● 静电场基本性质

- 高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$ 有源场
- 环路定理：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ 无旋场

● 电势差和电势（电位）

1. 电势差、电势的定义：

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V_p = \int_p^{V=0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

● 点电荷的电势

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$(V_\infty = 0)$

2. 电势的计算

1）定义法

$$\boxed{V_p = \int_p^{V=0} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$A = q\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = q(V_a - V_b)$$

2) 叠加法

$$\boxed{V_P = \sum_i V_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

$$\boxed{V_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

注意：

1º 电场中某点的“V”由场源电荷及场点位置决定，与q_o无关。

2º 电势是标量，有正、负。

3º 电势是相对量，是相对于$V=0$ 处而言。
原则上可选电场中任意一点的电势为零。

一般地：

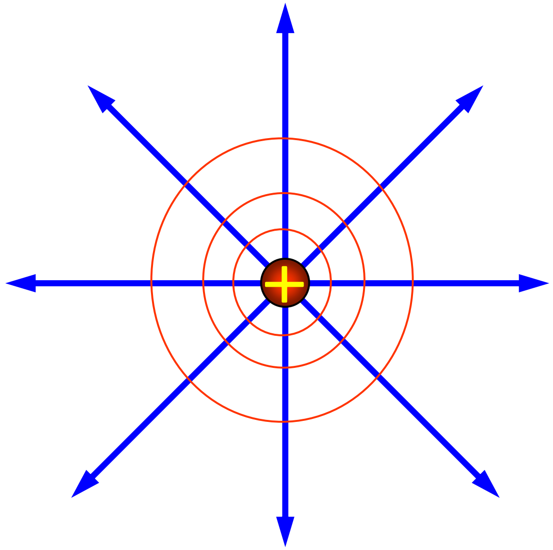
理论上，电荷分布在有限空间，取无穷远为 $V=0$ 点。
电荷分布在无限空间，取有限远点为$V=0$ 点。

工程上，通常选大地或设备外壳为$V=0$ 点。

3. 等势面

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电场中所有电势相等的点构成的曲面称为**等势面**（实验可测定）。



等势面与电场分布的关系:

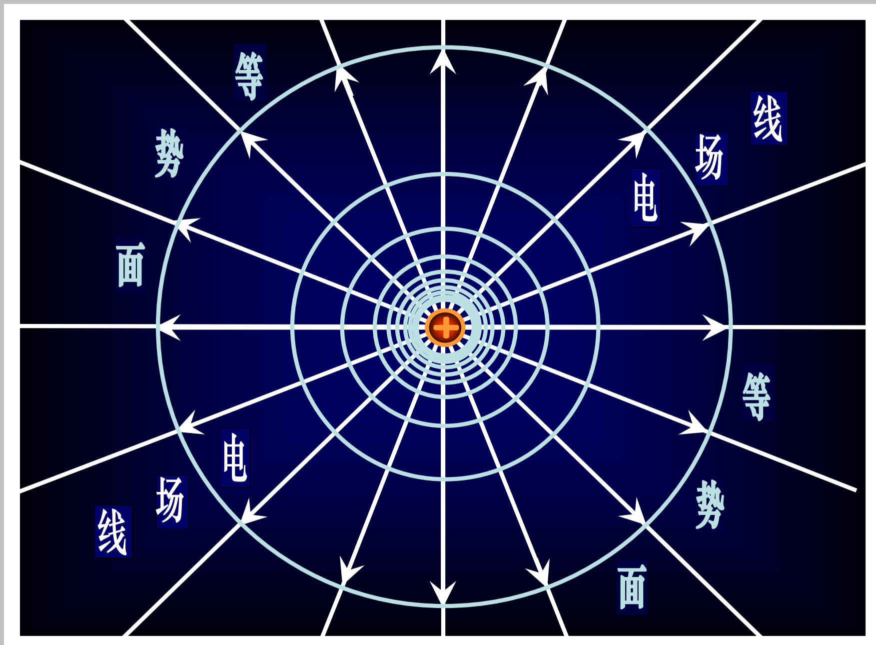
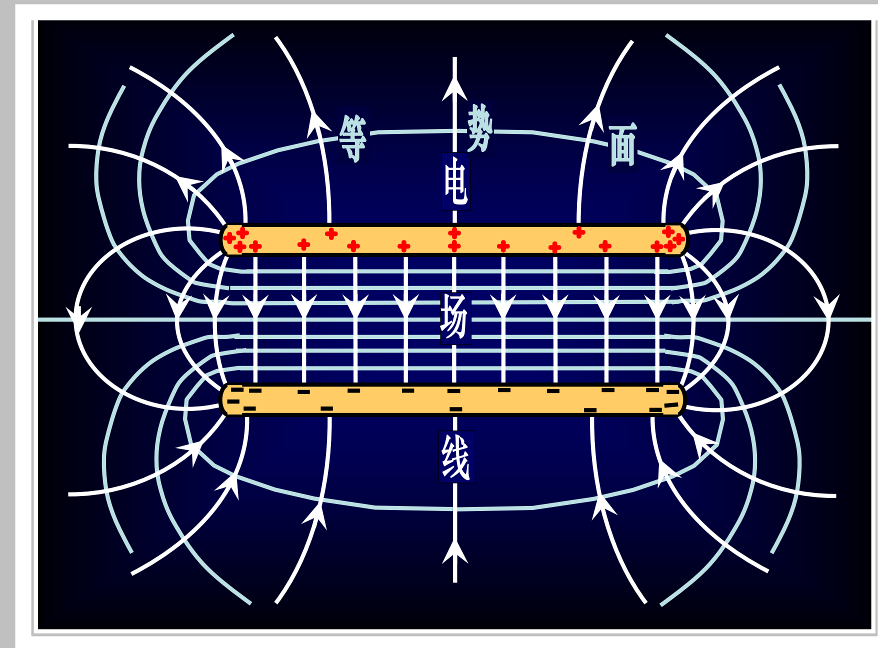
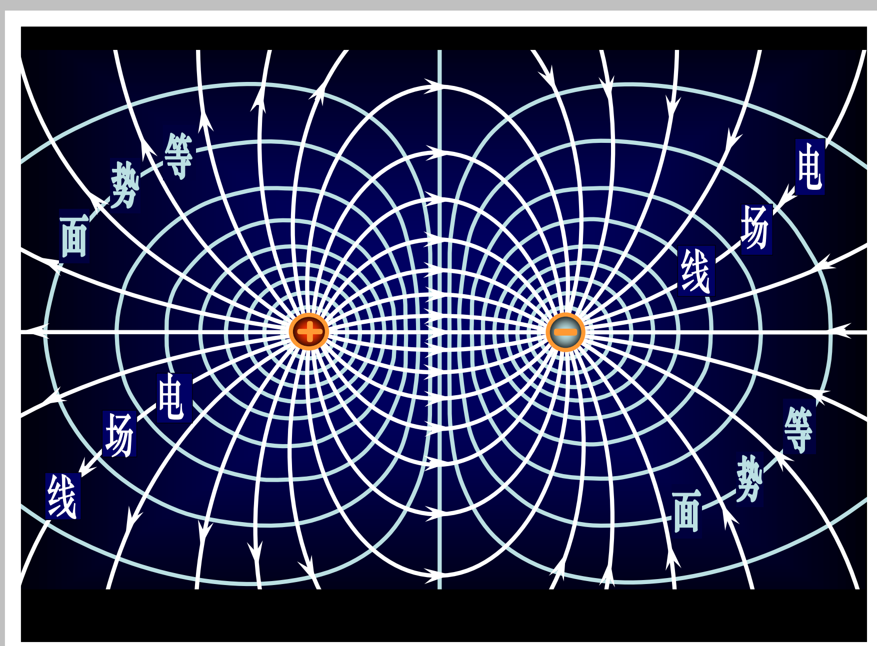
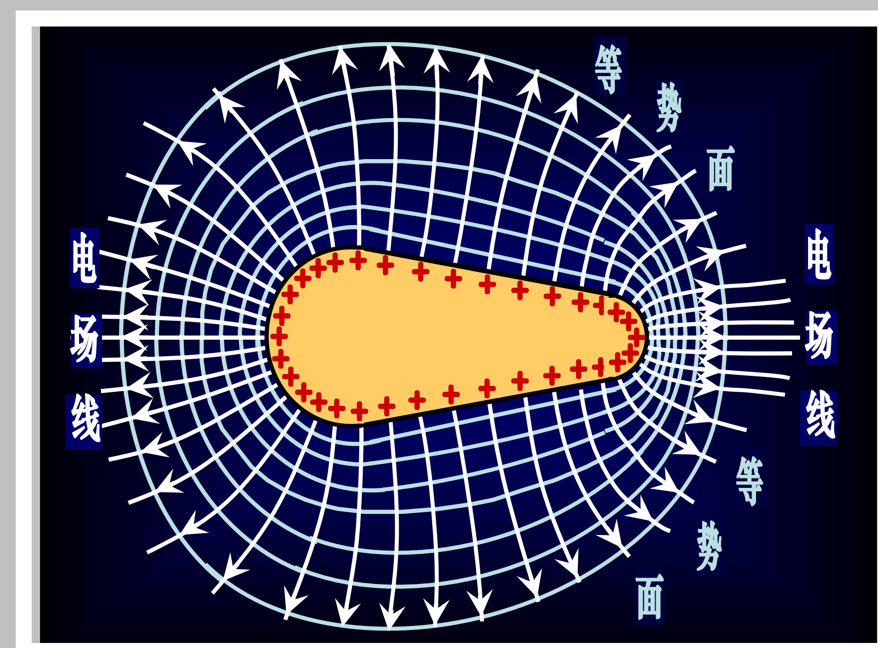
（1）电场线与等势面处处正交;

