华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

算法设计与分析

刘渝

Liu_yu@hust.edu.cn

2022秋季-华科-计算机

21级大数据

算法分析与设计
第五章
概率分析和随机算法

目　录

01、概率分析
02、随机算法

概率分析

概率分析：就是在问题分析中应用概率的理念

首先对**输入分布**做出假设。

例如：随机顺序 —— 这种随机性由输入自身决定（不是你决定的）

Example:雇佣问题

5.1 雇佣问题

假如你要雇用一名新的办公助理。你先前的雇用尝试都失败了，于是你决定找一个雇用代理。雇用代理每天给你推荐一个应聘者。你面试这个人，然后决定是否雇用他。你必须付给雇用代理一小笔费用，以便面试应聘者。然而要真的雇用一个应聘者需要花更多的钱，因为你必须辞掉目前的办公助理，还要付一大笔中介费给雇用代理。你承诺在任何时候，都要找最适合的人来担任这项职务。因此，你决定在面试完每个应聘者后，如果该应聘者比目前的办公助理更合适，就会辞掉当前的办公助理，然后聘用新的。你愿意为该策略付费，但希望能够估算该费用会是多少。

Example:雇佣问题

- 假设雇用代理推荐过来的应聘候选人有n人，编号为1到n。
- 并假设你在面试完一个应聘者后，就能决定该应聘者是否是你目前见过的最佳人选，如果是，则立即雇用。

雇佣算法可描述如下：

```
HIRE-ASSISTANT(n)
best = 0            // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

Example:雇佣问题

```
HIRE-ASSISTANT(n)
best = 0                // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

该过程中检查序列中的每个成员，所以面试的总人数就是n。其中若干人被雇用，记被雇用总人数为m。

设介绍一个人面试的费用为c_i，发生一次雇用的费用为c_h，

则该算法的总费用是$O(c_i n+c_h m)$.

Example:雇佣问题

算法的总费用是： $O(c_i n+c_h m)$.

- 进一步会发现介绍面试的总费用$c_i n$是恒定的，因为不管雇用多少人，总会面试n个应聘者。
- 而发生雇用的总费用$c_h m$是变数，因为m是未知的。
- 所以我们只需关注于雇用总费用$c_h m$即可。因此，求解雇佣问题就是对算法中best的**更新频率m（次数）**建立模型。

Example:雇佣问题

算法的总费用是： $O(c_i n+c_h m)$.

- **最坏情形分析**：
  - 当应聘者质量按出现的次序严格递增时，就会出现最坏情况： 最坏情形下实际雇用了所有参加面试的应聘者。
  - 此时面试了n次，雇用了n次，所以雇用总费用是$O(c_h n)$。

- **一般情况分析**：
  - 事实上，一般情形下应聘者不会总以质量递增的次序出现。
  - 那么整个过程可能有多少人被雇用呢?

Example:雇佣问题

一般情况下需要注意的事实

- 应聘者会以任意可能的次序来应聘，有好有坏，事先既不知道他们出现的次序，也不能控制这个次序（假设雇用代理也不关心好坏的话）

我们用概率分析的方法分析上述问题的雇用费用。假设雇佣问题中应聘者以随机顺序出现。这也意味着所有应聘者是一种全序关系，即任意两个应聘者可以比较好坏并决定哪一个更有资格。

Example:雇佣问题

用rank(i)表示应聘者质量

- 不失一般性，设rank(i)为整数，取值1~n，1代表最差，n代表最好，且所有应聘者的rank各不相同；
- 则任意序列 R=<rank(1), rank(2),…,rank(n)> 将是<1,2,…,n>的一个排列。注：<1,2,…,n>的排列共有n!种。

R是数字1到n的n!种排列中的任一个，随机出现，且为均匀随机排列，即在n!种可能的排列中，每种排列以1/n! 的可能性“等概率”出现。

随机算法

为了利用概率分析，就要了解关于输入分布的一些信息。但在许多情况下，输入分布是未知的。而且即使知道输入分布的某些信息，也无法从计算上对这种认知建立模型——输入不可控。

输入如何可控?

使一个算法中的某部分的行为随机化，然后利用概率和随机性作为算法设计与分析的工具进行相关处理。

随机出现

在雇佣问题中，看起来应聘者好像以随机顺序出现，但无法知道是否真的如此?

