第二章　逻辑代数

秦磊华　计算机学院

问题提出：

1.为什么要引入逻辑代数?

- ■代数的作用：使一个含有未知量的数学问题得到解决(有规律、有方法);
- ■逻辑代数的作用：？

2.逻辑代数有哪些规则?

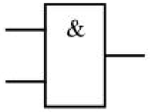
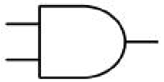
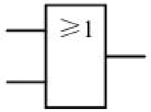
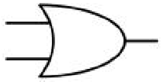
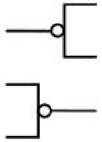
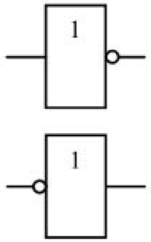
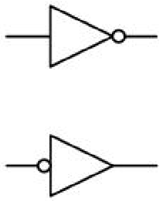
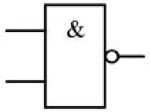
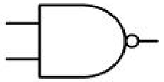
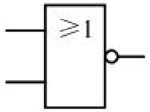
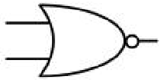
3.逻辑代数有哪些表现形式?

4.逻辑代数如何应用?

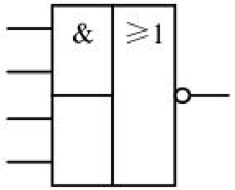
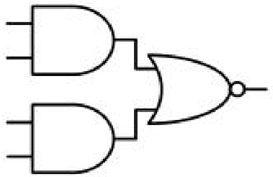
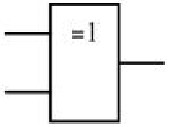
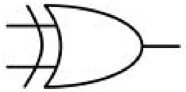
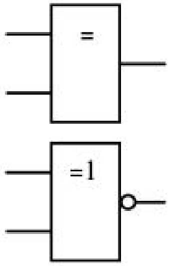
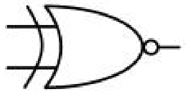
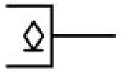
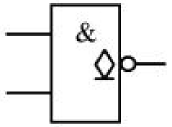
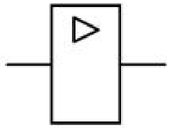
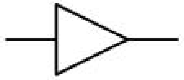
一个由逻辑变量集K，常量0和1以及“或”、“与”、“非”三种基本运算所构成的封闭系统L={K,+,·,¯,0,1}。

- 常量：0,1分别表示逻辑值为假和真；
- 变量：变化的逻辑量（取值不同于一般代数中的取值范围）

2.1 逻辑代数的基本概念

序号	名称	GB/T 4728.12-1996		国外流行图形符号
		限定符号	国标图形符号	
1	与门	&		
2	或门	≥1		
3	非门	 逻辑非入和出		
4	与非门			
5	或非门			

2.1 逻辑代数的基本概念

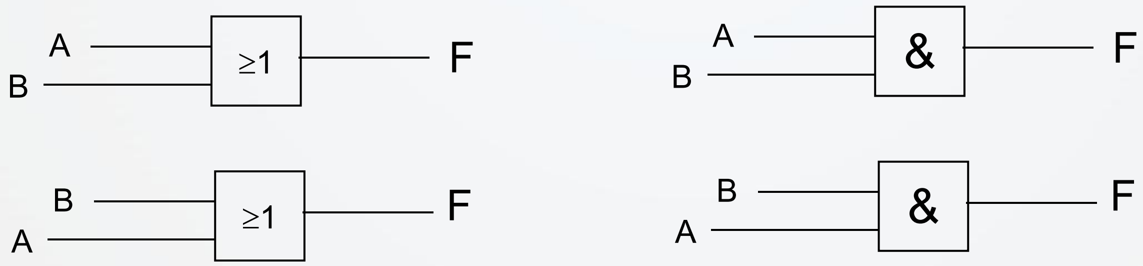
6	与或非门			
7	异或门	=1		
8	同或门	=		
9	集电极开路 OC 门、漏极开路 OD 门	 L 型开路输出		
10	缓冲器			