（2）电场线指向电势降低的方向;

（3）当相邻等势面电势差相等时,
等势面密处的场强大，疏处的场强小。

（4）在同一等势面上移动电荷, 电场力不做功。

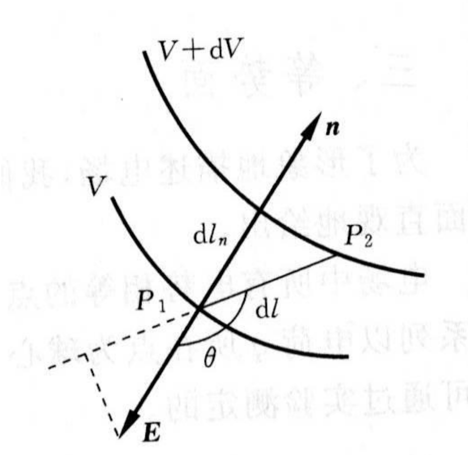
$$A_{ab}=q(V_a-V_b)$$


等势面
电场线
等势面
电场线

等势面
电场线

等势面
电场线
电场线
等势面

等势面
电场线
电场线
等势面

4. 电势梯度(grad V)

$\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$ 表示$\vec{E}$与V的积分关系。

考虑电场中任意两个相距很近的点P_1、P_2的电势差。



$$V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

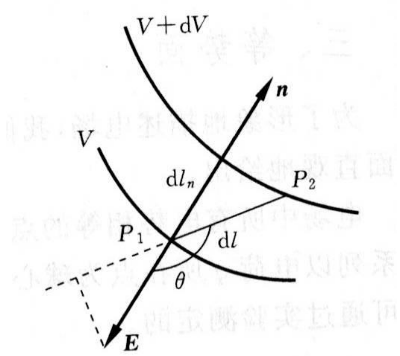
$$V_{P_1} - V_{P_2} = -\mathrm{d}V$$

$$-\mathrm{d}V = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E\mathrm{d}l\cos\theta$$

即 $$E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$

沿P_1、P_2的连线方向上的场强分量的大小。

P_1、P_2为电场中任意两个相距很近的点。



$$E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$

沿P_1、P_2的连线方向上的场强分量的大小。

若P_1、P_2沿x轴方向，则有 $\begin{cases} E\cos\theta = E_x \\ \mathrm{d}l = \mathrm{d}x \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{亦即}\quad E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\ &\text{同理}\quad E_y = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} \\ &\qquad\quad\ E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{改写}]{V=V(x,y,z)} \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

又 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$

故：

$$\begin{cases} E_x=-\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y=-\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z=-\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{E}=-(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})$$

$$=-(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k})V$$

$$=-gradV=-\nabla V$$

电势梯度

$\boxed{\vec{E}=-gradV}$ $\boxed{\vec{E}=-\nabla V}$ (电场强度与电势的微分关系)

电场中某点的场强$\vec{E}$等于该点电势梯度的负值。

据此，可根据电势分布计算电场强度。

前面已有场强叠加原理、高斯定理等两种计算电场强度的方法。

$$E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$

电势沿$\boldsymbol{P_1}\ \boldsymbol{P_2}$方向的空间变化率

此变化率的大小随方向而变,当θ=0时最大。

$$E = -\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}\right|_{\max}$$

故，场强的大小是$\boldsymbol{P}$点附近电势的最大空间变化率。

$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{grad}V}$ → 电场中某点处的电势梯度，是该点处电势的最大空间变化率。

电势的梯度与场强的关系(数学推导)：

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$V_a - V_b = -(V_b - V_a) = -\Delta V_{ab}$$

$$= -\int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore -\mathrm{d}V = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k})$$

$$= E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z$$

$$-\mathrm{d}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z$$

$$\left(E_x + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(E_y + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(E_z + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = 0$$

$$\therefore\ E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\therefore\ \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V$$

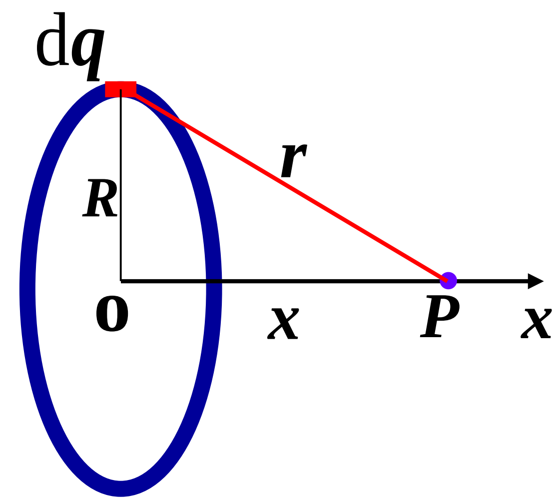
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\therefore\ \vec{E} = -\nabla V = -\mathrm{grad}\, V$$

$$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\therefore\ E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

