

密级:_____



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

多轴数控加工中的最优轨迹生成与误差控制

作者姓名: _____ 张可

指导教师: _____ 高小山 研究员

_____ 中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: _____ 理学博士

学科专业: _____ 应用数学

研究所: _____ 数学与系统科学研究院

2013 年 5 月



**Optimal Trajectory Generation and Error Control in
Multi-Axis CNC Machining**

**By
Ke Zhang**

**A Dissertation Submitted to
The University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Doctor of Science**

**Academy of Mathematics and Systems Science
May, 2013**



摘 要

本论文针对多轴数控加工中的最优轨迹生成及误差补偿问题提出了一些新的算法,并在三轴及五轴机床上验证了其效果。

首先,在刀具路径生成方面,本文提出了具有 C^3 连续度的三轴及五轴加工样条路径拟合算法。在本算法中,刀尖位置数据被拟合为五次B样条。对于五轴加工路径,刀轴方向数据在偏转角平面进行样条拟合后被映射回球面坐标系。通过对方向样条的控点做局部微小移动,可以避免五轴机床运动学反解所产生的奇点。刀尖位置样条和刀轴方向样条的参数和弧长参数之间的非线性关系分别被近似为七次和九次的进给校正样条。实验结果显示本算法显著地减小了惯性振动。

其次,在满足分轴加速度、“加加速度”及编程进给速度的约束下,本文提出了几种新的沿样条路径加工的进给速度优化算法。文中证明了满足约束条件下的时间最优进给速度解必须满足“Bang-Bang”或“Bang-Bang-Singular”的控制结构。为了得到优化问题的解析解,本文利用相空间分析方法给出了一个基于贪心思想的速度规划算法。另外,在离散模型下,本文又给出了一个计算效率更高的数值算法。在离散成网格的 $u-v$ 相平面内,最大离散速度序列通过双向搜索被找到。利用线性规划和速度曲线拟合,本算法得到了近似时间最优的光滑进给速度曲线。我们还证明这一算法的计算复杂度线性依赖于离散网格点的数目。通过加工一条三次NURBS路径,本算法的有效性在数控系统中得到了验证。此外,利用线性规划的方法,这个离散模型得到了进一步地推广。

最后,本文提出了几种不同的减小加工误差的算法。通过在轨迹生成的过程中考虑线性反馈系统的特性,跟踪误差可以得到有效地限制。利用非线性规划算法,分轴速度、加速度、加加速度以及跟踪误差都得到了约束。特别地,对于采用PID控制的系统,跟踪误差约束被简化为对加速度和加加速度的线性组合的约束。随后,这个模型被推广到了任意阶的线性系统。此外,本文还提出了一种五轴加工中轮廓误差补偿的方法。利用跟踪误差的解析解预测模型,刀尖位置和刀轴方向的轮廓误差分别得到了有效地估计。通过在输入伺服驱动器之前修改每个轴的参考位置命令,轮廓误差得到了预补偿。在五轴机床上的实验结果表明,本算法能够显著地减小轮廓误差。

关键词：数控机床，光滑路径，速度优化，跟踪误差，轮廓误差



Abstract

This thesis presents experimentally verified optimal trajectory generation and error compensation algorithms developed for 3- and 5-axis CNC machine tools.

An overall approach is presented to interpolate 3- and 5-axis tool paths with C^3 continuity. A quintic B-spline is fitted to the tool tip position data. In order to generate 5-axis tool path, tool orientation data is first interpolated in the Cartesian plane of angles and then mapped back to spherical coordinates. The singularity due to the inverse kinematics transformation is avoided by locally moving the control points of orientation spline within a tolerance. The nonlinear relationship between spline parameters and tool tip displacement are approximated with ninth order and seventh order feed correction splines for position and orientation, respectively. The proposed method has been experimentally demonstrated to show improvements in reducing the excitation of inertial vibrations.

Different algorithms are proposed to optimize machining feedrate along 3- or 5-axis splined tool paths, under the constraints of acceleration, jerk on all drives, and a programmed constant feedrate. It is proved that the time-optimal feedrate profile must have "Bang-Bang" or "Bang-Bang-Singular" structure. To solve the problem analytically, a greedy feedrate planning algorithm based on phase space analysis is given. Furthermore, using discrete model, a computationally efficient algorithm is also presented. The maximum discrete velocity sequence is generated in the grid of u - v phase plane, followed by a linear programming strategy and velocity curve fitting that removes the acceleration discontinuities. It is proved that the computational complexity of this algorithm is linearly dependent on the number of grid. The algorithm is verified on a commercial CNC system by machining a cubic NURBS curve. In addition, a generalized algorithm using linear programming is also proposed to fulfill axis jerk constraints.

A trajectory generation scheme which yields confined tracking errors for lin-

ear systems is presented. Using a nonlinear programming strategy, the algorithm produces continuous position, velocity, and acceleration profiles, as well as limited tracking errors for each axis. For the PID controller, the tracking errors are constrained by limiting a linear combination of acceleration and jerk. Experimental results show that the tracking errors can be appropriately reduced with the costs of a small increase of machining time. Afterwards, the method is generalized to deal with splined tool paths and general linear systems. Another method is proposed for contouring errors compensation in 5-axis machining. The tool tip position and tool orientation errors are predicted by combining a 5-axis splined tool path and the analytically expressed tracking errors of drives. The trajectory commands are modified in the feed-forward blocks to compensate the predicted contouring errors before sending them to the servo drives. The proposed method is experimentally validated on a 5-axis CNC research machine.

Keywords: CNC machine, smooth tool path, feedrate optimization, tracking error, contour error.

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 引言	1
1.1 数控加工技术的发展	1
1.2 光滑路径生成	2
1.3 进给速度优化	3
1.4 加工误差控制	5
1.5 本论文概览	7
第二章 光滑刀具路径生成	9
2.1 本章简介	9
2.2 刀尖位置 C^3 样条插值	9
2.2.1 位置参数样条	9
2.2.2 进给校正样条	12
2.3 刀轴方向 C^3 样条插值	16
2.3.1 方向参数样条	16
2.3.2 方向奇点的避免	18
2.3.3 方向样条重新参数化	19
2.4 模拟及实验结果	22
2.5 本章小结	24

第三章 带约束的进给速度优化	29
3.1 本章简介	29
3.2 优化问题及理论分析	30
3.2.1 问题的数学模型	30
3.2.2 最优解的必要条件	31
3.3 速度优化的解析算法	34
3.3.1 积分曲线	34
3.3.2 速度限制曲面	37
3.3.3 解析速度优化的贪心算法	41
3.3.4 模拟结果	45
3.3.5 实验结果	49
3.4 速度优化的数值算法	52
3.4.1 问题的简化与离散化	52
3.4.2 离散速度优化算法	56
3.4.3 速度的光滑化与拟合	60
3.4.4 实验结果	63
3.4.5 基于线性规划的推广算法	67
3.5 本章小结	69
第四章 跟踪误差与轮廓误差控制	71
4.1 本章简介	71
4.2 带跟踪误差约束的轨迹生成	71
4.2.1 三次样条轨迹	71
4.2.2 跟踪误差约束算法	74
4.2.3 实验结果	78
4.2.4 模型的推广	78
4.3 五轴轮廓误差补偿	83
4.3.1 位置命令的样条拟合	84
4.3.2 跟踪误差的解析预测	88

4.3.3 轮廓误差的预补偿	90
4.3.4 实验结果	93
4.4 本章小结	96
第五章 结论与展望	99
5.1 本文总结	99
5.2 未来的研究方向	100
参考文献	101
发表文章目录	113
简历	115
致谢	117

第一章 引言

1.1 数控加工技术的发展

机床作为一种工作母机，是制造机械的机械。1952年在麻省理工学院第一台数控机床的诞生，标志着手动操作机床时代的结束。加工精度和速度的巨大改进使其成为真正的“机械之母”。数字控制(numerical control, NC)无疑是机床制造业中最伟大的革新，其精度和可重复性都远优于手动操作机床。通过对机械运动和加工步骤的控制，数控技术使得可编程自动化得以实现。而上世纪六十年代计算机数控(computer numerical control, CNC)的出现，使得计算机技术取代了原来的硬件控制电路板，极大地提升了数控技术的可靠性及功能性。其中APT (automatically programmed tool)是最重要的计算机辅助零件编程语言，被用来生成工件程序。APT被扩展为EXAPT之后增加了更多的功能，比如切削条件的设置、刀具的选择、加工操作的规划等等。在APT和EXAPT之后，计算机辅助制造(computer-aided manufacturing, CAM)继承了这一功能。CAM提供了图形界面的交互式零件加工编程，大大节省了编程人员的时间和精力。数控编程语言也被计算机辅助设计(computer-aided design, CAD)和CAM系统集成到一起。在过去半个多世纪的发展中，数控加工技术已经具有极高的精度、速度以及灵活性 [74]。

图 1.1 总结了数控加工的任务流程，其大致可分为离线(offline)、在线(online)和后处理(post-line)三个阶段 [75]。离线阶段的任务是生成工件程序交给数控机床。在这一阶段，需要加工的形状确定之后，交由CAD进行几何建模。然后，计算机辅助工艺规划(computer-aided process planning, CAPP)会生成必要的加工信息，比如机床、夹具及固定装置的选择、切削条件的确定、加工的顺序安排等等。最后，CAM利用CAD的几何信息及CAPP的加工信息生成工件程序，其中需要考虑避免刀具与工件的干涉、最小化加工时间和换刀次数以及机械性能等因素。在线阶段的任务是由内存读取及解释工件程序，并控制机床各轴的运动。随之而来的工件和刀具之间准确的相对运动使得工件被切削为需要加工的形状。后处理则是利用坐标测量仪(coordinate-measuring machine, CMM)进行计算机辅助检查(computer-aided inspection, CAI)，通过

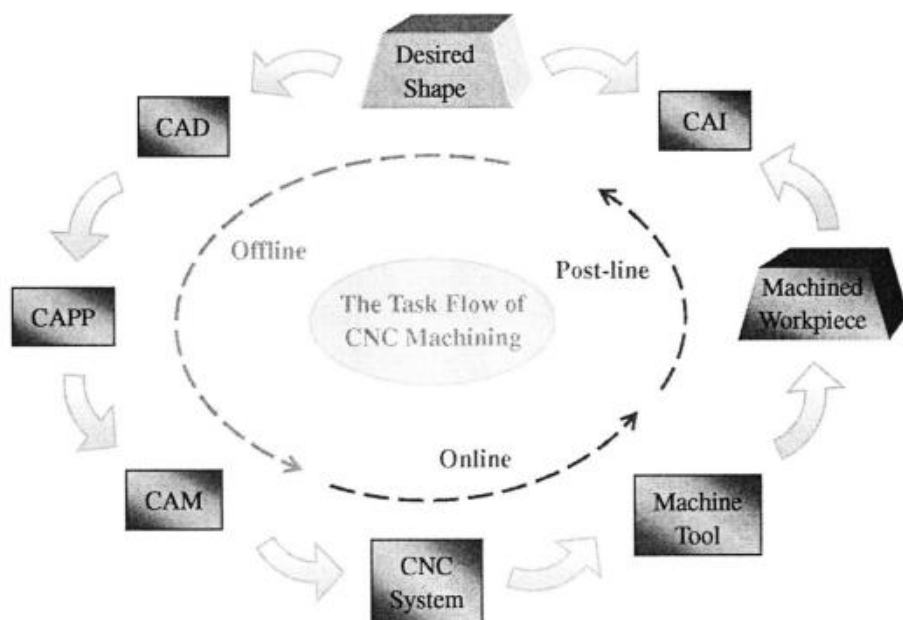


图 1.1: 数控加工操作的流程图

比较测量的加工工件表面和几何模型的坐标值来进行补偿处理。补偿处理包括优化刀具补偿或者再加工及磨削。通过以上的三个阶段，除了加工精度和效率可以得到保证之外，更为复杂形状的加工也成为可能。

为保证高速多轴加工的精度，参考运动命令必须足够光滑以防止激励驱动系统的结构动态响应。另一方面，工件的尺寸精度主要由进给驱动系统的跟踪精度所决定。因此，光滑及时间最优的轨迹生成和精确的运动控制是提高多轴加工精度的重要途径。这些问题在文献中得到了大量的研究，我们将在接下来的第1.2, 1.3和1.4节做一个综述。第1.5节概述了本论文在上述问题上的相关工作。

1.2 光滑路径生成

多轴加工为航空航天、生物医学、模具生产等工业中自由曲面零件的制造提供了高效的方法。为了加工出这些零件，在给定进给速度下的刀具必须沿着商用CAD/CAM系统生成的刀位坐标(cutter location, CL)点进行运动。传统的

方法是沿着这些刀位点进行线性插补,即生成逼近原始形状的小线段加工程序,并以此作为数控系统的输入代码。这种连续的小线段加工代码即G01代码。在直接对这种以G01代码描述的小线段进行插补时,如果在拐角处的进给速度不降为零,就会产生不平滑的速度、加速度和加加速度[87],从而引起不必要的振动[52, 59]。为了提高加工效率与精度,可以将小线段在拐角处进行光滑过渡[1, 98]。除此之外,许多数控系统都采用样条插补来解决这些问题。将刀位点数据拟合成样条曲线,可以使刀具路径具有较高的光滑度。

样条插补在三轴加工中已经得到了大量的研究。Wang和Yang[82]将一系列离散数据点插值为五次样条,并应用在精密加工中。之后,Wang等人[81]改进了这个方法,使得拟合曲线为近似弧长参数化且具有 C^3 连续度。Erkorkmaz和Altintas[26]利用进给校正多项式提出了一种五次样条弧长参数化以及插补的方法。Lei等人[51]提出了一个快速实时的非均匀有理B样条(non-uniform rational B-spline, NURBS)插补方法,在数控系统中有效地对NURBS路径进行实时插补。Heng和Erkorkmaz[37]发展了进给校正多项式的方法,以减小进给波动及舍入误差的影响,并给出有效的NURBS插补算法。Zhang等人[99]利用曲率特征点给出了二次B样条路径拟合及时间最优插补算法。

五轴机床的两个旋转轴使其能够加工更为复杂的零件,而对应的样条路径也需要进行另外的考虑。五轴加工路径的刀位点数据由刀尖位置和刀轴方向两部分组成。目前主要有两种五轴样条路径生成的方法,即位置和方向分别拟合以及对偶样条拟合。Fleisig和Spence[33]将刀尖位置和刀轴方向分别拟合成近似弧长参数化的样条,并通过方向样条的重新参数化找到其与位置样条参数的对应关系。Lin等人[56]改进了[33]中弧长参数化的方法。另一方面,Langeron等人[48]将刀尖位置和沿刀轴方向的终点位置拟合成两个互为对偶的B样条。由于底部和顶部样条使用相同的参数及节点,这种方法在表示刀轴方向变化上有一些缺陷。对偶样条的思想也被推广到对偶NURBS[84]以及对偶四元数[13]的应用当中。

1.3 进给速度优化

数控系统需要规划合适的进给速度沿着由CAD/CAM系统生成的刀具路径进行加工。进给速度优化的目标是充分利用机床的运动学性能,找到最短时间

加工完给定路径的进给速度。这一问题在机器人和机床领域都得到了大量的研究。

由于机床每个驱动轴能提供的转矩是有限的,因此每个轴上的加速度必须加以约束。进一步地,加速度的间断会输出阶跃变化的信号,从而产生振动以及轮廓误差。因此有必要引入加加速度(加速度对时间的导数)约束,从而得到连续的加速度。其他类型的约束,比如加加速度(加加速度对时间的导数)约束、弓高误差(chord error,参见图 1.2)约束等等。

从上世纪八十年代以来,有许多不同的方法被提出来优化进给速度。为得到理论上的时间最优,相平面分析方法被用来计算最优速度的解析解。Bobrow等人[15]及Shin和McKay[72]率先在带转矩约束的机器人沿给定参数路径运动的问题上找到时间最优的解析解。他们利用 u - \dot{u} 相平面分析及速度限制曲线(velocity limit curves)得到了满足“bang-bang”控制的最短时间轨迹。Shiller和Lu[71]基于[15, 72]的方法提出了一个更为稳健的算法来寻找切换点。Timar等人[78]将这类方法引入数控加工领域并得到了分轴加速度约束下的时间最优进给速度的分段解析解。随后,Boyadjieff等人[16]将这种算法得到的进给速度进行了光滑化处理。利用[78]的结果,Zhang等人[99]给出了一个针对二次B样条路径的简化算法,并在工业数控机床上实现了实时加工。Yuan等人[92]推广了这种进给速度优化方法并增加了弓高误差约束。

然而,解析算法的计算复杂度过高,特别是对于高阶样条表示的复杂路径以及五轴加工。另一方面,分轴加加速度约束的时间最优解析解并不容易找到,因为必须在相空间进行分析。

计算效率更高的数值算法也得到了广泛的利用及发展,比如基于非线性规划的算法。Neuman和Tourassis[61]在机械臂的研究中引入了一种离散时间动态模型。Tan和Potts[77]采用了这个模型来做最短时间轨迹规划,并将机器人关节的速度、转矩及加加速度约束加入其中。Lin等人[55]发展了一种非线性规划算法来调整轨迹中每两个相邻结点之间的时间长度,使得在关节速度、加速度及加加速度约束下总的遍历时间最短。Gasparetto和Zanotto[35]推广了[55]的方法,在目标函数里加入了带权重的加加速度平方积分项,用以改进轨迹的光滑性。Li等人[53]采用控制向量参数化方法,给出了分轴加加速度约束下沿五轴路径加工的进给速度优化算法。

当优化变量的数目较大时,非线性规划算法的复杂度也很高,所以

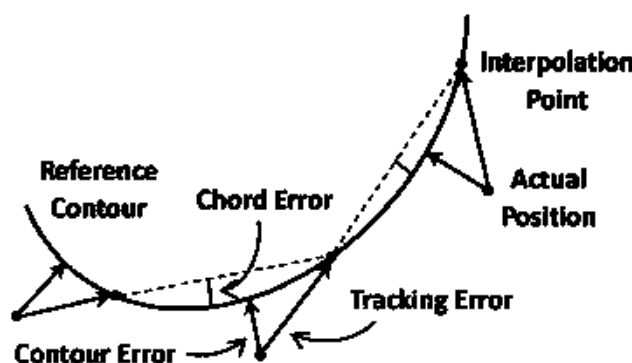


图 1.2: 弓高误差、跟踪误差及轮廓误差

需要做一些简化。Altintas和Erkorkmaz [6] 以及Sencer等人 [70] 采用开窗法(windowing)将大的非线性规划问题分解为一系列的子问题, 并用以优化进给速度。Dong等人 [18, 19] 利用贪心算法的思想以及解一系列的单变量非线性规划问题来优化运动学约束下的速度。Verscheure等人 [80] 提出一种基于对数障碍的分批解法来得到时间最优路径跟踪问题的一个近似解。

除此之外, 还有一些其它的方法被用来求解速度优化问题, 比如动态规划算法 [73]、区间分析算法 [65]、在线滤波算法 [2, 36]、多周期过渡算法 [98]、弧长搜索算法 [11, 12] 等等。直接采样法虽然只考虑切向运动约束, 但由于可以很容易地进行在线插补, 也得到了广泛的研究 [21, 23, 30, 47, 49, 58, 60, 76]。

1.4 加工误差控制

粗加工一般使用比较低的进给速度和主轴转速, 而精加工则需要在较小的切深使用较高的进给速度和主轴转速。尽管精加工中的切削负载很低, 但进给速度或者材料切除率还是被进给驱动和控制器决定的轮廓精度所限制。由于驱动器的频率带宽有限, 输出的位置一般会滞后于输入的位置命令, 从而引起跟踪误差(tracking error)。这会导致实际的刀具路径偏离了参考路径, 而引起轮廓误差(contour error, 如图 1.2)。对于任何伺服控制系统来说, 跟踪误差或者轮廓误差都必须得到有效地控制。另外, 编程进给速度也需要合适的选取, 以保证加工误差在工件的允许误差范围内。

跟踪误差及轮廓误差的最小化问题在过去已经从不同角度得到了充分研究

[10]。机床设计人员试图通过安装具有更大转矩系数的电机来增加驱动器的带宽,然而这种方法无疑会增加机床的成本及重量。

通过设计先进的控制律来改进驱动器带宽的方法得到了广泛的研究,并有一些重要的结果。Tomizuka [79] 设计了一种零相位误差跟踪控制(zero phase error tracking control, ZPETC)系统来抵消闭环传递函数的稳定极点。ZPETC最小化了参考位置输入和实际输出之间的相位滞后,从而降低了跟踪误差。但这种方法对于驱动器传递函数的变化过于敏感。Weck和Ye [85] 去除了ZPETC生成的命令中的高频分量,但却导致了相位失真。Renton和Elbestawi [67] 设计了一种伺服回路控制律,利用即时的目标位置、速度、加速度信息及性能范围来改进有干扰下的伺服性能。Altintas等人 [7] 提出了自适应的滑模控制(sliding mode control, SMC)技术来控制高速进给驱动器。这种方法对于不确定的电机系数具有鲁棒性,最大化了物理约束下的带宽,并且能补偿摩擦力和切削力等外部干扰。Erkorkmaz和Altintas [25] 提出了设计控制律的系统方法来最小化跟踪误差。该控制律具有较高的跟踪带宽、足够的抗干扰性以及参数变化的鲁棒性。Kamalzadeh等人 [40] 和Okwudire等人 [63] 推广了滑模控制来抵抗由主动抑制滚珠丝杠振动所产生的外部干扰。这种主动阻尼扩展了带宽并且减小了跟踪误差。

另一种思路是对轮廓误差做预测及补偿。Koren [45] 提出了交叉耦合控制器(cross-coupled controller, CCC)来最小化两轴加工的轮廓误差。此后,Koren和Lo [46] 提出了可变增益CCC,针对路径曲率的变化来对控制器做调整。不过CCC只能实时地作用在驱动轴上,并且对于大转角的轮廓误差补偿不够及时。Lo和Hsiao [57] 利用重复加工的思路提出了轮廓误差补偿的方法。这个方法利用第一次加工后测量的数据来优化新的刀具路径。Erkorkmaz等人 [27] 提出一种轨迹规划的方法来提高拐角处的刀具定位精度。Dong和Stori [20] 利用 [67] 的结构模型给出了一个带速度、加速度及轮廓误差约束的最小时间进给速度优化算法。Altintas和Sencer [9] 提出了五轴加工轮廓误差预测及补偿的SMC方法。与单轴控制不同,这个方法采用多输入-多输出(multi input-multi output)来同时控制五个轴以减小轮廓误差。Ernesto和Farouki [28] 通过预先修改参考位置命令的方法补偿了电机的惯量和粘性阻尼。Conway等人 [17] 基于自由曲线路径轮廓误差的准确计算,提出了三轴铣床的CCC方法。Huo等人 [39] 对任意的平面轮廓曲线推广了泰勒展开误差补偿法。Altintas和Khoshdarregi [8] 利用对参考轨迹做输入整形(input shaping)来抵消振动,随

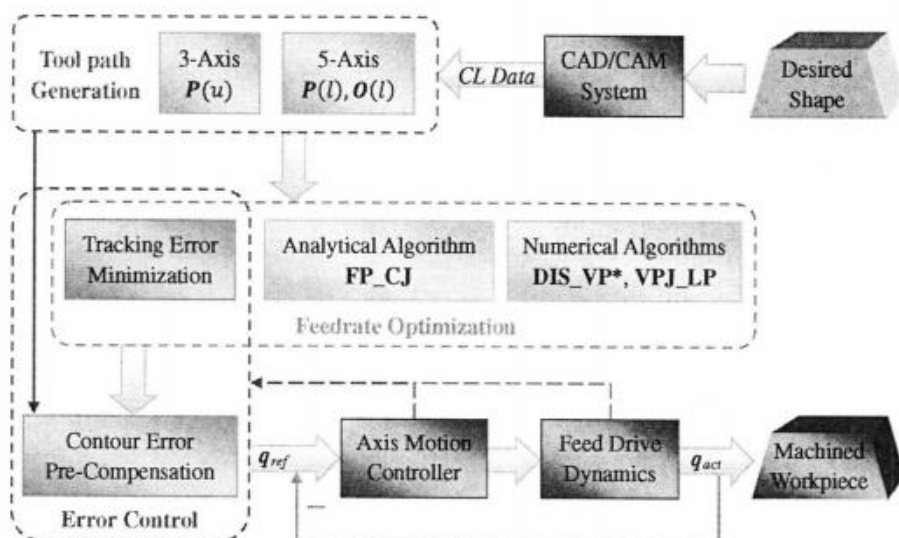


图 1.3: 本论文提出的相关算法的流程图

后对轮廓误差做了预补偿。

除了跟踪误差及其导致的轮廓误差以外，加工误差还主要由机床的几何误差及工件受力受热产生的变形等引起。这些误差的分析与补偿同样对提高加工精度有着至关重要的作用，并且也得到了广泛的研究 [41, 43, 44, 54, 83]。

1.5 本论文概览

本论文针对光滑路径生成、进给速度优化、加工误差控制这三个数控加工中的关键问题提出了一些新的有效算法，并总结如图 1.3。其中，第二章基于 [93] 中的工作提出了一个新的三轴及五轴加工中样条刀具路径生成的算法。特别地，对五轴加工而言，CAD/CAM 系统生成的刀尖位置和刀轴方向数据被拟合为彼此独立的具有 C^3 连续度的样条。而两个样条参数和刀尖位移的弧长参数之间的非线性关系分别被近似为九次和七次的进给校正样条以保持 C^3 连续度，并且刀尖位置和刀轴方向的运动也因此对应了起来。

第三章提出了几种不同的进给速度优化算法，并发表在 [95, 96] 中。其中，第 3.3 节在时间最优进给速度的解析解模型中增加了分轴加加速度约束，通过推广相平面分析为相空间分析，给出了一个基于贪心算法思想的速度规划方法。

第3.4节提出了一个计算效率较高的离散速度搜索算法,得到了近似时间最优的光滑速度解。进一步地,通过对运动学约束和目标函数的线性近似,该算法被推广为线性规划算法。

第四章研究了减小跟踪误差和轮廓误差的问题。第4.2节基于[94]中的研究工作,利用控制器和驱动器的闭环传递函数,给出了一个约束跟踪误差的算法。对于PID控制的三阶系统,跟踪误差约束可以简化为对加速度和加加速度线性组合的约束。这一模型也被推广到了任意阶的线性系统。另一方面,基于[97]中的工作,第4.3节提出了五轴加工路径的轮廓误差解析预测及补偿的算法。利用五轴样条路径、跟踪误差的解析预测以及五轴机床运动学模型,将参考位置命令在输入伺服驱动之前进行修改,从而补偿了刀尖位置和刀轴方向的轮廓误差。

最后,第五章总结了本论文,并列出了未来可以进行研究的方向。

第二章 光滑刀具路径生成

2.1 本章简介

本章将给出三轴及五轴加工的 C^3 刀具路径样条插值算法。第2.2节通过求解节点和控点使得五次B样条插值刀尖位置数据点。为使路径曲线参数能描述位移，从而在匀速加工段准确地计算进给量，样条参数和位移之间的非线性关系被近似为 C^3 连续的九次进给校正样条。

第2.3节给出了五轴加工中的刀轴方向样条生成算法。刀轴方向数据点首先在偏转角平面被插值为五次B样条，然后被映射回球面坐标系。运动学反解产生的奇异点则通过对方向样条控点的局部微小移动被避开。方向样条参数和刀尖位移之间的关系被近似为七次Bézier样条，并同时保证了平滑性、单调性和 C^3 连续度。

本章提出的算法在第2.4节与对偶样条算法在插值效果上做了对比，并与 C^2 连续算法在振动幅度及跟踪精度上做出比较。第2.5节总结了本章内容。

2.2 刀尖位置 C^3 样条插值

很显然三轴刀具路径可以看做是五轴刀具路径的一个特例，所以本章接下来只讨论五轴样条路径生成。图 2.1 展示了本章提出的弧长参数刀尖位置和刀轴方向样条插值及五轴位置命令生成的流程。CAM系统生成的刀位坐标点数据：

$$p_k, o_k, k = 0, \dots, N$$

将被拟合为不同参数的样条 $P(u)$ 和 $O(w)$ ，分别插值刀尖位置 p_k 和刀轴方向 o_k 。样条的数学表示能被用来提高路径的光滑度以及优化进给速度。而几何参数 u 和 w 与刀尖位移 l 之间的非线性关系需要额外地分别拟合为 $u(l)$ 和 $w(l)$ 。这一节将分别介绍 C^3 样条 $P(u)$ 和 $u(l)$ 的生成算法。

2.2.1 位置参数样条

从实践上来说，为了压缩数据，刀位点需要迭代地拟合为满足允许误差的

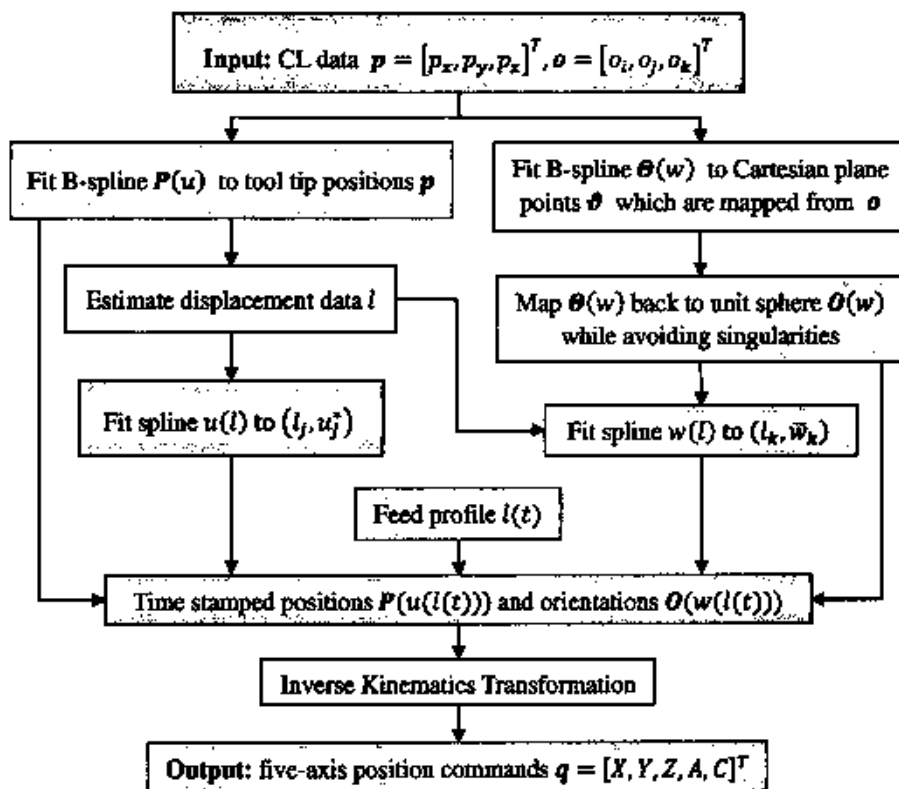


图 2.1: 本章提出的轨迹生成算法流程

样条 [68, 99]。为简洁起见, 本章只考虑刀位点的样条插值。本方法不难通过特征点的选取及误差检查推广到一般的拟合方法。

B样条将被用来插值刀尖位置向量

$$p_k = [p_{x,k}, p_{y,k}, p_{z,k}]^T, \quad k = 0, \dots, N$$

其中 $N+1$ 是数据点的总数。如图 2.2, B样条由基函数 $N_{i,n}(u)$, 控点 $P_i = [P_{x,i}, P_{y,i}, P_{z,i}]^T$, 以及次数 n 在区间 $u \in [0, 1]$ 上定义为以下形式:

$$P(u) = \sum_{i=0}^N N_{i,n}(u) P_i. \quad (2.1)$$

B样条基 $N_{i,n}(u)$ 是几何参数 u 和节点向量 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{N+n+1}]$ 的函数,

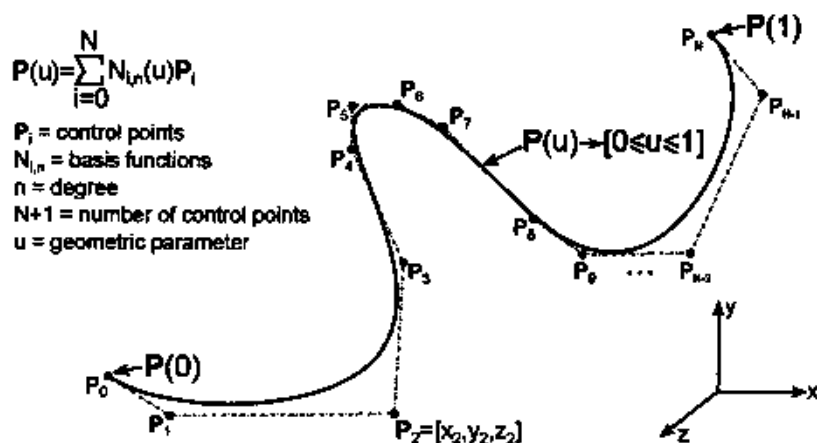


图 2.2: B样条曲线表示

其定义如下:

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \\ N_{i,n}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_{i,n-1}(u) + \frac{u_{i+n+1} - u}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1,n-1}(u) \end{cases} \quad (2.2)$$

基函数的个数和(2.1)中控点的个数均被设为与刀位数据点相等, 因此可以得到一个 $(N+1) \times (N+1)$ 的线性方程组来求解控点。为保证三阶连续度, B样条的次数至少应设为4。然而偶数次的样条可能会生成病态的插值矩阵, 从而得到不理想的曲线 [64]。另一方面, 对于迭代拟合方法来说, 也需要额外的自由度来控制误差。因此本章中的B样条次数选为 $n=5$ 。于是(2.1)中仅剩下的未知量就是节点向量 U 和控点 P_i , 这将利用 [66] 中的方法来求解。首先, 节点向量 U 将通过 p_k 之间的弦长来确定。每个位置数据点 p_k 处的参数值 \bar{u}_k 由向心法得到 [50]:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = 0, \bar{u}_N = 1 \\ d_1 = \sum_{k=1}^N \sqrt{\|p_k - p_{k-1}\|} \\ \bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{\|p_k - p_{k-1}\|}}{d_1}, k = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.3)$$

