
- 类似地，从T′ 到T″ ，交换y和b也不会增加代价，即B(T′)-B(T″)≥0

  因此， B(T″) ≤ B(T)。

正确性证明

根据假设，T是最优的，因此B(T”)= B(T)，即得证：T”也是最优解，且x和y是其中深度最大的两个兄弟结点，x和y的码字长度相同，且只有最后一个二进制位不同。

得证。

引理 16.2 令C为一个字母表，其中每个字符c∈C都有一个频率c.freq。令x和y是C中频率最低的两个字符。那么存在C的一个最优前缀码，x和y的码字长度相同，且只有最后一个二进制位不同。

正确性证明 泛化

不失一般性，通过合并来构造最优树

- 贪心选择：每次选择出现频率最低的两个字符。
  - 将一次合并操作的代价视为被合并的两项的频率之和，而编码树构造的总代价等于所有合并操作的代价之和。
  - 引理16.3表明：在所有的合并操作中，HUFFMAN选择是代价最小的方案：

正确性证明 引理16.3

令C为一个给定的字母表，其中每个字符c∈C都有一个频率c.freq

- 令x和y是C中频率最低的两个字符。
- 令C'为C去掉字符x和y，并加入一个新字符z后得到的字母表，

  即C'= C - {x, y}∪{z}。
  - 类似C，也为C'定义freq，且z.freq= x.freq + y.freq。
- 令**T'**为字母表C'的任意一个最优前缀码对应的编码树。

则有：可以将T'中叶子结点z替换为一个以x和y为孩子的内部结点，得到树T，而T表示字母表C的一个最优前缀码。

正确性证明 泛化

对C中不是x和y的字符c，即c∈C-{x,y}，有 $d_T(c)=d_{T'}(c)$，

亦有：$c.freq \cdot d_T(c)=c.freq \cdot d_{T'}(c)$。

由于 $d_T(x)=d_T(y)=d_{T'}(z)+1$

故有：

$$\begin{aligned} & x.freq \cdot d_T(x) + y.freq \cdot d_T(y) \\ = \quad & (x.freq + y.freq)(d_{T'}(z) + 1) \\ = \quad & z.freq \cdot d_{T'}(z) + (x.freq + y.freq) \end{aligned}$$

从而可得：$B(T) = B(T') + x.freq + y.freq$

或等价地：$B(T') = B(T) - x.freq - y.freq$

正确性证明 反证 T对应的前缀码是C的最优前缀码

假定T对应的前缀码不是C的最优前缀码。则会存在最优前缀码树T″ 满足：

B(T″)<B(T)

不失一般性，由引理16.2有，T″ 包含兄弟结点x和y。

令T′ ′ ′ 为将T″ 中x、y及它们的父结点替换为叶结点z得到的树，其中z.freq=x.freq+y.freq。于是

$$\begin{aligned} B(T''') &= B(T'') - x.freq - y.freq \\ &< B(T) - x.freq - y.freq \\ &= B(T') , \end{aligned}$$

这与T′ 对应C′ 的一个最优前缀码的假设矛盾。

因此，T必然表示字母表C的一个最优前缀码。 证毕。

定理16.4

过程HUFFMAN会生成一个最优前缀码

证明

由引理16.2和引理16.3即可得 （贪心选择性）

- 引理16.2说明首次选择频率最低的两个字符和选择其它可能的字符一样，都可以构造相应的最优编码树。
- 引理16.3说明首次贪心选择，选择出频率最低的两个字符x和y，合并后将z加入元素集合，可以构造包含z的最优编码树，而还原x和y，一样还是最优编码树。
- 所以贪心选择性成立

分数背包问题

已知n种物品，各具有重量(w_1,w_2,…,w_n)和效益值(p_1,p_2,…,p_n)，及一个可容纳M重量的背包。

问：怎样装包才能使在不超过背包容量的前提下，装入背包的物品的总效益最大?