为了分析雇佣问题一般情况下的解，我们必须对应聘者的出现次序进行更大的控制，使其达到一种“随机”出现的样子

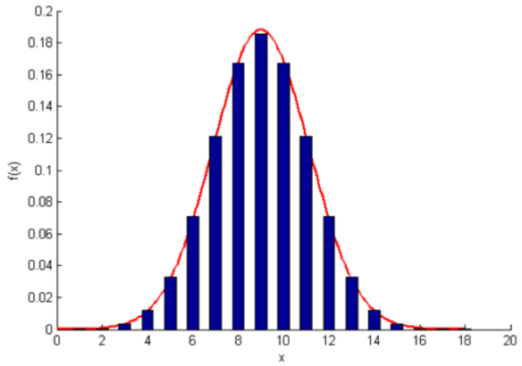
方法

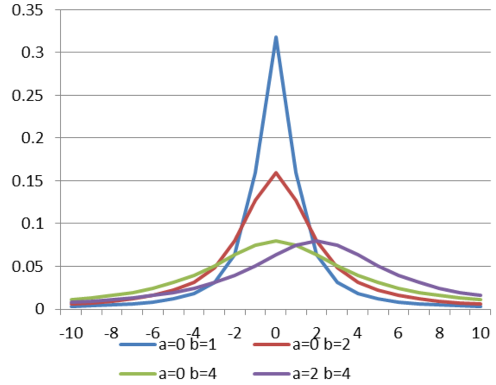
假设雇用代理推荐了n个应聘者，可以事先给我们一份名单，而我们每天随机选择某个应聘者来面试

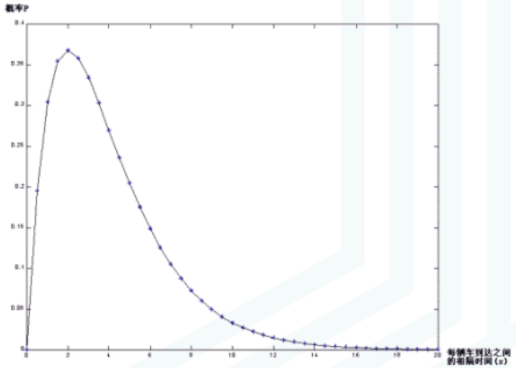
——这有什么不同呢?

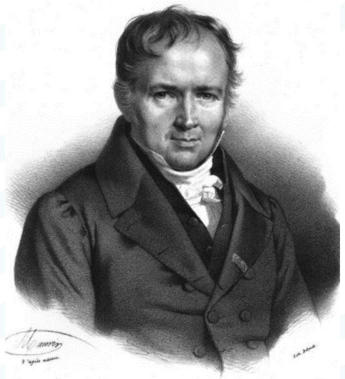
数据分布

正态分布 柯西分布 泊松分布









随机算法

如果一个算法的行为不仅由输入决定，而且也由一个随机数生成器产生的数值决定，则称这个算法是随机化的（Randomized），这样的算法称为随机算法。

随机数生成器

- 调用RANDOM(a,b)将返回一个介于a和b之间的整数，且每个整数以等概率出现。
- 而且每次RANDOM返回的整数**都独立于**前面调用的返回值。

例：RANDOM(0,1)产生0和1的概率都为1/2；

RANDOM(3,7)可以返回3，4，5，6，7，每个出现的概率为1/5；

期望运行时间

我们将一个随机算法的平均运行时间称为期望运行时间。

- 此时，算法的最终输入由随机数发生器产生

- 一般而言，当概率分布是发生在算法的原始输入上时，我们讨论算法的“平均情况运行时间”，而当算法本身做出随机选择时，我们讨论算法的“期望运行时间”。

指示器随机变量

为了建立概率和期望之间的联系，这里引进**指示器随机变量**，用于实现概率与期望之间的转换。

给定一个样本空间S(sample space)和一个事件A(event)，那么事件A对应的指示器随机变量 **I{A}** 定义为：

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ occurs} , \\ 0 & \text{if } A \text{ does not occur} . \end{cases}$$

Example：指示器随机变量

例：硬币有正反两面，抛掷一枚硬币，求正面朝上的期望次数。

将硬币正面朝上的事件记为H，反面朝上的事件记为T。从而有样本空间S={H，T}，且Pr(H)=Pr(T)=1/2.