对(2.3)中的参数值应用平均法可以得到节点向量:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = \cdots = u_n = 0, u_{N+1} = u_{N+2} = \cdots = u_{N+n+1} = 1 \\ u_{j+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{j+n-1} \bar{u}_k, j = 1, 2, \dots, N-n \end{cases} \quad (2.4)$$

从节点向量 U 便可得到(2.2)中的基函数。将每个位置数据点处的参数值 \bar{u}_k 代入(2.1)中并使其与 p_k 相等,可以得到以下线性方程组:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,n}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{N,n}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,n}(\bar{u}_N) & \cdots & N_{N,n}(\bar{u}_N) \end{bmatrix}}_{\Phi_1} \underbrace{\begin{bmatrix} P_0^T \\ \vdots \\ P_N^T \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_0^T \\ \vdots \\ p_N^T \end{bmatrix}}_{\Psi_1} \quad (2.5)$$

B样条控点可由下式得到:

$$\Gamma_1 = \Phi_1^{-1} \Psi_1 \quad (2.6)$$

一旦节点向量 U 和控点 P_i 被确定后,五次B样条 $P(u)$ 便由(2.1)确定了。

2.2.2 进给校正样条

在加工中保持恒定的进给速度可以最小化切削力变化、避免颤振,从而得到更好的表面光洁度。如果将刀具路径样条表示为刀尖位移的函数,即弧长参数化,就能在实时插补中更简便地得到准确的结果。然而有理样条并不能表示弧长参数曲线[31],所以只能用数值近似方法来处理。

B样条参数 u 与弧长 l 之间的非线性关系可以用进给校正样条 $u(l)$ 来拟合。沿曲线从 $u=a$ 到 $u=b$ 的位移是:

$$l(b) - l(a) = \int_a^b \|P'(u)\| du = \int_a^b \sqrt{P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2} du \quad (2.7)$$

其中 $0 \leq a < b \leq 1$ 。对公式(2.7)运用Simpson积分法可以得到弧长的数值近似如下[51]:

$$l(b) - l(a) \approx l(a, b) := \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (2.8)$$

其中 $f(u) = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$. 将区间 $[a, b]$ 等分为两段 $[a_1, b_1]$ 和 $[a_2, b_2]$, 其对应的弧长同样由(2.8)分别近似为 $l(a_1, b_1)$ 和 $l(a_2, b_2)$. 区间 $[a, b]$ 中的弧长在容许误差 ε_l 内时可以认为是精确的, 即:

$$|l(a_1, b_1) + l(a_2, b_2) - l(a, b)| < \varepsilon_l \quad (2.9)$$

如果(2.9)不成立, $[a, b]$ 将被使用二分法重复进行上述数值积分, 直到每个子区间都满足容许误差公式(2.9). 最终得到的结果是 $[0, 1]$ 上的一系列参数区间 $[a, b]$ 及区间内对应的弧长 $l(a, b)$. 将这一列参数区间的右端点按顺序记为 u_j^* , $j = 1, \dots, M$, 其对应的弧长累加值记为 l_j . 将数据点列 (l_j, u_j^*) 拟合为一个九次的进给校正多项式 [26, 37]:

$$\hat{u}(l) = A_9 l^9 + A_8 l^8 + \dots + A_0 \quad (2.10)$$

为避免病态性, 用总弧长 $S = l_M$ 对(2.10)进行正规化:

$$\begin{cases} \hat{u}(\sigma) = a_9 \sigma^9 + a_8 \sigma^8 + \dots + a_0, & 0 \leq \sigma \leq 1 \\ \sigma = \frac{l}{S}, & \sigma_j = \frac{l_j}{S} \\ a_9 = S^9 A_9, & a_8 = S^8 A_8, \dots, a_0 = A_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

为使用最小二乘法求拟合多项式的系数, 将(2.11)写为线性形式:

$$\hat{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}(\sigma_1) \\ \hat{u}(\sigma_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(\sigma_M) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_1^9 & \sigma_1^8 & \sigma_1^7 & \dots & 1 \\ \sigma_2^9 & \sigma_2^8 & \sigma_2^7 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_M^9 & \sigma_M^8 & \sigma_M^7 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a_9 \\ a_8 \\ a_7 \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}}_{\alpha} \quad (2.12)$$

估计误差定义为:

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u}^* - \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* - \Phi \alpha \quad (2.13)$$

其中 $\mathbf{u}^* = [0, u_1^*, \dots, u_M^*]^T$ 和 $\hat{\mathbf{u}}$ 分别是实际的和估计的参数向量. 最小化目标函数定义为:

$$J_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}_u^T \mathbf{e}_u = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^* - \Phi \alpha)^T (\mathbf{u}^* - \Phi \alpha) \quad (2.14)$$

实际函数 $u(l)$ 的一阶、二阶、三阶导数分别为:

$$\begin{cases} u_l = \frac{du}{dl} = \left(\frac{dl}{du}\right)^{-1} = \frac{1}{f(u)} \\ u_{ll} = \frac{du_l}{dl} = u_l \frac{du_l}{du} = \frac{1}{f(u)} \left(\frac{1}{f(u)}\right)' = -\frac{f'(u)}{f(u)^3} \\ u_{lll} = \frac{du_{ll}}{dl} = u_l \frac{du_{ll}}{du} = \frac{1}{f(u)} \left(-\frac{f'(u)}{f(u)^3}\right)' = \frac{3f''(u)^2 - f''(u)f(u)}{f(u)^5} \end{cases} \quad (2.15)$$

对进给校正多项式求导, 可以得到对应的:

$$\begin{cases} \hat{u}_l = \frac{d\hat{u}}{dl} = \frac{1}{S}(9a_9\sigma^8 + 8a_8\sigma^7 + \dots + a_1) \\ \hat{u}_{ll} = \frac{d^2\hat{u}}{dl^2} = \frac{1}{S^2}(72a_9\sigma^7 + 56a_8\sigma^6 + \dots + 2a_2) \\ \hat{u}_{lll} = \frac{d^3\hat{u}}{dl^3} = \frac{1}{S^3}(504a_9\sigma^6 + 336a_8\sigma^5 + \dots + 6a_3) \end{cases} \quad (2.16)$$

由(2.15)和(2.16), 在 $u=0$ 及 $u=1$ 处的边界条件必须满足:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 72 & 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 504 & 336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega} \begin{bmatrix} a_9 \\ a_8 \\ a_7 \\ a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u_l(0)S \\ u_{ll}(0)S^2 \\ u_{lll}(0)S^3 \\ 1 \\ u_l(1)S \\ u_{ll}(1)S^2 \\ u_{lll}(1)S^3 \end{bmatrix}}_{\eta} \quad (2.17)$$

至此, 进给校正多项式的系数可以通过求解下面的优化问题得到:

$$\min J_e \text{ 使得: } \Omega\alpha = \eta \quad (2.18)$$

这是一个线性约束的二次最优化问题。利用Lagrange乘子法将约束条件加入目标函数:

$$J_f = J_e + \Lambda^T(\Omega\alpha - \eta) \quad (2.19)$$

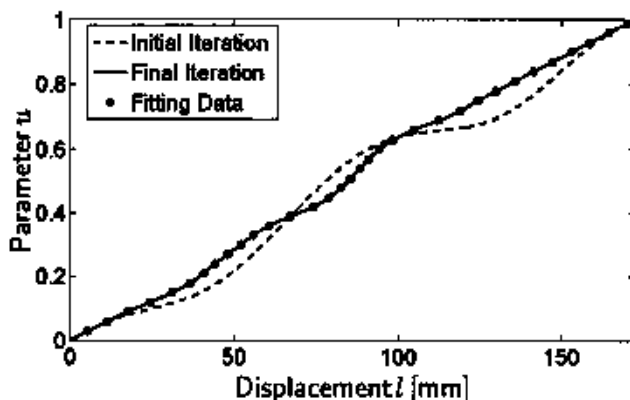


图 2.3: 进给校正样条迭代拟合过程

将目标函数的偏导数均设为零可以得到:

$$\frac{\partial J_f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial J_f}{\partial \Lambda} = 0, \quad (2.20)$$

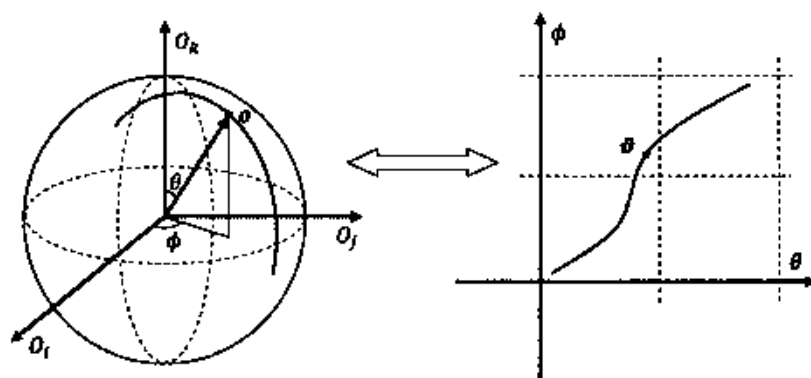
从而有下述线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^T \Phi \alpha + \Omega^T \Lambda &= \Phi^T \mathbf{u}^* \\ \Omega \alpha &= \eta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Phi^T \Phi & \Omega^T \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{u}^* \\ \eta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

显然(2.21)中的矩阵是满秩的, 由此可以唯一地解得系数 α , 从而得到进给校正多项式的系数 (A_0, A_1, \dots, A_9) . 上述拟合过程将迭代地进行以确保精度, 如图 2.3 所示. 实际值 u_j^* 和估计值 $\hat{u}(l_j)$ 之间的均方误差(mean squared error, MSE)由下式得到:

$$\text{MSE} = \sum_{j=1}^M \frac{(u_j^* - \hat{u}(l_j))^2}{M} \quad (2.22)$$

并被用来检验其是否超过允许误差 ε_{MSE} . 如果超出, 数据点列 (l_j, u_j^*) 将被等分并分别再次拟合, 并将这个过程重复进行下去. 如果细分后每一段的进给校正多项式的均方误差都满足 $\text{MSE} < \varepsilon_{\text{MSE}}$, 或者拟合点列不超过多项式的次数, 这个迭代拟合过程就将停止. 最终, l 和 u 之间的非线性关系就可以表示为 C^3 连续的九次进给校正样条 $u(l)$.

图 2.4: 球面坐标系与 (θ, ϕ) 平面之间的映射

2.3 刀轴方向 C^3 样条插值

2.3.1 方向参数样条

将刀轴方向数据记为

$$O_k = [O_{i,k}, O_{j,k}, O_{k,k}]^T, \quad k = 0, \dots, N$$

其中第一个下标表示球面坐标分量，第二个下标表示刀位点的序号。需要指出的是，如果数据点列中相邻的两个刀轴方向相同，在这一小节的插值过程中将他们看做是同一个点。为简洁起见，这一节假设任意相邻的两个刀轴方向都不同。同样地，它们将被插值为 C^3 连续的样条 $O(w)$ ，并且刀轴方向样条必须保持在单位球面上：

$$\|O(w)\| = 1, \quad w \in [0, 1]. \quad (2.23)$$

与刀尖位置点的插值不同，刀轴方向数据并不能直接在欧氏空间插值，而应该在球面坐标系内。利用图 2.4 中所示球面坐标系到欧氏平面 (θ, ϕ) 的映射，刀轴方向可以等价地用两个角度来表示：

$$\theta_k = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arccos(O_{k,k}) \\ \arctan(O_{j,k}/O_{i,k}) \end{bmatrix}, \quad k = 0, \dots, N \quad (2.24)$$

从而刀轴方向数据被映射为欧氏平面上 $[0, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$ 内的一列点。值得指出的是，映射(2.24)需要适当地选取使得所有的 O_k 位于同一个单调域内(半个球面)。

于是角度平面上的点 ϑ_k 就可以利用第2.2.1节的五次B样条来插值。由 (θ, ϕ) 平面上的节点向量 $W = [w_0, w_1, \dots, w_{N+p+1}]$ 及控点 Θ_i ，平面B样条表示为：

$$\Theta(w) = \sum_{i=0}^N N_{i,n}(w) \Theta_i = \begin{bmatrix} \theta(w) \\ \phi(w) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

其中基函数为

$$\begin{cases} N_{i,0}(w) = \begin{cases} 1 & w \in [w_i, w_{i+1}) \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \\ N_{i,n}(w) = \frac{w - w_i}{w_{i+n} - w_i} N_{i,n-1}(w) + \frac{w_{i+n+1} - w}{w_{i+n+1} - w_{i+1}} N_{i+1,n-1}(w) \end{cases} \quad (2.26)$$

与前面类似，节点向量 W 需要被确定。用向心法将 \mathbf{o}_k (或 ϑ_k) 处的参数值 \bar{w}_k 计算出来，不过此处用角度差来代替弦长以更准确地描述方向的变化：

$$\begin{cases} \bar{w}_0 = 0, \bar{w}_N = 1 \\ d_2 = \sum_{k=1}^N \sqrt{\arccos(\mathbf{o}_k \cdot \mathbf{o}_{k-1})} \\ \bar{w}_k = \bar{w}_{k-1} + \frac{\sqrt{\arccos(\mathbf{o}_k \cdot \mathbf{o}_{k-1})}}{d_2}, k = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.27)$$

用平均法得到节点向量为：

$$\begin{cases} w_0 = \dots = w_n = 0, w_{N+1} = \dots = w_{N+n+1} = 1 \\ w_{j+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{j+n-1} \bar{w}_k, j = 1, \dots, N-n \end{cases} \quad (2.28)$$

于是角度平面内的控点 Θ_i 可由下式解出：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,n}(\bar{w}_0) & \dots & N_{N,n}(\bar{w}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,n}(\bar{w}_N) & \dots & N_{N,n}(\bar{w}_N) \end{bmatrix}}_{\Phi_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_0^T \\ \vdots \\ \Theta_N^T \end{bmatrix}}_{\Gamma_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vartheta_0^T \\ \vdots \\ \vartheta_N^T \end{bmatrix}}_{\Psi_2} \quad (2.29)$$

$$\Gamma_2 = \Phi_2^{-1} \Psi_2 \quad (2.30)$$

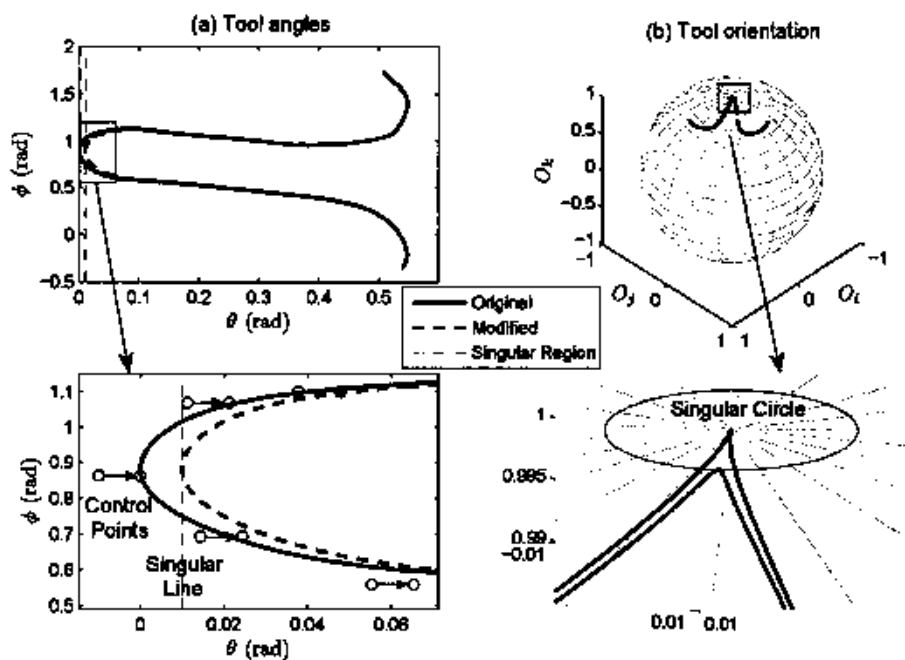


图 2.5: 刀轴方向样条局部变形以避免奇点

由(2.25)可以得到平面B样条 $\Theta(w) = [\theta(w), \phi(w)]^T$. 最后, 利用映射(2.24)的逆映射, C^3 连续的刀轴方向样条可以表示如下:

$$O(w) = \begin{bmatrix} O_i(w) \\ O_j(w) \\ O_k(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta(w)) \cos(\phi(w)) \\ \sin(\theta(w)) \sin(\phi(w)) \\ \cos(\theta(w)) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

2.3.2 方向奇点的避免

由于五轴机床的运动学反解(inverse kinematics transformation), 不妨以(2.43)为例, 在刀轴方向样条 $O(w)$ 上可能会出现奇点。从(2.43)可以容易地看出 $O_{\text{sin}} = [0, 0, 1]^T$ 是一个奇异的刀轴方向, 即当 $A = 0$ 时 C 无法确定。如图 2.9 所示, 当 A 轴位置转到 0 时, 工件台与刀轴方向垂直(C 轴与刀轴方向平行)。此时 C 取任意值都没有影响, 从而会导致 C 轴位置在此处不连贯的变化。

这一节的奇点避免方法基本思路是, 通过刀轴方向样条在奇点处的局部变

形从而避开它。如图 2.5(b) 所示, 由于计算的数值误差, 刀轴方向必须避开单位球面上以 O_{sin} 为中心的奇异圆 [3]。将 O_{sin} 与奇异圆上任何一点的角度差设为 θ_{tol} , 并且不超过允许的加工误差。从图 2.4 所示的球面坐标与欧氏平面的映射可知, 奇异圆对应于 (θ, ϕ) 平面的一条奇异线 $\theta = \theta_{tol}$ (参见图 2.5(a))。如果刀轴方向样条 $O(w)$ 进入奇异圆内, 其对应的 B 样条 $\Theta(w)$ 将会进入 (θ, ϕ) 平面上的奇异区域(奇异线的左侧)。因此可以通过局部移动 B 样条 $\Theta(w)$ 的控点的方法将其移出奇异区域。

假设 B 样条 $\Theta(w)$ 进入奇异区域部分的参数区间为 $[w_l, w_r]$, 其中 w_l 和 w_r 可以通过数值方法求解方程 $\theta(w) = \theta_{tol}$ 得到。在这个参数区间上的最小 θ 值也不难求得并记作 θ_{min} 。那么 B 样条 $\Theta(w)$ 需要移动的最大距离就是 $\theta_{tol} - \theta_{min}$ 。在节点向量 W 中, 将大于 w_l 的最小节点记为 w_a , 小于 w_r 的最大节点记为 w_b 。那么区间 $[w_l, w_r]$ 与 $(w_{a-n-1}, w_a), \dots, (w_b, w_{b+n+1})$ 中任何一个区间的交集都非空。也就是说 B 样条 $\Theta(w)$ 在 $[w_l, w_r]$ 内的形状完全由其控点 $\Theta_{a-n-1}, \dots, \Theta_b$ 所决定。将 $\theta_{a-n-1}, \dots, \theta_b$ 中的每一个都加上 $\theta_{tol} - \theta_{min}$ 之后, B 样条将会被移出奇异区域。由下式可以得到简单的证明:

$$\begin{aligned} \theta^*(w) - \theta(w) &= \sum_{i=0}^N N_{i,n}(w)(\theta_i^* - \theta_i) = \sum_{i=a-n-1}^b N_{i,n}(w)(\theta_{tol} - \theta_{min}) \\ &= \begin{cases} \theta_{tol} - \theta_{min}, & w \in [w_l, w_r] \\ 0, & w \notin (w_{a-n-1}, w_{b+n+1}) \\ \text{介于 } 0 \text{ 和 } \theta_{tol} - \theta_{min} \text{ 之间, 否则} \end{cases} \quad (2.32) \end{aligned}$$

其中 $\theta^*(w)$ 是移动后的平面 B 样条 θ 分量。从 (2.32) 可以看出刀轴方向的变形是局部的并且始终在允许误差范围内。这种方法不难推广到其它五轴机床结构以及不同于 (2.24) 的球面坐标变换。

2.3.3 方向样条重新参数化

与刀尖位置样条参数 u 一样, 刀轴方向样条参数 w 也需要表示为刀尖位移 l 的函数, 从而让 u 和 w 同步化。然而 w 与 l 之间并没有明确的联系, 因为刀轴方向变化和刀尖点位移并不互相影响。不过每个刀尖位置数据点 p_k 处的累积弧长 l_k 可以由 (2.7)~(2.9) 求得, 从而与刀轴方向数据点 o_k 及其参数 w_k 相对应。利用这一列 (l_k, w_k) 数据, 可以将 w 与 l 之间的关系拟合为样条。与第 2.2.2 节的进给校正样条拟合不同, 由于数据点 (l_k, w_k) 数目有限, 必须用另外的方法保证

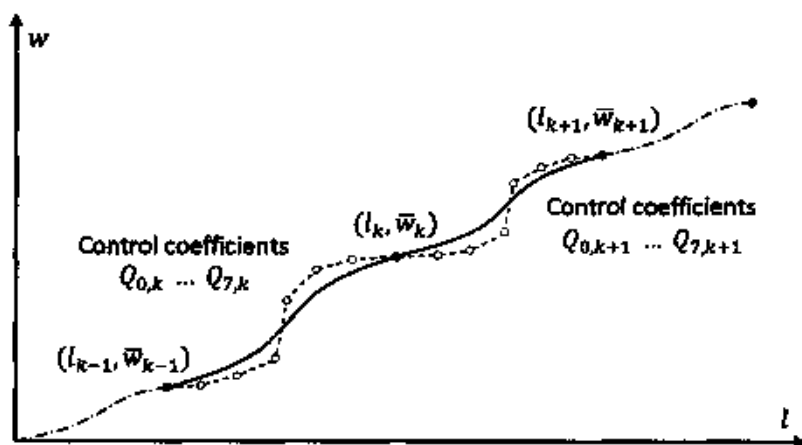


图 2.6: 拟合 (l_k, w_k) 数据点的 Bézier 样条及控制系数

其单调性 [38]。接下来将利用 Bézier 样条插值来确保单调性、 C^3 连续度，并最小化曲线振荡。如图 2.6， (l_k, w_k) 数据将被插值为如下的七次 Bézier 样条以描述 l 与 w 之间的关系：

$$w_k(r) = \sum_{i=0}^7 \binom{7}{i} (1-r)^{7-i} r^i Q_{i,k}, \quad r = \frac{l-l_{k-1}}{l_k-l_{k-1}} \in [0, 1] \quad (2.33)$$

每一个区间 $[l_{k-1}, l_k]$, $k = 1, \dots, N$ 都被正规化为单位区间。控制系数 $Q_{i,k}$ 需要求解出来，其中 i 是第 k 段上的控制系数序号。

每一段内 $w_k(r)$ 的各阶导数可以求得如下：

$$w'_k(r) = \sum_{i=0}^6 7 \binom{6}{i} (1-r)^{6-i} r^i (Q_{i+1,k} - Q_{i,k}) \quad (2.34)$$

$$w''_k(r) = \sum_{i=0}^5 42 \binom{5}{i} (1-r)^{5-i} r^i (Q_{i+2,k} - 2Q_{i+1,k} + Q_{i,k}) \quad (2.35)$$

$$w'''_k(r) = \sum_{i=0}^4 210 \binom{4}{i} (1-r)^{4-i} r^i (Q_{i+3,k} - 3Q_{i+2,k} + 3Q_{i+1,k} - Q_{i,k}) \quad (2.36)$$

为保证单调性条件，将 (2.34) 中 $w'_k(r)$ 的系数均限制为非负即可，这等价于：

$$Q_{0,k} \leq Q_{1,k} \leq \dots \leq Q_{6,k} \leq Q_{7,k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.37)$$

由(2.33)可得插值 (l_k, \bar{w}_k) 的条件为:

$$Q_{0,k} = \bar{w}_{k-1}, Q_{7,k} = \bar{w}_k, k = 1, \dots, N. \quad (2.38)$$

另外, 由(2.34)-(2.36)可以得到 C^3 连续度的等价条件:

$$\begin{cases} \frac{Q_{7,k} - Q_{6,k}}{l_k - l_{k-1}} = \frac{Q_{1,k+1} - Q_{0,k+1}}{l_{k+1} - l_k} \\ \frac{Q_{7,k} - 2Q_{6,k} + Q_{5,k}}{(l_k - l_{k-1})^2} = \frac{Q_{2,k+1} - 2Q_{1,k+1} + Q_{0,k+1}}{(l_{k+1} - l_k)^2} \\ \frac{Q_{7,k} - 3Q_{6,k} + 3Q_{5,k} - Q_{4,k}}{(l_k - l_{k-1})^3} = \frac{Q_{3,k+1} - 3Q_{2,k+1} + 3Q_{1,k+1} - Q_{0,k+1}}{(l_{k+1} - l_k)^3} \end{cases} \quad (2.39)$$

其中 $k = 1, \dots, N-1$.

为减小插值曲线的振荡, 将最小化 $w(l)$ 的三阶导数平方积分作为目标函数, 并以(2.37)-(2.39)为约束条件, 于是满足单调性及 C^3 连续度的插值问题转化为优化问题:

$$\min_{Q_{i,k}} J_Q = \sum_{k=1}^N \int_0^1 \frac{w_k'''^2}{(l_k - l_{k-1})^6} dr \quad (2.40)$$

s.t.

$$\begin{cases} \bar{w}_{k-1} \leq Q_{1,k} \leq Q_{2,k} \leq \dots \leq Q_{6,k} \leq \bar{w}_k \\ \frac{\bar{w}_k - Q_{6,k}}{l_k - l_{k-1}} = \frac{Q_{1,k+1} - \bar{w}_k}{l_{k+1} - l_k} \\ \frac{\bar{w}_k - 2Q_{6,k} + Q_{5,k}}{(l_k - l_{k-1})^2} = \frac{Q_{2,k+1} - 2Q_{1,k+1} + \bar{w}_k}{(l_{k+1} - l_k)^2} \\ \frac{\bar{w}_k - 3Q_{6,k} + 3Q_{5,k} - Q_{4,k}}{(l_k - l_{k-1})^3} = \frac{Q_{3,k+1} - 3Q_{2,k+1} + 3Q_{1,k+1} - \bar{w}_k}{(l_{k+1} - l_k)^3} \end{cases} \quad (2.41)$$

满足约束条件(2.41)的优化初值可以选为:

$$\begin{cases} Q_{3,k} - 3\Delta_k = Q_{2,k} - 2\Delta_k = Q_{1,k} - \Delta_k = \bar{w}_{k-1} \\ Q_{4,k} + 3\Delta_k = Q_{5,k} + 2\Delta_k = Q_{6,k} + \Delta_k = \bar{w}_k \\ \Delta_k = \delta(l_k - l_{k-1}) \\ \delta = \min_{1 \leq k \leq N} \frac{\bar{w}_k - \bar{w}_{k-1}}{7(l_k - l_{k-1})} \end{cases} \quad (2.42)$$

由上述初值满足约束条件也同时证明了该优化问题解的存在性. 利用MATLAB中的优化函数 $fmincon$ 及初值(2.42), 可以解得控制系数 $Q_{i,k}$, 从而得到了单调且 C^3 连续的插值样条 $w(l)$.

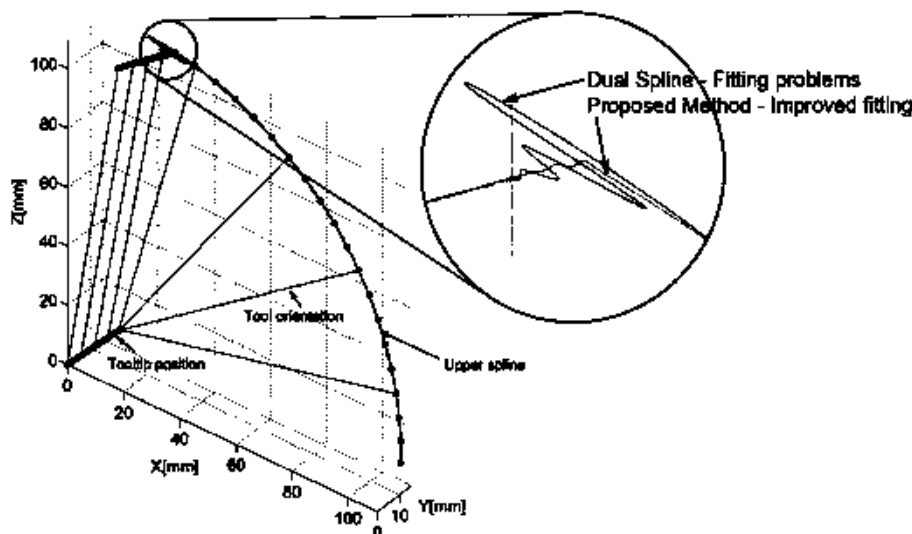


图 2.7: 对偶样条插值与本章的插值方法的比较

2.4 模拟及实验结果

在下文的模拟及实验中, 本章提出的方法对精度与光滑度的改进将得到验证。如图 2.7, 一系列在较短位移内方向急剧变化的刀位点数据被分别用对偶B样条及本章提出的方法插值。容易看出对偶B样条使得刀轴方向的变化有较大的振荡。实际上所有的对偶样条拟合方法都会出现这个问题, 因为刀轴方向与刀尖位置的变化被直接用同一个参数耦合起来, 而描述较短位移的参数并不能很好地同时描述方向的较大变化。本章提出的方法以及其它的解耦方法将方向与

表 2.1: 匀速段 C^2 和 C^3 方法最大及最小加加速度值的比较

	X轴 (mm/s ³)	Y轴 (mm/s ³)	Z轴 (mm/s ³)	A轴 (rad/s ³)	C轴 (rad/s ³)
C^2 最大加加速度	3.4e4	4.2e4	1.5e4	0.7e3	3.0e3
C^3 最大加加速度	1.5e4	1.5e4	1.4e4	0.2e3	0.9e3
C^2 最小加加速度	-2.5e4	-3.7e4	-1.6e4	-0.6e3	-1.9e3
C^3 最小加加速度	-1.5e4	-2.0e4	-1.5e4	-0.2e3	-1.0e3

位置分别独立地进行插值,故不会出现这个问题。

然而,其它的解耦拟合方法在光滑度或者刀轴方向的样条表示上都有局限性[33, 37, 56]。本章提出的方法克服了这些问题并达到 C^3 连续度。如图2.8所示, [33]中所使用的刀位点数据被分别插值为位置 and 方向样条。接下来的实验将比较本章提出的 C^3 连续度插值方法和相应的 C^2 连续度方法。实验用的五轴机床结构如图2.9所示。该五轴机床是由Fadal VMC 2216 加上Nikken 5AX-130 旋转台改造而成,实物参见图2.10。

从工件坐标系到机床坐标系的运动学反解如下:

$$\begin{cases} A = \arccos(O_k) \\ C = \arctan 2(O_i, O_j) \\ X = -\cos(C)P_x - \sin(C)P_y \\ Y = \cos(A)\sin(C)P_x - \cos(A)\cos(C)P_y - \sin(A)(P_z + L_{ac,x}) \\ Z = \sin(A)\sin(C)P_x - \sin(A)\cos(C)P_y + \cos(A)(P_z + L_{ac,x}) + L_{T_{yo,x}} \end{cases} \quad (2.43)$$

其中 $\arctan 2$ 是MATLAB的反正切扩展函数, $L_{ac,x} = 70\text{mm}$ 及 $L_{T_{yo,x}} = 150\text{mm}$ 是由旋转台确定的偏移量(参见图2.9)。该机床由内部开发的开放式实时控制器dSPACE所控制,能够提供轨迹控制的快速实现。每个轴的驱动器均使用PID(proportional, integral and derivative)控制,其中闭环带宽为13.76Hz,采样频率为1kHz。图2.10展示了整个实验的配置。

为使用相同的进给速度来做比较并保持原来的连续度, [22]中提出的三次加速模式将用作进给插补。将最大进给速度设为50 mm/s以保证每个驱动轴在其运动学约束内。从参考命令的加加速度可以看出其光滑度。位置命令对时间的三阶导数,也就是加加速度,可以用差分方法近似为:

$$\frac{d^3q}{dt^3} \approx \frac{q_{i+3} - 3q_{i+2} + 3q_{i+1} - q_i}{T_s^3} \quad (2.44)$$

其中 $q = [X, Y, Z, A, C]^T$, $T_s = 0.001\text{ s}$ 。图2.11比较了 C^2 连续度轨迹及 C^3 连续度轨迹的加加速度。容易看出, C^2 连续度轨迹的加加速度更大并且有一些不连续点,尤其是在恒定进给速度段的高曲率区域。而本章提出的 C^3 连续度方法的加加速度更低且更光滑。表2.1列出了最大最小加加速度的比较值。

在实验中,机床的三个平移轴的加速度分别用加速计测量出得到。两个旋转轴的编码器有足够高的分辨率(A轴为 $4.26\text{e-}6\text{ rad/count}$, C轴为 $8.52\text{e-}6$

rad/count), 因此其加速度直接由编码器获得。对测得的加速度做快速傅立叶变换(fast Fourier transform, FFT)。由图 2.12 可以看出 C^2 方法比 C^3 方法在共振频率附近产生了更大的激励。另外, 从图 2.11 可以看出两种方法在Z轴上的加速度非常接近, 因此其FFT也很相似, 不过 C^2 方法在150 Hz处的结构模态还是产生了更大激励。除了减小振动外, C^3 连续度方法还平均减小了15%的跟踪误差。

2.5 本章小结

五轴加工路径样条插值的目标之一是产生平滑的进给量。如果插补器在每个插补周期内可以产生恒定的位移, 就可以达到恒定的进给速度。然而样条参数与弧长参数之间并没有简单的线性关系。如果曲线路径上两个离散点之间的弧长被近似为直线段, 生成轨迹的速度、加速度、加加速度就会不连续。这一点在刀具和工件之间包含三个平移及两个旋转运动的五轴曲线路径上尤为明显。