分析

1）所有的$w_i>0$, $p_i>0$，$1\le i\le n$；

2）问题的解用 向量$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 表示，每个x_i表示物品i被放入背包的比例，$0\le x_i\le 1$。当物品i的一部分x_i放入背包，可得到p_ix_i的效益，同时会占用x_iw_i的重量。

分析

① 装入背包的总重量不能超过M，即 $\sum_{1\le i\le n} w_i x_i \le M$ 。

② 如果当前问题实例的所有物品的总重量不超过M，即：$\sum_{1\le i\le n} w_i \le M$

则只有把所有的物品都装入背包中才可获得**该实例**最大的效益值，此时所有的 $x_i=1$，$1\le i\le n$。

③ 如果物品的总重量 $\sum_{1\le i\le n} w_i \ge M$ ，则将有物品可能无法全部装入背包。而此时，由于$0\le x_i\le 1$，所以可以把物品的全部或部分装入背包，最终背包中刚好装入重量为M的若干物品（可能是其一部分）。这种情况下，如果背包没有被装满，则显然不能获得最大的效益值。

形式化描述

约束条件：$\sum_{1\le i\le n} w_i x_i \le M$

$0 \le x_i \le 1, \quad p_i > 0, \quad w_i > 0, \quad 1 \le i \le n$

目标函数：$\sum_{1\le i\le n} p_i x_i$

可 行 解：满足上述约束条件的任一$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$都是问题的一个可行解。可行解可能有多个（甚至是无穷多个）。

最 优 解：能够使目标函数取最大值的可行解是问题的最优解。最优解也可能有多个。

Example

设有三件物品和一个背包，背包容量M=20，物品效益值$(p_1,p_2,p_3)=(25,24,15)$，重量$(w_1,w_2,w_3)=(18,15,10)$。求该背包问题的解。

可能的可行解如下：　$\sum w_i x_i$　$\sum p_i x_i$

	(x_1, x_2, x_3)			
①	(1/2, 1/3, 1/4)	16.5	24.25	//没有装满背包//
②	(1, 2/15, 0)	20	28.2	
③	(0, 2/3, 1)	20	31	
④	(0, 1, 1/2)	20	**31.5**	

思考：

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

1）如何做贪心选择?

2）获得问题的贪心解后，如何证明贪心解是问题的最优解?

3）效益，重量，应该以哪个度量作为最优子结构?

策略

1）以**效益**作为度量

思路：每装入一件物品，就使背包获得最大可能的效益增量。

规则：以目标函数作为度量，按效益值的非增次序将物品一件件地放入到背包。

注：如果正在考虑的物品放不进去，则只取其一部分装满背包。

此时，如果该物品的一部分不满足获得最大效益增量的度量，则在剩下的物品中选择可以获得最大效益增量的其它物品，将它或其一部分装入背包。

策略

1）以**效益**作为度量

如：若背包剩余容量ΔM=2,而此时背包外还剩两件物品i,j，且有(p_i = 4，w_i = 4) 和 (p_j = 3，w_j = 2)，则下一步应选择j而非i放入背包，因为

$$p_i/2 = 2 < p_j = 3$$

即虽然$p_i > p_j$，但物品j可以全部放入并带来3的效益值，而物品i只能放1/2，带来的2效益值。

分数背包问题

策略 效益

例5.1，M=20，$(p_1,p_2,p_3) = (25,24,15)$，$(w_1,w_2,w_3) = (18,15,10)$

∵ $p_1 > p_2 > p_3$

∴ 首先将物品1放入背包，$x_1 = 1$，背包获得$p_1 = 25$的效益增量，同时背包容量消耗掉$w_1 = 18$个单位，剩余空间ΔM=2。不足以放入物品2和3的全部。

然后考虑就ΔM=2而言，只能选择物品2或3的一部分装入背包。

- 物品2： 若 $x_2 = 2/15$， 则 $p_2x_2 = 16/5 = 3.1$
- 物品3： 若 $x_3 = 2/10$， 则 $p_3x_3 = 3$

故，为**使背包的效益有最大的增量**，应选择物品2的2/15装包，即$x_2 = 2/15$ 。

最后，ΔM=0，背包装满，物品3不能装，$x_3 = 0$ ，结束。得到的解：(x_1,x_2,x_3)=(1,2/15,0) ->$\sum p_i x_i = 28.2$，仅为次优解,非最优解。