对于正面朝上的事件H，定义一个指示器随机变量X_H，记录在一次抛硬币时正面朝上的次数：

$$X_H = \mathrm{I}\{H\} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } H \text{ 发生} \\ 0 & \text{如果 } T \text{ 发生} \end{cases}$$

Example：指示器随机变量

例：硬币有正反两面，抛掷一枚硬币，求正面朝上的期望次数。

一次抛掷硬币正面朝上的期望次数：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_H] &= \mathrm{E}[\mathrm{I}\{H\}] \\ &= 1 \cdot \Pr\{H\} + 0 \cdot \Pr\{T\} \\ &= 1 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) \\ &= 1/2\,. \end{aligned}$$

一个事件对应的**指示器随机变量**的**期望值**等于该事件发生的概率

指示器随机变量 引理

给定一个样本空间S和S中的一个事件A，设X_A=I{A}，那么E[X_A]=Pr{A}

证明： 由指示器随机变量的定义以及期望值的定义，有：

$$E[X_A]=E[I\{A\}]$$
$$=1*Pr\{A\}+0*Pr\{\sim A\}$$
$$=Pr\{A\}$$

其中，~A表示S-A，即A的补。

指示器随机变量

n次抛掷硬币正面朝上的期望次数是多少?

- 设随机变量X表示n次抛硬币中出现正面朝上的总次数。
- 设指示器随机变量X_i对应第i次抛硬币时正面朝上的事件，

即：X_i=I{第i次抛掷时出现事件H}。

则显然有：

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

指示器随机变量

n次抛掷硬币正面朝上的期望次数是多少?

X_i=I{第i次抛掷时出现事件H}。

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

则，两边取期望，计算正面朝上次数的期望，有:

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] .$$

即：总和的期望值等于n个指示器随机变量值和的期望，也等于n个指示器随机变量值期望的和。

指示器随机变量 引理

若每个指示器随机变量的期望值为1/2，则总和X的期望值为：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1/2 \\
&= n/2 .
\end{aligned}
$$

指示器随机变量 雇佣问题

计算雇用新办公助理的期望次数：

- 假设应聘者以随机顺序出现。
- 设X是一个随机变量，其值等于雇用新办公助理的总次数。
- 定义n个指示器随机变量X_i，与应聘者i的一次面试相对应，根据i是否被雇用有：

$$X_i = \mathrm{I}\{\text{应聘者 } i \text{ 被雇用}\} = \begin{cases} 1 & \text{如果应聘者 } i \text{ 被雇用} \\ 0 & \text{如果应聘者 } i \text{ 不被雇用} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

根据定理，有 $\mathrm{E}[X_i] = \Pr\{\text{应聘者 } i \text{ 被雇用}\}$

应聘者i被雇用的概率是多少呢？

指示器随机变量 雇佣问题

```
HIRE-ASSISTANT(n)
1  best = 0          // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
2  for i = 1 to n
3      interview candidate i
4      if candidate i is better than candidate best
5          best = i
6          hire candidate i
```

计算过程HIRE-ASSISTANT中第5~6行被执行的概率：

在第6行中，若应聘者i被雇用，则他就要比前面i-1个应聘者更优秀。

因为已经假设应聘者以随机顺序出现，所以这i个应聘者也以随机次序出现。而且在这i个应聘者中，任意一个都可能是最有资格的。那么，应聘者i比前i-1个应聘者更有资格的概率是1/i，即它将有1/i的概率被雇用。

- 故由引理可得： $\mathrm{E}[X_i] = 1/i$

指示器随机变量 雇佣问题

$\mathrm{E}[X_i]=1/i \qquad X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

计算E[X]：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X]&=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] && \text{（根据等式(5.2)）}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i] && \text{（根据期望的线性性质）}\\ &=\sum_{i=1}^{n}1/i && \text{（根据等式(5.3)）}\\ &=\ln n+O(1) && \text{（根据等式(A.7)）}\end{aligned}$$

亦即，尽管面试了n个人，但平均起来，实际上大约只雇用了他们之中的 ln*n* 个人。

总结:

概率分析的含义：在算法分析中应用概率的思想

随机算法：将输入随机化，使算法不依赖于原始输入。

随机数发生器：Random

平均计算时间：概率分布定义在输入上。

期望运行时间：算法本身做出随机选择。

总结：

指示器随机变量：

$$\mathrm{I}\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ occurs}\ , \\ 0 & \text{if } A \text{ does not occur}\ . \end{cases}$$

概率和期望的关系：一个事件A对应的指示器随机变量的期望值等于该事件发生的概率。

用指示器随机变量分析雇用问题：

- 应聘者i被雇佣的概率是1/i。
- 面试n个人，平均起来，实际上大约只雇用了他们之中的 $\ln n$ 个人

指示器随机变量 引理2

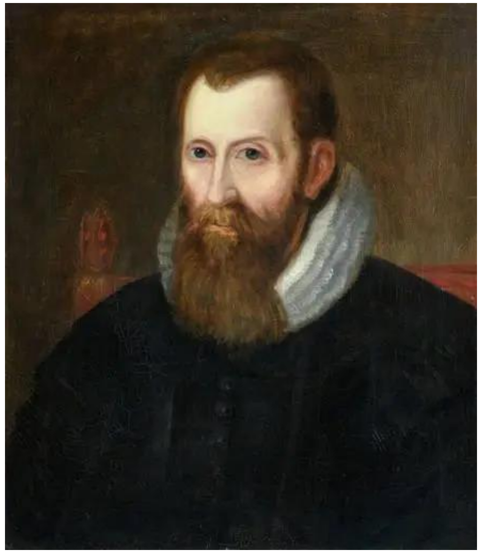
假设应聘者以随机次序出现，算法HIRE-ASSISTANT总的雇用费用平均情形下为$O(c_h \ln n)$.