这一章提出了一个新的五轴样条插值方法, 能生成更加光滑的速度、加速度、加加速度。刀具路径被拟合为 C^3 连续的参数样条以及刀尖位置和刀轴方向的进给校正样条。这使得匀速进给插补时更准确快速, 而且每个轴的位置命令都具有 C^3 连续度。光滑的进给速度使得切屑厚度和切削负载的变化更平稳。加速度和加加速度的频率分量的减小使得在高速加工中对驱动器结构模态的激励也减少。本方法也避免了让驱动电机产生过高或不连续的转矩, 这将有利于提高控制器的跟踪精度。

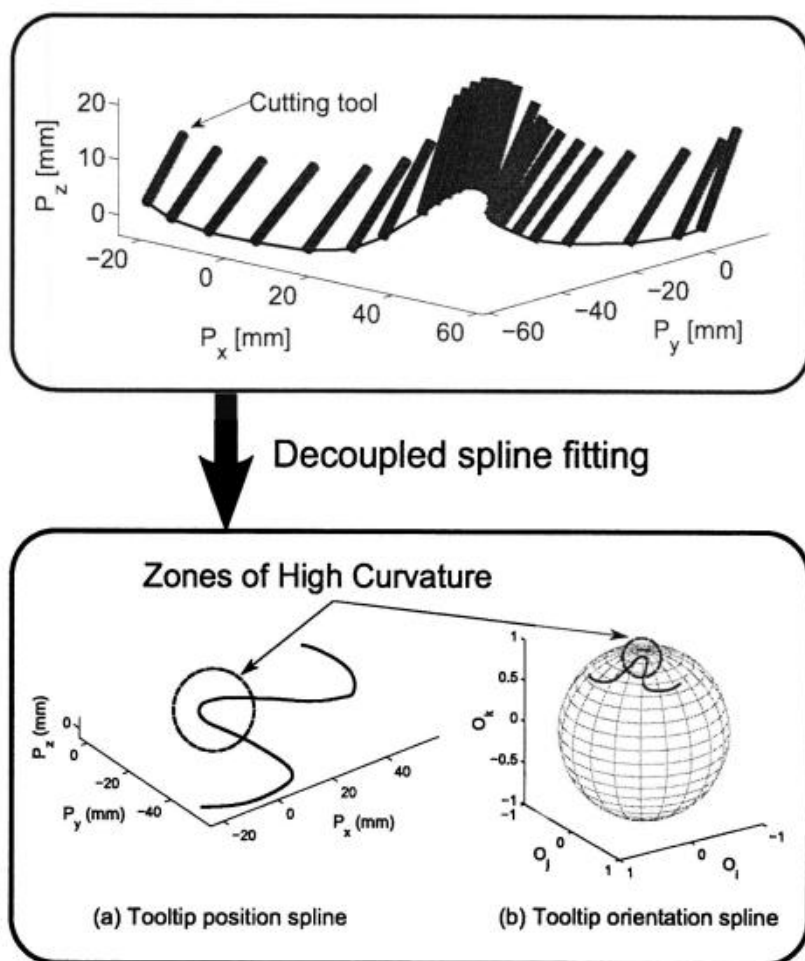


图 2.8: 实验中使用的刀位点数据及其样条拟合(包含一段高曲率区域)

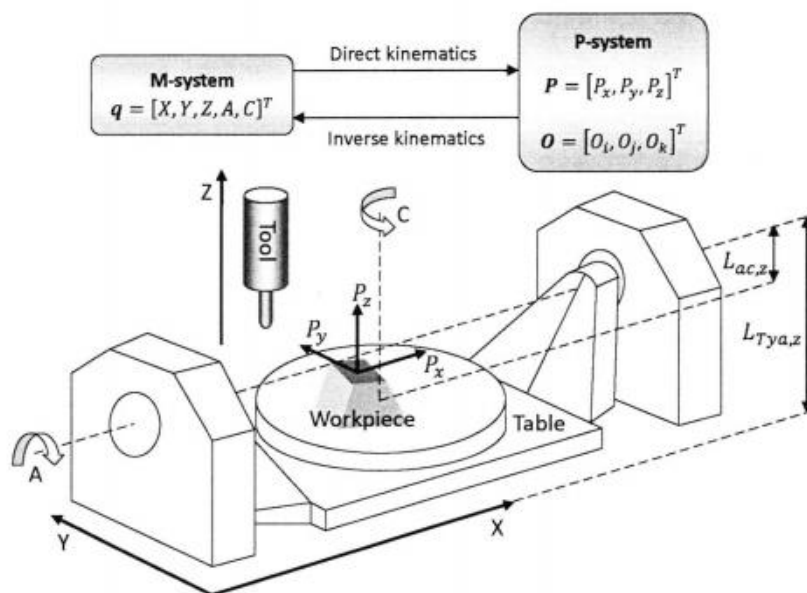


图 2.9: A-C旋转轴配置的五轴机床运动学结构

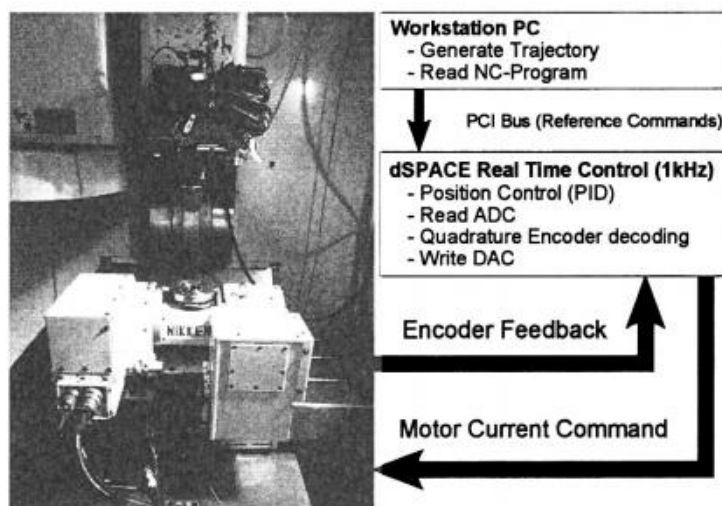
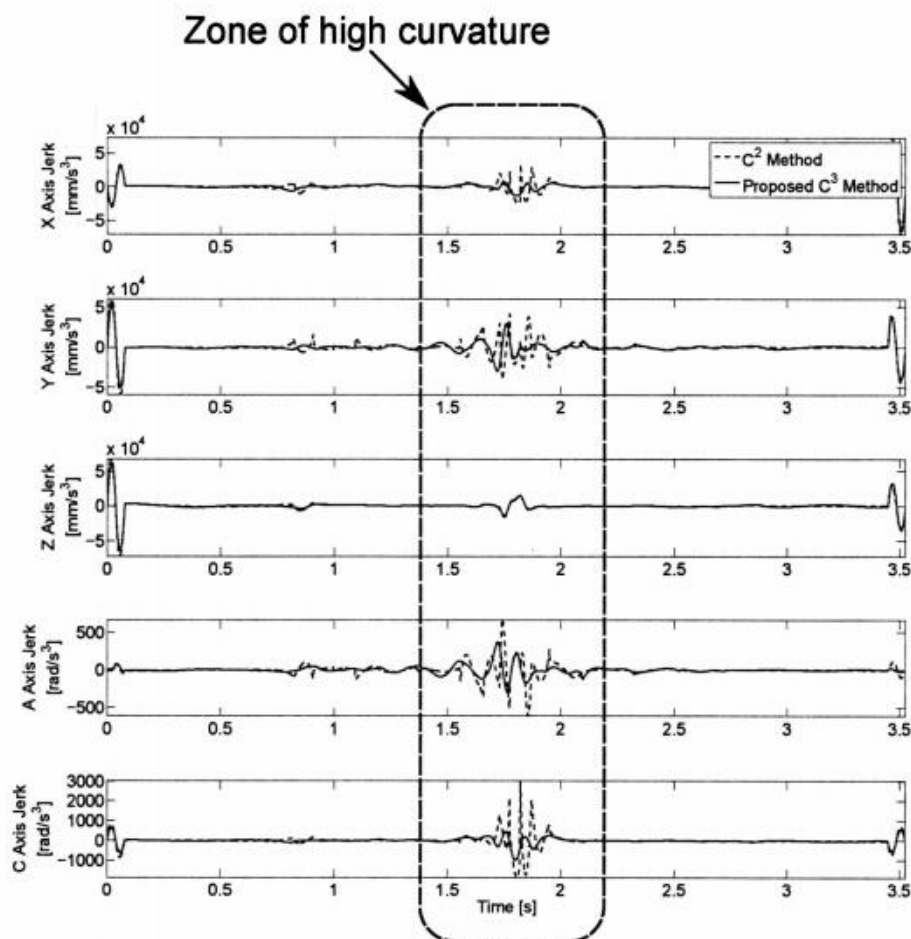


图 2.10: 实验测试平台: Fadal VMC 2216机床, Nikken 130-AX旋转台, dSPACE开放式实时控制器

图 2.11: C^2 和 C^3 方法加加速度的比较(高曲率区域参见图 2.8)

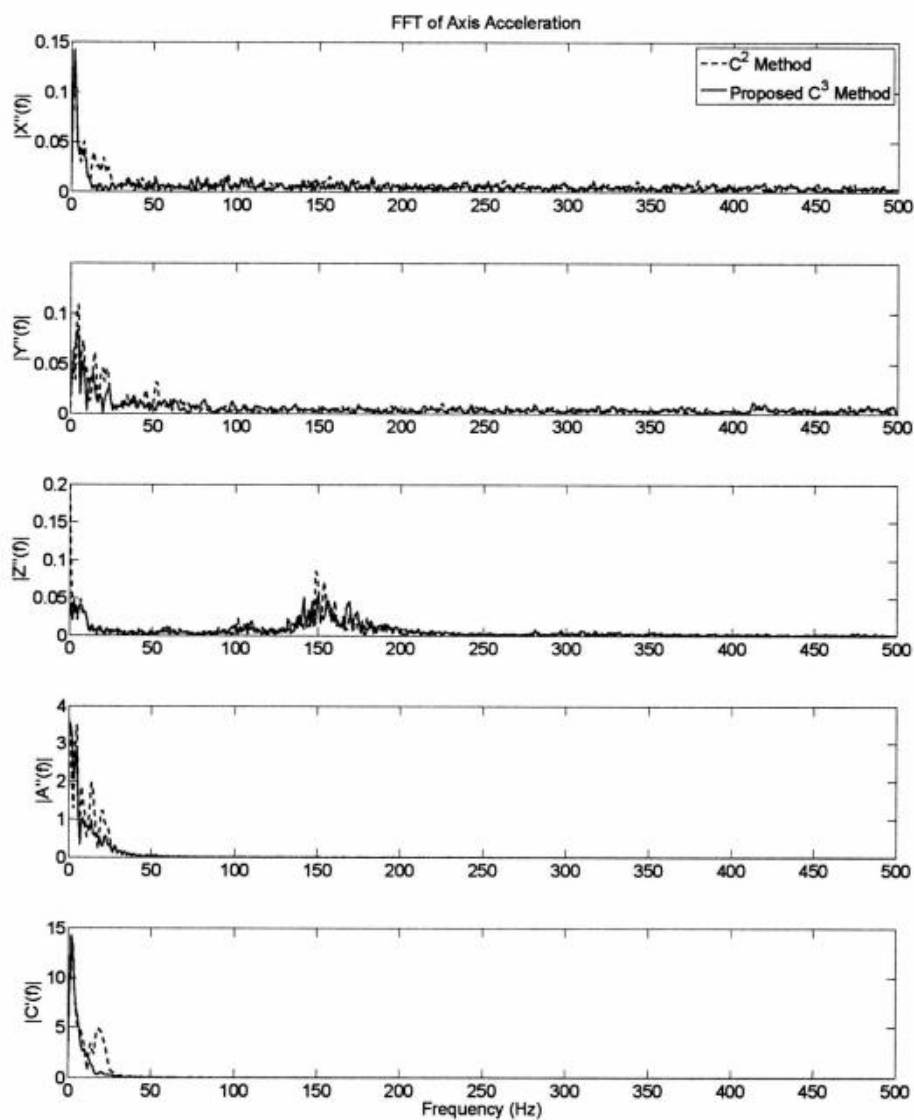


图 2.12: 每个轴上测得加速度的FFT

第三章 带约束的进给速度优化

3.1 本章简介

第二章中生成的近似弧长参数样条路径采用恒定进给速度加工虽然能得到更好的表面光洁度,但对于大规模加工来说效率可能会比较低。因此,无论三轴或五轴样条路径插补都需要优化进给速度,并满足分轴加速度、加加速度以及编程进给速度的约束。这一章中,第3.2节给出了进给速度优化问题的数学描述。这一节证明了时间最优的进给速度必须满足“Bang-Bang”或“Bang-Bang-Singular”的控制结构,也就是说在运动过程中至少有一个轴的加速度或者加加速度达到其边界值,又或者进给速度达到其最大约束值。

为求得进给速度优化问题的解析解,第3.3节基于相空间分析给出了一个三轴加工的速度规划算法。本算法引入了速度限制曲面(velocity limit surface, VLS),作为对 [15, 78] 中的速度限制曲线(velocity limit curve, VLC)的推广。VLS是 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 相空间中用来约束参数速度和加速度的曲面。本算法的基本思路是,在VLS和“贪心法则”的约束下,从 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 相空间原点(0,0,0)开始计算正向的积分曲线;然后用类似的方法从(1,0,0)处开始计算反向的积分曲线;最后将两条积分曲线连接起来并得到完整的加速度连续的进给速度函数。其中“贪心法则”是:尽量采用最大的参数加加速度 \ddot{u} 。实验结果表明,增加加加速度约束后,加工中的振动明显减小而加工质量也有明显的提高。

另外,第3.4节提出了一个计算效率较高且更实用的进给速度优化算法。该算法有三个主要步骤。首先, $u-v$ 相平面被离散化为网格,并在网格点中找出一列可行的最大离散速度序列。其次,利用线性规划,加速度不连续点附近的离散速度序列被光滑化。最后,速度序列被拟合为三次样条并被用来进行插补。我们还证明这一算法的计算复杂度线性依赖于离散网格的数目,因此它是计算效率最高的生成光滑进给速度的算法。通过加工一条三次NURBS曲线,该算法的有效性在商用数控系统上得到了验证。该算法也能容易地推广到五轴加工。此外,本算法中用到的线性规划方法可以被推广并用来处理分轴加加速度约束。第3.5节总结了本章内容。

3.2 优化问题及理论分析

3.2.1 问题的数学模型

为保证位置、速度及加速度的连续性,样条刀具路径需要至少 C^2 的连续性。比如第二章中的算法可以用来生成样条路径。将三轴和五轴样条刀具路径分别记作 $P(u)$ 和 $(P(l), O(l))$ 。这一章将首先讨论三轴加工的进给速度优化问题。为简洁起见,考虑刀具路径为一条平面参数样条曲线:

$$P(u) = (x(u), y(u)), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

其中 $x(u), y(u) \in C^2([0, 1])$ 。进一步地,假设样条曲线是分段无穷次可微的。比如三次B样条曲线及大多数的NURBS曲线都满足这些条件。考虑的运动学约束有,最大进给速度界和分轴加速度及加加速度界。对三维空间路径的推广并没有本质区别。将对时间 t 和曲线参数 u 的导数分别记为:

$$\dot{u} = du/dt, \quad x' = dx/du.$$

于是很显然地有:

$$\dot{u}' = \frac{\ddot{u}}{\dot{u}}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{u}' = \frac{\dddot{u}}{\dot{u}}, \quad (3.2)$$

和

$$\ddot{u}'' = \left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \right)' = \frac{\dddot{u}}{\dot{u}^2} - \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3}. \quad (3.3)$$

此时进给速度就是曲线路径的切向速度:

$$v = \|dP/dt\| = \|P'\|\dot{u} = \sigma\dot{u}, \quad (3.4)$$

其中 $\sigma = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ 。由最大进给速度界 V_{max} 得到第一个约束为

$$0 \leq \sigma\dot{u} \leq V_{max}. \quad (3.5)$$

对于三轴加工的情形, x 和 y 轴的加速度为:

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = (x'\dot{u})' = x''\dot{u}^2 + x'\ddot{u}\dot{u}', \\ a_y = \ddot{y} = (y'\dot{u})' = y''\dot{u}^2 + y'\ddot{u}\dot{u}'. \end{cases} \quad (3.6)$$

将(3.1)代入(3.6), a_x, a_y 可以表示为

$$\begin{cases} a_x = x''\dot{u}^2 + x'\ddot{u}, \\ a_y = y''\dot{u}^2 + y'\ddot{u}. \end{cases} \quad (3.7)$$

x 轴和 y 轴的加加速度为

$$\begin{cases} j_x = \ddot{x} = ((x'\dot{u})'\dot{u})' = x'''\dot{u}^3 + 3x''\dot{u}^2\dot{u}' + x'\dot{u}(\dot{u}')^2 + x'\dot{u}^2\ddot{u}', \\ j_y = \ddot{y} = ((y'\dot{u})'\dot{u})' = y'''\dot{u}^3 + 3y''\dot{u}^2\dot{u}' + y'\dot{u}(\dot{u}')^2 + y'\dot{u}^2\ddot{u}'. \end{cases} \quad (3.8)$$

类似地, 将(3.1)和(3.3)代入(3.8), j_x, j_y 可以表示为

$$\begin{cases} j_x = x'''\dot{u}^3 + 3x''\dot{u}\ddot{u} + x'\ddot{u}, \\ j_y = y'''\dot{u}^3 + 3y''\dot{u}\ddot{u} + y'\ddot{u}. \end{cases} \quad (3.9)$$

在本论文中, \dot{u} , \ddot{u} 和 \ddot{u} 分别被称作参数速度、参数加速度和参数加加速度, 于是进给速度优化问题可以转化为规划一个光滑的参数速度函数 $\dot{u} \in C^1([0, 1])$, 使得加工时间最短:

$$\min t_f = \int_0^1 \frac{du}{\dot{u}} \quad (3.10)$$

满足以下约束:

$$\begin{cases} \dot{u}|_{u=0,1} = 0, \\ \ddot{u}|_{u=0,1} = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \dot{u} \leq V_{max}/\sigma, \\ |a_x| \leq A_x, |a_y| \leq A_y, \\ |j_x| \leq J_x, |j_y| \leq J_y, \end{cases} \quad (3.12)$$

其中 A_x, A_y, J_x, J_y 分别为表示 x, y 轴的最大加速度和加加速度的正常数。

3.2.2 最优解的必要条件

最优控制问题(3.10)–(3.12)中的控制变量为 j_x, j_y . 当它的解在参数区间 $[0, 1]$ 内的一个子区间上满足 $j_x = \pm J_x$ 或 $j_y = \pm J_y$ 时, 在此子区间内称作“Bang-Bang”解, 否则就称作奇异解。如果在整个 $[0, 1]$ 区间上都满足 $j_x = \pm J_x$ 或 $j_y = \pm J_y$, 这个解就满足“Bang-Bang”控制结构。如果在 $[0, 1]$ 的一个真子

集上满足 $j_x = \pm J_x$ 或 $j_y = \pm J_y$, 并在其补集上满足 $a_x = \pm A_x$, $a_y = \pm A_y$ 或 $v = V_{max}$, 这个解就满足“Bang-Bang-Singular”控制结构。

这一节将证明问题的最优解必须是“Bang-Bang”或者“Bang-Bang-Singular”的, 即在整个运动过程中, 至少有一个轴的加速度或加加速度达到其边界值, 或者进给速度达到最大值。换句话说, 等式 $a_x = \pm A_x$, $a_y = \pm A_y$, $j_x = \pm J_x$, $j_y = \pm J_y$ 和 $v = V_{max}$ 中在每一时刻至少有一个成立。当某个轴的加加速度达到边界值时, 称其为控制轴(control axis)。同样的结论也可以利用Pontryagin最大值原理得到 [53]。

以上结论可用反证法得到证明。假设最优参数速度函数为 \dot{u} , 且存在 $[0, 1]$ 上的区间 $[u_1, u_2]$, 使得 v , a_x , a_y , j_x 和 j_y 中的任何一个在 $u \in [u_1, u_2]$ 内都没有达到边界值。也就是说(3.12)中的不等式都是严格成立的。此时对于所有的 $u \in [u_1, u_2]$, 存在正常数 ε_0 使得

$$\dot{u} + \varepsilon_0 \leq V_{max}/\sigma. \quad (3.13)$$

由(3.6)和(3.8)可知, a_x, a_y, j_x, j_y 能表示为 $u, \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}''$ 的函数, 并分别依次记作 p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$\begin{cases} a_x = p_1(u, \dot{u}, \dot{u}') = x''\dot{u}^2 + x'\dot{u}\dot{u}', \\ a_y = p_2(u, \dot{u}, \dot{u}') = y''\dot{u}^2 + y'\dot{u}\dot{u}', \\ j_x = p_3(u, \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}'') = x'''\dot{u}^3 + 3x''\dot{u}^2\dot{u}' + x'\dot{u}(\dot{u}')^2 + x'\dot{u}^2\dot{u}'', \\ j_y = p_4(u, \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}'') = y'''\dot{u}^3 + 3y''\dot{u}^2\dot{u}' + y'\dot{u}(\dot{u}')^2 + y'\dot{u}^2\dot{u}''. \end{cases}$$

所以对任意的 $u \in [0, 1]$, p_1, p_2, p_3, p_4 均为 $\dot{u}, \dot{u}', \dot{u}''$ 的多项式。利用(3.12), 存在正常数 D_1, D_2, D_3, D_4 使得

$$\begin{cases} |p_1(u, \dot{u}, \dot{u}')| \leq D_1 < A_x, \\ |p_2(u, \dot{u}, \dot{u}')| \leq D_2 < A_y, \\ |p_3(u, \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}'')| \leq D_3 < J_x, \\ |p_4(u, \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}'')| \leq D_4 < J_y \end{cases} \quad (3.14)$$

在 $u \in [u_1, u_2]$ 上成立。

对任意的正数 ε , 可以构造一个参数速度函数:

$$\Delta \dot{u} = \begin{cases} \varepsilon \left(1 + \cos \frac{\pi(2u - u_1 - u_2)}{u_2 - u_1} \right) & u_1 \leq u \leq u_2; \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

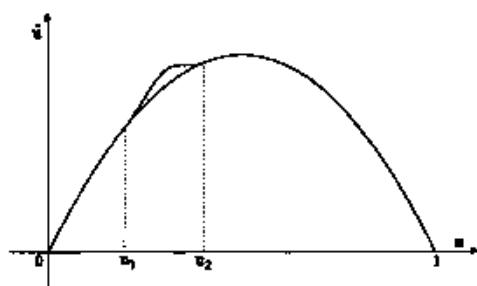


图 3.1: 原速度曲线与更优的速度曲线

容易看出

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}|_{u_1, u_2} = 0, \\ (\Delta \dot{u})'|_{u_1, u_2} = 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

以及

$$\begin{cases} 0 \leq \Delta \dot{u} \leq 2\varepsilon, \\ |\Delta \dot{u}'| \leq B_1 \varepsilon, \\ |\Delta \dot{u}''| \leq B_2 \varepsilon, \end{cases} \quad (3.16)$$

其中 B_1, B_2 为正常数。如图 3.1, $\Delta \dot{u} + \dot{u}$ 为上方曲线, \dot{u} 为下方曲线。

设 $\dot{u}^* = \Delta \dot{u} + \dot{u}$, 由(3.15)可知 $\dot{u}^* \in C^1([0, 1])$ 。如图 3.1 所示, \dot{u}^* 与 \dot{u} 在 (u_1, u_2) 外相等而在 (u_1, u_2) 内严格大于 \dot{u} 。以下将证明如果选取合适的参数, \dot{u}^* 也能满足(3.11)和(3.12), 从而导致矛盾。

对任意的 $u \in [u_1, u_2]$, 将 p_3 对 $\dot{u}, \dot{u}', \dot{u}''$ 使用一阶 Taylor 展开可得:

$$\begin{aligned} p_3(u, \dot{u}^*, \dot{u}^{*'}, \dot{u}^{*''}) &= p_3(u, \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}'') + \Delta \dot{u} \frac{\partial p_3}{\partial \dot{u}}(u, \xi(u), \eta(u), \tau(u)) \\ &\quad + \Delta \dot{u}' \frac{\partial p_3}{\partial \dot{u}'}(u, \xi(u), \eta(u), \tau(u)) \\ &\quad + \Delta \dot{u}'' \frac{\partial p_3}{\partial \dot{u}''}(u, \xi(u), \eta(u), \tau(u)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 $\xi(u)$ 介于 \dot{u} 和 \dot{u}^* 之间, $\eta(u)$ 介于 \dot{u}' 和 $\dot{u}^{*'}$ 之间, 以及 $\tau(u)$ 介于 \dot{u}'' 和 $\dot{u}^{*''}$ 之间。故 $\xi(u), \eta(u), \tau(u)$ 在 $u \in [u_1, u_2]$ 内被约束住。由于 p_3 在(3.17)中出现的偏导数

均为 $\dot{u}, \dot{u}', \dot{u}''$ 的多项式, 故存在常数 F_1, F_2, F_3 使得 $\forall u \in [u_1, u_2]$:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial p_3}{\partial \dot{u}}(u, \xi(u), \eta(u), \tau(u)) \right| \leq F_1, \\ \left| \frac{\partial p_3}{\partial \dot{u}'}(u, \xi(u), \eta(u), \tau(u)) \right| \leq F_2, \\ \left| \frac{\partial p_3}{\partial \dot{u}''}(u, \xi(u), \eta(u), \tau(u)) \right| \leq F_3. \end{cases} \quad (3.18)$$

由(3.14) (3.16) (3.17) (3.18)可得

$$|p_3(u, \dot{u}^*, \dot{u}', \dot{u}'')| \leq D_3 + C_3 \varepsilon,$$

其中 $C_3 = 2F_1 + B_1 F_2 + B_2 F_3$. 类似地, 存在 C_1, C_2, C_4 使得:

$$|p_1(u, \dot{u}^*, \dot{u}')| \leq D_1 + C_1 \varepsilon.$$

$$|p_2(u, \dot{u}^*, \dot{u}')| \leq D_2 + C_2 \varepsilon.$$

$$|p_4(u, \dot{u}^*, \dot{u}', \dot{u}'')| \leq D_4 + C_4 \varepsilon.$$

选取

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_0/2, (A_x - D_1)/C_1, (A_y - D_2)/C_2, (J_x - D_3)/C_3, (J_y - D_4)/C_4\},$$

容易看出 \dot{u}^* 满足(3.11), (3.12)以及连续性条件. 由(3.10), 以及在 $u \in [0, 1]$ 中有 $\dot{u}^* \geq \dot{u}$, 在 $u \in (u_1, u_2)$ 中有 $\dot{u}^* > \dot{u}$, 容易看出 \dot{u}^* 是一个比假设最优 \dot{u} 更好的解. 由这个矛盾可知最优解满足“Bang-Bang”或“Bang-Bang-Singular”的控制结构. 值得指出的是, 即使进给速度上界是一个关于 u 的函数, 这个结论依然成立.

3.3 速度优化的解析算法

3.3.1 积分曲线

既然问题(3.10)–(3.12)的最优解是“Bang-Bang”或“Bang-Bang-Singular”的, 有必要推导出当 $a_x = \pm A_x$, $a_y = \pm A_y$, $j_x = \pm J_x$, $j_y = \pm J_y$ 及 $v = V_{max}$ 中任何一个等式成立时的参数速度函数 \dot{u} 的表达式. 由(3.1)可知, 如果 \dot{u} 关于 u 的表达式确定了, 参数加速度函数 \ddot{u} 也就确定了. 于是 u 的函数 \dot{u} 和 \ddot{u} 就确定了 $u - \dot{u} - \ddot{u}$ 相

空间中的一条曲线,并将其称作积分曲线(integration trajectory)。本节将讨论如何计算参数速度函数。

首先,考虑求解某个轴的加加速度达到边界值时的 \dot{u} 函数。例如,当 x 轴达到加加速度上界 J_x 时,需要求解以下二阶常微分方程:

$$((x'\dot{u})'\dot{u})'\dot{u} = J_x. \quad (3.19)$$

令 $f = x'\dot{u}$, 微分方程可化为

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} f \right) f = J_x.$$

又令 $g = \frac{df}{dx}$, 进一步化为

$$g^2 f + g f^2 \frac{dg}{df} = J_x.$$

设 $h = g^2$, 上式变为

$$\frac{dh}{df} = \frac{2J_x}{f^2} - \frac{2h}{f}.$$

将上述微分方程解得

$$h = \frac{2J_x}{f} - \frac{C_1}{f^2}, \quad (3.20)$$

其中 C_1 为积分常数。上述方程可重写为

$$\frac{df}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2J_x f - C_1}}{f}.$$

将其解得

$$\begin{aligned} x - C_2 &= \pm \int \frac{f df}{\sqrt{2J_x f - C_1}} \\ &= \pm \frac{1}{2J_x^2} \left(C_1 \sqrt{2J_x f - C_1} + \frac{1}{3} \sqrt{2J_x f - C_1}^3 \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中 C_2 为积分常数。解上式得到

$$\dot{u} = \frac{1}{2J_x x'} \left[\omega \left(U + \sqrt{U^2 + C_1^3} \right)^{\frac{2}{3}} + \omega^2 \left(U - \sqrt{U^2 + C_1^3} \right)^{\frac{2}{3}} - C_1 \right], \quad (3.22)$$

其中 $U = 3J_x^2(x - C_2)$, $\omega^3 = 1$ 。

积分常数 C_1, C_2 将由 u, \dot{u}, \ddot{u} 确定。将

$$h = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = \left(\frac{x''\dot{u}^2 + x'\ddot{u}}{x'\dot{u}} \right)^2.$$

代入(3.20)得到

$$C_1 = 2J_x f - h f^2 = 2J_x x' \dot{u} - (x'' \dot{u}^2 + x' \ddot{u})^2. \quad (3.23)$$

由(3.21)(3.23)得到

$$C_2 = x \pm \frac{1}{3J_x^2} ((x'' \dot{u}^2 + x' \ddot{u})^3 - 3J_x x' \dot{u} (x'' \dot{u}^2 + x' \ddot{u})). \quad (3.24)$$

由(3.23)(3.24), 积分常数 C_1, C_2 可由积分曲线上任意已知点确定。

当 y 轴加速度到达上界 J_y , 同样可解得参数速度

$$\dot{u} = \frac{1}{2J_y y'} \left[\omega \left(U + \sqrt{U^2 + C_1^3} \right)^{\frac{2}{3}} + \omega^2 \left(U - \sqrt{U^2 + C_1^3} \right)^{\frac{2}{3}} - C_1 \right], \quad (3.25)$$

其中 $U = 3J_y^2(y - C_2)$, $\omega^3 = 1$. 类似地,

$$C_1 = 2J_y y' \dot{u} - (y'' \dot{u}^2 + y' \ddot{u})^2, \quad (3.26)$$

$$C_2 = y \pm \frac{1}{3J_y^2} ((y'' \dot{u}^2 + y' \ddot{u})^3 - 3J_y y' \dot{u} (y'' \dot{u}^2 + y' \ddot{u})). \quad (3.27)$$

在(3.22)或(3.25)中, 如果 $U^2 + C_1^3$ 在 u 的某个区间上为负, 为计算方便, \dot{u} 的表达式需要做一点处理。以(3.25)为例, 将 ω 替换为 $e^{\frac{2}{3}ik\pi}$ ($k = 0, 1, 2$)可得

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{-C_1}{2J_y y'} \left[e^{\frac{2}{3}ik\pi} \left(\frac{U}{(-C_1)^{3/2}} + i \sqrt{1 - \frac{U^2}{(-C_1)^3}} \right)^{\frac{2}{3}} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{2}{3}ik\pi} \left(\frac{U}{(-C_1)^{3/2}} - i \sqrt{1 - \frac{U^2}{(-C_1)^3}} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right] \\ &= \frac{-C_1}{2J_y y'} \left[e^{\frac{2}{3}ik\pi} e^{\frac{2}{3}i \arccos \frac{U}{(-C_1)^{3/2}}} + e^{-\frac{2}{3}ik\pi} e^{-\frac{2}{3}i \arccos \frac{U}{(-C_1)^{3/2}}} + 1 \right] \\ &= \frac{-C_1}{2J_y y'} \left[2 \cos \frac{2}{3} \left(\arccos \frac{U}{(-C_1)^{3/2}} + k\pi \right) + 1 \right]. \end{aligned}$$

若 x (或 y)轴到达加加速度下界 $-J_x$ (或 $-J_y$)，只需将上述解中的 J_x (或 J_y)替换为 $-J_x$ (或 $-J_y$)。在 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间中，由 $j_x = \pm J_x$ 或 $j_y = \pm J_y$ 确定的积分曲线被称作第一类积分曲线(type one integration trajectory, ITR₁)。

其次，考虑某个轴的加速度达到边界值时的情形。比如当 x 轴到达其加速度上界 A_x 时，需要求解如下的一阶常微分方程：

$$(x'\dot{u})'\dot{u} = A_x. \quad (3.28)$$

以上微分方程在 [15, 78] 中已得到求解。在(3.28)两端分别乘上 x' ，可以化为：

$$x'\dot{u}(x'\dot{u})' = A_x x'.$$

上述方程可重写为

$$\frac{d}{du}(x'\dot{u})^2 = 2A_x x'.$$

也就是

$$(x'\dot{u})^2 = 2A_x x + C_0.$$

从而解得

$$\dot{u} = \frac{\sqrt{2A_x x + C_0}}{|x'|}, \quad (3.29)$$

其中积分常数 $C_0 = (x'\dot{u})^2 - 2A_x x$ 可由积分曲线上的任意已知点 (u, \dot{u}) 得到。等式 $a_x = -A_x$ 及 $a_y = \pm A_y$ 的解可以类似地得到。在相空间 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 中，由 $a_x = \pm A_x$ 或 $a_y = \pm A_y$ 决定的积分曲线被称作第二类积分曲线(type two integration trajectory, ITR₂)。

最后，当 $v = V_{max}$ 成立时，参数速度函数显然为：

$$\dot{u} = V_{max}/\sigma. \quad (3.30)$$

由 $v = V_{max}$ 决定的积分曲线记为ITR₃，而且它在相空间 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 中是唯一的。

3.3.2 速度限制曲面

在给出解析速度规划算法之前，我们需要由速度、加速度及加加速度约束推导出 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间中的三类速度限制曲面。这一节还将引入速度限制曲面上的速度切换曲线，以及控制轴切换面。

由(3.9)可将分轴加加速度约束重写为参数加加速度 \ddot{u} 的约束:

(a) 当 $x'y' \neq 0$ 时, 加加速度约束等价于:

$$\begin{cases} f_1(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq \ddot{u} \leq g_1(u, \dot{u}, \ddot{u}), \\ f_2(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq \ddot{u} \leq g_2(u, \dot{u}, \ddot{u}), \end{cases} \quad (3.31)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(u, \dot{u}, \ddot{u}) &= \begin{cases} (-J_x - x''' \dot{u}^3 - 3x'' \dot{u} \ddot{u})/x' & x' > 0; \\ (J_x - x''' \dot{u}^3 - 3x'' \dot{u} \ddot{u})/x' & x' < 0. \end{cases} \\ g_1(u, \dot{u}, \ddot{u}) &= \begin{cases} (J_x - x''' \dot{u}^3 - 3x'' \dot{u} \ddot{u})/x' & x' > 0; \\ (-J_x - x''' \dot{u}^3 - 3x'' \dot{u} \ddot{u})/x' & x' < 0. \end{cases} \\ f_2(u, \dot{u}, \ddot{u}) &= \begin{cases} (-J_y - y''' \dot{u}^3 - 3y'' \dot{u} \ddot{u})/y' & y' > 0; \\ (J_y - y''' \dot{u}^3 - 3y'' \dot{u} \ddot{u})/y' & y' < 0. \end{cases} \\ g_2(u, \dot{u}, \ddot{u}) &= \begin{cases} (J_y - y''' \dot{u}^3 - 3y'' \dot{u} \ddot{u})/y' & y' > 0; \\ (-J_y - y''' \dot{u}^3 - 3y'' \dot{u} \ddot{u})/y' & y' < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} J_-(u, \dot{u}, \ddot{u}) = \max\{f_1, f_2\}, \\ J_+(u, \dot{u}, \ddot{u}) = \min\{g_1, g_2\}. \end{cases} \quad (3.32)$$

约束(3.31)化为

$$J_-(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq \ddot{u} \leq J_+(u, \dot{u}, \ddot{u}). \quad (3.33)$$

上式表明在 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间中的任意一点处, \ddot{u} 存在上界 J_+ 和下界 J_- .