思考：

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

1）为什么以效益作为度量没能获得最优解？

尽管背包的效益值每次得到了最大的增加，但背包容量也过快地被消耗掉了，从而不能装入“更多”的物品。

策略

2）以**容量**作为度量

思路：让背包容量尽可能慢地被消耗，从而可以尽可能多地装入一些物品。

规则：以容量作为度量，按物品重量的非降次序将物品装入到背包；如果正在考虑的物品放不进去，则只取其一部分装满背包即可。

策略 容量

例5.1，M=20，$(p_1,p_2,p_3) = (25,24,15)$，$(w_1,w_2,w_3) = (18,15,10)$

∵ $w_3 < w_2 < w_1$

∴首先将物品3放入背包，$x_3 = 1$，背包获得$p_3 = 15$的效益增量，容量消耗$w_3 = 10$个单位，剩余容量ΔM=10。

然后考虑物品2。就ΔM=10而言有，只能选择物品2的10/15装入背包，即：

$$x_2 = 10/15 = 2/3$$

最后，ΔM=0，背包装满，物品1不能装入背包，$x_1 = 0$ 。

得到的解：(x_1,x_2,x_3)=（0,2/3,1）-> $\sum p_i x_i = 31$，依旧是次优解,非最优解。

思考：

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

1）为什么以容量作为度量也没能获得最优解？

尽管背包的容量每次消耗得最少，装入物品的“个数”多了，但效益值没能“最大程度”的增加。

策略

3）以**效益/容量**作为度量

思路：片面地考虑背包的效益增量和容量消耗都是不行的，应在背包效益值的增长速率和背包容量的消耗速率之间取得平衡。进一步的考虑是，让背包发挥“最大的作用”，让其每一单位被占用的容量都尽可能地装进最大可能效益的物品。

规则：以已装入的物品的累计效益值与所用容量之比为度量，使得每次装入后累计效益值与所用容量的比值有最多的增加（首次装入）和最小的减小（其后的装入）。

- 按物品的单位效益值（即p_i/w_i值）的非降次序将物品装入到背包；
- 如果正在考虑的物品放不进去，则只取其一部分装满背包即可；

策略 效益/容量

例5.1，M=20，$(p_1,p_2,p_3) = (25,24,15)$，$(w_1,w_2,w_3) = (18,15,10)$

∵ $p_2/w_2 > p_3/w_3 > p_1/w_1$

∴首先将物品2放入背包，$x_2 = 1$，背包获得$p_2 = 24$的效益增量，容量消耗$w_2 = 15$个单位，剩余容量ΔM=5。

然后考虑物品3，就ΔM=5而言，只能放入物品3的5/10，即，

$x_3 = 5/10 = 1/2$

最后，ΔM=0，背包装满，物品1不能装入背包，$x_1 = 0$ 。

得到的解：(x_1,x_2,x_3)=（0,1,1/2）-> $\sum p_i x_i = 31.5$，是问题的最优解吗?

伪代码与证明思路

```
procedure GREEDY - KNAPSACK(P,W,M,X,n)
  //P(1:n)和W(1:n)分别含有按P(i)/W(i)≥P(i + 1)/W(i + 1)排序的n件物品的效益值和重量。M是背包的容量
    大小，而X(1:n)是解向量//
   real P(1:n), W(1:n), X(1:n), M, cu;
   integer i,n
   X←0     //将解向量初始化为0//
   cu←M //cu是背包的剩余容量//
   for i←1 to n do
        if W(i) > cu then exit endif
        X(i) ←1  cu ←cu-W(i)
   repeat
   if i≤n then X(i) ←cu/W(i)  endif
end GREEDY-KNAPSACK
```

最优解的含义：满足约束条件，使目标函数取极大（小）值的可行解

如果贪心解是可行解，故只需证明：

贪心解可使目标函数取得极值。

这里需要注意的是：解的形式并不重要，重要的是贪心解和任意最优解一样，可使目标函数取得极值。

证明基本思路

1）设出问题最优解的一般形式。

2）将贪心解与“理想”最优解进行比较。

(2.1)　如果这两个解相同，则显然贪心解就是最优解。

(2.2)　如果这两个解不同，则肯定有不同的地方，即至少在一个分量x_i上存在不同。

(2.2.1）设法找出第一个不同的分量位置i；

(2.2.2）设法用贪心解的x_i替换最优解对应的分量

——消去不同的地方；

证明基本思路

2）将贪心解与“理想”最优解进行比较。

(2.2)　如果这两个解不同，则肯定有不同的地方，即至少在一个分量x_i上存在不同。

(2.2.3）作某些调整，以使得替换后的新解还是可行解，不违反任何约束条件。

(2.2.4）证明经过上述处理得到的新解在效益上与原最优解相同至少不会降低，即依然“最优”。

证明基本思路

2）将贪心解与“理想”最优解进行比较。

(2.3）继续比较“新最优解”和贪心解，若还存在不同，则重复(2.2），反复进行代换，直到代换后产生的“最优解”与贪心解完全一样。

3）结论：在上述代换中，最优解的效益值没有受到任何损失，那么贪心解的效益值与代换前、后的最优解的效益值都是相同的。所以贪心解如同任意一个最优解一样，可使得目标函数取得极值。