例： 求均匀带电Q，半径为R的圆环轴线上任意一点的场强。



解： 根据电势叠加原理，

P点的电势

$$V_P = \int_Q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

P点的电场：$\vec{E}_P = -(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})$

0

$$\therefore \vec{E}_P = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$$

即，沿x轴方向。

七、静电场中的导体

实物：
- 导体
- 半导体
- 电介质(绝缘体)

1. 导体的静电平衡

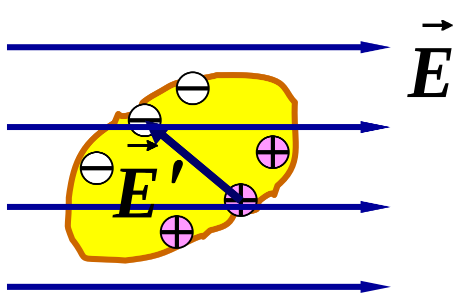
导体在电场中的特点：

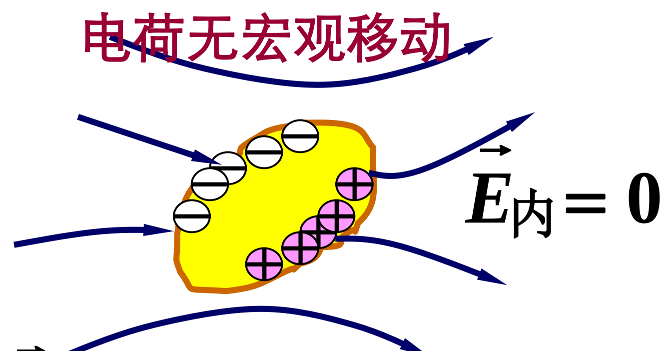
(1) 导体内的自由电荷在电场力作用下移动，使原有的电荷分布发生变化。

(2) 电荷分布的变化，反过来影响总的电场分布。

例如：在均匀场放入一导体。

表面出现感应电荷





电荷积累到一定程度 $\vec{E}'=-\vec{E}$　　达静电平衡

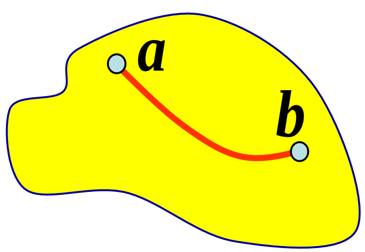
2. 导体的静电平衡条件

导体表面和内部都没有电荷的定向运动

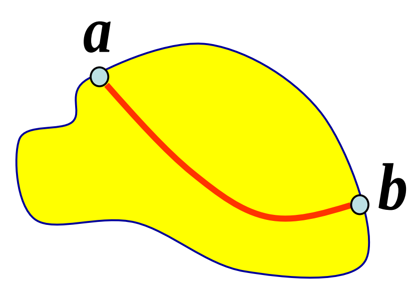
$$\text{静电平衡条件}\begin{cases}\text{导体内部}\ \vec{E}=0\\ \text{外表面}\ \vec{E}\perp\text{表面}\end{cases}\quad\text{（反证法）}$$

另一种说法:导体是等势体,并且导体表面是等势面。

证明:



$$V_a=V_b$$



$$V_a-V_b=\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

3. 静电平衡时导体上的电荷分布

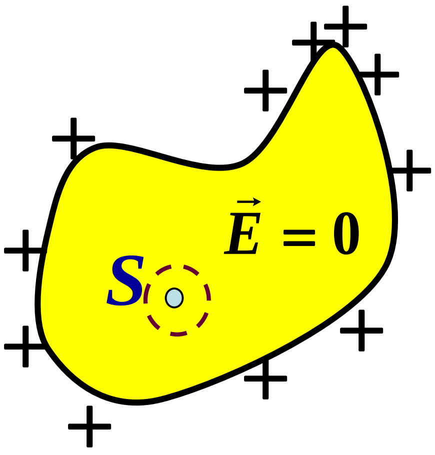
（1）导体内部没有净电荷, 电荷分布在外表面上。

证明：*a.* 体内无空腔

在导体内任选一点，作高斯面S将其包围。

根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$



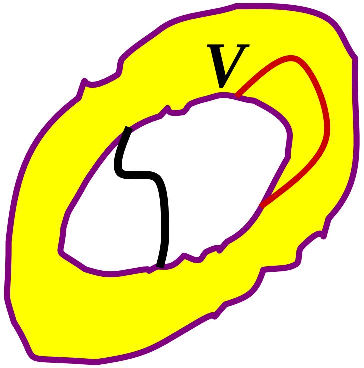
已知静电平衡时,
导体内部各处 $\vec{E} = 0$

那么 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$ 则有 $\sum_{S内} q_i = 0$

∴ 导体内部没有净电荷。

b. 体内有空腔，腔内无其它带电体

$$\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

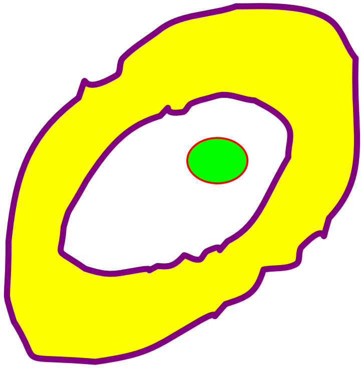


电荷全分布在导体外表面上。

在静电平衡下,内表面是等势面。

因为内表面上任意两点可用经过导体内部的路径连接。故电势必定相等。

若内表面上有电荷，则根据电场线的性质，必定会得出与上面相矛盾的结论。



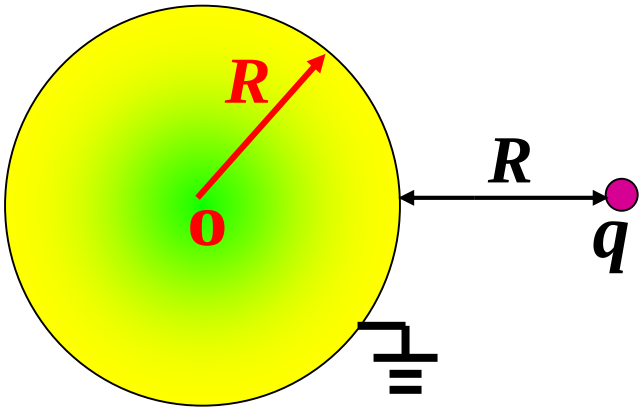
$\therefore$电荷全分布在导体外表面上。

且在空腔内，电场处处为零。

若腔内有其它带电体,则内表面上也有电荷。

例： 半径为R的金属球与地相连接，在与球心相距$d=2R$处有一点电荷$q(>0)$，问球上的感应电荷 $q'=?$

解： 金属球是等势体。



球体上处处电势：$V=0$

球心处： $V_o=0$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2R}+\int_0^{q'}\frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

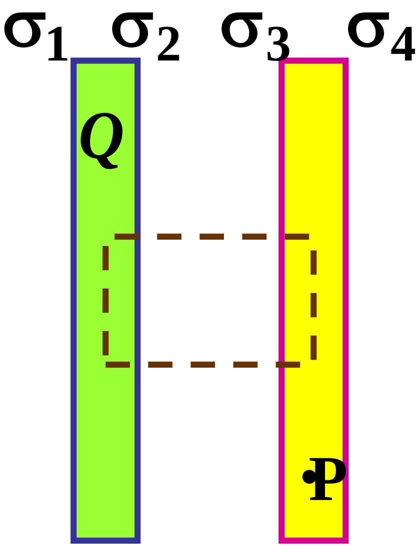
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2R}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0 \qquad \therefore q'=-\frac{q}{2}$$

实际上，以上取了$V_{地}=V_{\infty}=0$.

例： 一金属平板，面积为S带电Q，在其旁放置第二块同面积的不带电金属板。求 (1)静电平衡时，电荷分布及电场分布。 (2)若第二块板接地？忽略边缘效应。

注： 1)达静电平衡，导体内部无净电荷。

2)不考虑边缘效应，电荷是均匀分布。



解： (1)设四个面上电荷面度为 σ_1 σ_2 σ_3 σ_4

则有： $\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S}$

$\sigma_3+\sigma_4=0$

如图取高斯柱面可得： $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=0$ $\quad \sum q_i=0$

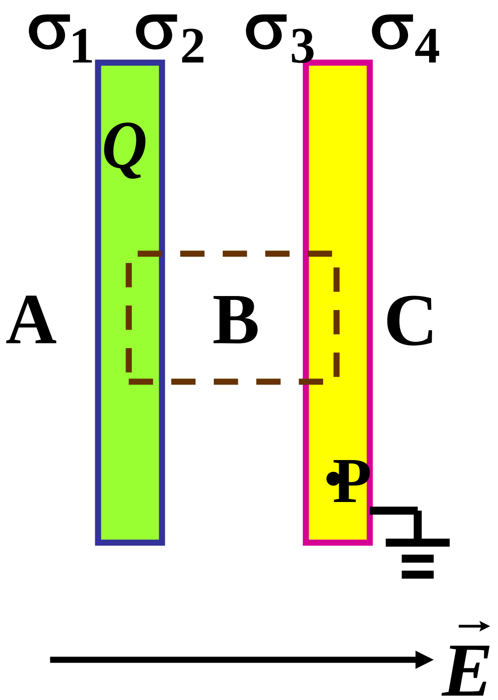
即： $\sigma_2+\sigma_3=0$

导体内任意一点P，其电场 $\vec{E}=0$

$$\therefore \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

联立求解

可得： $\sigma_1=\sigma_2=\dfrac{Q}{2S}$ $\quad \sigma_3=-\dfrac{Q}{2S}$ $\quad \sigma_4=\dfrac{Q}{2S}$