(b) 当 $x' = 0$ 时, 加加速度约束化为:

$$\begin{cases} -J_x \leq x''' \dot{u}^3 + 3x'' \dot{u} \ddot{u} \leq J_x, \\ f_2(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq \ddot{u} \leq g_2(u, \dot{u}, \ddot{u}). \end{cases} \quad (3.34)$$

其中, (3.34)的第一式显示了 (\dot{u}, \ddot{u}) 在满足 $x' = 0$ 的 u 截面的取值范围。它由 $u-\ddot{u}$ 空间中的两条曲线 $x''' \dot{u}^3 + 3x'' \dot{u} \ddot{u} = -J_x$ 和 $x''' \dot{u}^3 + 3x'' \dot{u} \ddot{u} = J_x$ 所约束。这些曲线被称作第一类速度切换曲线(type one velocity switching curve, VSC₁)。 (3.34)的第二式仍然表明了 \ddot{u} 的上下界, 即 $J_+ = g_2, J_- = f_2$.

(c) 当 $y' = 0$ 时, 对以下式子的分析是类似的:

$$\begin{cases} f_1(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq \ddot{u} \leq g_1(u, \dot{u}, \ddot{u}), \\ -J_y \leq y''' \dot{u}^3 + 3y'' \dot{u} \ddot{u} \leq J_y. \end{cases} \quad (3.35)$$

(3.35)的第一式显示了 \ddot{u} 的上下界 $J_+ = g_1, J_- = f_1$ 。第二式表明了 (\dot{u}, \ddot{u}) 在满足 $y' = 0$ 的 u 截面的取值范围, 它由曲线 $y''' \dot{u}^3 + 3y'' \dot{u} \ddot{u} = -J_y$ 和 $y''' \dot{u}^3 + 3y'' \dot{u} \ddot{u} = J_y$ 所约束。这些曲线也属于 VSC_1 。

设 $J_-(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 和 $J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 为(3.32)中所定义的表达式。曲面 $J_-(u, \dot{u}, \ddot{u}) = J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 被称作第一类速度限制曲面(type one velocity limit surface, VLS_1)。显然地, 积分曲线不能超出 VLS_1 以外。

由(3.7), 加速度约束变为:

$$\begin{cases} -A_x \leq a_x(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq A_x, \\ -A_y \leq a_y(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq A_y. \end{cases} \quad (3.36)$$

曲面 $a_x(u, \dot{u}, \ddot{u}) = \pm A_x$ 和 $a_y(u, \dot{u}, \ddot{u}) = \pm A_y$ 被称作第二类速度限制曲面(type two velocity limit surface, VLS_2)。积分曲线同样不能超出 VLS_2 。然而, 容易看出 ITR_2 落在 VLS_2 上。事实上, 从 VLS_2 上任一点出发, 都存在一条 ITR_2 。

式(3.5)中的进给速度约束导出了第三类速度限制曲面(type three velocity limit surface, VLS_3):

$$v = \sigma \dot{u} = V_{max}, \quad (3.37)$$

它是 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间中的柱面。积分曲线同样不能超出 VLS_3 。很显然, 唯一的 ITR_3 落在 VLS_3 上。

这三类VLS都是 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间中如下区域内的代数曲面:

$$D = \{(u, \dot{u}, \ddot{u}) | 0 \leq u \leq 1, \dot{u} \geq 0\}.$$

上文已经表明积分曲线不能超出这三类VLS, 也就是说积分曲线只能在如下区域内进行规划:

$$\begin{cases} J_-(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq J_+(u, \dot{u}, \ddot{u}), \\ -A_x \leq a_x(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq A_x, \\ -A_y \leq a_y(u, \dot{u}, \ddot{u}) \leq A_y, \\ 0 \leq \sigma \dot{u} \leq V_{max}. \end{cases}$$

很明显, 以上区域是由VLS划出的 D 的子区域, 且包含点 $(0, 0, 0)$ 和 $(1, 0, 0)$ (如图 3.2)。

除以上定义的 VSC_1 之外, 在 VLS_1 上还有两类速度切换曲线 VSC_2 和 VSC_3 。既然我们假设刀具路径具有 C^2 连续度, 对于 x''' 或 y''' 可能存在不连续点。

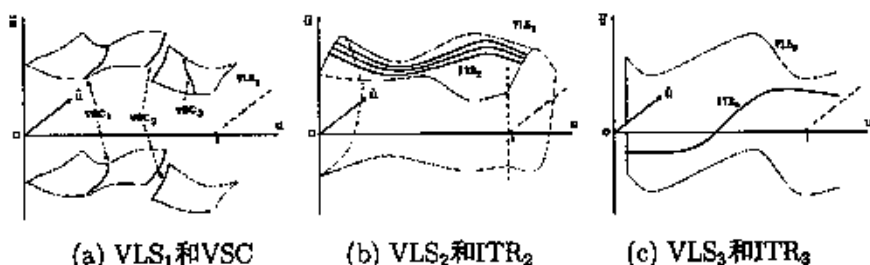


图 3.2: 三类速度限制曲面

从(3.31)(3.32)可知, 这些不连续点这将形成VLS₁上的一些曲线, 并记作VSC₂. 而路径曲线的每一段都是无穷次可微的, 因此 x''' 和 y''' 的不连续点只会在路径曲线的节点处出现。

此外, ITR₁与VLS₁相切处的点集(实际为曲线)被记作VSC₃. 对 $i = 1, j = 2$ 或 $i = 2, j = 1$, 与 $f_i = g_j$ 相切的ITR₁就是 $\ddot{u} = f_i$ 或 $\ddot{u} = g_j$ 的解。将 $f_i - g_j = 0$ 对 u 求导, 由(3.1)(3.2)可得:

$$\frac{\partial}{\partial u}(f_i - g_j) + \frac{\dot{u}}{u} \frac{\partial}{\partial \dot{u}}(f_i - g_j) + \frac{\ddot{u}}{u} \frac{\partial}{\partial \ddot{u}}(f_i - g_j) = 0.$$

将 $\ddot{u} = f_i$ 代入上述等式得到

$$\dot{u} \frac{\partial}{\partial u}(f_i - g_j) + \ddot{u} \frac{\partial}{\partial \dot{u}}(f_i - g_j) + f_i \frac{\partial}{\partial \ddot{u}}(f_i - g_j) = 0. \quad (3.38)$$

式(3.38)与VLS₁的交 $f_i = g_j$ 就是VSC₃.

接下来将讨论如何确定控制轴。有两个问题需要考虑: 决定初始点处的控制轴, 以及控制轴的切换。

在 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间中从 $(0, 0, 0)$ 处对 $\ddot{u} = J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 进行积分, 很容易由 $(u, \dot{u}, \ddot{u}) = (0, 0, 0)$ 及本节中的(a), (b) 与(c)三种情况得到应该选取的控制轴。例如当 $x'(0) > 0, y'(0) > 0$ 时, 当且仅当 $g_1(0, 0, 0) = J_x/x' < g_2(0, 0, 0) = J_y/y'$ 时, x 轴为控制轴。

由(3.32), 当积分 $\ddot{u} = J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 时, 如果 g_1, g_2 的大小改变, 参数速度的表达式也会改变。这意味着控制轴需要切换。因此将 $g_1 = g_2$ 称作控制轴切换面(control axis switching surface, CASS)。例如, 若积分曲线从 $g_1 < g_2$ 区域穿过CASS到达 $g_1 > g_2$ 区域, 控制轴应该从 x 切换为 y , 反之亦然。

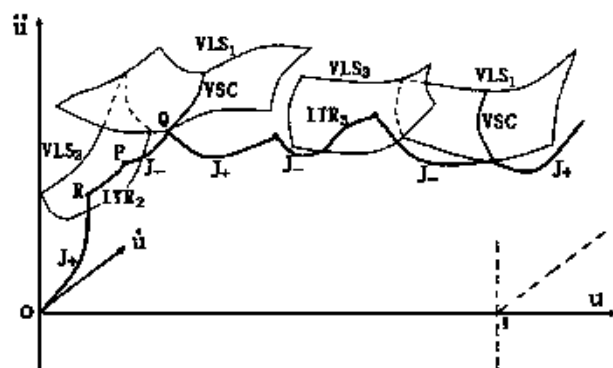


图 3.3: 由八段组成的正向积分曲线: 第一段OR为最大加加速度积分曲线; 第二段RP为与 VLS_1 相交的 ITR_2 ; 第三段PQ为从VSC出发的最小加加速度积分曲线; 第四段是与 VLS_3 相交但不在 ITR_3 上的最大加加速度积分曲线; 第五段为从 ITR_3 出发的最小加加速度积分曲线; 第六段为与 VLS_1 相交的 ITR_3 ; 第七段为由VSC出发的最小加加速度积分曲线; 第八段为在 $u = 1$ 终止的最大加加速度积分曲线。

当积分 $\ddot{u} = J_-(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 时的分析是类似的, 其中CASS就是 $f_1 = f_2$. 当积分曲线从 $f_1 > f_2$ 区域穿过CASS到达 $f_1 < f_2$ 区域, 控制轴应该由 x 切换为 y , 反之亦然。在下文算法中将不再赘述积分 $\ddot{u} = J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 或 $\ddot{u} = J_-(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 的过程中穿过CASS时的处理方法。

3.3.3 解析速度优化的贪心算法

本节提出的速度优化算法基于一个“贪心法则”: 尽可能地使用最大参数加加速度 \ddot{u} . 带加速度约束的进给速度优化问题解 [15, 78] 采用类似的法则。不过区别是“贪心法则”并不能保证加加速度约束问题解的理论最优性, 这将在本章的结论中讨论。

首先, 我们将给出带分轴加加速度约束的解析速度优化贪心算法的基本框架。算法中的具体计算方法将在后面详细地给出。

算法FP.CJ: 分轴加加速度约束的解析速度优化

输入: $P(u) = (x(u), y(u))$, $0 \leq u \leq 1$; $V_{max}, A_x, A_y, J_x, J_y$

输出: $u \in [0, 1]$ 上的积分曲线

第0步: 令 $S = (0, 0, 0)$.

第1步: 在 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间内从 S 出发, 通过积分 $\ddot{u} = J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 生成 J_+ 积分曲线直到(若其先穿过 CASS, 则如前所述切换控制轴)与 VLS 相交。设 J_+ 曲线与 VLS 的第一个交点为 R 。如果 J_+ 曲线在 $u = 1$ 之前不与 VLS 相交, 则 $u \in [0, 1]$ 上的正向积分曲线已经完成。记其参数速度函数为 \dot{u}_f , 并转到第4步。

第2步: 考虑以下三种情况(如图 3.3 所示):

- 1) 若 $R \in VLS_2$, 在此 VLS_2 上从 R 出发生成一条 ITR_2 。于是有两种情况: 若 ITR_2 与 VLS_1 或 VLS_3 相交于 T , 则将 R 与 T 之间的 ITR_2 加入正向积分曲线, 并设 $R = T$ 转入第2步; 若 ITR_2 在 $u = 1$ 终止, 将 ITR_2 加入正向积分曲线并转到第4步。
- 2) 若 R 在 VLS_3 与 ITR_3 上, 将 R 之后的积分曲线设为 ITR_3 直到 ITR_3 与 VLS_1 或 VLS_2 相交于 T , 或 ITR_3 终止于 $u = 1$ 。在第一种情形, 将 VLS_3 加入积分曲线并设 $R = T$, 转入第2步。在第二种情形, 将 ITR_3 加入积分曲线并转到第4步。
- 3) 现在只能有 $R \in VLS_1$ 或 $R \in VLS_3 \setminus ITR_3$, 这意味着不能继续以最大加加速度积分。在 R 之后从 VSC 或 ITR_3 上的任一点的积分 $\ddot{u} = J_-(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 来得到 J_- 积分曲线。若从 VSC 或 ITR_3 上的 Q 点出发的 J_- 曲线与前面的积分曲线相交于 P , 且 P 具有最大的参数 u , 则更新 P 和 Q 之前的积分曲线为从 P 到 Q 的 J_- 曲线。

第3步: 令 $S = Q$ 。重复第1-3步的过程直到 $u = 1$ 。将正向积分曲线的参数速度函数记为 \dot{u}_f (如图 3.3)。

第4步: 在 $u-\dot{u}-\ddot{u}$ 空间内从 $(1, 0, 0)$ 出发生成反向积分曲线, 方法类似于第1-3步, 直到 $u = 0$ 。将反向积分曲线的参数速度函数记为 \dot{u}_b 。

第5步: 将 \dot{u}_f 和 \dot{u}_b 的积分曲线用 J_- 曲线连接起来。于是 $u \in [0, 1]$ 上完整的积分曲线便得到了。

注记：“贪心法则”在第2步中得到体现。当积分曲线与VLS₁相交时，如果继续使用相同的最大加加速度控制，它将会穿过VLS₁从而违反约束条件。换句话说，此时应该采用其它的控制。由定义可知，积分曲线能与VSC相交于一点。这解释了本算法试图从下一个VSC上的点出发生成J₋曲线来减速的原因。当积分曲线与VLS₂或VLS₃相交，它应该落在VLS上，因为FTR₂在VLS₂上以及ITR₃在VLS₃上。换句话说，本算法尽可能地采用最大参数加加速度，不得已才使用其他控制来保证所有的约束都被满足。

在第2步和第5步中涉及的具体的计算方法将在下面给出。第5步中的用J₋曲线来连接两条J₊曲线的方法将被首先讨论。

对第5步而言，由于正向与反向积分曲线都经过多次切换， \dot{u}_f 与 \dot{u}_b 均为分段解析函数。因此需要在正向和反向积分曲线上分别依次选取一段并用J₋积分曲线来连接。假设现在已经分别选好 \dot{u}_f 和 \dot{u}_b 上的一段，有如下两种情况：

1) 用于连接的J₋积分曲线不穿过CASS。假设此J₋曲线在 u - \dot{u} - \ddot{u} 空间内从正向积分曲线上的点 $(u_1, \dot{u}_f(u_1), \ddot{u}_f(u_1))$ 连接到反向积分曲线上的点 $(u_2, \dot{u}_b(u_2), \ddot{u}_b(u_2))$ 。由(3.23)(3.24)或(3.26)(3.27)，J₋曲线的积分常数可以表示为 $C_1(u, \dot{u}, \ddot{u})$ ， $C_2(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 。以下代数方程组

$$\begin{cases} C_1(u_1, \dot{u}_f(u_1), \ddot{u}_f(u_1)) = C_1(u_2, \dot{u}_b(u_2), \ddot{u}_b(u_2)), \\ C_2(u_1, \dot{u}_f(u_1), \ddot{u}_f(u_1)) = C_2(u_2, \dot{u}_b(u_2), \ddot{u}_b(u_2)) \end{cases} \quad (3.39)$$

需要解出并得到 u_1, u_2 。于是J₋连接曲线的积分常数为 $C_1(\bar{u}_1, \dot{u}_f(\bar{u}_1), \ddot{u}_f(\bar{u}_1))$ ， $C_2(\bar{u}_1, \dot{u}_f(\bar{u}_1), \ddot{u}_f(\bar{u}_1))$ ，其中 \bar{u}_1 是方程组(3.39)的解。从而第5步中的J₋连接曲线就得到了。

2) J₋连接曲线穿过某个CASS。现在J₋积分曲线的表达式及其积分常数在CASS两面是不同的。不妨假设左边为 $j_x = -J_x$ 控制，右边为 $j_y = -J_y$ 控制。设 $j_x = -J_x$ 积分曲线的积分常数为 C_1^x, C_2^x ， $j_y = -J_y$ 积分曲线的积分常数为 C_1^y, C_2^y 。设J₋连接曲线穿过的是CASS上的点 $(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c)$ ，并且从正向积分曲线上的点 $(u_i, \dot{u}_f(u_i), \ddot{u}_f(u_i))$ 出发，终止于反向积分曲线上的点 $(u_r, \dot{u}_b(u_r), \ddot{u}_b(u_r))$ 。

于是下述代数方程组

$$\begin{cases} f_1(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c) = f_2(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c), \\ C_1^x(u_i, \dot{u}_f(u_i), \ddot{u}_f(u_i)) = C_1^x(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c), \\ C_2^x(u_i, \dot{u}_f(u_i), \ddot{u}_f(u_i)) = C_2^x(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c), \\ C_1^y(u_r, \dot{u}_b(u_r), \ddot{u}_b(u_r)) = C_1^y(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c), \\ C_2^y(u_r, \dot{u}_b(u_r), \ddot{u}_b(u_r)) = C_2^y(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c) \end{cases} \quad (3.40)$$

需要求解以得到 $u_i, u_c, u_r, \dot{u}_c, \ddot{u}_c$ ，以及积分常数 $C_1^x(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c), C_2^x(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c)$ ，还有 $C_1^y(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c), C_2^y(u_c, \dot{u}_c, \ddot{u}_c)$ 。若 J_- 曲线穿过CASS不止一次，分析是类似的。

一般来说，上述方程组的解是有限的。因此只需从各解中由加工时间(3.10)确定出最优解即可。

对于第2步，记前面的参数速度函数为 \dot{u}_1 。有以下两种情况：

1) 点 Q 落在 VSC_1 或 VSC_2 上。若在 Q 处 $u = u_0$ ，假设 Q 点坐标为 $(u, \dot{u}, \ddot{u}) = (u_0, b, c)$ ，并设 VSC_1 或 VSC_2 在 u_0 截面的表达式为 $h_1(\dot{u}, \ddot{u}) = 0$ 。设 P 处有 $u = a$ ，于是 P 的坐标为 $(a, \dot{u}_1(a), \ddot{u}_1(a))$ 。 J_- 曲线的积分常数为 $C_1(u, \dot{u}, \ddot{u}), C_2(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 。需要求解方程组

$$\begin{cases} C_1(u_0, b, c) = C_1(a, \dot{u}_1(a), \ddot{u}_1(a)), \\ C_2(u_0, b, c) = C_2(a, \dot{u}_1(a), \ddot{u}_1(a)), \\ h_1(b, c) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

来得到 a, b, c 。若方程组有多个解或者存在多个VSC，由“贪心法则”可知应该选取具有最大参数值的 a 。之后的方程组求解遇到类似情况也将这样处理。 J_- 曲线的积分常数为 $C_1(u_0, b, c), C_2(u_0, b, c)$ 。于是第2步中的 J_- 曲线也就得到了。

2) 点 Q 落在 VSC_3 上(或者 ITR_3 上，这种情况是类似的)。假设 Q 点的坐标为 (d_0, b_0, c_0) 。由(3.38)，设 VSC_3 为 $\{(u, \dot{u}, \ddot{u}) | h_2(u, \dot{u}, \ddot{u}) = 0, h_3(u, \dot{u}, \ddot{u}) = 0\}$ 。设 P 点有 $u = a_0$ 。于是 P 的坐标为 $(a_0, \dot{u}_1(a_0), \ddot{u}_1(a_0))$ 。 J_- 曲线的积分常数可记为 $C_1(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 及 $C_2(u, \dot{u}, \ddot{u})$ 。于是需要解下述方程组

$$\begin{cases} C_1(d_0, b_0, c_0) = C_1(a_0, \dot{u}_1(a_0), \ddot{u}_1(a_0)), \\ C_2(d_0, b_0, c_0) = C_2(a_0, \dot{u}_1(a_0), \ddot{u}_1(a_0)), \\ h_2(d_0, b_0, c_0) = 0, \\ h_3(d_0, b_0, c_0) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

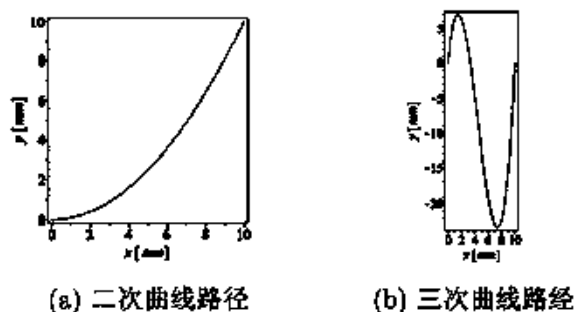
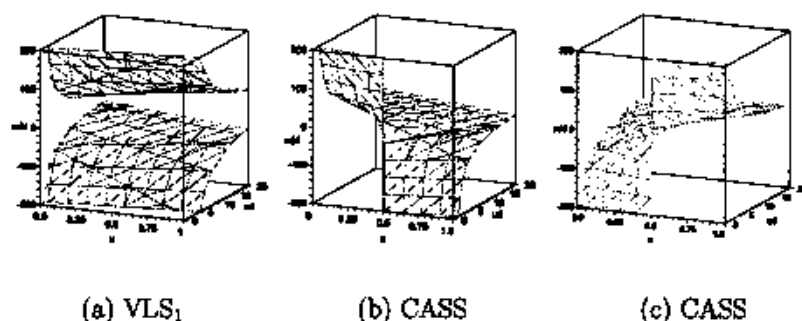


图 3.4: 刀具路径的例子

图 3.5: VLS₁和CASS, 其中 $ud = \dot{u}$, $udd = \ddot{u}$. \dot{u} 的单位为 s^{-1} , \ddot{u} 的单位为 s^{-2}

以得到 a_0, d_0, b_0, c_0 . J_- 曲线的积分常数为 $C_1(d_0, b_0, c_0)$ 和 $C_2(d_0, b_0, c_0)$. 若 J_- 曲线在 P 和 Q 之间穿过CASS, 可以用第5步的情况2)的方法来处理。

至此, 完整的积分曲线便得到了, 其参数速度函数满足(3.11)(3.12)以及“贪心法则”。

3.3.4 模拟结果

这一节将用两个例子来说明算法FP_CJ. 首先, 仅含加加速度约束的简单路径(如图3.4(a))将被用来说明算法的计算过程。

例1.

$$P(u) = (10u, 10u^2), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$J_x = J_y = 10000 \text{ mm/s}^3.$$

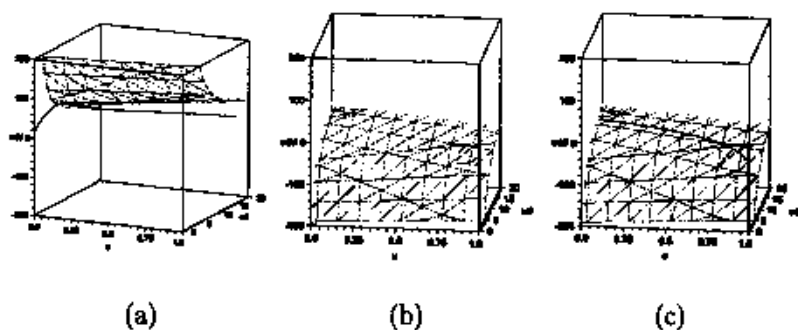


图 3.6: 正向积分曲线: (a); 反向积分曲线: (b)和(c)

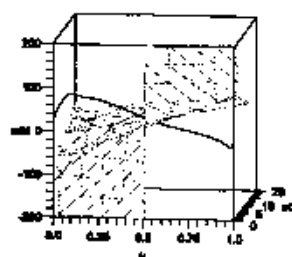


图 3.7: 正向和反向积分曲线的连接

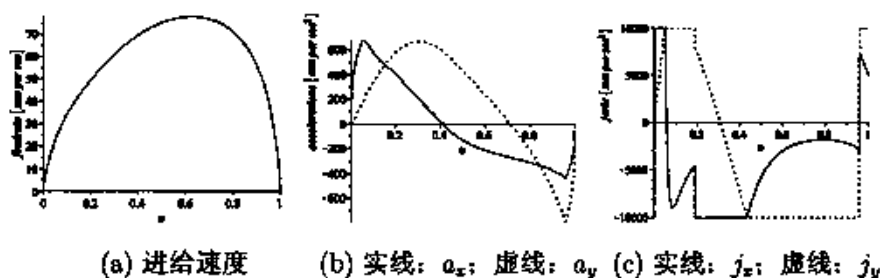


图 3.8: 进给速度、 x, y 轴加速度及加加速度表示为参数 u 的函数

算法由以下几步组成:

1) 首先, 计算VLS₁和CASS:

图 3.5(a): VLS₁ $J_-(u, \dot{u}, \ddot{u}) = J_+(u, \dot{u}, \ddot{u})$;

图 3.5(b): 最大参数加加速度的CASS, $g_1(u, \dot{u}, \ddot{u}) = g_2(u, \dot{u}, \ddot{u})$;

图 3.5(c): 最小参数加加速度的CASS, $f_1(u, \dot{u}, \ddot{u}) = f_2(u, \dot{u}, \ddot{u})$.

然后, 计算三类VSC:

VSC₁: $\{(0, \dot{u}, \ddot{u}) \mid 10^4 - 60\dot{u}\ddot{u} = 0\}$ and $\{(0, \dot{u}, \ddot{u}) \mid 10^4 + 60\dot{u}\ddot{u} = 0\}$;

VSC₃: $\{(u, \dot{u}, \ddot{u}) \mid 10^4 - 60\dot{u}\ddot{u} + 2 \cdot 10^4 u = 0, 4 \cdot 10^4 \dot{u} - 30\ddot{u}^2 = 0\}$ 和 $\{(u, \dot{u}, \ddot{u}) \mid 10^4 + 60\dot{u}\ddot{u} + 2 \cdot 10^4 u = 0, 4 \cdot 10^4 \dot{u} + 30\ddot{u}^2 = 0\}$;

VSC₂此时不存在。

2) 从(0, 0, 0)出发生成 J_+ 积分曲线。初始由 $j_z = J_z$ 控制, 在 $u = 0.05$ 与CASS: $g_1 = g_2$ 相交, 并切换为 $j_v = J_v$ 控制。在到达 $u = 1$ 之前它将不会遇到VLS₁和CASS (如图 3.6(a))。正向积分曲线的参数速度函数为:

$$\dot{u}_f = \begin{cases} 5(6u)^{\frac{2}{3}}, & 0 \leq u \leq 0.05; \\ \frac{\frac{5}{2u}((\sqrt{9u^4 - 0.5625 \cdot 10^{-2}u^2 + 0.5625 \cdot 10^{-8}} + 3u^2 - 0.9375 \cdot 10^{-3}))^{\frac{2}{3}}}{+ (\sqrt{9u^4 - 0.5625 \cdot 10^{-2}u^2 + 0.5625 \cdot 10^{-8}} - 3u^2 + 0.9375 \cdot 10^{-3})^{\frac{2}{3}}} \\ - 0.0168), & 0.05 \leq u \leq 1. \end{cases}$$

3) 由(1, 0, 0)出发生成 J_+ 积分曲线。 \dot{u}_b 初始时由 $j_v = J_v$ 控制。其在 $u = 0.9253$ 处与CASS: $g_1 = g_2$ 相交, 并切换为 $j_z = J_z$ 控制。于是与VLS₁相交于 $u = 0.8104$ (如图 3.6(b))。现在, 通过求解(3.41)来执行算法的第2步, 其唯一解是从VSC₁上的 $(u, \dot{u}, \ddot{u}) = (0, 7.528, -22.14)$ 点出发到 \dot{u}_b 上的 $(0.9561, 1.679, -44.86)$ 点的 $j_v = -J_v$ 曲线(如图 3.6(c))。于是反向积分曲线的参数速度函数为:

$$\dot{u}_b = \begin{cases} \frac{5}{2u}(6(1-u^2))^{\frac{2}{3}}, & 0.9561 \leq u \leq 1; \\ \frac{3.211}{u}(2 \sin(\frac{2}{3} \arccos(2.0607u^2 - 1) + \frac{1}{6}\pi) - 1), & 0 \leq u \leq 0.9561. \end{cases}$$

4) 用 J_- 曲线来连接 \dot{u}_f 和 \dot{u}_b 的积分曲线。解方程组(3.40)得到如图 3.7 所示

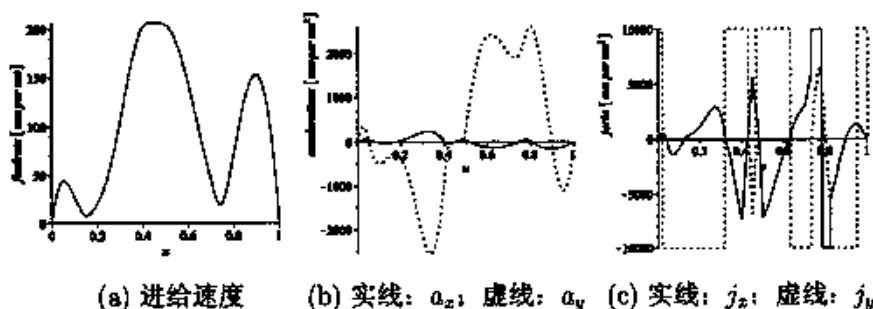


图 3.9: 进给速度、 x, y 轴加速度及加加速度表示为参数 u 的函数

的连接曲线。于是完整的积分曲线的参数速度函数为:

$$\dot{u} = \begin{cases} 5(6u)^{\frac{2}{3}}, & 0 \leq u \leq 0.05; \\ \frac{5}{2u} ((\sqrt{9u^4 - 0.5625 \cdot 10^{-2}u^2 + 0.5625 \cdot 10^{-5}} + 3u^2 - 0.9375 \cdot 10^{-3})^{\frac{3}{2}} \\ + (\sqrt{9u^4 - 0.5625 \cdot 10^{-2}u^2 + 0.5625 \cdot 10^{-5}} - 3u^2 + 0.9375 \cdot 10^{-3})^{\frac{3}{2}} \\ - 0.0168), & 0.05 \leq u \leq 0.1893; \\ 5.44(2 \sin(\frac{2}{3} \arccos(2.6437u - 1.0877) + \frac{1}{6}\pi) - 1), & 0.1893 \leq u \leq 0.4336; \\ \frac{3.124}{u}(2 \sin(\frac{2}{3} \arccos(2.1476u^2 - 1.0869) + \frac{1}{6}\pi) - 1), & 0.4336 \leq u \leq 0.9580; \\ \frac{5}{2u}(6(1-u^2))^{\frac{2}{3}}, & 0.9580 \leq u \leq 1. \end{cases}$$

光滑的进给速度如图 3.8(a) 所示。由图 3.8(b) 可以看出加速度均是连续的。由图 3.8(c) 可以看出解是“Bang-Bang”的。积分曲线的五段在 u_+ 方向上分别为 $J_x, J_y, -J_x, -J_y$ 和 J_y 控制。

下面将给出一个含有大转角的路径例子(如图 3.4(b))。进给速度和分轴加速度界也都考虑了, 并且问题的解是“Bang-Bang-Singular”的。

例2.

$$P(u) = (10u, 100(3u^3 - 4u^2 + u)), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$J_x = J_y = 10000 \text{ mm/s}^3, \quad A_x = A_y = 2500 \text{ mm/s}^2, \quad V_{\max} = 200 \text{ mm/s}.$$

光滑的进给速度、 x, y 轴的加速度和加加速度如图 3.9 所示。这个解是“Bang-Bang-Singular”的, 其在 u_+ 方向上分别为 $J_y, -J_y, J_y, V_{\max}, J_y, -J_y, J_x, -J_x, -J_y$ 和 J_y 控制。

3.3.5 实验结果

这一节将用实际的数控加工的实验结果来比较本算法与[78]中的算法。

实验分为三个步骤。首先,沿给定路径 $P(u)$, $u \in [0, 1]$ 的进给速度 $v(u)$ 由算法FP_CJ得到。其次,以 T_s 为插补周期的插补点被计算出来。最后,插补点被输入一个三轴机床的数控系统。其中前两步是离线过程。

上述计算过程只是为了方便测试本实验中的例子。为了在实际的数控系统中使用本算法,下述简化方法可以被采用。进给速度 $v(u)$ 由算法FP_CJ离线地计算得到,于是我们有了包含速度函数的新的G代码。然后,新的G代码将被输入数控系统中。如果进给速度 $v(u)$ 的表达式过于复杂,它将被简化为比如B样条这样的函数。这种方法已经在[47, 92, 98, 99]等工作中采用。特别地,这种方法已经在实际的数控加工中实现[92, 98, 99]。