2.1 逻辑代数的基本概念

公 理 1　交 换 律

对于任意逻辑变量A、B，有

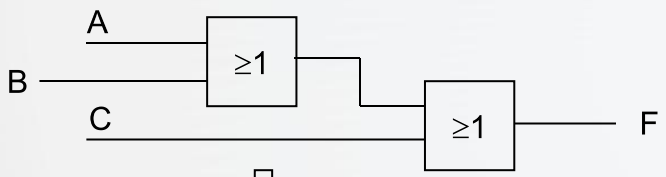
$A + B = B + A$ ；　　　$A \cdot B = B \cdot A$

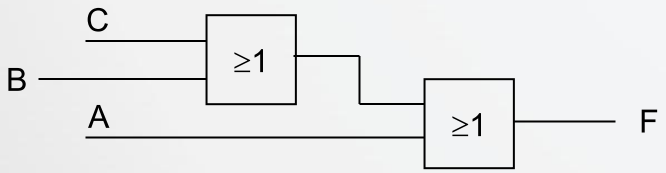


公理 2 结合律

对于任意的逻辑变量A、B、C，有

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$





?

2.1 逻辑代数的基本概念

公 理 3　　分 配 律

对于任意的逻辑变量A、B、C，有:

$$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)\ ;\ A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

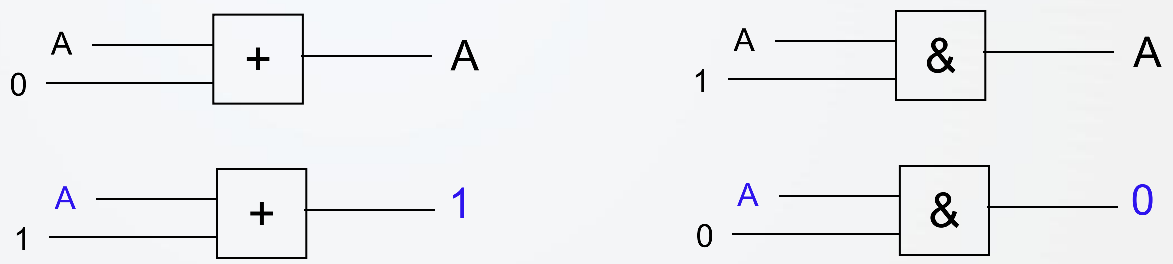
- 画图
- 工程意义?