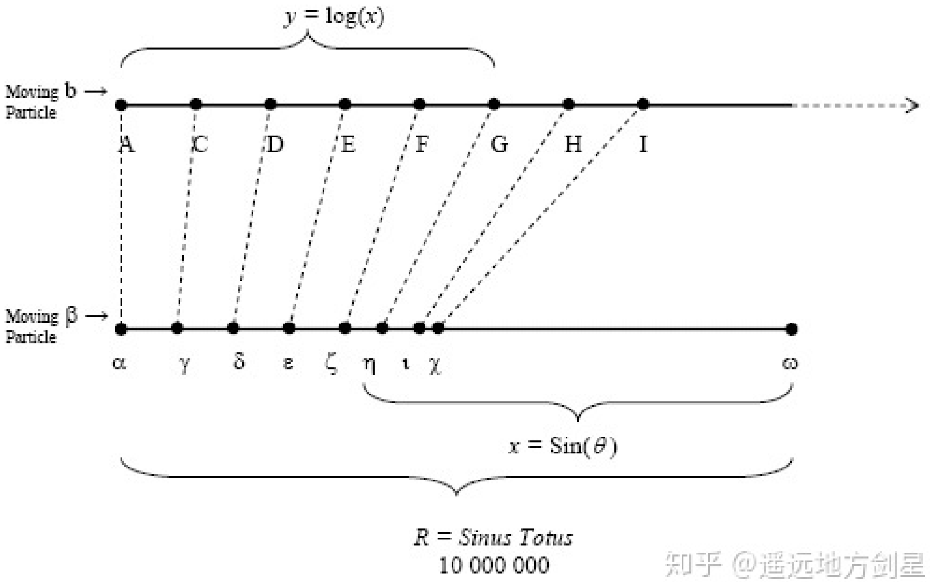
可见，平均情形下的雇用费用$c_h \ln n$ 比最坏情况下的雇用费用$O(c_h n)$有了很大的改进。

自然对数

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots$$

约翰.纳皮尔





总结：

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

- 输入的分布有助于分析一个算法的平均情况行为。但很多时候是无法得知输入分布的信息。

- 采用随机算法，分析算法的期望值

雇用问题的随机算法

- 随机算法在算法运行前**先随机地排列应聘者**，体现所有排列都是等可能出现的性质。
- 核心思路：随机算法不是假设输入的分布，而是**设定一个分布**。
  - 根据前面的讨论，如果应聘者以随机顺序出现，则聘用一个新办公助理的平均情况下雇佣次数大约是$\ln n$。
  - 现在，虽然修改了算法，使得随机发生在算法上，但雇用一个新办公助理的期望次数仍大约是$\ln n$。

雇用问题的随机算法

对于雇用问题，代码中唯一需要改变的是随机地变换应聘者序列。

```
RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT(n)
randomly permute the list of candidates
best = 0              // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

指示器随机变量 引理3

过程RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT的雇用费用期望是**$O(c_h \ln n)$**

证明：对输入数组进行变换后，已经达到了和HIRE-ASSISTANT概率分析时相同的情况

引理2 与 引理3

引理2**在输入上做了随机分布的假设**，求的是平均情形下的雇用费用。

引理3**的随机化**作用在算法上，求的是雇用费用的期望值。

思考：

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

- **如果不考虑随机处理，算法是不是“确定”的**？

　　此时，雇用新办公助理的次数依赖于初始时各个应聘者的排名，对于任何特定输入，雇用一个新办公助理的次数始终相同。

思考：

- **如果不考虑随机处理，算法是不是“确定”的**？

如：排名列表$A_1=<1,2,3,4,5,6,7,8,9,10>$，新办公助理会雇用 10次。

排名列表$A_2=<10,9,8,7,6,5,4,3,2,1>$，新办公助理会雇用 1 次。

排名列表$A_3=<5,2,1,8,4,7,10,9,3,6>$，新办公助理会雇用 3 次。

总结:

- 算法RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT在算法运行前先随机地排列应聘者，是随机算法。
  - ✓ 此时，“随机”发生在算法上，而不是在输入分布上。
  - ✓ **随机算法**中，任何一个给定的输入，如A_1或A_3，都无法说出best会被更新多少次的。因为随机发生在算法中，而不是直接在输入分布上。没有特别的输入会引出它的最坏行为（当然也没有特别的输入不会引出它的最坏行为）。

随机数组

随机算法需要通过**对给定的输入变换排列**以使输入随机化

不失一般性，假设给定一个数组A，包含元素1到n。随机化的目标是构造这个数组的一个均匀随机排列

介绍两种随机化方法

随机生成数组 方法一

为数组的每个元素A[i]赋一个随机的优先级P [i]，然后根据优先级对数组中的元素进行排序。

例：如果初始数组A=<1,2,3,4>，随机选择的优先级是P=<36,3,62,19>，

则将产生一个数组：B=<2,4,1,3>

随机生成数组 方法一

为数组的每个元素A[i]赋一个随机的优先级P [i]，然后根据优先级对数组中的元素进行排序。