在实验之前,当进给速度函数 $v(u)$ 和插补周期 T_s 确定之后,插补点将由下述方法计算得出。若 u_k 为第 k 个插补点的参数,而且其前一个插补点的参数 u_{k-1} 已经知道了,下列方程将给出 u_k 的值:

$$T_s = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{du}{\dot{u}}.$$

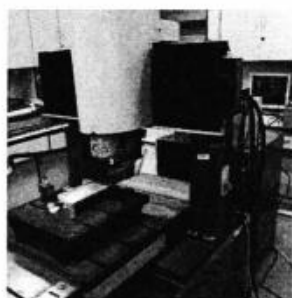
由(3.19)可知,在加加速度控制时,上式存在闭形式的积分解。这与[78]中的加速度控制时的积分解是类似的。于是上式变为:

$$T_s = \frac{(x'\dot{u})'\dot{u}}{J_x} \Big|_{u_{k-1}}^{u_k}.$$

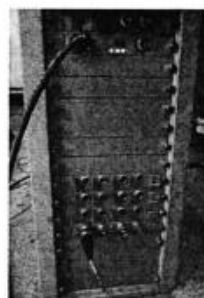
参数值 u_k 由数值方法计算得出。既然 u 是随 t 单调递增的,上述方程只有一个实根。

本实验在三轴数控铣床上进行(如图3.10(a))。一个快速的信号获取与分析系统LMS SCADAS3(如图3.10(b))被用来检测加工中的振动。

待加工路径如图3.12(a)所示,为图3.4(a)中的路径重复五次得到,其中进给速度在每个连接点处降为零。实验将比较[78]中带加速度约束的算法(记作算法FP_CA)以及本节提出的算法FP_CJ。进给速度最大界设为 $V_{max} = 80 \text{ mm/s}$,最大加速度界设为 $A_x = A_y = 800 \text{ mm/s}^2$,算法FP_CJ中需要的加加速度界设为 $J_x = J_y = 10^4 \text{ mm/s}^3$,插补周期 T_s 设为1 ms。

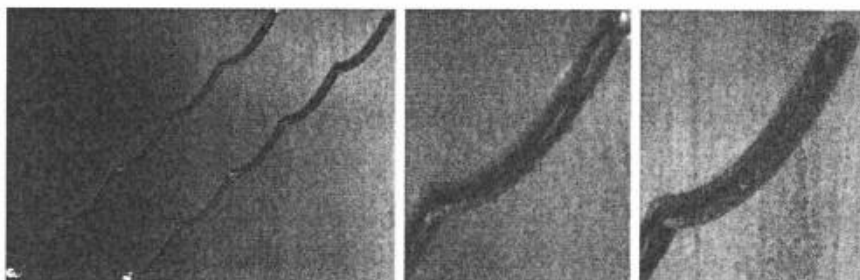


(a) 三轴数控机床



(b) 振动测试设备

图 3.10: 实验设置



(a) 左边: FP_CA; 右边: FP_CJ (b) FP_CA (c) FP_CJ

图 3.11: 加工效果

本实验采用蜡作为加工材料。加工效果如图 3.11 所示, 其中图 3.11(a) 为整个的加工路径, 图 3.11(b) 和图 3.11(c) 分别为两种算法的最后一段路径。可以看出加加速度约束算法的加工效果要比加速度约束的更好。

上述比较并不是定量的。图 3.12 给出了更精确的比较。图 3.12(b)-(f) 分别给出了两种算法的加加速度、加速度和进给速度。由图 3.12(e)和(f)可知, 加加速度约束的进给速度更加光滑。图 3.12(g) 和(h)给出了两组测试的振动频谱图, 其中纵轴为以重力加速度为单位的振动强度, 横轴为以 Hz 为单位的频率。该图显示了在不同频率处的振动强度。可以看出 FP_CA 产生的振动明显比 FP_CJ 要大。FP_CA 和 FP_CJ 的加工时间分别为 1.405 s 和 1.815 s。由于振动大小是加工质量的重要指标, 可以得出的结论是, 带加加速度约束的进给速度优化算法能够在合理的范围内牺牲一些加工时间来改进加工质量。

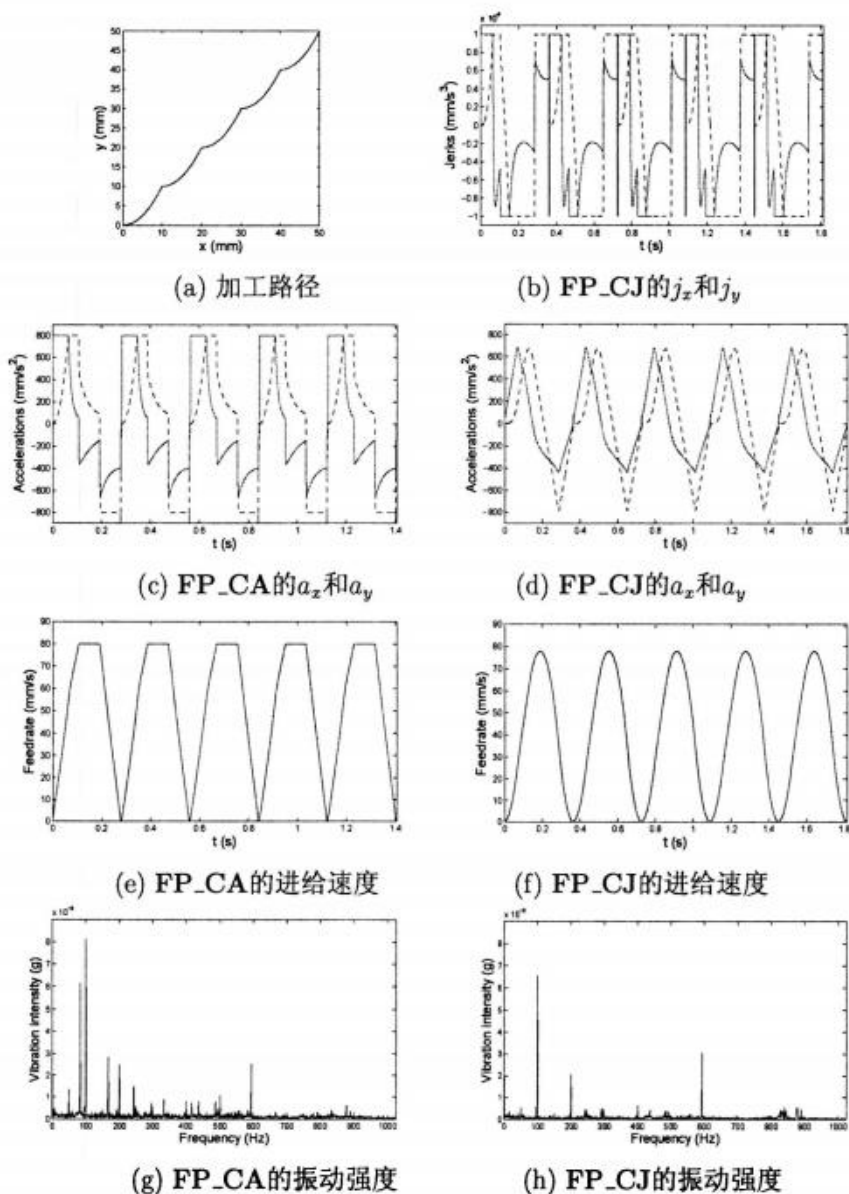


图 3.12: 两种算法的进给速度、分轴加速度和加加速度。在(b)-(d)中, 实线和虚线分别表示 x 和 y 轴。(b)-(f)中的横轴表示以秒为单位的时间

3.4 速度优化的数值算法

3.4.1 问题的简化与离散化

为得到第3.2.1节中提出的(3.10)-(3.12)的高效算法, 需要对其进行简化与离散化。在这一节中, 加加速度界将被暂时去掉, 同时引入一个新的弓高误差界。

记进给速度的平方为 $q(u) = v^2(u)$, 可将 x 和 y 轴的加速度改写为

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = \left(x' \frac{v}{\sigma}\right)' \frac{v}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x'}{\sigma}\right)' q + \frac{x'}{2\sigma^2} q' \\ a_y = \ddot{y} = \left(y' \frac{v}{\sigma}\right)' \frac{v}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{y'}{\sigma}\right)' q + \frac{y'}{2\sigma^2} q' \end{cases} \quad (3.43)$$

在每一个 $u \in [0, 1]$ 处, x 和 y 轴的加速度约束 $-A_x \leq a_x \leq A_x, -A_y \leq a_y \leq A_y$ 可化为

$$\begin{cases} -A_x \leq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x'}{\sigma}\right)' q + \frac{x'}{2\sigma^2} q' \leq A_x \\ -A_y \leq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{y'}{\sigma}\right)' q + \frac{y'}{2\sigma^2} q' \leq A_y \end{cases} \quad (3.44)$$

这定义了 (q, q') 值的一个平行四边形区域。其中 q 的最大值便是这个平行四边形在 (q, q') 相平面上的右端点 [78]。

解方程

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x'}{\sigma}\right)' q + \frac{x'}{2\sigma^2} q' = \alpha_x A_x \\ \frac{1}{\sigma} \left(\frac{y'}{\sigma}\right)' q + \frac{y'}{2\sigma^2} q' = \alpha_y A_y \end{cases} \quad (3.45)$$

其中 $\alpha_x = \pm 1, \alpha_y = \pm 1$, 可得

$$q = \frac{\alpha_x A_x y' - \alpha_y A_y x'}{x'' y' - y'' x'} \sigma^2,$$

这是平行四边形四个顶点的 q 值。于是对每个 $u \in [0, 1]$ 的 q 的最大值便很容易得到。现在, 由 x, y 加速度约束产生的速度限制曲线 [15, 78] 即为:

$$V_{zv}(u) = \sigma \sqrt{\frac{A_x |y'| + A_y |x'|}{|x'' y' - y'' x'|}} \quad (3.46)$$

因为实际的进给速度必须在每一个 u 处小于 $V_{xy}(u)$.

另外, 此处将引入一个弓高误差界 ε . 参数路径的曲率和曲率半径分别为

$$\kappa(u) = \frac{x'y'' - y'x''}{\sigma^3(u)}, \rho(u) = \frac{1}{|\kappa(u)|}.$$

一般地, 弓高误差及界远小于路径的曲率半径. 由弓高误差公式 [90, 92]:

$$q(u) \leq \frac{8\varepsilon\rho(u) - 4\varepsilon^2}{T_s^2} \approx \frac{8\varepsilon\rho(u)}{T_s^2} = \frac{8\varepsilon}{|\kappa(u)|T_s^2}$$

其中 T_s 为插补周期. 接下来, 弓高误差约束将被转化为向心加速度约束 [92],

其中向心加速度为 $a_N(u) = \kappa(u)v^2(u)$. 设 $A_N = 8\varepsilon/T_s^2$, 于是有

$$q(u) \leq \frac{8\varepsilon}{|\kappa(u)|T_s^2} \iff |a_N(u)| = |\kappa(u)|v^2(u) \leq A_N.$$

由以上的关系得知, 弓高误差约束产生的速度限制曲线为

$$V_N(u) = \sqrt{\frac{A_N}{\kappa(u)}}. \quad (3.47)$$

同样地, 实际的进给速度必须在每一个 u 处小于 $V_N(u)$.

结合进给速度的最大值 V_{\max} 以及上述约束, 速度限制曲线(velocity limit curve, VLC)便得到了:

$$V_{\lim}(u) = \min\{V_{\max}, V_{xy}(u), V_N(u)\}. \quad (3.48)$$

当 $V_{\lim}(u)$ 的某一段可以被用作实际的进给速度时, 这一段被称作是可行解 [92]. 一般来说, 可行解只能是 V_{\max} 或者 V_N . 而 V_{xy} 的子段一般是不可行的, 因为(3.44)中的不等式同时取等号一般是不可能的.

于是进给速度优化问题变为规划出函数 $v(u)$, 使得加工时间最短:

$$\min t_f = \int_0^1 \frac{\sigma(u)}{v(u)} du \quad (3.49)$$

满足下列约束:

$$\begin{cases} |a_x(u)| \leq A_x \\ |a_y(u)| \leq A_y \\ 0 \leq v(u) \leq V_{\lim}(u) \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

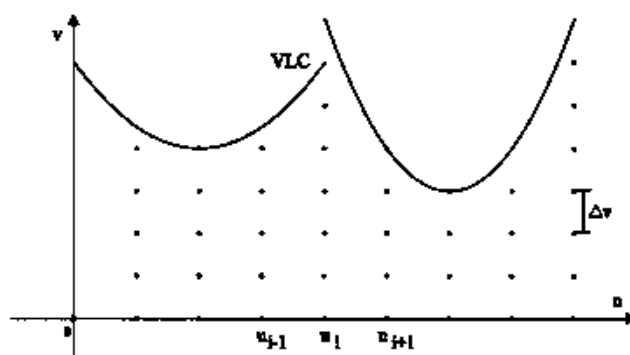


图 3.13: 参数和进给速度的离散化

接下来将把 u - v 相平面离散成网格。首先, 路径将被分为具有等参数长度 Δu 的 N' 段。那么参数节点为 $i\Delta u$, $i = 0, \dots, N'$, 其中 $\Delta u = 1/N'$ 。为了提高算法的精度, 若 $V_{lim}(i\Delta u)$ 是一个局部极小值, 即

$$V_{lim}(i\Delta u) < \min\{V_{lim}((i-1)\Delta u), V_{lim}((i+1)\Delta u)\},$$

那么参数区间 $[(i-1)\Delta u, (i+1)\Delta u]$ 将被进一步地细分为 10 个 (或更多) 子区间。将新的参数节点记为

$$u_i, i = 0, \dots, N,$$

其中 N 为最终的子段数。

一个适当的 Δv 将被用来离散化每个 u_i 处的速度值。在第 3.4.2 节中将讨论如何选择 N' 和 Δv 的值。从 (3.48) 可知, u_i 处的最大离散速度值为 $V_{lim}(u_i)$ 。将速度区间 $[0, V_{lim}(u_i)]$ 分为 $N_v(i)$ 个相等的子区间, 其中

$$N_v(i) = \left\lfloor \frac{V_{lim}(u_i)}{\Delta v} \right\rfloor, i = 0, \dots, N. \quad (3.51)$$

参数值 u_i 处的速度将在下列离散值中选取 (如图 3.13):

$$0, \Delta v, 2\Delta v, \dots, N_v(i)\Delta v.$$

于是 u - v 相平面被离散化为一个网格, 其格点数量为

$$N = \sum_{i=0}^N (N_v(i) + 1). \quad (3.52)$$

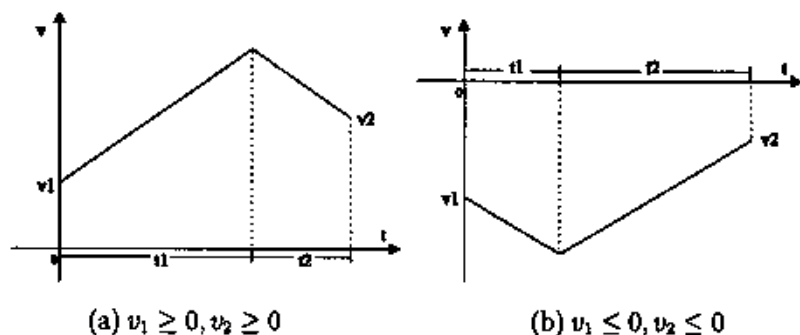


图 3.14: 相邻节点间的两种加速模式

在给出完整的算法之前, 需要一个子函数 $VR(v_s, u_s, v_e, u_e)$ 来确定网格中两个相邻参数点 (u_s, v_s) 和 (u_e, v_e) 是否是可达的。也就是说, 是否能够在(3.50)的约束下从 $(x(u_s), y(u_s))$ 以进给速度 v_s 移动到 $(x(u_e), y(u_e))$ 且进给速度为 v_e 。

首先将考虑每个轴的可达性。假设某个轴(x 或 y)的速度分量(可正可负)在相邻参数点 u_s, u_e 处分别为 v_1, v_2 , 且这两个点在这个轴上的投影距离为 Δs (可正可负), 以及这个轴的加速度上界为 A 。那么单轴的速度可达性函数为

$$vr(v_1, \Delta s, v_2, A) = \begin{cases} 1 & \text{如果带速度的相邻节点是可达的;} \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

由于两个相邻节点的距离非常小, 问题可以简化为在这个小区间上只考虑加速度约束, 也就是说 $V_{lim}(u)$ 不可达。加速度约束的最小时间遍历问题满足“Bang-Bang”控制结构, 这已在第3.2.2节得到证明。于是, 很显然当 v_1, v_2 符号相同时, 存在两种加速模式(如图 3.14)。

若 v_1 和 v_2 都是非负的, 图 3.14(a) 表示: 采用加速度 A 来加速然后用 $-A$ 来减速。若 v_1 和 v_2 都是小于等于 0 的, 图 3.14(b) 表示: 用 $-A$ 先减速然后用 A 加速。距离 $|\Delta s|$ 当 v_1 和 v_2 符号相同时有一个下界。设 t_1 或 t_2 设为 0, 那么 (t, v) 相平面上如图 3.14 所示的梯形区域的面积即为 $|\Delta s|$ 的下界。这个面积很容易算得为 $\frac{|v_2^2 - v_1^2|}{2A}$ 。所以当 $v_1 v_2 \geq 0$ 时, 两个节点在这个轴上可达当且仅当 $|\Delta s| \geq \frac{|v_2^2 - v_1^2|}{2A}$ 。

若 v_1 和 v_2 符号相反, 这意味着在这两个节点之间存在一个分轴速度为 0 的点。这个点的参数 u_m 可以通过求解 $x'(u) = 0$ 或 $y'(u) = 0$ 得到(可以在 u_s 和 u_e 之间使用二分法)。于是投影距离 Δs 便被分割为从 u_s 到 u_m 的 Δs_1 , 以

及从 u_m 到 u_e 的 Δs_2 . 于是当 $v_1 v_2 < 0$ 时, 这个轴上两个节点是可达的当且仅当 $|\Delta s_1| \geq \frac{v_1^2}{2A}$ 及 $|\Delta s_2| \geq \frac{v_2^2}{2A}$.

于是分轴的速度可达性函数为

$$vr(v_1, \Delta s_1, v_2, A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_1 v_2 \geq 0 \text{ 及 } |\Delta s| \geq \frac{|u_2^2 - v_1^2|}{2A}, \\ & \text{或 } v_1 v_2 < 0 \text{ 及 } |\Delta s_1| \geq \frac{v_1^2}{2A}, |\Delta s_2| \geq \frac{v_2^2}{2A}; \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

很显然两个节点之间的进给速度是可达的当且仅当其在 x 和 y 轴的分量都是可达的. 于是可达性函数为

$$\begin{aligned} VR(u_s, u_s, u_e, u_e) = & vr\left(\frac{x'(u_s)}{\sigma(u_s)}v_s, x(u_e) - x(u_s), \frac{x'(u_e)}{\sigma(u_s)}v_e, A_x\right) \\ & \cdot vr\left(\frac{y'(u_s)}{\sigma(u_s)}v_s, y(u_e) - y(u_s), \frac{y'(u_e)}{\sigma(u_e)}v_e, A_y\right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.4.2 离散速度优化算法

本算法分为正向和反向速度搜索两部分. 在正向搜索部分, 每一步在VLC约束下的最大可行速度将被搜索出来, 否则就沿着VLC行进. 当前最大可行速度将由速度可达性函数得到. 在反向搜索部分, 每一步在正向速度序列约束下的最大可行速度将被搜索出来, 否则就沿着正向速度行进. 完整的算法描述如下.

算法DIS_VP: 离散速度搜索算法

输入: $P(u)$, $u \in [0, 1]$, V_{max} , A_x , A_y , ϵ , N , Δv

输出: 在对应参数 $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_N = 1$ 处的进给速度 v_i^*

第1步. 预处理: 由第3.4.1节来计算 u_i , $i = 0, \dots, N$, 以及由(3.51)计算每个 u_i 处的速度区间数 $N_v(i)$.

第2步. $v_0 = 0$, $i = 0$.

第3步. 从 $N_v(i+1)\Delta v$, $(N_v(i+1)-1)\Delta v, \dots$ 一直到0这些离散值中遍历赋值给 v_{i+1} , 直到 $VR(u_i, u_i, v_{i+1}, u_{i+1}) = 1$. 若 $v_{i+1} = 0$, 设 $v_{i+1} = N_v(i+1)\Delta v$.

第4步. $i = i + 1$. 若 $i < N$ 则转到第3步, 否则继续.

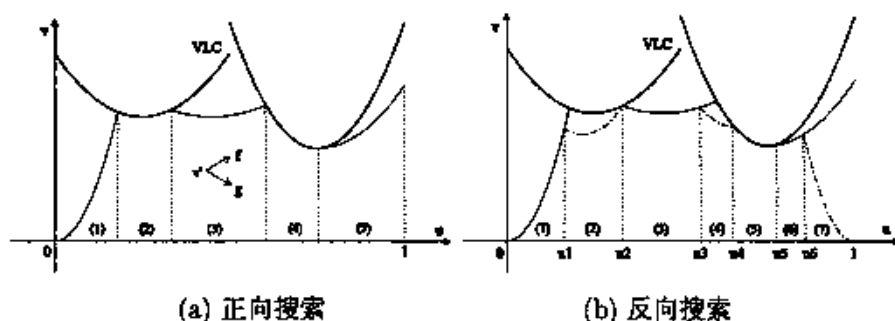


图 3.15: 算法DIS_VP的图解说明: 横坐标表示路径参数 u , 纵坐标表示进给速度

第5步. $v_N^* = 0, i = N$.

第6步. 从 $v_{i-1}, v_{i-1} - \Delta v, \dots$ 到0遍历赋值给 v_{i-1}^* , 直到 $VR(v_{i-1}^*, u_{i-1}, v_i^*, u_i) = 1$.

若 $v_{i-1}^* = 0$, 设 $v_{i-1}^* = v_{i-1}$.

第7步. $i = i - 1$. 若 $i > 0$ 则转到第6步, 否则继续。

第8步. 输出 $v_i^*, i = 0, \dots, N$.

图 3.15 解释了算法DIS_VP的流程。其中图 3.15(a) 展示了正向搜索部分(第2-4步), 图 3.15(b) 展示了反向搜索部分(第5-7步)。如图 3.15(a) 中区间(1)所示, 正向速度曲线从(0,0)开始并在VLC以下进行当前最大可行速度的搜索。从区间(2)开始沿着VLC行进, 因为此时速度可达性函数无解或者VLC恰好是可行解。于是在区间(3)开始又重新搜索最大可行速度。区间(4)和(5)与区间(2)和(3)分别是类似的。在图 3.15(b) 中, 反向速度搜索从(1,0)开始, 并始终不超过正向速度曲线。正向速度曲线中的(2)(4)(7)区间段被更新了。于是每一个参数 u_i 处的速度值就得到了。

现在来讨论如何选取算法中 N' 和 Δv 的值。按经验来说, 基于计算的精度和效率的考虑, 初始的细分段数 N' 可选为插补点数量的10%~20%。插补点数量可估计为 $S/(V_{ave}T_s)$, 其中 S 为估计的路径长度, V_{ave} 为估计的平均进给速度。

Δv 的值不能取得太大, 否则算法DIS_VP可能找不到可行解。接下来 Δv 的最大值将会被给出。在正向搜索阶段, 从速度可达性函数及 $v_i = 0$ 能推

导出 v_{i+1} 的取值范围:

$$\begin{cases} -2A_x|x(u_{i+1}) - x(u_i)| \leq \left(\frac{x'(u_{i+1})}{\sigma(u_{i+1})}v_{i+1}\right)^2 \leq 2A_x|x(u_{i+1}) - x(u_i)| \\ -2A_y|y(u_{i+1}) - y(u_i)| \leq \left(\frac{y'(u_{i+1})}{\sigma(u_{i+1})}v_{i+1}\right)^2 \leq 2A_y|y(u_{i+1}) - y(u_i)| \end{cases}$$

于是

$$v_{i+1} \leq \min \left\{ \frac{\sigma(u_{i+1})}{|x'(u_{i+1})|} \sqrt{2A_x|x(u_{i+1}) - x(u_i)|}, \frac{\sigma(u_{i+1})}{|y'(u_{i+1})|} \sqrt{2A_y|y(u_{i+1}) - y(u_i)|} \right\} := V_a(i+1)$$

为保证在每个 u_{i+1} 处都能找到离散速度解, Δv 不能超过 $V_a(i+1)$ 的值:

$$\Delta v \leq \min_{1 \leq i \leq N} V_a(i) := V_a.$$

类似地可以由反向搜索得到细分速度上界 V_b 。除此之外, Δv 不能大于进给速度的分辨率 $\Delta F = \Delta S/T_s$, 其中 ΔS 是机床移动的分辨率。于是 Δv 的约束为 $\min\{\Delta F, V_a, V_b\}$ 。根据经验, Δv 可选为这个约束值的10%~20%。

显然地, 在 u - v 平面上进行更细致的格点划分将得到更好的速度解。不过按上述 N' 和 Δv 的取法将得到充分接近最优解的进给速度。也就是说即使选择更小的 Δu 和 Δv , 加工时间的减小也不会太明显。

令 N 为(3.52)中给出的 u - v 相平面细分的格点数。于是本算法的复杂度为 $O(N)$ 的浮点运算, 因为在算法中的两重循环至多有 $O(N)$ 步, 且每一步都是固定次数的浮点运算。很显然有 $N_v(i) \leq V_{\max}/\Delta v$ 及 $N \leq V_{\max}N/\Delta v + N$ 。既然 V_{\max} 是固定的, 算法的计算复杂度为 $O(N/\Delta v)$ 。关于算法DIS_VP更细致的分析将在下文给出。

接下来将证明当 Δu 和 Δv 趋近于0的时候, 算法DIS_VP能得到问题(3.49), (3.50)的最优解。该证明方法类似于[15, 78, 92]。相平面 (u, v) 以及VLC将被利用来证明这个结论。

由(3.44), x 和 y 轴的加速度约束可以重写为 v' 的约束:

$$\begin{cases} f_1(u, v) \leq v' \leq g_1(u, v) \\ f_2(u, v) \leq v' \leq g_2(u, v) \end{cases} \quad (3.54)$$

设 $f = \max\{f_1, f_2\}$, $g = \min\{g_1, g_2\}$. 于是约束(3.54)推导出

$$f(u, v) \leq v' \leq g(u, v), \quad (3.55)$$

其中 $f(u, v), g(u, v)$ 为 u, v 的分段连续可微函数. 不等式(3.55)表示了 (u, v) 平面内在 VLC 下的 v' 的上界和下界.

当 Δu 和 Δv 趋近于 0 时, 算法 DIS_VP 的第 3 步即在约束下搜索 v' 的最大值. 尽管算法中只有速度的离散点, 但当 Δu 和 Δv 趋近于 0 时, 输出的解可看做是一条速度曲线 $v(u)$.

在第 2-4 步中, 速度曲线在 VLC 以下或等于 $V_{lim}(u)$. 若速度曲线在 VLC 以下, 便满足 $v' = g(u, v)$. 如果速度曲线等于 $V_{lim}(u)$, 有两种情况: $V_{lim}(u)$ 是第 3 步的可行解, 即 $f(u, v) \leq V'_{lim}(u) \leq g(u, v)$; 或者第 3 步没有解, 即 $V'_{lim}(u) \leq f(u, v) \leq g(u, v)$. 总之 $V'_{lim}(u) \leq g(u, v)$ 一定是满足的.

第 5-7 步的分析是类似的. 第 6 步搜索在约束下当前的最大 v' . 若速度曲线在 VLC 以下, 其满足 $v' = f(u, v)$. 若速度曲线在这一段等于 $V_{lim}(u)$, 其满足 $f(u, v) \leq V'_{lim}(u)$.

总之速度曲线由三种不同的曲线段组成(如图 3.15(b) 所示): 满足 $v' = g(u, v)$ (如图 3.15(b) 的区间(1)(3)(6)), 满足 $v' = f(u, v)$ (如图 3.15(b) 的区间(2)(4)(7)), 以及在 $V_{lim}(u)$ 上的可行解(如图 3.15(b) 的区间(5)). 如果速度曲线等于 $V_{lim}(u)$, 其一定满足 x 和 y 轴的加速度约束, 因为其满足 $V'_{lim}(u) \leq g(u, v)$ 和 $f(u, v) \leq V'_{lim}(u)$. 因此速度曲线的每一段都满足所有的约束.

因此, 为证明算法 DIS_VP 的最优性, 只需证明本算法的解高于 (u, v) 平面上的任何一个可行解. 下述定理需要用在证明中:

比较定理 (p.25, [14]): 令 y, z 分别为下列微分方程的解

$$y' = F(x, y), z' = G(x, z),$$

其中 $F(x, y) \leq G(x, y)$, $a \leq x \leq b$, F 或 G 满足 Lipschitz 条件. 若 $y(a) = z(a)$, 那么对任何的 $x \in [a, b]$ 都有 $y(x) \leq z(x)$.

由上述比较定理, 能证明本算法可以得到全局最优解. 设 \hat{v} 为(3.50)的可行解以及 v 为算法 DIS_VP 得到的解.

图 3.15(b) 将被用来解释本证明. 在区间(1)上有 $\hat{v}(0) = v(0)$ 以及

$$v' = g(u, v), \hat{v}' \leq g(u, \hat{v}), u \in [0, u_1].$$

$g(u, v)$ 满足 Lipschitz 条件, 因为它是分段连续可微的。由比较定理可得 $\hat{v} \leq v, u \in [0, u_1]$ 。

在区间(3)和(6)上有 $\hat{v}(u_2) \leq v(u_2), \hat{v}(u_5) \leq v(u_5)$, 因为 $v(u_2), v(u_5)$ 在 VLC 上。可将比较定理中的条件 $y(a) = z(a)$ 改为 $y(a) \leq z(a)$ 。于是有

$$\hat{v} \leq v, u \in [0, u_1] \cup [u_2, u_3] \cup [u_5, u_6].$$

在区间(7)上有 $\hat{v}|_{\bar{u}=0} = v|_{\bar{u}=0}$, 以及

$$\frac{d}{d\bar{u}} v(1-\bar{u}) = -f(1-\bar{u}, v(1-\bar{u})), \frac{d}{d\bar{u}} \hat{v}(1-\bar{u}) \leq -f(1-\bar{u}, \hat{v}(1-\bar{u})), \bar{u} \in [0, 1-u_6]$$

其中 $\bar{u} = 1-u$ 。 $-f(1-\bar{u}, v(1-\bar{u}))$ 满足 Lipschitz 条件, 因为 $f(u, v)$ 是分段连续可微的。由比较定理可得

$$\hat{v}(1-\bar{u}) \leq v(1-\bar{u}), \bar{u} \in [0, 1-u_6],$$

这等价于 $\hat{v} \leq v, u \in [u_6, 1]$ 。

在区间(2)和(4)上的证明与(3)和(6)是类似的。于是有

$$\hat{v} \leq v, u \in [u_1, u_2] \cup [u_3, u_4] \cup [u_6, 1].$$

结合 $\hat{v} \leq v, u \in [u_4, u_5]$, 容易得知 $\hat{v} \leq v, u \in [0, 1]$ 。从

$$\frac{\sigma(u)}{v(u)} \leq \frac{\sigma(u)}{\hat{v}(u)},$$

可知

$$\int_0^1 \frac{\sigma(u)}{v(u)} du \leq \int_0^1 \frac{\sigma(u)}{\hat{v}(u)} du,$$

这证明了本算法的最优性。

3.4.3 速度的光滑化与拟合

这一节将由第3.4.2节得到的离散速度序列来生成近似时间最优的光滑速度函数。

很容易看出算法 DIS_VP 生成的离散速度序列即为 [15, 78, 92] 中算法得到的分段可微速度曲线的离散形式, 故其加速度也存在有限个不连续点。这将

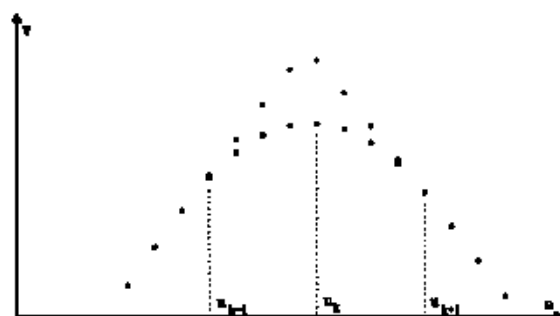


图 3.16: 速度导数不连续点处的进给速度光滑化

会导致电机转矩的不连续变化,从而使加工中产生振动以及较大的轮廓误差。由(3.43)可知,当参数路径具有 C^2 连续度时,加速度的不连续点即为 v' (或 q')的不连续点。从这个角度来看,减小振动的方法之一就是光滑化速度曲线。

在第3.4.2节算法DIS_VP的最优性证明中,速度曲线由三部分组成:满足 $v' = g(u, v)$ 的速度曲线段,满足 $v' = f(u, v)$ 的速度曲线段,以及沿着 $V_{lim}(u)$ 的速度曲线段。于是 v' 的不连续点或者为上述三部分中某两个的交点,或者为VLC的导数不连续点。前一类不连续点很容易由算法DIS_VP的计算过程找到。后一类不连续点并不容易直接得到,这将在后面讨论。

首先来讨论 v' 在某个点处突然减小的情形。这时只需添加下述第1', 3'和6'步在算法DIS_VP的第1, 3和6步之后:

第1'步. 初始化: $flag(i) = 0, i = 0, \dots, N$

第3'步. 若 $v_i < N_v(i)\Delta v$ 及 $u_{i+1} = N_v(i+1)\Delta v$, 令 $flag(i+1) = 1$.

第6'步. 若 $v_i^* < v_i$ 及 $v_{i-1}^* = v_{i-1}$, 令 $flag(i-1) = 1$; 若 $v_{i-1}^* < v_{i-1}$ 及 $flag(i-1) = 1$, 令 $flag(i-1) = 0$.