公 理 4　　0—1 律

对于任意逻辑变量A，有

$$A + 0 = A \quad ; \quad A \cdot 1 = A$$

$$A + 1 = 1 \quad ; \quad A \cdot 0 = 0$$



重要结论！ 关于逻辑门封锁与开放

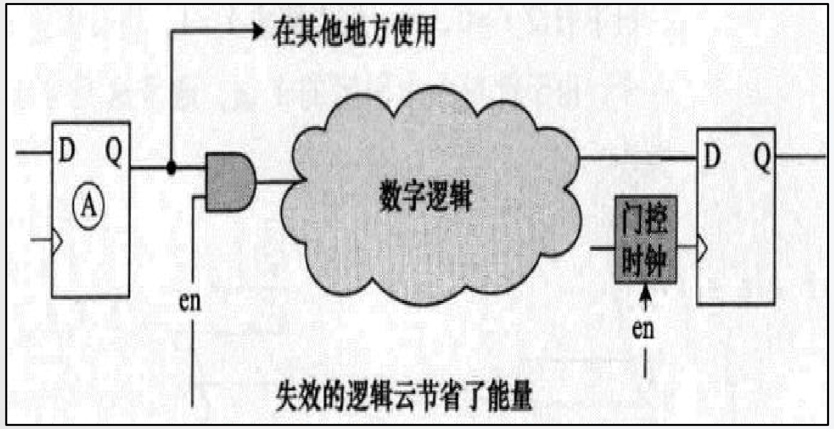
2.1 逻辑代数的基本概念

公 理 4　　0—1 律

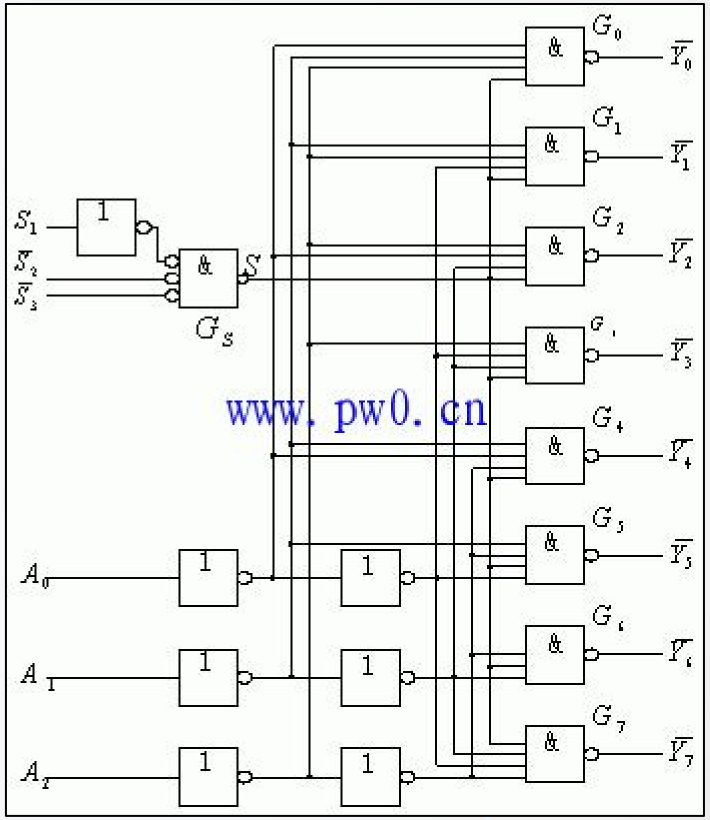
对于任意逻辑变量A，有

$$A + 0 = A \quad ; \quad A \cdot 1 = A$$

$$A + 1 = 1 \quad ; \quad A \cdot 0 = 0$$



74LS138：3-8译码器

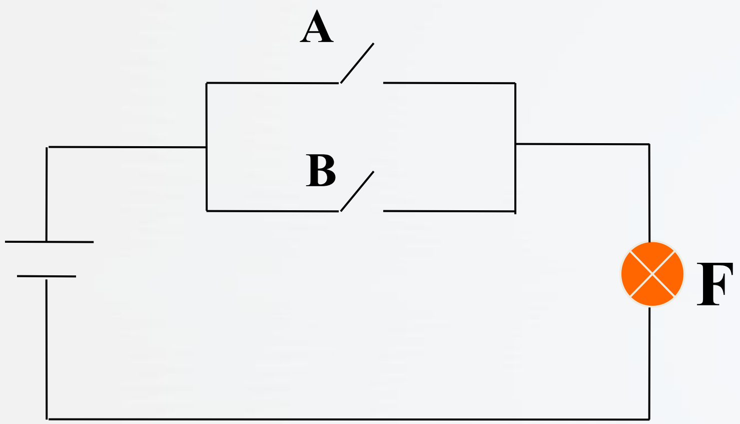


公 理 5　　互 补 律

对于任意逻辑变量A，存在唯一的$\overline{A}$，使得

$$\overline{A}+A=1 \qquad \overline{A}\cdot A=0$$

1) 基本逻辑运算-或运算



"或"运算表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$F = A + B$ 或者 $F = A \vee B$