从而得证：该贪心解即是问题的最优解

证明

设$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是GREEDY-KNAPSACK所生成的贪心解。

① 如果所有的x_i都等于1,则显然X就是问题的最优解。否则，

② 设j是使$x_i \neq 1$的最小下标。由算法的执行过程可知，

- $x_i=1 \quad 1 \leq i < j$,
- $0 \leq x_j < 1$
- $x_i=0 \quad j < i \leq n$

定理 16.1 如果$p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \ldots \geq p_n/w_n$,则算法GREEDY-KNAPSACK对于给定的背包问题实例生成一个最优解。

证明

假设Y是问题的最优解：$Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，不失一般性，应有：

- 若X = Y，则X就是最优解。否则， (2.1)
- X和Y至少在1个分量上存在不同。 (2.2)

  设k是使得$y_k \neq x_k$的最小下标，则有$\mathbf{y_k < x_k}$。 (2.2.1)

定理 16.1 如果$p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \ldots \geq p_n/w_n$,则算法GREEDY-KNAPSACK对于给定的背包问题实例生成一个最优解。

证明

$y_k < x_k$：可分以下情况说明：

a) 若k<j，则$x_k=1$。因为$y_k \neq x_k$，故只能有$y_k < x_k$。

b) 若k=j，由于$\sum w_i x_i = M$，且对$1 \le i < j$，有$y_i=x_i=1$，而对$j < i \le n$，有$x_i = 0$；故此时若 $y_k > x_k$，则将有$\sum w_i y_i > M$，与Y是可行解相矛盾。而 $y_k \neq x_k$，所以也只能有 $y_k < x_k$。

c) 若k > j，则 $\sum w_i y_i > M$，不能成立。

证明

- 在Y中作以下调整：将y_k增加到x_k，　　(2.2.2)
- 因为$y_k < x_k$,为保持解的可行性，必须从$(y_{k+1},\ldots,y_n)$中减去同样多的量

$$\sum_{k<i\le n} w_i(y_i - z_i) = w_k(z_k - y_k) \qquad (2.2.3)$$

设调整后的解为$Z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$，其中$z_i = x_i$，$1\le i\le k$，且Z的效益值有：

$$\sum_{1\le i\le n} p_i z_i = \sum_{1\le i\le n} p_i y_i + (z_k - y_k)w_k p_k / w_k - \sum_{k<i\le n}(y_i - z_i)w_i p_i / w_i$$

$$\ge \sum_{1\le i\le n} p_i y_i + (z_k - y_k)w_k p_k / w_k - \sum_{k<i\le n}(y_i - z_i)w_i p_k / w_k$$

$$= \sum_{1\le i\le n} p_i y_i + [(z_k - y_k)w_k - \sum_{k<i\le n}(y_i - z_i)w_i]p_k / w_k$$

$$= \sum_{1\le i\le n} p_i y_i$$

差值 = 0

$p_k/w_k > p_i/w_i$
$k<i\le n$

证明

由以上分析得，(2.3)

- 若 $\sum p_i z_i > \sum p_i y_i$ ，则Y将不是最优解；
- 若 $\sum p_i z_i = \sum p_i y_i$ ，则或者Z=X，则X就是最优解；
- 或者Z≠X，则重复以上替代过程，或者证明Y不是最优解，或者把Y转换成X，从而证明X是最优解。

作业1：

- 16.1-4
- 16.2-7
- 16.3-3
- 16-1

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

作业2：

利用贪心策略求解下列背包问题

设，n=4，M=54，

$(p_1,p_2,p_3,p_4) = (20,16,10,18)$

$(w_1,w_2,w_3,w_4) = (16,12,15,24)$

求解向量X

计算$\sum p_i x_i$