在算法DIS_VP的正向搜索过程,第3'步将 $v' = g(u, v)$ 曲线段与VLC在参数 u_{i+1} 处的交点标记为 $flag(i+1) = 1$ 。在反向搜索过程中,第6'步标记了 $v' = f(u, v)$ 曲线段与正向速度曲线的交点,并去除了被反向速度曲线更新处的标记。

假设 $flag(k) = 1$,即 v' 在参数 u_k 处突然减小。选择一个合适的小的正整数 l ,由算法DIS_VP得到的参数 u_{k-l}, \dots, u_{k+l} 处的速度值将被减小以使

得 v' (或 q')的变化率是有限的(参见图 3.16)。由 q' 和 q'' 的数值近似:

$$q'_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}, \quad q''_i = \frac{q'_i - q'_{i-1}}{u_i - u_{i-1}},$$

解线性规划问题以得到新的 q_i :

$$\min \sum_{i=k-l}^{k+l} (v_i'^2 - q_i) \quad (3.56)$$

满足约束

$$\begin{cases} 0 \leq q_i \leq v_i'^2, i = k-l, \dots, k+l \\ -A_x \leq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x'}{\sigma} \right)' (u_i) q_i + \frac{x'}{2\sigma^2} (u_i) q'_i \leq A_x, i = k-l, \dots, k+l+1 \\ -A_y \leq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{y'}{\sigma} \right)' (u_i) q_i + \frac{y'}{2\sigma^2} (u_i) q'_i \leq A_y, i = k-l, \dots, k+l+1 \\ -J \leq q''_i \leq J, i = k-l, \dots, k+l+2 \end{cases} \quad (3.57)$$

其中 v_i' 是由算法DIS_VP得到的速度值, J 为选取的 q'' 的上界。

(3.57)中的第二和第三个约束是(3.44)中约束的离散形式这保证了加速度不超出其最大值。而(3.57)的第四个约束则被用来光滑化进给速度。

参数 u_{k-l}, \dots, u_{k+l} 处的新的速度值满足原来的所有约束, 而且在离散模型的意义下去除了参数 u_k 处的 q' 不连续点。

小的正整数 l 可以事先定义好(例如 $l = N/100$)。很显然上述线性规划问题一定存在解, 只要 q'' 的上界 J 取得足够大。既然对 $i = k-l, \dots, k+l+2$ 有

$$|q''_i| \leq \frac{2 \max_{k-l-1 \leq i \leq k+l+2} |q'_i|}{\min_{k-l \leq i \leq k+l+2} (u_i - u_{i-1})} \leq \frac{4 \max_{k-l-2 \leq i \leq k+l+2} \{q_i\}}{\min_{k-l-1 \leq i \leq k+l+2} (u_i - u_{i-1})^2},$$

那么 J 的初始值可取为

$$\frac{4 \max_{k-l-2 \leq i \leq k+l+2} \{v_i'^2\}}{\min_{k-l-1 \leq i \leq k+l+2} (u_i - u_{i-1})^2}.$$

随后 J 的值将逐步减小直到得到一个可接受的解。

当 v' 在 u_k 处突然增加, 这些点也很容易由算法DIS_VP得到。一个合适的速度调整区间 $[u_{k-l_1}, u_{k+l_2}]$ 将覆盖住这个速度不光滑点, 以及其前后各一个速度

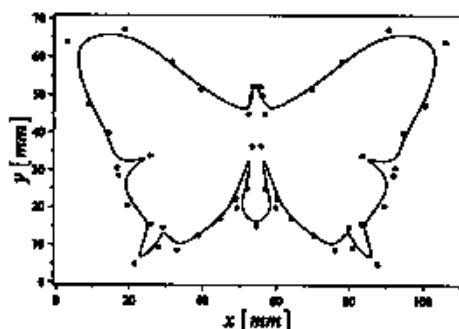


图 3.17: 蝴蝶曲线及其控点

表 3.1: 选取不同的 N' 和 Δv 时算法 DIS_VP 的运算时间

N'	300	300	500	500	1000	1000
Δv (mm/s)	0.02	0.01	0.02	0.01	0.02	0.01
运算时间(s)	0.043	0.085	0.067	0.134	0.128	0.255

不光滑点。于是上述线性规划问题便用来同时去除这三个速度不光滑点。如果某段 VLC 上的速度不光滑点未知, 速度调整区间将选为覆盖这一段 VLC 曲线并将其光滑化。

进给速度光滑化将不会增加本算法的复杂度, 因为线性规划问题存在复杂度为 $O(n^{3.5})$ 的高效的多项式时间算法 [42]。而本问题中 $n = 2l + 1$ 比 N 要小得多。于是加上光滑化之后的算法与算法 DIS_VP 的复杂度相同。

为了进行插补计算, 算法得到的速度序列将被拟合为速度函数。Sencer 等人 [70] 将进给速度函数表示为三次 B 样条。Ernesto 和 Farouki [29] 将进给速度的平方表示为 Bernstein 形式的多项式。这里将采用 A 样条 [4] 来将速度点拟合为光滑曲线。这种方法采用分段为至多三次的多项式进行拟合。于是沿着参数路径 $P(u)$ 的进给速度函数 $v(u)$ 便得到了, 这是一个 C^1 连续的三次样条。在可接受的曲线拟合误差内, 最终的进给速度函数是近似时间最优的。将这个完整的速度优化与光滑化算法记为 DIS_VP*。

3.4.4 实验结果

本实验采用 [89] 中的蝴蝶曲线作为例子来验证本算法。它是一个三

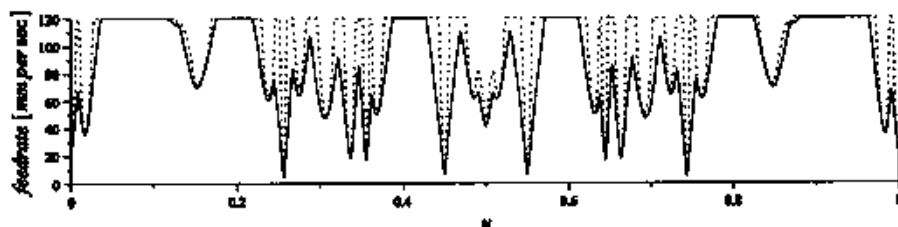


图 3.18: 虚线: VLC; 实线: 算法DIS_VP给出的进给速度

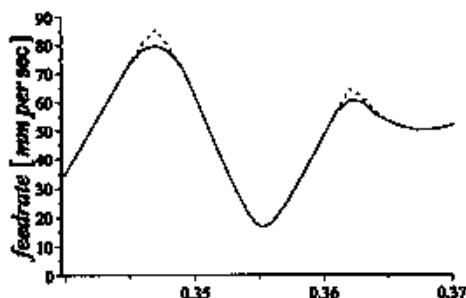


图 3.19: 虚线: 最优进给速度; 实线: 光滑化后的进给速度

次NURBS曲线(如图 3.17), 共有51个控点及重数均为1的节点, 故具有 C^2 连续度。运动学约束设为

$$V_{\max} = 120 \text{ mm/s}, A_x = A_y = 800 \text{ mm/s}^2, \varepsilon = 1 \mu\text{m}.$$

插补周期设为 $T_s = 2 \text{ ms}$ 。

离散化分别使用 $N' = 300, 500, 1000$ 及 $\Delta v = 0.01, 0.02 \text{ mm/s}$ 来进行比较。采用不同的 N' 和 Δv 时算法DIS_VP的运算时间列在表 3.1 中(CPU: Intel Core2 Duo, 2.93GHz; 编程软件: Microsoft Visual C++ 6.0)。由表 3.1, 能够看出算法DIS_VP的执行时间与 $O(N'/\Delta v)$ 近似成正比, 这验证了第3.4.2节中算法复杂度的分析。

离散化参数 $N' = 1000, \Delta v = 0.01 \text{ mm/s}$ 被选取来展示本算法的效果。路径曲线一共被算法DIS_VP分为 $N = 1452$ 段。如图 3.18, 虚线为(3.48)计算出的VLC, 实线为算法DIS_VP给出的最优速度。

图 3.19 展示了第3.4.3节中线性规划得到的速度光滑化的效果。虚线为原

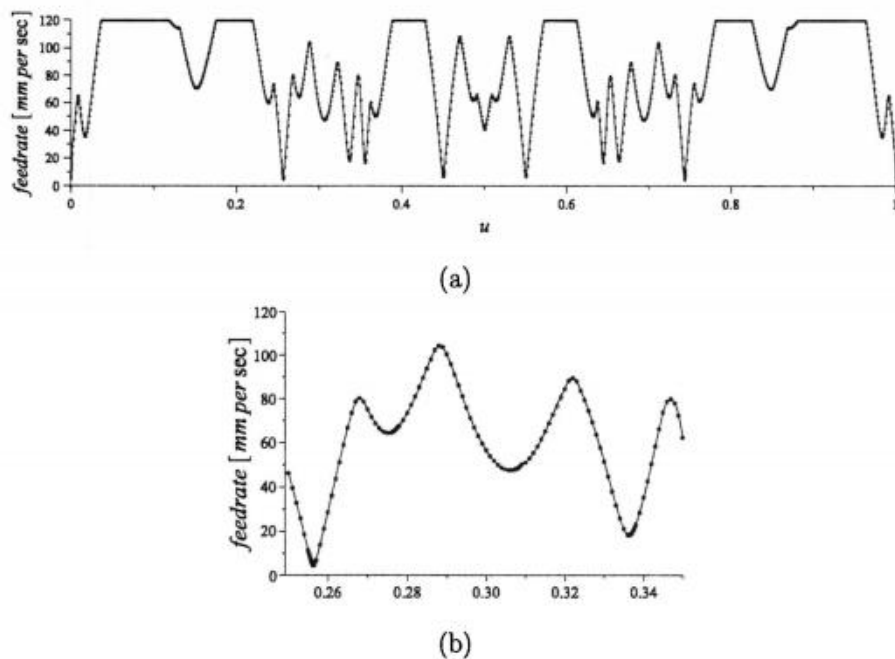


图 3.20: 进给速度序列点及其拟合曲线

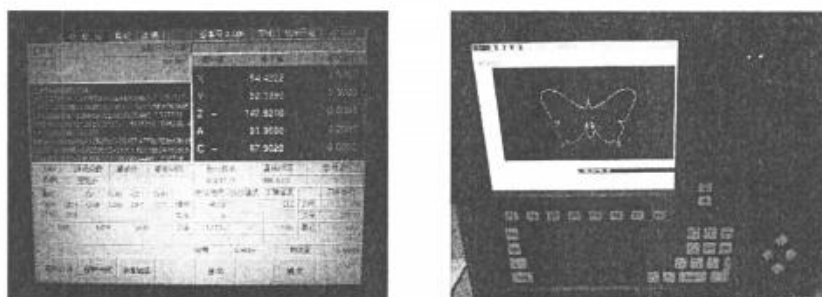


图 3.21: 实验中采用的数控系统

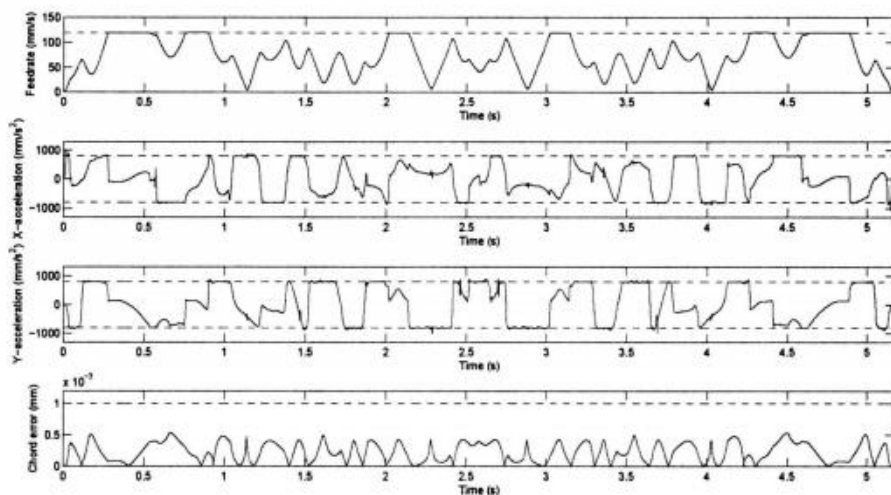


图 3.22: 进给速度, 分轴加速度及弓高误差

始的最优速度序列, 实线为光滑化后的速度序列。然后速度序列被拟合为共229个三次多项式组成的样条曲线。如图 3.20(a)(b), 其中的点为离散速度序列, 曲线为拟合样条。图 3.20(b) 是图 3.20(a) 的细节。

实验中采用的数控系统是沈阳蓝天数控集团开发的商用系统GJ-210M(如图 3.21)。既然蝴蝶曲线由48段三次有理多项式组成, 并且进给速度由229段三次多项式组成, 那么一共有至多276段不同的路径及速度曲线表达式。一个针

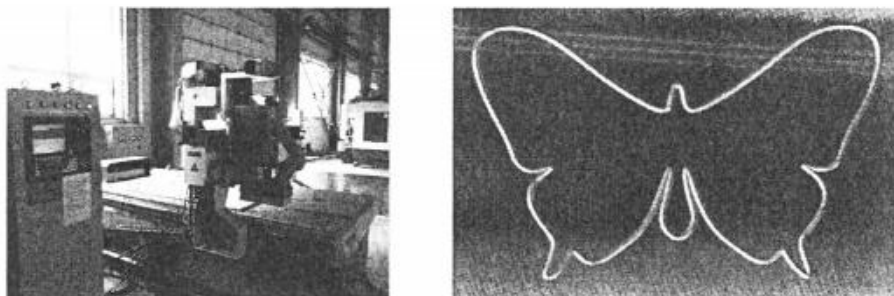


图 3.23: 实际加工: 左边为实验用的三轴机床; 右边为加工后的轮廓

对三次NURBS的新的G代码被应用在数控系统GJ-210M中:

$$\begin{array}{cccc} \text{G66.5} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ & u_1 & u_2 & & \end{array}$$

这表示参数区间 $[u_1, u_2]$ 上的路径曲线为

$$x(u) = \frac{x_0 + x_1u + x_2u^2 + x_3u^3}{d_0 + d_1u + d_2u^2 + d_3u^3}, y(u) = \frac{y_0 + y_1u + y_2u^2 + y_3u^3}{d_0 + d_1u + d_2u^2 + d_3u^3}$$

进给速度函数为

$$v(u) = v_0 + v_1u + v_2u^2 + v_3u^3.$$

由 $u(t)$ 在 $t = t_k$ 处的二阶Taylor展开 [30, 32], 插补算法将使用:

$$u_{k+1} = u_k + \frac{v}{\sigma}(u_k)T_s + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sigma} \right)' \frac{v}{\sigma}(u_k)T_s^2. \quad (3.58)$$

参数计算的细节可以在 [86, 89] 中找到。

图 3.22 展示了算法DIS_VP*的模拟结果: 进给速度, x 和 y 轴的加速度, 以及弓高误差。图 3.23 为实验中使用的三轴机床及加工后的蝴蝶轮廓。在相同的路径曲线和速度、加速度、弓高误差约束下, 本算法得到的加工时间(5.17 s)比 [49] 得到的加工时间(8.05 s)要短很多。值得指出的是, 即使真正的分轴加速度上界并没有在算法DIS_VP*中考虑, 分轴加速度仍然是连续的。进一步地, 该算法也不难推广到五轴的情形。

3.4.5 基于线性规划的推广算法

为了让给速度优化的数值算法能满足分轴加加速度约束, 第3.4.3节中的线性规划模型可以得到推广。这里将考虑五轴加工的弧长参数路径曲线 $(P(l), O(l))$ 。

与第3.4.1节类似, 路径曲线在弧长参数 $l_i = i\Delta l, i = 0, \dots, N$ 处被离散化为 $N+1$ 个点。将参数 l_i 处的进给速度平方记为 q_i , 这将是算法的优化变量。由(2.43)中的运动学反解将离散刀具路径点 $(P(l_i), O(l_i))$ 转换为五轴机床坐

标 $(x(l_i), y(l_i), z(l_i), a(l_i), c(l_i))$. $\tau(=x, y, z, a, c)$ 轴的位置对弧长参数 l 的1, 2, 3阶导数用有限差分法 [34] 近似并分别记为 $\tau_{l,i}$, $\tau_{ll,i}$ 和 $\tau_{lll,i}$.

由(3.7)和(3.9)可知, τ 轴上 l_i 处的加速度和加加速度可写为

$$\begin{cases} a_\tau = \tau_{ll,i}q_i + \frac{1}{2}\tau_{l,i}q_{l,i} \\ j_\tau = q_i^{\frac{1}{2}} \left(\tau_{lll,i}q_i + \frac{3}{2}\tau_{ll,i}q_{l,i} + \frac{1}{2}\tau_{l,i}q_{ll,i} \right) \end{cases} \quad (3.59)$$

其中 $q_{l,i}$ 和 $q_{ll,i}$ 分别为 q 在 l_i 处的1, 2阶导数。

为了将进给速度优化问题简化为线性问题, $q_{l,i}$ 和 $q_{ll,i}$ 也由有限差分法近似为

$$\begin{cases} q_{l,0} \approx \left(-\frac{1}{2}q_2 + 2q_1 - \frac{3}{2}q_0 \right) / \Delta l \\ q_{l,i} \approx \left(\frac{1}{2}q_{i+1} - \frac{1}{2}q_{i-1} \right) / \Delta l, i = 1, \dots, N-1 \\ q_{l,N} \approx \left(\frac{1}{2}q_{N-2} - 2q_{N-1} + \frac{3}{2}q_N \right) / \Delta l \\ q_{ll,0} \approx (-q_3 + 4q_2 - 5q_1 + 2q_0) / \Delta l^2 \\ q_{ll,i} \approx (q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) / \Delta l^2, i = 1, \dots, N-1 \\ q_{ll,N} \approx (-q_{N-3} + 4q_{N-2} - 5q_{N-1} + 2q_N) / \Delta l^2. \end{cases} \quad (3.60)$$

既然第3.4.2节证明了不带加加速度约束的最优速度曲线是点点最大的, 带加加速度约束的解必须满足

$$0 \leq q_i \leq q_i^*, i = 0, \dots, N, \quad (3.61)$$

其中 q_i^* 是算法DIS_VP输出的加速度约束下的最优解。这导致了下述不等式:

$$\left(\frac{q_i^*}{q_i} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \geq 1. \quad (3.62)$$

由(3.59)可将加加速度约束 $|j_\tau| \leq J_\tau$ 转化为

$$q_i^{\frac{1}{2}} \left| \tau_{lll,i}q_i + \frac{3}{2}\tau_{ll,i}q_{l,i} + \frac{1}{2}\tau_{l,i}q_{ll,i} \right| \leq J_\tau \left(\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \right) \quad (3.63)$$

这是一个更严格的加加速度约束。

将最小时间目标近似为线性函数, 加加速度约束的进给速度优化问题可化为:

$$\max \sum_{i=0}^N q_i \quad (3.64)$$

满足约束

$$\begin{cases} 0 \leq q_i \leq q_i^* \\ q_0 = q_N = 0, q_{t,0} = q_{t,N} = 0 \\ \left| \tau_{u,i} q_i + \frac{1}{2} \tau_{t,i} q_{t,i} \right| \leq A_r \\ q_i^{\frac{1}{2}} \left| \tau_{u,i} q_i + \frac{3}{2} \tau_{u,i} q_{t,i} + \frac{1}{2} \tau_{t,i} q_{u,i} \right| \leq J_r \left(\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \right) \end{cases} \quad (3.65)$$

对所有 $i = 0, \dots, N$ 及 $r = x, y, z, a, c$. 从(3.60)可看出(3.65)中的约束都是线性的。因此带加加速度约束的速度优化问题便转化为一个复杂度为 $O(N^{3.5})$ 的线性规划问题。将这个算法记作VPJ_LP。

3.5 本章小结

高速高精加工需要时间最优的光滑的进给速度。这一章给出了在相空间内的解析速度优化贪心算法FP_CJ, 采用离散模型的高效的数值算法DIS_VP*, 以及利用线性规划得到的推广算法VPJ_LP. 这些算法都能得到在运动学约束下优化的光滑的进给速度, 这将能够缩短加工时间并改进数控系统的精度和性能。

证明算法FP_CJ的全局最优性仍然是一个待解决的问题。其最大的难点在于对二阶微分方程, 并不存在类似于二阶微分方程的“比较定理”(p.25, [14]), 因此并不能得到加速度约束问题的结论, 即最优进给速度点最大。另一方面, 速度优化的解析算法比较耗费时间, 而且不易处理五轴路径。

算法DIS_VP*的计算效率较高, 因为只需要在离散路径上搜索可行的最大速度值。线性规划和曲线拟合被用来去除加速度的不连续点。其计算复杂度为 $O(N/\Delta v)$ 次的浮点运算。离散模型的运动学约束也很容易得到扩展。算法VPJ_LP利用问题的线性化, 能够处理分轴加加速度的约束。很显然, 本章提出的进给速度优化的数值算法比解析算法更具有实用性。

此页不缺内容



第四章 跟踪误差与轮廓误差控制

4.1 本章简介

本章将给出减小加工误差的两种不同的方法。第4.2节提出了在线性系统的跟踪误差约束下生成 C^2 连续轨迹的算法。利用类似于[55]中提出的非线性规划模型,该算法能生成连续的分轴位置、速度和加速度命令,以及有界的跟踪误差。机床坐标系内的一系列参考点由时间参数的三次样条连接起来,从而形成足够光滑的加工轨迹。对于PID控制器而言,跟踪误差通过约束加速度和加加速度的线性组合得到限制。实验结果显示跟踪误差能够在适当地牺牲加工时间的前提下得到显著地减小。随后,该模型被推广到处理给定的样条路径及一般的线性系统。

第4.3节给出了另外一种方法来补偿五轴加工的轮廓误差。刀尖位置和刀轴方向的轮廓误差由五轴样条路径及跟踪误差的解析估计得到预测。利用对轮廓误差的前馈补偿,轨迹命令在被输入伺服驱动之前得到了修改。本方法在五轴研究型数控机床上得到了实验验证。第4.4节总结了本章内容。

4.2 带跟踪误差约束的轨迹生成

4.2.1 三次样条轨迹

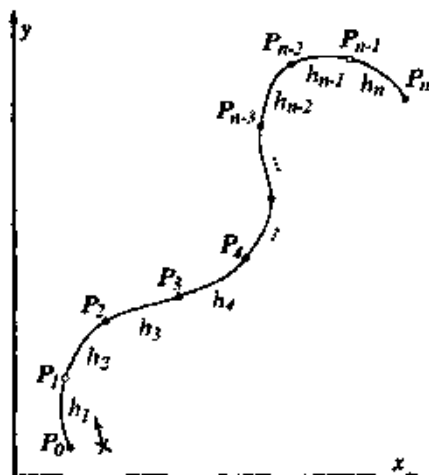
假设机床坐标系内描述各轴运动的 $n-1$ 个参考点 $P_0, P_2, P_3, \dots, P_{n-2}, P_n$ 已经生成(G01代码),并且基于精度考虑令它们选取得足够密集。另外,增加两个额外的特定点 P_1 和 P_{n-1} 使得问题有足够的自由度。三次样条轨迹生成的目标是用时间参数的三次多项式曲线来连接这 $n+1$ 个参考点(如图4.1)。这些三次曲线的自由度将会被用来保证二阶连续性以及边界条件。

将参考点 P_i 的坐标记为 $p_i, i=0, \dots, n$ (如上所述 p_1 和 p_{n-1} 是待定的)。初末位置 P_0, P_n 处的速度、加速度分别记为 v_0, a_0, v_n, a_n 。

记

$$h_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, n,$$

其中 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 是 $n+1$ 个参考点处的特定时间。假设 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} 处的速度向量分别为 v_1, v_2, \dots, v_{n-1} 。在区间 $[t_{i-1}, t_i], i=1, \dots, n$ 内使用Hermite插

图 4.1: 连接 $n+1$ 个参考点的三次样条曲线

值, 三次样条可以表示为:

$$C_i(t) = \left(\frac{t-t_i}{h_i}\right)^2 \left(2\frac{t-t_{i-1}}{h_i} + 1\right) p_{i-1} + \left(\frac{t-t_i}{h_i}\right)^2 (t-t_{i-1}) v_{i-1} \\ + \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_i}\right)^2 \left(2\frac{t_i-t}{h_i} + 1\right) p_i + \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_i}\right)^2 (t-t_i) v_i. \quad (4.1)$$

于是在区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上, 速度、加速度和加加速度函数分别为:

$$\dot{C}_i(t) = \frac{6}{h_i^3} (t-t_i)(t-t_{i-1}) p_{i-1} + \frac{t-t_i}{h_i^2} (3(t-t_i) + 2h_i) v_{i-1} \\ - \frac{6}{h_i^3} (t-t_i)(t-t_{i-1}) p_i + \frac{t-t_{i-1}}{h_i^2} (3(t-t_{i-1}) - 2h_i) v_i, \quad (4.2)$$

$$\ddot{C}_i(t) = \frac{6}{h_i^3} (2(t-t_i) + h_i) p_{i-1} + \frac{2}{h_i^2} (3(t-t_i) + h_i) v_{i-1} \\ - \frac{6}{h_i^3} (2(t-t_{i-1}) - h_i) p_i + \frac{2}{h_i^2} (3(t-t_{i-1}) - h_i) v_i, \quad (4.3)$$

$$\ddot{\ddot{C}}_i = \frac{12}{h_i^3} (p_{i-1} - p_i) + \frac{6}{h_i^2} (v_{i-1} + v_i). \quad (4.4)$$

在(4.1), (4.2), (4.3), 和(4.4)中, $h_i, i=1, \dots, n$ 和 $v_i, i=1, \dots, n-1$ 是待定的。对于二阶连续度, 下列方程需要满足:

$$\ddot{C}_i(t_i) = \ddot{C}_{i+1}(t_i), i=1, \dots, n-1. \quad (4.5)$$

由(4.3)可知(4.5)等价于

$$h_{i+1}v_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})v_i + h_i v_{i+1} = -\frac{3h_{i+1}}{h_i}p_{i-1} + 3\left(\frac{h_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{h_{i+1}}\right)p_i + \frac{3h_i}{h_{i+1}}p_{i+1}. \quad (4.6)$$

边界条件 $\ddot{C}_1(t_0) = a_0$, $\ddot{C}_n(t_n) = a_n$ 等价于

$$p_1 = p_0 + \frac{2h_1}{3}v_0 + \frac{h_1^2}{6}a_0 + \frac{h_1}{3}v_1, \quad (4.7)$$

$$p_{n-1} = p_n - \frac{2h_n}{3}v_n + \frac{h_n^2}{6}a_n - \frac{h_n}{3}v_{n-1}. \quad (4.8)$$

由(4.6), (4.7), 和(4.8), v_i 在每个轴的速度分量(为简单起见, 去掉加粗以表示其分量) v_1, \dots, v_{n-1} 将由时间区间 h_1, \dots, h_n 及下式确定:

$$H_1(v_1, \dots, v_{n-1})^T = H_2, \quad (4.9)$$

其中 $H_1 =$

$$\begin{bmatrix} 2h_1 + h_2 + \frac{h_1^2}{h_2} & h_1 & & & & \\ h_2 + \frac{h_1 h_2}{h_2} & 2(h_2 + h_3) & h_2 & & & \\ & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_{n-1} + 2h_n + \frac{h_{n-1}^2}{h_n} \end{bmatrix}$$

为 $(n-1) \times (n-1)$ 阶矩阵, 以及

$$H_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3h_1}{h_2}p_0 + (h_2 - \frac{2h_1^2}{h_2})v_0 + (\frac{h_1 h_2}{2} - \frac{h_1^3}{2h_2})a_0 + \frac{3h_1}{h_2}p_2 \\ -\frac{3h_2}{h_2}p_0 - \frac{2h_1 h_2}{h_2}v_0 - \frac{h_1^2 h_2}{2h_2}a_0 + 3(\frac{h_2}{h_2} - \frac{h_2}{h_2})p_2 + \frac{3h_2}{h_2}p_3 \\ -\frac{3h_2}{h_2}p_2 + 3(\frac{h_2}{h_2} - \frac{h_2}{h_2})p_3 + \frac{3h_2}{h_2}p_4 \\ \vdots \\ -\frac{3h_{n-2}}{h_{n-2}}p_{n-4} + 3(\frac{h_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{h_{n-2}}{h_{n-2}})p_{n-3} + \frac{3h_{n-2}}{h_{n-2}}p_{n-2} \\ -\frac{3h_{n-1}}{h_{n-1}}p_{n-3} + 3(\frac{h_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}})p_{n-2} + \frac{3h_{n-1}}{h_{n-1}}p_n - \frac{2h_{n-2}h_n}{h_{n-1}}v_n + \frac{h_{n-2}h_n^2}{2h_{n-1}}a_n \\ -\frac{3h_n}{h_{n-1}}p_{n-2} + \frac{3h_n}{h_{n-1}}p_n + (h_{n-1} - \frac{2h_n^2}{h_{n-1}})v_n + (\frac{h_n^3}{2h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}h_n}{2})a_n \end{bmatrix}$$

为 $(n-1) \times 1$ 阶数组。

H_1 为三对角阵,而且很容易知道它是严格对角占优的。既然 $h_i, i = 1, \dots, n$ 都是正的,这只需利用 H_1 的首行来消去第二行的首个元素(对最后两行对称地处理)便可得知。于是 H_1 就是非奇异的。也就是说当 h_1, \dots, h_n 确定以后,速度向量 $v_i, i = 1, \dots, n-1$ 就由(4.9)唯一决定了。于是 $C_i(t), i = 1, \dots, n$ 的表达式也就确定了。所以接下来将讨论如何在两类约束下求解 h_1, \dots, h_n 。

4.2.2 跟踪误差约束算法

如第三章所述,由于驱动器的物理限制,每个轴的速度、加速度、加加速度都必须受到约束。将这些约束分别设为 $V_{max}, A_{max}, J_{max}$ 。接下来的讨论将针对某一个轴。将以上粗体符号改为一般符号以表示其分量。

由(4.2)可知分轴速度为 t 的二次函数。故在每个时间区间内只需考虑两个端点和一个极值点处的约束:

$$\begin{cases} |v_i| \leq V_{max}, i = 1, \dots, n-1, \\ |\dot{C}_i(t_i^*)| \leq V_{max}, \text{当 } t_{i-1} < t_i^* < t_i, i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.10)$$

其中

$$t_i^* = \frac{3(t_{i-1} + t_i)(p_i - p_{i-1}) + h_i((t_{i-1} + 2t_i)v_{i-1} + (2t_{i-1} + t_i)v_i)}{6(p_i - p_{i-1}) + 3h_i(v_{i-1} + v_i)}$$

为 $\dot{C}_i(t)$ 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 内的极值点。

由(4.3)可知分轴加速度为 t 的线性函数。故在每个时间区间内只需考虑两个端点处的约束:

$$|\ddot{C}_i(t_i)| \leq A_{max}, i = 1, \dots, n-1. \quad (4.11)$$

由(4.4)可知分轴加加速度为常数,故此时加加速度约束为:

$$|\ddot{C}_i| \leq J_{max}, i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

很显然由(4.2), (4.3), (4.4), 和(4.9)可知, (4.10), (4.11), 和(4.12)中的约束均为 h_1, \dots, h_n (和 v_1, \dots, v_{n-1})的多项式不等式。

在工业数控系统中普遍使用的闭环控制系统(比如PID控制)都会产生跟踪误差,因为它们不可能立即跟上快速变化的位置命令。为了提高加工精度,每个轴上的跟踪误差必须得到有效的控制。

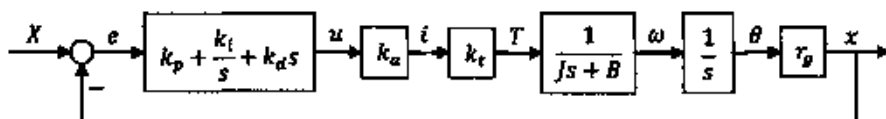


图 4.2: PID控制器及x轴驱动器的方框图

这一节将考虑具有比例、积分、微分增益 k_p , k_i 和 k_d 的PID控制器(如图4.2)。事实上,接下来对跟踪误差的分析也适用于其它线性系统。此处只考虑机床的内在动力学特征,忽略切削力和外部扰动。同上,首先将分析单个轴(以x轴为例)。如图4.2,跟踪误差 $e = X - x$ 是每个轴上参考位置和实际位置的偏差。电流放大器 k_a 将驱动信号 u 转化为电流 i 输入电机,从而通过转矩增益 k_t 转化为转矩 T 。转矩 T 通过系统惯量 J 和粘性阻尼 B 确定了角速度 ω ,并积分成为电动机轴角 θ ,并由传动比 r_g 转化为线性位置 x 。为简洁起见,令 $K = k_a k_t r_g$ 。

输出 x 和输入 X 在Laplace域的传递函数可写为 [5, 28, 91]:

$$\frac{x(s)}{X(s)} = \frac{K(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{J s^3 + (B + K k_d) s^2 + K k_p s + K k_i}. \quad (4.13)$$

将其极点记作 λ_1 , λ_2 和 λ_3 且假设为互异的。(4.13)也可记作

$$\frac{e(s)}{X(s)} = \frac{J s^3 + B s^2}{J s^3 + (B + K k_d) s^2 + K k_p s + K k_i}. \quad (4.14)$$

(4.14)在时间域等价的微分方程是

$$\ddot{e}(t) + \frac{B + K k_d}{J} \dot{e}(t) + \frac{K k_p}{J} \dot{e}(t) + \frac{K k_i}{J} e(t) = \ddot{X}(t) + \frac{B}{J} \dot{X}(t). \quad (4.15)$$

由于输入 $X(t)$ 在每个时间区间上都是三次的,(4.15)的右边项就是分段线性的 t 的函数。通过比较系数法,容易验证线性函数

$$\hat{e}(t) = \left(\frac{J}{K k_i} - \frac{B k_p}{K k_i^2} \right) \ddot{X}(t) + \frac{B}{K k_i} \dot{X}(t), \quad (4.16)$$

是微分方程(4.15)的一个特解。结合初值条件 $e(0) = \dot{e}(0) = \ddot{e}(0) = 0$,可知(4.15)的通解为 [14]:

$$e(t) = \hat{e}(t) + \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} + \mu_3 e^{\lambda_3 t}, \quad (4.17)$$