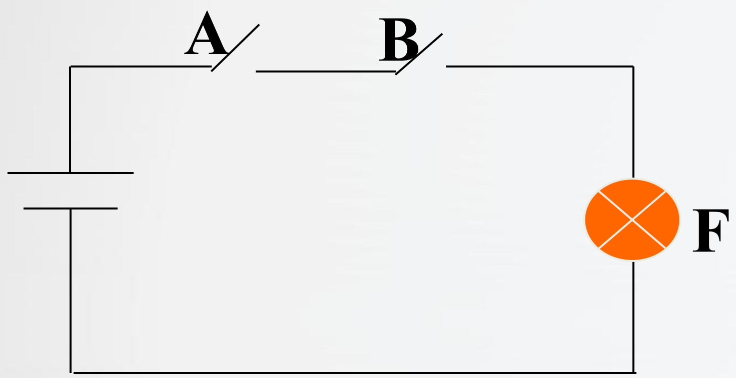
"或"运算法则：

$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$

或门

2) 基于逻辑运算-与运算



“与”运算表		
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$F = A \cdot B$ 或者 $F = A \wedge B$

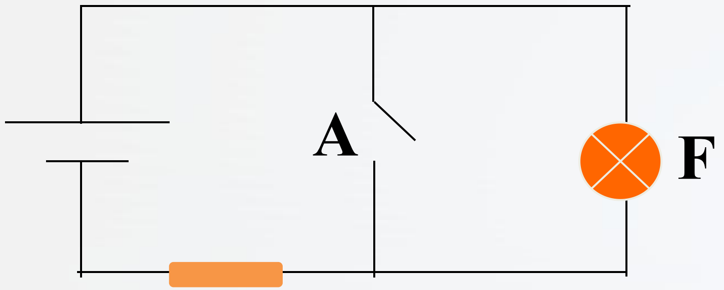
“与” 运算法则：

$0 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$

与门

3) 基于逻辑运算-非运算



“非”运算表

A	F
0	1
1	0

$F = \overline{A}$

“非”运算法则：

$\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$

非门

4) 符合逻辑运算-与非逻辑 $F=\overline{A\cdot B\cdot C\cdots}$

$F=\overline{\overline{A\cdot B}\cdot 1}=\overline{\overline{A\cdot B}}=A\cdot B$ 与门 使用2个与非门

$F=\overline{\overline{A\cdot 1}\cdot\overline{B\cdot 1}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A+B$ 或门 使用3个与非门

$F=\overline{A\cdot 1}=\overline{A}$ 非门 使用1个与非门

因此，与非门又称为通用门

5)复合逻辑运算-或非逻辑

$$F=\overline{A+B+C+\cdots}$$

$$F=\overline{\overline{A+0}+\overline{B+0}}=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$$ 与门 使用3个或非门

$$F=\overline{\overline{A+B}+0}=\overline{\overline{A+B}}=A+B$$ 或门 使用2个或非门

$$F=\overline{A+0}=\overline{A}$$ 非门 使用1个或非门

或非门同样是通用门

6)复合逻辑运算-异或运算

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$A \oplus 0 = A \qquad A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \oplus A = 0 \qquad A \oplus \overline{A} = 1$$

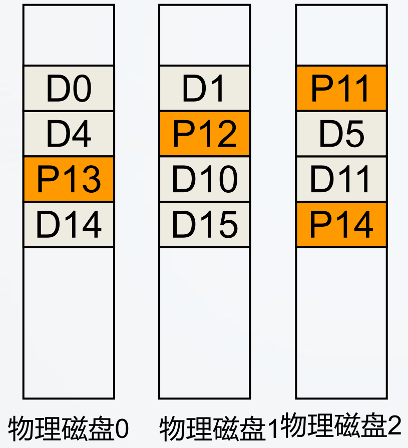
异或运算是两变量运算，若需多变量进行异或运算如何进行?

$$\mathbf{F = A \oplus B \oplus C \oplus D = (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)}$$

或 $\mathbf{[(A \oplus B) \oplus C] \oplus D}$

6)复合逻辑运算-异或运算

磁盘阵列:(Redundant Arrays of Independent Disks, RAID)
(Redundant Arrays of Inexpensive Disks, RAID)