```
PERMUTE-BY-SORTING(A)
1  n = A.length
2  let P[1..n] be a new array
3  for i = 1 to n
4      P[i] = RANDOM(1, n^3)
5  sort A, using P as sort keys
```

- 第4行**选取一个在1~n^3之间的随机数**。使用范围1~n^3是为了让P中所有优先级尽可能唯一。
- 第5步排序时间为O(nlogn)
- 排序后，如果P[i]是第j个最小的优先级，那么A[i]将出现在输出位置j上。最后得到一个”随机“排列。

方法一 引理4

假设所有优先级都不同，则过程PERMUTE-BY-SORTING产生的输入是均匀随机排列的

证明：

从考虑每个元素A[i]分配到第i小优先级的特殊排列开始讨论， 说明这个排列正好发生的概率是1/n!。

方法一 引理4

假设所有优先级都不同，则过程PERMUTE-BY-SORTING产生的输入是均匀随机排列的

证明:

设E_i代表元素A[i]分配到第i小优先级的事件（i=1,2,...,n），则对所有的E_i，整个事件发生的概率是：$\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n\}$

这里，$\Pr\{E_1\}$是为第一个元素选择的优先级恰好为第1小优先级的概率，故有

$\Pr\{E_1\}=1/n$。

方法一 引理4

假设所有优先级都不同，则过程PERMUTE-BY-SORTING产生的输入是均匀随机排列的

证明：

对于i=2,3,..,n，一般有:

$$\Pr\{E_i | E_{i-1} \cap E_{i-2} \cap \ldots \cap E_1\} = 1/(n-i+1).$$

即：给定元素A[1]到A[i-1]的前i-1个小的优先级，在剩下的n-(i-1)个元素中，每个都有可能是第i小优先级，而恰好选中第i小优先级的概率是1/(n-i+1)。

方法一 引理4

假设所有优先级都不同，则过程PERMUTE-BY-SORTING产生的输入是均匀随机排列的

证明：

最终有：

$$\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n!}$$

说明获得等同排列的概率是1/n!。

因此PERMUTE-BY-SORTING过程能产生一个**均匀随机排列**

引理4 扩展

上述证明过程，对任何优先级的排列都有效

- 考虑集合{1,2,..,n}的任意一个确定排列

  $\sigma = <\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)>$。

- 由于优先级各不相同，所以可以重新定义映射：$r(\sigma(i)) \to i$。

- 定义E_i为“**元素A[i]分配到优先级是第σ(i)小的事件**”，则其等价于“**元素A[i]分配到优先级是第r(σ(i))小的事件**”，从而还原到“**元素A[i]分配到第i小优先级**”的情形，所以同样的证明仍适用。

- 因此，如果要计算得到任何特定排列的概率，该计算与前面的计算完全相同，于是得到此**排列的概率也是1/n!**。

随机生成数组 方法二

原址排列给定数组。第i次迭代时，元素A[i]从元素A[i]到A[n]中随机选取

RANDOMIZE-IN-PLACE(A)

```
n = A.length
for i = 1 to n
    swap A[i] with A[RANDOM(i, n)]
```

第i次迭代后，A[i]不再改变

方法二 引理5

过程RANDOMIZE-IN-PLACE可计算出一个均匀随机排列

```
RANDOMIZE-IN-PLACE(A)
1  n = A.length
2  for i = 1 to n
3       swap A[i] with A[RANDOM(i, n)]
```

第i次迭代后，A[i]不再改变

证明：使用循环不变式来证明该过程能产生一个均匀随机排列。

作业：

当人数达到多少，可使得这些人中有相同生日的可能性达到50%?