其中 μ_1 , μ_2 和 μ_3 为积分常数。为保证 $e(t)$ 的二阶连续性, μ_1 , μ_2 和 μ_3 在不同的时间区间上一般是不同的。将 $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$ 上的积分常数分别记作 $\mu_{1,i}$, $\mu_{2,i}$ 和 $\mu_{3,i}$ 。于是对 $i = 1, \dots, n-1$ 有下述等式成立:

$$\begin{cases} e(t_i^-) = e(t_i^+), \\ \dot{e}(t_i^-) = \dot{e}(t_i^+), \\ \ddot{e}(t_i^-) = \ddot{e}(t_i^+). \end{cases} \quad (4.18)$$

将(4.17)代入(4.18), 等式化为

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,i} e^{\lambda_1 t_{i-1}} \\ \mu_{2,i} e^{\lambda_2 t_{i-1}} \\ \mu_{3,i} e^{\lambda_3 t_{i-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,i-1} e^{\lambda_1 t_{i-1}} \\ \mu_{2,i-1} e^{\lambda_2 t_{i-1}} \\ \mu_{3,i-1} e^{\lambda_3 t_{i-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{e}(t_{i-1}^-) - \hat{e}(t_{i-1}^+) \\ \dot{\hat{e}}(t_{i-1}^-) - \dot{\hat{e}}(t_{i-1}^+) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

对 $i = 1, \dots, n$, 其中 $\mu_{1,0} = \mu_{2,0} = \mu_{3,0} = \hat{e}(0^-) = \dot{\hat{e}}(0^-) = 0$. 记

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

接下来将展示如何通过约束 $\hat{e}(t)$ 来减小 $e(t)$:

$$|\hat{e}(t)| \leq E_{\max}, \quad (4.21)$$

其中 E_{\max} 为可调整的正常数。基于系统的稳定性条件, λ_1 , λ_2 和 λ_3 的实部必须是负的。记 $\alpha = \min\{|\Re(\lambda_1)|, |\Re(\lambda_2)|, |\Re(\lambda_3)|\}$ 和 $\dot{E}_{\max} = \frac{E J_{\max}}{K h_i}$ 。由于速度约束, 时间区间的长度 h_i 一定存在一个下界:

$$h_i \geq \max_{\text{for each axis}} \frac{|p_i - p_{i-1}|}{V_{\max}} := l_i, i = 1, \dots, n. \quad (4.22)$$

记 $h = \min_{i=1, \dots, n} l_i$. 由(4.17)和(4.19), 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上易知

$$\begin{aligned}
 |e(t)| &\leq E_{\max} + |\mu_{1,i} e^{\lambda_1 t_{i-1}}| + |\mu_{2,i} e^{\lambda_2 t_{i-1}}| + |\mu_{3,i} e^{\lambda_3 t_{i-1}}| \\
 &\leq E_{\max} + |\mu_{1,i-1} e^{\lambda_1 t_{i-1}}| + |\mu_{2,i-1} e^{\lambda_2 t_{i-1}}| + |\mu_{3,i-1} e^{\lambda_3 t_{i-1}}| \\
 &\quad + 2\|\Lambda^{-1}\|_1(E_{\max} + \dot{E}_{\max}) \\
 &\leq E_{\max} + (|\mu_{1,i-1} e^{\lambda_1 t_{i-2}}| + |\mu_{2,i-1} e^{\lambda_2 t_{i-2}}| + |\mu_{3,i-1} e^{\lambda_3 t_{i-2}}|) e^{-\alpha h_{i-1}} \\
 &\quad + 2\|\Lambda^{-1}\|_1(E_{\max} + \dot{E}_{\max}) \\
 &\leq \dots \\
 &\leq E_{\max} + 2\|\Lambda^{-1}\|_1(E_{\max} + \dot{E}_{\max}) (1 + e^{-\alpha h_{i-1}} + \dots + e^{-\alpha(h_1 + \dots + h_{i-1})}) \\
 &\leq E_{\max} + 2\|\Lambda^{-1}\|_1(E_{\max} + \dot{E}_{\max}) (1 + e^{-\alpha h} + \dots + e^{-(i-1)\alpha h}) \\
 &\leq E_{\max} + \frac{2\|\Lambda^{-1}\|_1}{1 - e^{-\alpha h}} (E_{\max} + \dot{E}_{\max}).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

于是通过合适地选取 k_p , k_i 和 k_d , $e(t)$ 能够被 E_{\max} 约束。所以只需要对 $\hat{e}(t)$ 增加约束。

既然 $\hat{e}(t)$ 是分段线性的, (4.21) 化为

$$\begin{cases} |\hat{e}(t_i^-)| \leq E_{\max}, i = 1, \dots, n, \\ |\hat{e}(t_i^+)| \leq E_{\max}, i = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{4.24}$$

由(4.3), (4.4), (4.9)和(4.16)可知这也是 h_1, \dots, h_n (和 v_1, \dots, v_{n-1}) 的多项式不等式约束。

在约束内调整 h_i 可以得到最小化的加工时间。结合(4.9), (4.10), (4.11), (4.12)和(4.24), 优化问题为:

$$\min_{h_i > 0} (h_1 + \dots + h_n)$$

满足约束

$$\begin{cases} H_1(v_1, \dots, v_{n-1})^T = H_2, \text{ 对每个轴,} \\ |v_i| \leq V_{\max}, i = 1, \dots, n-1, \\ |\dot{C}_i(t_i^*)| \leq V_{\max}, \text{ 当 } t_{i-1} < t_i^* < t_i, i = 1, \dots, n, \\ |\ddot{C}_i(t_i)| \leq A_{\max}, i = 1, \dots, n-1, \\ |\ddot{C}_i| \leq J_{\max}, i = 1, \dots, n, \\ |\hat{e}(t_i^-)| \leq E_{\max}, i = 1, \dots, n, \\ |\hat{e}(t_i^+)| \leq E_{\max}, i = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.25)$$

(4.25)中的符号 $|\cdot|$ 表示取每个标量的绝对值。

很显然这个问题的解是存在的, 这只需要将 (h_1, \dots, h_n) 乘上一个大正数即可得知(类似于 [35, 55])。而(4.22)中 h_1, \dots, h_n 的下界能被用来作为非线性规划问题的初始解。该优化问题具有线性目标函数和多项式约束, 可以用序列二次规划方法来求解 [62, 88]。

当优化变量 h_1, \dots, h_n 确定之后, 插补轨迹便由(4.1)得到了。

4.2.3 实验结果

在实验中, 一个平面的风扇曲线被细分为超过100个参考点(如图 4.3(a))。如图 4.3(b) 所示的Fadal机床将用来进行实验。分轴的运动学约束设为 $V_{\max} = (250, 250) \text{ mm/s}$, $A_{\max} = (2000, 2000) \text{ mm/s}^2$, $J_{\max} = (50000, 50000) \text{ mm/s}^3$ 。初末速度、加速度都设为零, 插补周期为1 ms。x和y轴的驱动参数列在表 4.1 中, 比例、积分、微分增益均为 $k_p = 30 \text{ V/mm}$, $k_i = 650 \text{ V/(mm}\cdot\text{s)}$ and $k_d = 0.4 \text{ V/(mm/s)}$ 。作为比较, 两个轴的 E_{\max} 被设为无、50 μm 和20 μm 。

MATLAB的 $fmincon$ 函数被用来求解(4.25)。生成的三次样条轨迹如图 4.3(a)。图 4.4给出了在不同 E_{\max} 约束下x轴(实线)和y轴(虚线)的跟踪误差、速度、加速度及加加速度的实验结果。跟踪误差(包括其最大值和均方根)和加工时间的比较列在表 4.2中, 其显示了跟踪误差能够在适当地牺牲一些加工时间的前提下得到显著的减小。

4.2.4 模型的推广

第4.2.2节中将跟踪误差约束转化为运动学约束的方法可以推广到一般的线

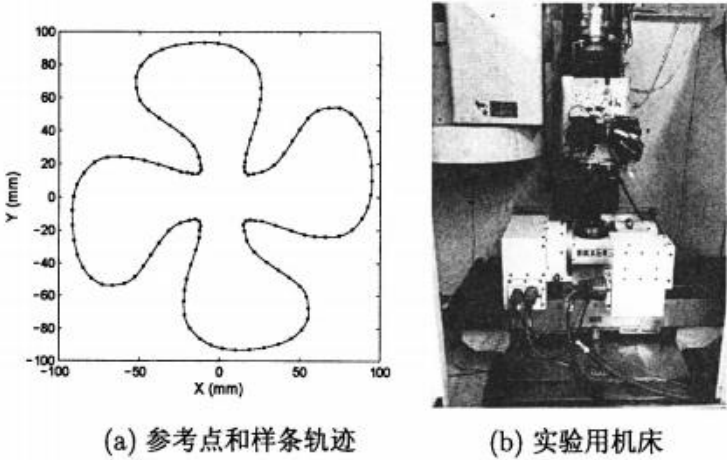


图 4.3: 三次样条轨迹和机床

表 4.1: x 和 y 轴的驱动参数

参数	X轴	Y轴
k_a (A/V)	6.5723	6.2274
k_t (N m/A)	0.4769	0.4769
r_g (mm/rad)	1.5915	1.5915
J (kg m ²)	0.0070028	0.0081904
B (kg m ² /s)	0.023569	0.043009

表 4.2: 不同跟踪误差约束下的比较结果

E_{max} (μm)	X轴跟踪误差		Y轴跟踪误差		加工时间(s)
	最大值(μm)	均方根(μm)	最大值(μm)	均方根(μm)	
无	58.8	24.0	77.0	31.2	5.771
50	44.4	14.4	46.7	17.0	7.299
20	21.0	10.4	21.4	11.4	7.785

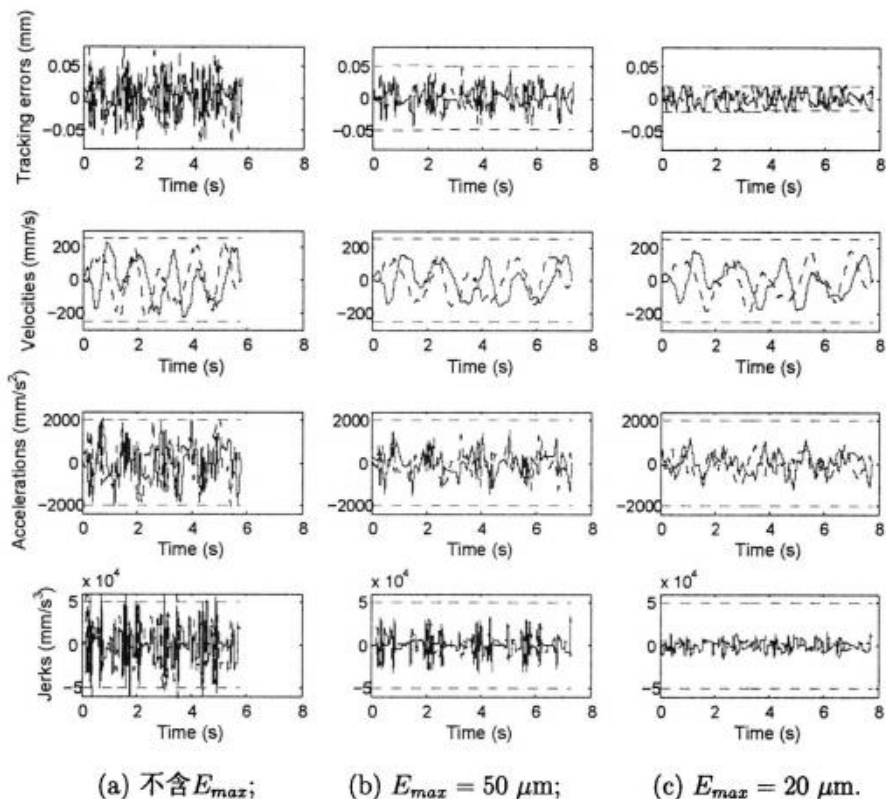


图 4.4: 不同跟踪误差约束的实验结果

性系统。同时也可以推广到利用进给速度优化算法沿给定的样条路径进行插补轨迹生成。

通过推广闭环传递函数(4.13)到 n 阶线性系统:

$$\frac{x(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad (4.26)$$

在时间域上的输入 X 和跟踪误差 $e = X - x$ 的关系可以表示为

$$a_n e^{(n)} + a_{n-1} e^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{e} + a_0 e = g(t), \quad (4.27)$$

其中 $e^{(i)}$ 是 $e(t)$ 对时间 t 的 i 阶导数, 以及

$$g(t) = (a_n X^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{X} + a_0 X) - (b_m X^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{X} + b_0 X).$$

将(4.26)的极点记作 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 且其实部均为负的。

下述结果将被用来简化跟踪误差约束。特别地, 当 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 均为负实数, 如果 $|g(t)/a_0| \leq E_{\max}$, $e(t)$ 将不会超出它的界 E_{\max} 。其证明如下:

假设 $y(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上是可微的且有 $y(0) = 0$ 。若 $M > 0$, $a > 0$, 以及 $|ay + y| \leq M$, 将 $\frac{1}{a}e^{\frac{t}{a}}$ 同时乘以下式的两端:

$$-M \leq ay + y \leq M,$$

得到

$$-M \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{a}}) \leq \frac{d}{dt}(ye^{\frac{t}{a}}) \leq M \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{a}}).$$

将上述不等式由 $y(0) = 0$ 积分, 可得

$$|y| \leq M(1 - e^{-\frac{t}{a}}) \leq M.$$

进一步地, 既然 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 均为负实数, 将下列函数记为:

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \dot{e} + e \\ z_2 = -\frac{1}{\lambda_2} \dot{z}_1 + z_1 \\ \dots \\ z_{n-1} = -\frac{1}{\lambda_{n-1}} \dot{z}_{n-2} + z_{n-2} \end{cases}, \quad (4.28)$$

容易看出

$$g(t)/a_0 = -\frac{1}{\lambda_n} \dot{z}_{n-1} + z_{n-1}. \quad (4.29)$$

若 $|g(t)/a_0| \leq E_{\max}$, 递推地将上述结论应用在(4.28)和(4.29), 容易得到跟踪误差约束 $|e(t)| \leq E_{\max}$ 。

一般地, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是具有负实部的任意复数, $e(t)$ 仍然可以由 $g(t)$ 的约束得到限制。微分方程(4.27)可改写为矩阵形式:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + g(t) \quad (4.30)$$

其中 $e(t) = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T$, $g(t) = [0, \dots, 0, g(t)/a_n]^T$, 以及

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

线性微分方程组(4.30)的解为 [14]:

$$e(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} g(\tau) d\tau, \quad (4.31)$$

于是有

$$\|e(t)\|_1 = \left\| \int_0^t e^{\tau A} g(t-\tau) d\tau \right\|_1 \leq \int_0^t \|e^{\tau A}\|_1 \|g(t-\tau)\|_1 d\tau. \quad (4.32)$$

所以

$$|e(t)| \leq \|e(t)\|_1 \leq \max |g(t)| \int_0^t \|e^{\tau A}\|_1 d\tau, \quad (4.33)$$

这说明 $e(t)$ 能够被 $g(t)$ 的界的常数倍所约束。

既然 $g(t)$ 可以容易地表示为路径参数的函数, 这种方法可以推广到处理任意给定的样条路径。使用第三章中的进给速度优化算法, 加上 $g(t)$ 的约束, 便可得到跟踪误差约束的时间优化插补轨迹。

4.3 五轴轮廓误差补偿

对跟踪误差和轮廓误差进行预补偿需要在机床运动之前对伺服驱动系统及其作用进行准确的预测。这一节将提出五轴加工的跟踪误差解析预测及轮廓误差预补偿算法。

在插补轨迹生成之后, 时间 t 处的刀位点在工件坐标系(P-system)内可以表示为刀尖位置向量(如图 2.9)

$$P(t) = [P_x(t), P_y(t), P_z(t)]^T, \quad (4.34)$$

以及单位长度的刀轴方向向量

$$O(t) = [O_i(t), O_j(t), O_k(t)]^T, \quad \|O\| = 1. \quad (4.35)$$

利用(2.43)中的运动学反解, 刀具路径参考点($P_x, P_y, P_z, O_i, O_j, O_k$)被变换为五轴机床中三个平移轴及两个旋转轴的位置命令:

$$q(t) = [X(t), Y(t), Z(t), A(t), C(t)]^T, \quad (4.36)$$

其中(X, Y, Z, A, C)是机床坐标系(M-system)内的坐标。再一次地, 图 2.9 中从工件坐标系到机床坐标系的坐标变换表示为运动学反解:

$$\begin{cases} A = \arccos(O_k) \\ C = \arctan 2(O_i, O_j) \\ X = -\cos(C)P_x - \sin(C)P_y \\ Y = \cos(A)\sin(C)P_x - \cos(A)\cos(C)P_y - \sin(A)(P_z + L_{ac,x}) \\ Z = \sin(A)\sin(C)P_x - \sin(A)\cos(C)P_y + \cos(A)(P_z + L_{ac,x}) + L_{Tya,z} \end{cases} \quad (4.37)$$

其中 $L_{ac,x}$ 和 $L_{Tya,z}$ 为旋转台的偏置距离。反过来, 从机床坐标系到工件坐标系的变换表示为运动学正解:

$$\begin{cases} O_i = \sin(A)\sin(C) \\ O_j = \sin(A)\cos(C) \\ O_k = \cos(A) \\ P_x = -\cos(C)X + \cos(A)\sin(C)Y + \sin(A)\sin(C)(Z - L_{Tya,z}) \\ P_y = -\sin(C)X - \cos(A)\cos(C)Y - \sin(A)\cos(C)(Z - L_{Tya,z}) \\ P_z = -\sin(A)Y + \cos(A)(Z - L_{Tya,z}) - L_{ac,x} \end{cases} \quad (4.38)$$

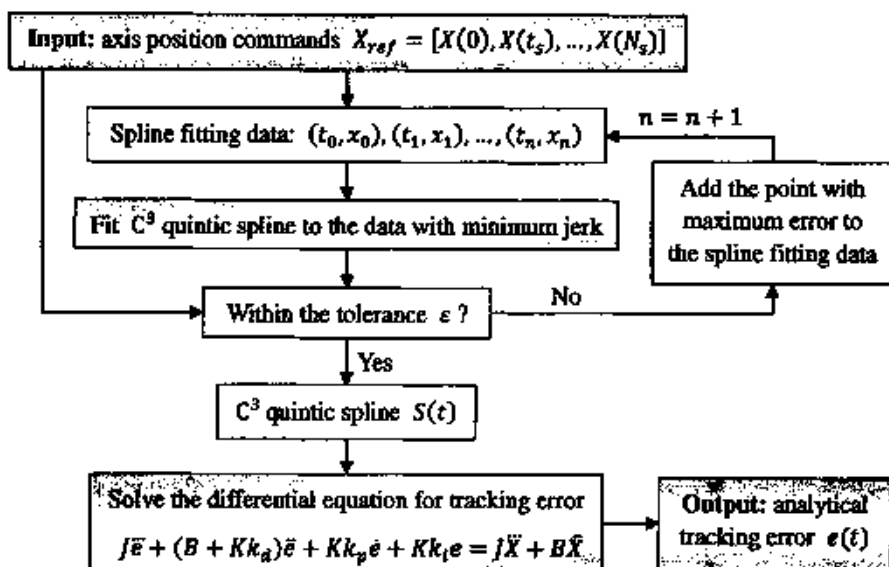


图 4.5: 跟踪误差预测模型

4.3.1 位置命令的样条拟合

以插补周期 T_s 采样的单轴位置命令, 以 x 轴为例, 可以表示为:

$$X_{ref} = [X(0), X(1), X(2), \dots, X(N_s)], \quad (4.39)$$

其中 N_s 是插补步数, $t_f = N_s T_s$ 是总的插补时间。第4.3.1节和第4.3.2节的目标是解析地预测每个轴的跟踪误差, 参见图 4.5。

为了得到跟踪误差的解析预测, 每个轴的位置命令将在容许误差 ε (即编码器分辨率)内迭代地拟合为 C^3 连续的五次样条。首先, 时间采样的位置命令(4.39)被划分为等时间长度的 n 段(如图 4.6 所示), 其中每段约有50个插补点($n = \lfloor N_s/50 \rfloor$)。其目标是将每一段插补点表示为一个五次多项式。若从 X_{ref} 中选出的等时间划分的 x 轴上的 $n+1$ 个初始位置坐标为 x_0, x_1, \dots, x_n , 那么拟合样条的第 i 段表达式为:

$$S_i(t) = b_{5,i}t^5 + b_{4,i}t^4 + b_{3,i}t^3 + b_{2,i}t^2 + b_{1,i}t + b_{0,i}, \quad t \in [0, h_i] \quad (4.40)$$

$$S \in \{S_x, S_y, S_z, S_a, S_c\}$$

其中第*i*段时间区间为 $h_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, 以及 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_f$. (4.40)中的系数是待定的。当这些系数用下述方法确定之后, 参考位置点和拟合样条之间的误差将被计算出来。将误差最大的那个参考点加入之前的拟合序列再进行一次拟合, 直到每个插补点都满足容许误差 ε 。一般地, 一段含有2000个插补点的轨迹可以拟合为具有80~100段多项式的样条。

样条参数将由 [6] 中提出的最小化加加速度平方积分的方法来确定:

$$J = \int_0^{t_f} \ddot{S}(t)^2 dt \quad (4.41)$$

同时保持连接点处的速度、加速度及加加速度的连续性。(4.41)中的加加速度目标函数能被分割为:

$$J = \int_0^{h_1} \ddot{S}_1(t)^2 dt + \dots + \int_0^{h_n} \ddot{S}_n(t)^2 dt := J_1 + \dots + J_n. \quad (4.42)$$

第*i*段的目标函数展开为:

$$\begin{aligned} J_i &= \int_0^{h_i} (60b_{5,i}t^2 + 24b_{4,i}t + 6b_{3,i})^2 dt \\ &= 720b_{5,i}^2h_i^5 + 720b_{5,i}b_{4,i}h_i^4 + (240b_{5,i}b_{3,i} + 192b_{4,i}^2)h_i^3 + 144b_{4,i}b_{3,i}h_i^2 + 36b_{3,i}^2h_i \\ &= \frac{1}{2} [b_{5,i} \ b_{4,i} \ b_{3,i} \ b_{2,i} \ b_{1,i} \ b_{0,i}] \begin{bmatrix} 1440h_i^5 & 720h_i^4 & 240h_i^3 & 0 & 0 & 0 \\ 720h_i^4 & 384h_i^3 & 144h_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 240h_i^3 & 144h_i^2 & 72h_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{5,i} \\ b_{4,i} \\ b_{3,i} \\ b_{2,i} \\ b_{1,i} \\ b_{0,i} \end{bmatrix} \\ &:= \frac{1}{2} \beta_i^T H_i \beta_i. \end{aligned} \quad (4.43)$$

由(4.42)和(4.43), 可以将(4.41)中的总的加加速度目标函数写为如下形式:

$$J = \frac{1}{2} [\beta_1^T \ \dots \ \beta_n^T] \begin{bmatrix} H_1 & & \\ & \ddots & \\ & & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} := \frac{1}{2} \beta^T H \beta. \quad (4.44)$$

向量 β 包含了样条 $S(t)$ 的所有段的系数。这个五次样条将在每一步的拟合过程中穿过参考点 $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$ 。故对第 i 段, 下面的边界位置条件必须满足:

$$S_i(0) = x_{i-1}, S_i(h_i) = x_i, \quad (4.45)$$

它可以被重写为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_i^5 & h_i^4 & h_i^3 & h_i^2 & h_i & 1 \end{bmatrix} \beta_i = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

将(4.46)左边的矩阵记为 L_i^0 , 右边记为 ξ_i^0 , 故可将所有段上的位置条件重写为

$$\begin{bmatrix} L_1^0 & & \\ & \ddots & \\ & & L_n^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

简记作

$$L^0 \beta = \xi^0. \quad (4.48)$$

在点 (t_i, x_i) 处的速度、加速度、加加速度条件可以写作:

$$\begin{cases} \dot{S}_i(h_i) - \dot{S}_{i+1}(0) = 0, \\ \ddot{S}_i(h_i) - \ddot{S}_{i+1}(0) = 0, \\ \dddot{S}_i(h_i) - \dddot{S}_{i+1}(0) = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

展开为

$$\begin{bmatrix} 5h_i^4 & 4h_i^3 & 3h_i^2 & 2h_i & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 20h_i^3 & 12h_i^2 & 6h_i & 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 60h_i^2 & 24h_i & 6 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

将(4.50)的左边矩阵记为 $[L_i^1 \ L^*]$, 导数的边界条件即

$$\begin{bmatrix} L_1^1 & L^* & & \\ & L_2^1 & L^* & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & L_{n-1}^1 & L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{3(n-1) \times 1}, \quad (4.51)$$

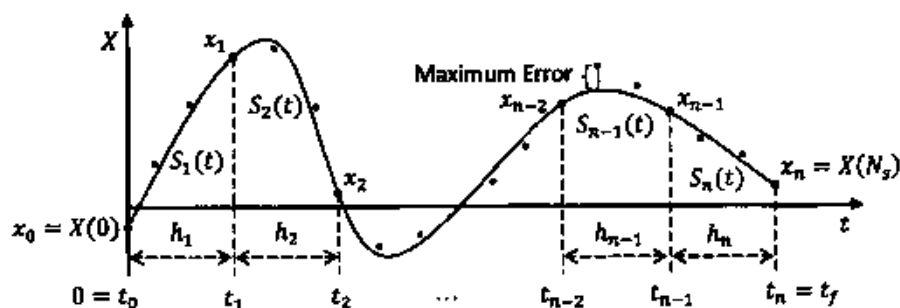


图 4.6: 位置命令拟合

简记作

$$L^1 \beta = \xi^1. \quad (4.52)$$

将初始速度、加速度、加加速度均设为0, 便有:

$$\dot{S}_1(0) = \ddot{S}_1(0) = \dddot{S}_1(0) = 0, \quad (4.53)$$

展开为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

将(4.54)记作

$$L^2 \beta = \xi^2. \quad (4.55)$$

类似地将终点速度、加速度、加加速度均设为0, 于是有:

$$\dot{S}_n(h_n) = \ddot{S}_n(h_n) = \dddot{S}_n(h_n) = 0, \quad (4.56)$$

展开为

$$\begin{bmatrix} \vdots & 5h_n^4 & 4h_n^3 & 3h_n^2 & 2h_n & 1 & 0 \\ 0_{3 \times 6(n-1)} & \vdots & 20h_n^3 & 12h_n^2 & 6h_n & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & 60h_n^2 & 24h_n & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

记(4.57)作

$$L^3 \beta = \xi^3. \quad (4.58)$$

将(4.48), (4.52), (4.55)和(4.58)中的条件综合起来记为:

$$L\beta = \xi \quad (4.59)$$

其中

$$L = [L^0, L^1, L^2, L^3]^T, \quad \xi = [\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3]^T,$$

于是加加速度最小化问题即

$$\min_{\beta} J = \frac{1}{2} \beta^T H \beta \quad \text{满足:} \quad L\beta - \xi = 0. \quad (4.60)$$

上述含约束的二次最小化问题可以用Lagrange乘子法求解。引入Lagrange乘子 Λ , 增广目标函数为:

$$J'(\beta, \Lambda) = \frac{1}{2} \beta^T H \beta + \Lambda^T (L\beta - \xi). \quad (4.61)$$

由 $\partial J'/\partial \beta = 0$ 和 $\partial J'/\partial \Lambda = 0$ 可以得到线性方程组:

$$\begin{bmatrix} H & L^T \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

线性方程组(4.62)的解 β 即为 $S(t)$ 的系数, 且满足三阶连续性及其加加速度最小化目标。

在迭代拟合的每一步, 计算参考位置命令 X_{ref} 到样条 $S(t)$ 的拟合误差(如图4.6)。如果最大误差小于容许误差 ε , 那么拟合过程结束。否则如图4.5所示, 具有最大误差的参考点将被加入拟合序列并重复拟合过程, 直到所有插补点都在容许误差 ε 范围内。最终, 每个轴的参考位置命令都被拟合为一个 C^3 连续的五次样条(4.40)。

4.3.2 跟踪误差的解析预测

本节以如图4.2所示的PID控制器及伺服驱动系统为例给出跟踪误差的解析预测。为简化模型起见, 切削力扰动将被忽略, 因为滚珠丝杠传动能显著地减小其作用。而驱动轴的静摩擦力及Coulomb摩擦力将会在实验中利用前馈模块来进行辨识及补偿。如第4.2.2节所述, 电流放大增益为 k_a , 电机的转矩常数为 k_t , 电机轴上等价的惯量和粘性阻尼分别为 J 和 B , 滚珠丝杠的传动比为 τ_g , 传递函数(4.13)的极点为 λ_1, λ_2 和 λ_3 , 且设为互异的。跟踪误

差 $e(s) = X(s) - x(s)$ 和输入 $X(s)$ 之间的传递函数(4.14)在时间域上可写为微分方程:

$$J\ddot{e}(t) + (B + Kk_d)\dot{e}(t) + Kk_p e(t) + Kk_i e(t) = J\ddot{X}(t) + B\dot{X}(t). \quad (4.63)$$

其中 $K = k_a k_i r_g$.