$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{Q}{2S}\qquad \sigma_3=-\frac{Q}{2S}\qquad \sigma_4=\frac{Q}{2S}$$

按场强叠加原理可求得：

$$E_A=-\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\qquad E_B=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\qquad E_C=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

(2)第二板接地

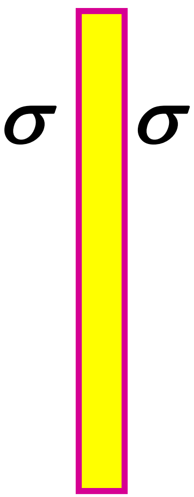
则σ_4与大地构成一导体 $\sigma_4=0$

同理可得：
$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S}\\ \sigma_2+\sigma_3=0\\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0\end{cases}$$

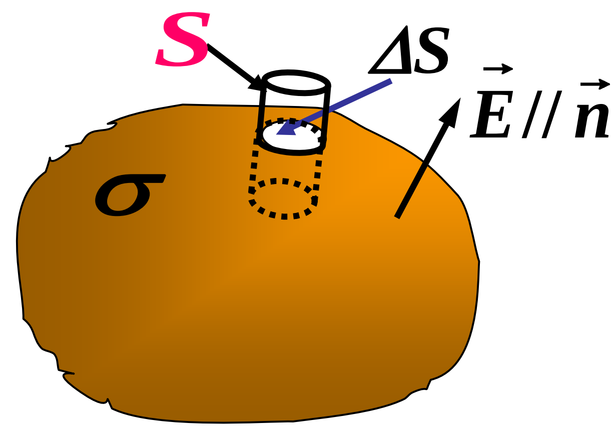
联立求解得：$\sigma_1=0\qquad \sigma_2=\dfrac{Q}{S}\qquad \sigma_3=-\dfrac{Q}{S}$

$$E_A=E_C=0\qquad E_B=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

（2）导体表面附近$\vec{E}$的大小与该处的面电荷密度σ成正比



证明：如图取高斯面S



根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

则有

$$E \Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta S$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

矛盾？

一致！

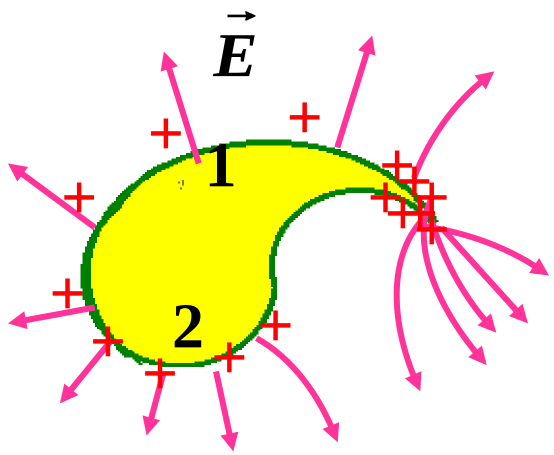
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