$1 \oplus 1=0 \quad 1= 1\oplus 0$

7)复合逻辑运算-同或运算

$$F = A \odot B = \overline{A} \cdot \overline{B} + AB$$

定理1

$$0+0=0 \quad 1+0=1 \qquad 0\cdot 0=0 \quad 1\cdot 0=0$$

$$0+1=1 \quad 1+1=1 \qquad 0\cdot 1=0 \quad 1\cdot 1=1$$

定理的证明只能使用前面出现的公理:

交换律(1)、结合律(2)、分配律(3)、0-1律(4)、互补律(5)

定理2　　$A + A = A$　；　$A \cdot A = A$　等幂律

证明　$A + A = (A + A) \cdot 1$　　公理4

$= (A + A) \cdot (A + \overline{A})$　　公理5

$= A + (A \cdot \overline{A})$　　公理3

$= A + 0$　　公理5

$= A$　　公理 4

定理3 $A + A \cdot B = A$ ；$A \cdot (A + B) = A$ 吸收律(项、变量)

证明 $A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B$ 公理4

$= A \cdot (1+B)$ 公理3

$= A \cdot 1$ 公理4

$= A$ 公理4

证明 $A \cdot (A+ B) = A \cdot A + A \cdot B$ 公理3

$= A + A \cdot B$ 定理2

$= A$ 定理1（前式）

定理4 $A + \overline{A} \cdot B = A + B$ $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$ 消去律

证明

$$
\begin{aligned}
A + \overline{A}B &= (A + \overline{A}) \cdot (A + B) && \text{公理3} \\
&= 1(A + B) && \text{公理5} \\
&= A + B && \text{公理4}
\end{aligned}
$$

请仿效证明定理4的第二式

定理5 $\overline{\overline{A}} = A$

证明　　令　$\overline{\overline{A}} = X$

因而　　$\overline{A} \cdot X = 0$　　$\overline{A} + X = 1$

但是　　$\overline{A} \cdot A = 0$　　$\overline{A} + A = 1$

根据公理 5的唯一性有：　$X = A$

定理6 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$　　$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$　　摩根定理

证明　由于 $(\overline{A}\cdot\overline{B})+(A+B)=(\overline{A}\cdot\overline{B}+A)+B$　　公理2

$=(\overline{B}+A)+B$　　定理4

$=A+(\overline{B}+B)$　　公理1,2

$=A+1$　　公理5

$=1$　　公理4

而且 $(\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot(A+B)=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot A+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot B$　　公理2

$=0+0$　　公理1,5

$=0$　　定理1

根据公理5的唯一性可得　$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

定理7 $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$　　$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$　　并项律

证明

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \cdot (B + \overline{B}) \quad \text{公理3}$$

$$= A \cdot 1 \quad \text{公理5}$$

$$= A \quad \text{公理4}$$

定理8 $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$ $(A+B) \cdot (\overline{A}+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (\overline{A}+C)$

证明

$$
\begin{aligned}
& A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \cdot (A + \overline{A}) && \text{公理 } 5 \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \cdot A + B \cdot C \cdot \overline{A} && \text{公理 } 3 \\
&= A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C && \text{公理 } 1 \\
&= A \cdot B(1 + C) + \overline{A} \cdot C(1 + B) && \text{公理 } 3 \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C && \text{公理 } 1,4
\end{aligned}
$$

$$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C) = (A+B)\cdot(\overline{A}+C)$$

$$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C)$$

$$= (A+B)(\overline{A}+C)(A+B+C)(\overline{A}+B+C)$$ 定理7

$$=(A+B)\ (A+B+C)(\overline{A}+C)(\overline{A}+B+C)$$

$$=(A+B)(\overline{A}+C)$$ 定理3

2.3 基本定理和规则

规则1：代入规则

♦任何一个含有变量A的逻辑等式,如果将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数F,则等式仍然成立;

♦代入规则的正确性：任何逻辑函数都和逻辑变量一样，只有0和1两种可能的取值;

♦ $A(B+C)=AB+AC \quad \rightarrow A〔B+(C+D)〕= AB+A(C+D)$;

♦代入规则的意义：可将逻辑代数公理、定理中的变量用任意逻辑函数代替，推导出更多的等式;