1 °$\vec{E}$ 是导体表面电荷及外面电荷的合场强！

2 °上式并不给出σ的分布。σ的分布较复杂。

一般导体的电荷分布与其形状及附近的其它带电体有关。

（3）孤立导体表面上各处的面电荷密度σ与各处表面曲率半径R成反比



即：$\sigma \propto \dfrac{1}{R}$

如右图中1、2两处的面密度分别为σ_1、σ_2

则有 $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$

平坦处：R大 σ 小，则E 小；

尖端处：R 很小，σ很大，则E 很强；→ 尖端放电

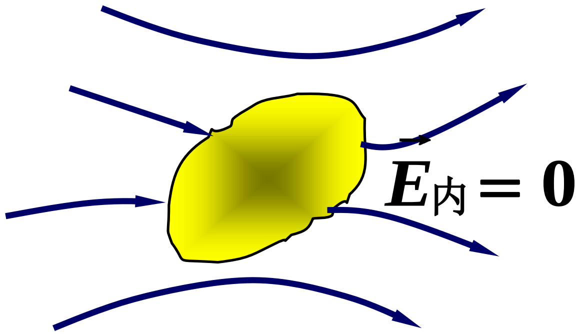
凹面处：曲率为负值，σ很小，则E 很弱。

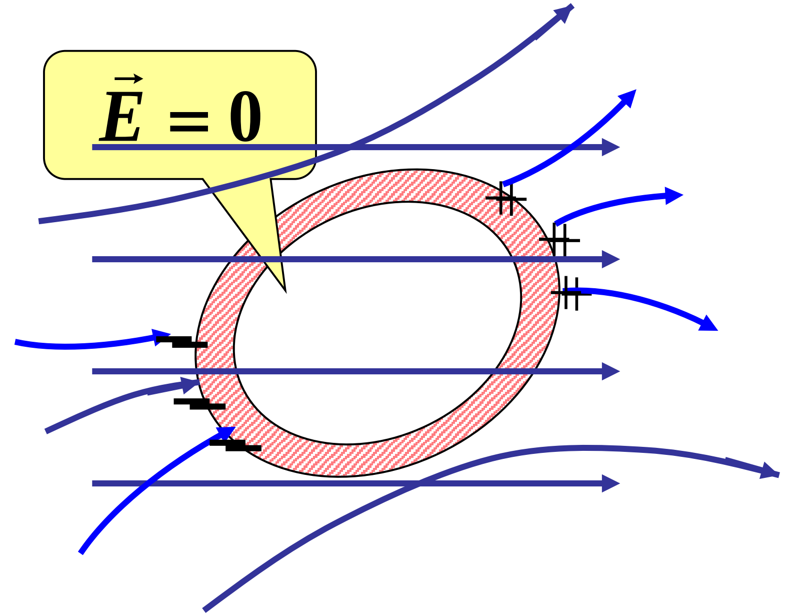
4. 静电屏蔽

导体壳：（静电平衡时）

（1）腔内无带电体情况

- 内表面无电荷
- 腔内 $\vec{E}=0$（无场区）



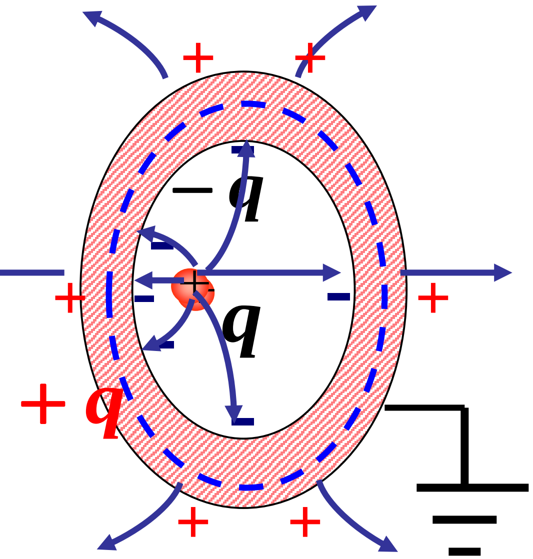


外部电场不影响内部

——静电屏蔽。

→ 屏蔽外场

（2）腔内有带电体情况



导体壳感应带电：

内表面电荷与腔内电荷等值异号

（用高斯定理可证明）

外表面电荷与腔内电荷等值同号

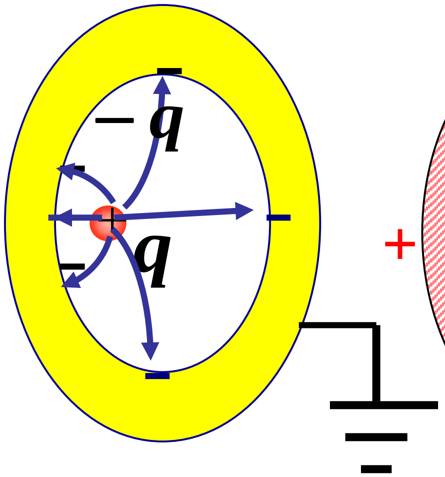
（若导体壳带电*Q* 则外表面上电荷为 *Q*+*q* ）

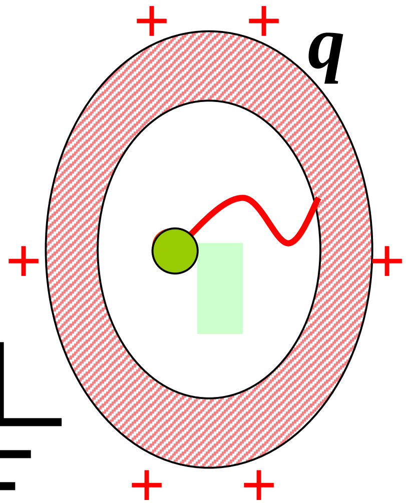
导体壳接地：

内部电场不影响外部

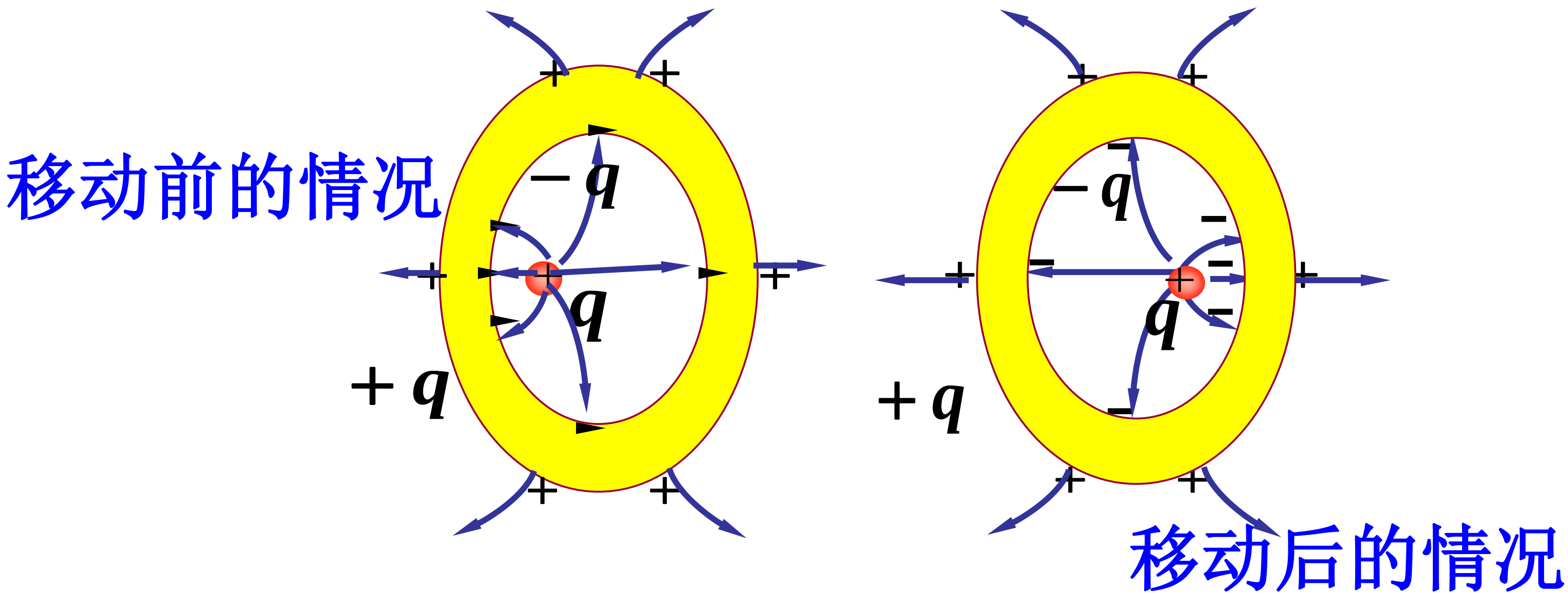
——静电屏蔽。

→屏蔽内场





腔内电荷q 移动时：



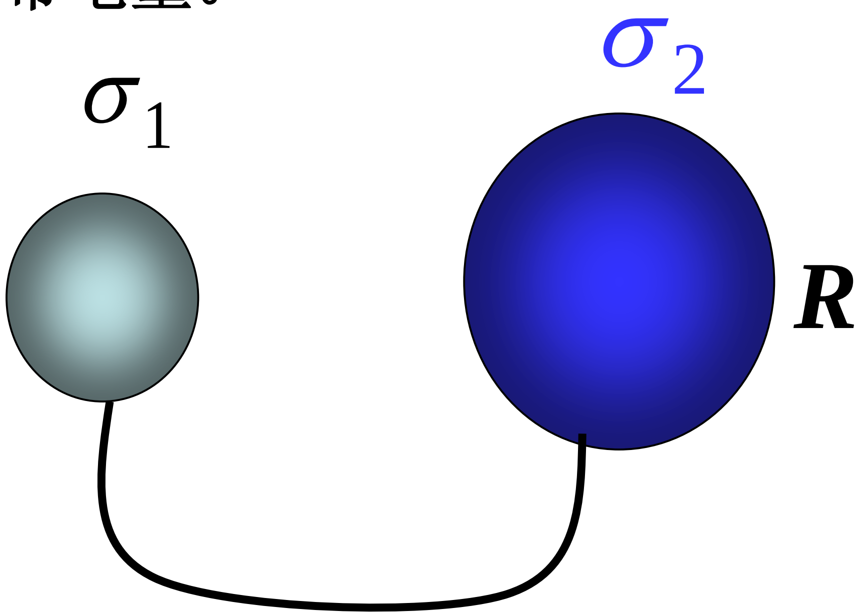
内表面带电总量"$-q$"不变，

$\sigma_{内}$ 改变，腔内电场分布情况改变。

外表面带电总量"$+q$"不变，

$\sigma_{外}$ 不变，壳外电场分布不变。

例：如图所示，两个相距很远的、半径分别为r 和R 的带电导体球由一根细导线连接在一起。已知两者总的带电量为Q。试比较两带电球的电荷面密度的大小及带电量。



解：设两球的电荷面密度分别为σ_1和σ_2。

因相距很远，两球上的电荷都是均匀分布于外表面。

两球由导线连接，所以两者的电势相等，即$V_1=V_2$。

$$V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma_1\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\sigma_1\cdot r/\varepsilon_0$$

$$V_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma_2\cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\sigma_2\cdot R/\varepsilon_0$$

$$\therefore \sigma_1\cdot r=\sigma_2\cdot R$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{R}{r}>1$$

可见，曲率大处电荷密度大

作业：6 —T14、T15、T16

本次课重点：

1.静电场的电介质与计算

2.静电场中导体的特征