♦ 代入规则使用时必须注意同一变量的全代入。

规则2：反演规则

- 将逻辑函数表达式F中所有的“·”变成“+”，“+”变成“·”；“0”变成“1”，“1”变成“0”；原变量变成反变量，反变量变成原变量。保持原函数中运算顺序不变，得到的新函数为原函数的反函数 $\overline{F}$ 。

即：“·” ⇄ “+”，“0” ⇄ “1”，原变量 ⇄ 反变量

$$F = \overline{A} \cdot B + C \cdot \overline{D}$$
$$\overline{F} = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + D)$$

2.3 基本定理和规则

规则3：对偶规则

♦若将逻辑函数表达式F中所有的“·”变成“+”，“+”变成“·”，“0”变成“1”，“1”变成“0”，并保持原函数中的运算顺序不变，则所得到的新的逻辑表达式称为函数F的对偶式，并记作F’

$$F = AB + \overline{B}(C + 0) \quad ; \quad F' = (A + B)(\overline{B} + C \cdot 1)$$

♦若两个逻辑函数表达式F和G相等，则其对偶式F’和G’也相等；利用对偶规则可以使定理、公式的证明减少一半。

$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$; $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ 公理3

定理8 $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A \cdot \overline{C}$ $(A+B) \cdot (\overline{A}+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (\overline{A}+C)$

1.逻辑函数的定义

$$F = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

- 逻辑函数和逻辑变量一样，取值只有0和1两种可能；
- 函数和变量之间的关系："或"、"与"、"非"；
- 任何逻辑电路的功能都可由相应的逻辑函数完全描述，故可借助逻辑代数表达式分析研究电路。

2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

1)逻辑表达式

$$F = f(A, B) = \overline{A}B + A\overline{B}$$

逻辑表达式中的运算优先级

$$(\,) \longrightarrow - \longrightarrow \cdot \longrightarrow \oplus \longrightarrow +$$

高 $\longrightarrow$ 低

2.逻辑函数的表示方法

2) 真值表

$$F = A\overline{B} + \overline{A}C$$

函数F的真值表

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

寻找快速填写真值表的方法！

2.逻辑函数的表示方法

3) 卡诺图

B \ A	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
1	$\bar{A}B$	AB

$$F = \bar{A}B + A\bar{B} \Longrightarrow$$

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	0

- 卡诺图是由逻辑变量所有取值组合的小方格所构成的平面图;
- 用图形描述逻辑函数的方法，在逻辑函数化简中十分有用;

2.逻辑函数的表示方法

3) 卡诺图

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

$$F = \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

$\Longrightarrow$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	0	0

2.逻辑函数的表示方法

3) 卡诺图

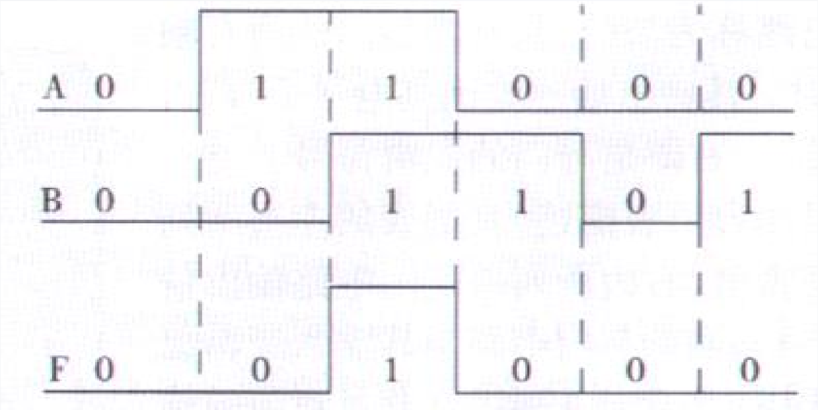
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	0	1	0

$$F(A,B,C,D)=AB+CD+\overline{A}\overline{B}C$$

2.逻辑函数的表示方法

4) 波形图



F=AB