常系数线性微分方程(4.63)有齐次解和特解 [14]。既然参考位置命令 $X(t)$ 被拟合为分段五次的多项式(4.40), (4.63)的右端为分段三次多项式。这引出了微分方程的一个分段三次的特解:

$$\hat{e}_i(t) = d_{3,i}t^3 + d_{2,i}t^2 + d_{1,i}t + d_{0,i} \quad (4.64)$$

对每一个时间区间 $[0, h_i]$, $i = 1, \dots, n$. 将待定解(4.64)代入(4.63), 并在等式两端比较 $1, t, t^2, t^3$ 的系数可得:

$$\begin{bmatrix} Kk_i & Kk_p & 2(B + Kk_d) & 6J \\ 0 & Kk_i & 2Kk_p & 6(B + Kk_d) \\ 0 & 0 & Kk_i & 3Kk_p \\ 0 & 0 & 0 & Kk_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{0,i} \\ d_{1,i} \\ d_{2,i} \\ d_{3,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{2,i}B + 6b_{3,i}J \\ 6b_{3,i}B + 24b_{4,i}J \\ 12b_{4,i}B + 60b_{5,i}J \\ 20b_{5,i}B \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

这便解出了 $(d_{0,i}, d_{1,i}, d_{2,i}, d_{3,i})$. 将(4.63)的齐次解 $(\mu_{1,i}e^{\lambda_1 t} + \mu_{2,i}e^{\lambda_2 t} + \mu_{3,i}e^{\lambda_3 t})$ 和特解结合, 其在每个时间区间 $[0, h_i]$ 上的一般解即为:

$$e_i(t) = \hat{e}_i(t) + \mu_{1,i}e^{\lambda_1 t} + \mu_{2,i}e^{\lambda_2 t} + \mu_{3,i}e^{\lambda_3 t}, \quad t \in [0, h_i], \quad (4.66)$$

其中 $\mu_{1,i}$, $\mu_{2,i}$ 和 $\mu_{3,i}$ 是第 i 段上特定的积分常数。

为保持 $e(t)$ 的二阶连续度, 任两个相邻的 $e_i(t)$ 和 $e_{i+1}(t)$ 必须有相同的值以及一、二阶导数。因此下列等式必须对 $i = 1, \dots, n-1$ 成立:

$$\begin{cases} e_i(h_i) = e_{i+1}(0), \\ \dot{e}_i(h_i) = \dot{e}_{i+1}(0), \\ \ddot{e}_i(h_i) = \ddot{e}_{i+1}(0). \end{cases} \quad (4.67)$$

将(4.66)代入(4.67),

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,i+1} \\ \mu_{2,i+1} \\ \mu_{3,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,i}e^{\lambda_1 h_i} \\ \mu_{2,i}e^{\lambda_2 h_i} \\ \mu_{3,i}e^{\lambda_3 h_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{e}_i(h_i) - \hat{e}_{i+1}(0) \\ \dot{\hat{e}}_i(h_i) - \dot{\hat{e}}_{i+1}(0) \\ \ddot{\hat{e}}_i(h_i) - \ddot{\hat{e}}_{i+1}(0) \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

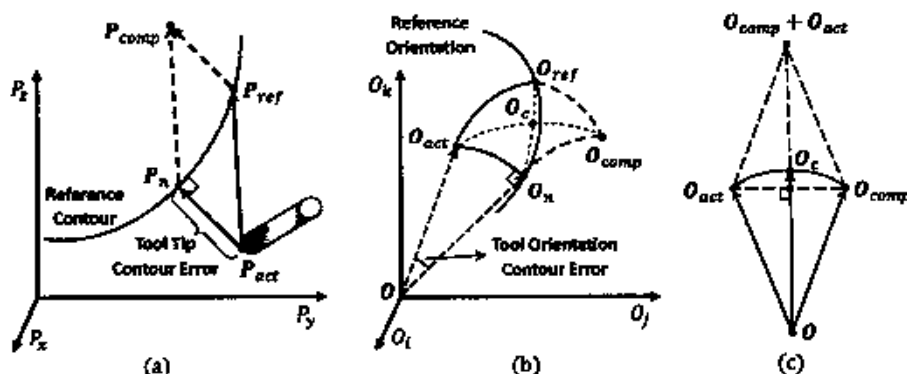


图 4.7: 刀尖位置和刀轴方向的轮廓误差

必须对 $i = 1, \dots, n-1$ 成立。结合 $[0, h_1]$ 上的初值条件 $e(0) = \dot{e}(0) = \ddot{e}(0) = 0$, (4.66) 给出了首段上的积分常数解:

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,1} \\ \mu_{2,1} \\ \mu_{3,1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{e}_1(0) \\ \dot{\hat{e}}_1(0) \\ \ddot{\hat{e}}_1(0) \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

积分常数 $\mu_{1,i}$, $\mu_{2,i}$ 和 $\mu_{3,i}$ 将从 (4.68) 和 (4.69) 递推地得到。这便给出了跟踪误差 $e(t)$ 在每个轴上的解析解 (4.66)。

4.3.3 轮廓误差的预补偿

由于每个独立的伺服驱动轴上的跟踪误差, 在五轴加工的运动控制系统中会出现两类轮廓误差 [9]。第一类是刀尖位置对参考路径的法向偏移距离, 被称作刀尖位置轮廓误差。第二类是球面坐标系内由旋转轴控制的刀轴方向对参考方向的偏移角度, 被称作刀轴方向轮廓误差。

将轮廓误差的两个部分分别记作: 位置误差 ε_p 和方向误差 ε_o 。刀尖位置和刀轴方向的几何参考路径分别表示为 $P(u)$, $0 \leq u \leq 1$ 和 $O(w)$, $0 \leq w \leq 1$, 这可以由第二章所述的五轴加工路径生成方法得到。而每个轴的跟踪误差已经在前一节得到解析地预测, 所以轮廓误差也可以得到预测。

将参考刀尖位置和实际刀尖位置分别记为 P_{ref} 和 P_{act} , 如图 4.7 (a) 所示。 P_n 是参考样条路径 $P(u)$ 上离实际刀尖位置 P_{act} 最近的点。此处的刀尖

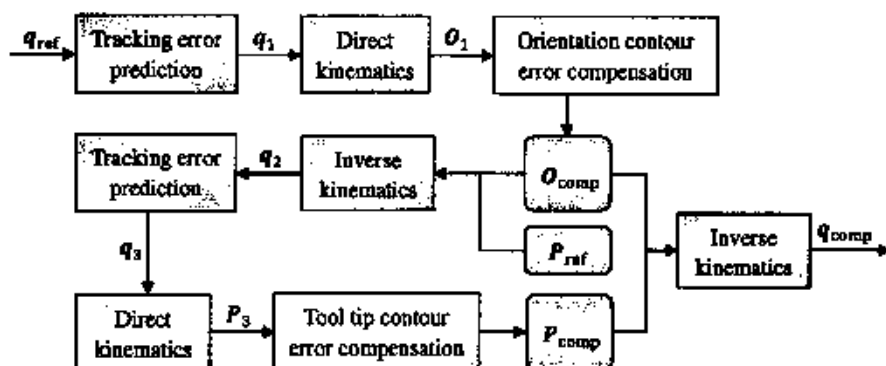


图 4.8: 轮廓误差预补偿策略

位置轮廓误差向量定义为 $P_n - P_{act}$ ，它垂直于点 P_n 处沿参考路径的切向量 $P'(u) = \frac{d}{du}P(u)$ 。而点 P_n 能够通过数值地解下列方程得到：

$$P'(u) \cdot (P(u) - P_{act}) = 0, u \in [0, 1], \quad (4.70)$$

它的解 u^* 导出了 $P_n = P(u^*)$ 。于是刀尖位置轮廓误差便是

$$\varepsilon_p = \|P(u^*) - P_{act}\|. \quad (4.71)$$

类似地，参考和实际的刀轴方向分别记为 O_{ref} 和 O_{act} ，如图 4.7 (b) 所示。设 O_n 为球面坐标系内从 O_{act} 到参考方向轮廓 $O(w)$ 的最近点。方向轮廓误差便是 $\widehat{O_{act}O_n}$ 的弧长，即从 O_{act} 到 O_n 的角度变化 $\arccos(O_{act} \cdot O_n)$ 。由 O_{act} 、 O_n 和原点 O 确定的平面应该垂直于方向样条在 O_n 处的切向量 $O'(w) = \frac{d}{dw}O(w)$ 。其等价条件为， O_{act} 垂直于 O_n 处的切向量 $O'(w)$ 。因此 O_n 能通过下式解得：

$$O'(w) \cdot O_{act} = 0, w \in [0, 1], \quad (4.72)$$

其解 w^* 可得到 $O_n = O(w^*)$ 。于是刀轴方向轮廓误差便是

$$\varepsilon_o = \arccos(O_{act} \cdot O(w^*)). \quad (4.73)$$

由(4.37)和(4.38)中的运动学反解和正解可以看出，五轴机床的平移和旋转是耦合的。然而，刀轴方向并不会被平移轴的变化所改变 [69]，所以方向轮廓

误差将在补偿位置轮廓误差之前得到补偿。图 4.8 给出了轮廓误差补偿的整体流程,其细节解释如下。

第4.3.2节由闭环传递函数给出的五轴跟踪误差解析预测如下:

$$e(t) = [e_x(t), e_y(t), e_z(t), e_a(t), e_c(t)]^T. \quad (4.74)$$

五个轴的实际位置(q_i)可以被估计为:

$$q_1 = q_{ref} - e \leftarrow q_{ref} = [X_{ref}, Y_{ref}, Z_{ref}, A_{ref}, C_{ref}]^T \quad (4.75)$$

其中 q_{ref} 为参考五轴位置命令。对 q_1 使用运动学正解(4.38)可得到刀轴方向的估计 O_1 。在图 4.7 (b) 中, O_{ref} 为参考刀轴方向; O_n 由(4.72)算得; $O_{act} = O_1$; 以及 O_{comp} 为将由“球面平行四边形”确定的预补偿刀轴方向。如图 4.7 (b) 所示, O_{ref} , O_{act} , O_n 和 O_{comp} 为以 O_c 为中心的球面平行四边形的四个顶点。其中心为圆弧 $\widehat{O_{ref}O_n}$ (和 $\widehat{O_{comp}O_{act}}$)的中点, 可由下式得到:

$$O_c = \frac{O_{ref} + O_n}{\|O_{ref} + O_n\|} = \frac{O_{comp} + O_{act}}{\|O_{comp} + O_{act}\|}. \quad (4.76)$$

如图 4.7 (c) 所示, O_{act} 在 O_c 上的投影长度为 $\|O_{comp} + O_{act}\|/2$, 即内积 $O_{act} \cdot O_c$, 因为 O_{act} 和 O_c 都是单位向量。这可以导出:

$$\|O_{comp} + O_{act}\| = 2(O_{act} \cdot O_c). \quad (4.77)$$

由(4.76)和(4.77), O_{comp} 可求得为:

$$O_{comp} = \|O_{comp} + O_{act}\|O_c - O_{act} = 2(O_{act} \cdot O_c)O_c - O_{act}. \quad (4.78)$$

既然刀轴方向的改变会导致机床五个轴位置的变化, 在预补偿刀尖位置轮廓误差之前需要重新进行跟踪误差的预测。对参考刀尖位置 P_{ref} 和补偿的刀轴方向 O_{comp} 使用运动学反解(4.37), 便得到了新的五轴参考位置 q_2 。再一次地, 将 q_2 作为跟踪误差预测算法的输入, 实际的五轴位置命令可估计为 q_3 。将运动学正解(4.38)应用在 q_3 上, 重新预测的实际刀尖位置为 P_3 。在图 4.7 (a) 中, P_{ref} 为参考刀尖位置, P_n 由(4.70)算出; $P_{act} = P_3$ 。预补偿的刀尖位置 P_{comp} 为将轮廓误差向量 $P_n - P_{act}$ 加上参考位置 P_{ref} , 即:

$$P_{comp} = P_{ref} + P_n - P_{act}. \quad (4.79)$$

最终, 对补偿的刀尖位置 P_{comp} 和刀轴方向 O_{comp} 使用运动学反解(4.37), 便得到了预补偿的五轴位置命令 q_{comp} 。理论上, 通过上述对五轴参考位置命令的修改, 将会使得机床实际加工出的路径更接近于参考路径。

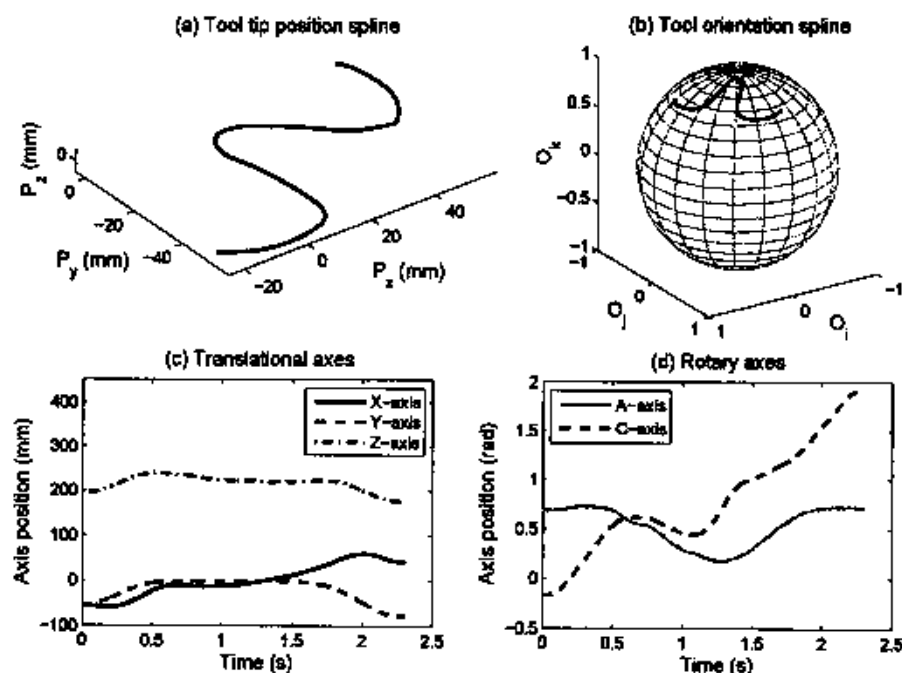


图 4.9: 实验的样条刀具路径及五轴位置命令

4.3.4 实验结果

本节将采用第二章中生成的如图 2.8 所示的五轴加工样条路径来进行实验。刀尖位置及刀轴方向样条分别如图 4.9 (a)和(b)所示。时间采样的五轴位置命令如图 4.9 (c)和(d)所示。采样周期及最大进给速度分别设为 1 ms 和 100 mm/s。实验用的五轴加工中心采用 dSPACE 信号处理器上运行的内部开发、模块化、可重构的开放式数控系统来控制(如图 4.10)。每个驱动轴的参数分别进行了辨识并列在表 4.3 中。所有轴的 PID 控制参数经过调频使得其动态性能均为匹配的(参见表 4.3)。

采用 [24] 中的方法,除了等价惯量之外,每个轴的摩擦力参数都被辨识出

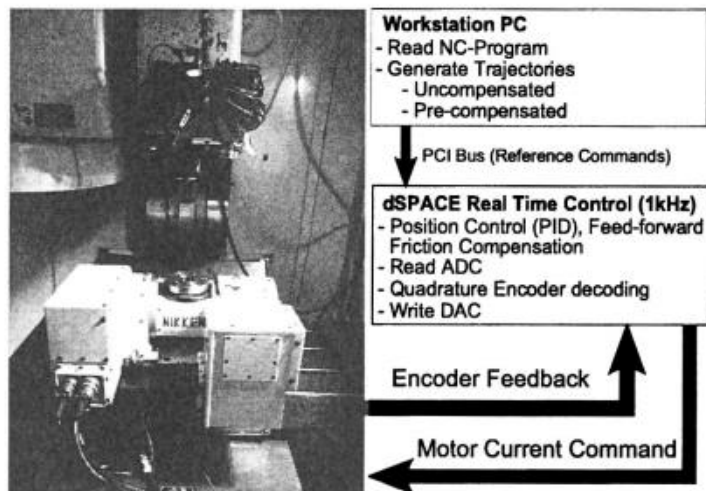


图 4.10: 五轴数控机床及实验设置

来。对应于不同的角速度的扰动转矩给出了如下的摩擦力模型:

$$\hat{T}_f(\omega) = \begin{cases} T_{stat}^+ e^{-\omega/\Omega_1^+} + T_{coul}^+ (1 - e^{-\omega/\Omega_2^+}) & \text{若 } \omega > 0 \\ T_{stat}^- e^{-\omega/\Omega_1^-} + T_{coul}^- (1 - e^{-\omega/\Omega_2^-}) & \text{若 } \omega < 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (4.80)$$

(4.80)中的参数值列在表 4.4 中。

这个模型在低速度处补偿了静摩擦力, 在高速度处补偿了Coulomb摩擦力。而粘性摩擦系数 B 已经包含在如前所述的线性传递函数中。虽然本节提出的跟踪误差预测模型只考虑了每个驱动轴的线性特征, 但非线性的摩擦力干扰会被如图 4.11 所示的前馈模块所补偿。

接下来将用五轴轮廓加工实验来验证跟踪误差预测及轮廓误差补偿的有效性。如图 2.8 所示的刀具路径将用在实验中。五个轴上跟踪误差的预测值与实际测量值在图 4.12 中进行了比较。可以看出, 由于实验中对摩擦力有效的前馈补偿, 使用线性传递函数来预测得到的跟踪误差是非常准确的。

对未补偿和预补偿轮廓误差的参考命令分别进行了实验, 并利用(4.71)和(4.73)分别计算得到了刀尖位置和刀轴方向的轮廓误差。其比较结果展示在图 4.13 和

表 4.3: 每个驱动轴及其PID参数

参数	X轴	Y轴	Z轴	A轴	C轴
k_a [A/V]	6.5723	6.2274	6.4841	1.2700	1.2700
k_t [N m/A]	0.4769	0.4769	0.4769	0.3333	0.3333
r_g [mm/rad]/[1]	1.5915	1.5915	1.2732	0.0056	0.0111
J [kg m ²]	7.0028e-3	8.1904e-3	7.6715e-3	8.1068e-5	2.2122e-4
B [kg m ² /s]	0.023569	0.043009	0.032328	0.001100	0.002900
k_p [V/mm]	10.000	12.344	13.880	245.55	335.03
k_i [V/(mm s)]	50.000	61.718	69.400	1227.7	1675.1
k_d [V/(mm/s)]	0.3000	0.3670	0.4147	7.0147	9.5925

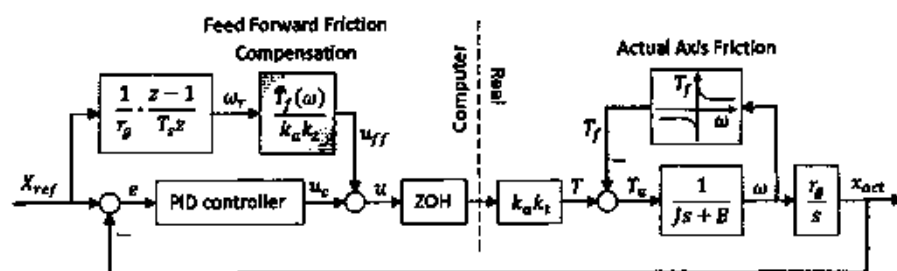


图 4.11: 摩擦力的前馈补偿

表 4.4: 每个轴的摩擦力参数

参数	X轴	Y轴	Z轴	A轴	C轴
T_{stat}^+ [N m]	3.1392	2.3553	1.9401	0.1033	0.1504
Ω_1^+ [rad/s]	7.4600	4.8200	4.2000	7.3600	7.9000
T_{coul}^+ [N m]	2.3489	1.2032	1.7132	0.2172	0.2490
Ω_2^+ [rad/s]	7.4600	4.8200	3.6000	10.0000	10.0000
T_{stat}^- [N m]	-2.0692	-2.4599	-1.4852	-0.1908	-0.1577
Ω_1^- [rad/s]	-7.5700	-6.6700	-10.0000	-7.6200	-7.0000
T_{coul}^- [N m]	-1.5685	-1.4039	-1.1141	-0.2795	-0.2496
Ω_2^- [rad/s]	-6.9200	-6.6700	-7.9000	-10.0000	-10.0000

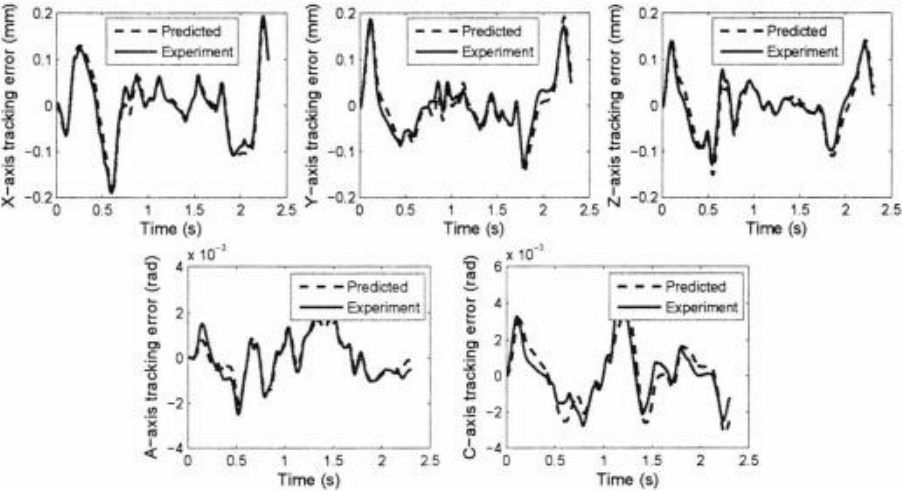


图 4.12: 跟踪误差的预测和实验结果的比较

表 4.5: 未补偿和预补偿的轮廓误差比较结果

	刀尖位置轮廓误差		刀轴方向轮廓误差	
	最大值[μm]	平均值[μm]	最大值[mrad]	平均值[mrad]
未补偿	265.26	85.62	2.30	0.70
预补偿	81.37	26.72	0.99	0.30

表 4.5 中。可以看出使用预补偿的命令进行加工时，刀尖位置和刀轴方向的轮廓误差分别比未补偿的情形减小了70%和60%。

4.4 本章小结

多轴轮廓加工中的跟踪误差可能会导致超出工件容许误差的较大轮廓误差，除非使用较低的进给速度。轮廓误差是具有高曲率的雕刻曲面高速加工中的主要障碍。使用新的控制律来进行轮廓误差补偿的效果是有限的，因为控制器往往在加工曲面上的误差出现之后才起作用。

本章提出了减小加工误差的两种不同的方法。第一种是在跟踪误差及运动学约束下进行插补轨迹生成的方法。对于PID控制的线性系统，每个轴的跟踪误差都由约束加速度和加加速度的线性组合得到限制。实验结果表明，通过合

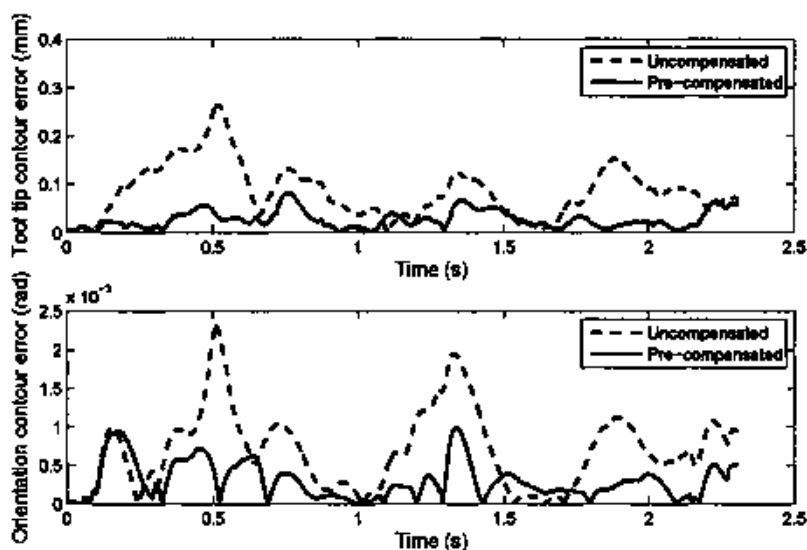


图 4.13: 未补偿和预补偿的轮廓误差比较结果

适当地选取一个上界，跟踪误差能得到显著地减小。本模型也被推广到处理样条路径及一般的线性模型。

第二种方法是在输入插补点之前进行轮廓误差的预补偿。利用驱动器的传递函数及五次样条位置命令，每个轴的跟踪误差得到了解析的估计。速度、加速度及加加速度都保持是连续的以保证足够光滑的轨迹以及准确的跟踪误差预测。利用机床的运动学模型，轮廓误差被估计并分解到每个轴上，然后在输入伺服驱动器之前得到了预补偿。实验结果显示本方法能显著地减小轮廓误差。

此页不缺内容



第五章 结论与展望

5.1 本文总结

本论文针对多轴数控加工,提出了若干有效的时间最优光滑轨迹生成、跟踪误差最小化及轮廓误差补偿的算法。对于三轴和五轴雕刻曲面加工,本文提出了光滑的样条刀具路径生成方法。几种不同的在运动学约束下沿着样条路径加工的进给速度优化算法也被提出。通过考虑控制器和驱动器的动态性能,跟踪误差也可以得到有效的约束。本文最后提出了五轴样条路径加工的轮廓误差解析预测与补偿方法。本论文的主要贡献总结如下:

在五轴样条路径生成方法中,刀位点数据首先被拟合为 C^3 连续的样条。随后,刀尖位置和刀轴方向分别被九次和七次的进给校正样条弧长参数化。这有利于在插补中解析地得到固定插补周期内所需的位移以及每个驱动轴上 C^3 连续的位置命令。而光滑的进给速度将会产生光滑的切屑厚度以及切削负载的变化;加速度及加加速度频率分量的减小也会减少驱动器在加工路径高曲率处的加减速对结构模态的激励。本方法同样能避免对驱动电机产生不连续及高转矩指令,这将对改进控制器的跟踪精度有正面作用 [93]。

本文提出的进给速度优化算法能在运动学约束下生成光滑的进给速度,优化了加工时间以及改进了数控系统的精度和性能。其中,进给速度优化的解析算法在相空间中使用贪心法则,得到了沿样条路径加工的加加速度有界的进给速度解析解 [96]。而采用离散模型的速度优化数值算法在计算上效率更高,因为它只需在路径的离散点处搜索最大可行速度。线性规划及曲线拟合被用来去除加速度不连续点,随后被推广到分轴加加速度约束的情形。很显然,进给速度优化的数值算法比解析算法更加实用 [95]。

在减小加工误差方面,本文提出了两种不同的方法。首先,对于三阶线性系统,每个轴的跟踪误差可以通过约束加速度和加加速度的线性组合得到限制。实验结果显示,在适当地牺牲加工时间的前提下,跟踪误差可以得到有效的减小。本方法能被推广到任意的参数路径及高阶线性系统 [94]。另外,在五轴轮廓误差预补偿方法中,每个轴的跟踪误差首先由控制器及驱动器的传递函数和五次样条表示的位置命令得到解析的估计。随后,轮廓误差被估计及补偿

后被分解到每个轴得到新的补偿后的位置命令,并被输入伺服驱动系统。实验表明,在摩擦力的前馈补偿下,基于线性传递函数的误差估计模型能显著地减小轮廓误差 [97]。

5.2 未来的研究方向

本论文中提出的轨迹生成及误差补偿方法能被直接地应用到不同的五轴机床结构,比如工作台旋转、主轴旋转以及混合型结构。这些算法也可以被推广到处理并联机床等更加复杂的运动学结构。这将使这些算法的优点得到更广泛的应用。

本文的样条路径生成方法也可以很容易地推广得到更高阶的连续度。另外,刀轴方向的球面样条表示可以用其它的方法来改进。四元数能够很好地表示旋转变换。因此,刀轴方向的变化也可以用四元数样条来表示。这个思路同样可以推广到通过局部修改四元数控制点,从而避开刀轴方向的奇点。

在进给速度优化方面,分轴加加速度约束下的全局时间最优解析解仍然是个未解决的问题。这个问题必须采用新的方法才能得到解决,并且希望得到一个更具实用性的算法。进一步地,可以将路径优化和速度优化结合起来考虑以生成插补轨迹,这或许将使问题得到更好的解。

跟踪误差预测模型也可以试图推广到处理非线性系统。即考虑如滑模控制等其它类型的控制器,以及在模型中直接包含如摩擦力和切削力等扰动项的情形。

参考文献

- [1] 叶佩青, 赵慎良. 微小直线段的连续插补控制算法研究. 中国机械工程, 15(15):1354-1356, 2004.
- [2] 于东, 胡韶华, 盖荣丽, 柏占伟. 基于滤波技术的数控系统加减速研究. 中国机械工程, 19(7):804-807, 2008.
- [3] A. Affouard, E. Duc, C. Lartigue, J.M. Langeron, and P. Bourdet. Avoiding 5-axis singularities using tool path deformation. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44(4):415-425, 2004.
- [4] H. Akima. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the ACM*, 17(4):589-602, 1970.
- [5] Y. Altintas. *Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] Y. Altintas and K. Erkorkmaz. Feedrate optimization for spline interpolation in high speed machine tools. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 52(1):297-302, 2003.
- [7] Y. Altintas, K. Erkorkmaz, and W.H. Zhu. Sliding mode controller design for high speed feed drives. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 49(1):265-270, 2000.
- [8] Y. Altintas and MR Khoshdarregi. Contour error control of CNC machine tools with vibration avoidance. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 61(1):335-338, 2012.
- [9] Y. Altintas and B. Sencer. High speed contouring control strategy for five-axis machine tools. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 59(1):417-420, 2010.

- [10] Y. Altintas, A. Verl, C. Brecher, L. Uriarte, and G. Pritschow. Machine tool feed drives. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 60(2):779–796, 2011.
- [11] X. Beudaert, S. Lavernhe, and C. Tournier. Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 57:73–82, 2012.
- [12] X. Beudaert, P.Y. Pechard, and C. Tournier. 5-axis tool path smoothing based on drive constraints. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 51(12):958–965, 2011.
- [13] Q. Bi, Y. Wang, L. Zhu, and H. Ding. An algorithm to generate compact dual NURBS tool path with equal distance for 5-axis NC machining. *Intelligent Robotics and Applications*, pages 553–564, 2010.
- [14] G. Birkhoff and G.C. Rota. *Ordinary differential equations*. John Wiley, New York, 1969.
- [15] J.E. Bobrow, S. Dubowsky, and JS Gibson. Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths. *The International Journal of Robotics Research*, 4(3):3–17, 1985.
- [16] C. Boyadjieff, R. Farouki, and S. Timar. Smoothing of time-optimal feedrates for cartesian CNC machines. *Mathematics of Surfaces XI*, pages 84–101, 2005.
- [17] J.R. Conway, C.A. Ernesto, R.T. Farouki, and M. Zhang. Performance analysis of cross-coupled controllers for CNC machines based upon precise real-time contour error measurement. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 52(1):30–39, 2012.
- [18] J. Dong, PM Ferreira, and JA Stori. Feed-rate optimization with jerk constraints for generating minimum-time trajectories. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47(12):1941–1955, 2007.

- [19] J. Dong and JA Stori. A generalized time-optimal bidirectional scan algorithm for constrained feed-rate optimization. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 128(2):379–390, 2006.
- [20] J. Dong and JA Stori. Optimal feed-rate scheduling for high-speed contouring. *Journal of manufacturing science and engineering*, 129(1):63–76, 2007.
- [21] M.M. Emami and B. Arezoo. A look-ahead command generator with control over trajectory and chord error for NURBS curve with unknown arc length. *Computer-Aided Design*, 42(7):625–632, 2010.
- [22] K. Erkorkmaz. *Optimal trajectory generation and precision tracking control for multi-axis machines*. PhD thesis, The University of British Columbia, January 2004.
- [23] K. Erkorkmaz and Y. Altintas. High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41(9):1323–1345, 2001.
- [24] K. Erkorkmaz and Y. Altintas. High speed CNC system design. Part II: modeling and identification of feed drives. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41(10):1487–1509, 2001.
- [25] K. Erkorkmaz and Y. Altintas. High speed CNC system design. Part III: high speed tracking and contouring control of feed drives. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41(11):1637–1658, 2001.
- [26] K. Erkorkmaz and Y. Altintas. Quintic spline interpolation with minimal feed fluctuation. *Journal of manufacturing science and engineering*, 127(2):339–349, 2005.
- [27] K. Erkorkmaz, C.H. Yeung, and Y. Altintas. Virtual CNC system. Part II. high speed contouring application. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(10):1124–1138, 2006.

- [28] C.A. Ernesto and R.T. Farouki. Solution of inverse dynamics problems for contour error minimization in CNC machines. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49(5):589–604, 2010.
- [29] C.A. Ernesto and R.T. Farouki. High-speed cornering by CNC machines under prescribed bounds on axis accelerations and toolpath contour error. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58(1):327–338, 2012.
- [30] W. Fan, X.S. Gao, W. Yan, and C.M. Yuan. Interpolation of parametric CNC machining path under confined jounce. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 62:719–739, 2012.
- [31] R.T. Farouki and T. Sakkalis. Real rational curves are not ‘unit speed’. *Computer Aided Geometric Design*, 8(2):151–157, 1991.
- [32] J. Feng, Y. Li, Y. Wang, and M. Chen. Design of a real-time adaptive NURBS interpolator with axis acceleration limit. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 48(1):227–241, 2010.
- [33] R.V. Fleisig and A.D. Spence. A constant feed and reduced angular acceleration interpolation algorithm for multi-axis machining. *Computer-Aided Design*, 33(1):1–15, 2001.
- [34] B. Fornberg. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of Computation*, 51(184):699–706, 1988.
- [35] A. Gasparetto and V. Zanutto. A technique for time-jerk optimal planning of robot trajectories. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 24(3):415–426, 2008.
- [36] C. Guarino Lo Bianco and O. Gerelli. Online trajectory scaling for manipulators subject to high-order kinematic and dynamic constraints. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(6):1144–1152, 2011.

- [37] M. Heng and K. Erkorkmaz. Design of a NURBS interpolator with minimal feed fluctuation and continuous feed modulation capability. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 50(3):281–293, 2010.
- [38] W. Heß and J.W. Schmidt. Positive quartic, monotone quintic C2-spline interpolation in one and two dimensions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 55(1):51–67, 1994.
- [39] F. Huo, X.C. Xi, and A.N. Poo. Generalized Taylor series expansion for free-form two-dimensional contour error compensation. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 53(1):91–99, 2012.
- [40] A. Kamalzadeh and K. Erkorkmaz. Accurate tracking controller design for high-speed drives. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(10):1124–1138, 2006.
- [41] Y. Kang, C.W. Chang, Y. Huang, C.L. Hsu, and I.F. Nieh. Modification of a neural network utilizing hybrid filters for the compensation of thermal deformation in machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47(2):376–387, 2007.
- [42] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. ACM, 1984.
- [43] A.W. Khan and W.Y. Chen. Systematic geometric error modeling for workspace volumetric calibration of a 5-axis turbine blade grinding machine. *Chinese Journal of Aeronautics*, 23(5):604–615, 2010.
- [44] A.W. Khan and W.Y. Chen. A methodology for systematic geometric error compensation in five-axis machine tools. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53(5-8):615–628, 2011.
- [45] Y. Koren. Cross-coupled biaxial computer control for manufacturing systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102(4):265–272, 1980.

- [46] Y. Koren and C.C. Lo. Variable-gain cross-coupling controller for contouring. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 40(1):371-374, 1991.
- [47] J.Y. Lai, K.Y. Lin, S.J. Tseng, and W.D. Ueng. On the development of a parametric interpolator with confined chord error, feedrate, acceleration and jerk. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 37(1):104-121, 2008.
- [48] J.M. Langeron, E. Duc, C. Lartigue, and P. Bourdet. A new format for 5-axis tool path computation, using Bspline curves. *Computer-Aided Design*, 36(12):1219-1229, 2004.
- [49] A.C. Lee, M.T. Lin, Y.R. Pan, and W.Y. Lin. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools. *Computer-Aided Design*, 43(6):612-628, 2011.
- [50] E.T.Y. Lee. Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer-Aided Design*, 21(6):363-370, 1989.
- [51] W.T. Lei, M.P. Sung, L.Y. Lin, and J.J. Huang. Fast real-time NURBS path interpolation for CNC machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47(10):1530-1541, 2007.
- [52] H. Leng, Y. Wu, and X. Pan. Research on flexible acceleration and deceleration method of NC system. In *International Technology and Innovation Conference*, pages 1953-1956. IET, 2006.
- [53] S.R. Li, Q. Zhang, X.S. Gao, and H. Li. Minimum time trajectory planning for five-axis machining with general kinematic constraints. *MM-preprints*, 31:1-20, 2012.
- [54] Z.Q. Li and W.Y. Chen. The analysis of correlative error in principal axis method for five-axis machining of sculptured surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 45(9):1031-1036, 2005.

- [55] C.S. Lin, P.R. Chang, and J. Luh. Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(12):1066–1074, 1983.
- [56] Y. Liu, H. Li, and Y. Wang. Realization of a 5-axis NURBS interpolation with controlled angular velocity. *Chinese Journal of Aeronautics*, 25(1):124–130, 2012.
- [57] C.C. Lo and C.Y. Hsiao. A method of tool path compensation for repeated machining process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 38(3):205–213, 1998.
- [58] S. Macfarlane and E.A. Croft. Jerk-bounded manipulator trajectory planning: Design for real-time applications. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(1):42–52, 2003.
- [59] P.H. Meckl and P.B. Arestides. Optimized S-curve motion profiles for minimum residual vibration. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 5, pages 2627–2631. IEEE, 1998.
- [60] S.H. Nam and M.Y. Yang. A study on a generalized parametric interpolator with real-time jerk-limited acceleration. *Computer-Aided Design*, 36(1):27–36, 2004.
- [61] C.P. Neuman and V.D. Tourassis. Discrete dynamic robot models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-15(2):193–204, 1985.
- [62] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical optimization*. Springer Verlag, 1999.
- [63] C. Okwudire and Y. Altintas. Minimum tracking error control of flexible ball screw drives using a discrete-time sliding mode controller. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 131(5/051006):1–12, 2009.
- [64] H. Park. Choosing nodes and knots in closed B-spline curve interpolation to point data. *Computer-Aided Design*, 33(13):967–974, 2001.

- [65] A. Piazzoli and A. Visioli. Global minimum-time trajectory planning of mechanical manipulators using interval analysis. *International journal of Control*, 71(4):631–652, 1998.
- [66] L.A. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Springer Verlag, 1997.
- [67] D. Renton and MA Elbestawi. High speed servo control of multi-axis machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40(4):539–559, 2000.
- [68] B. Sencer. Five-axis trajectory generation methods. Master's thesis, The University of British Columbia, September 2005.
- [69] B. Sencer and Y. Altintas. Modeling and control of contouring errors for five-axis machine tools. Part I: Modeling. *Journal of manufacturing science and engineering*, 131(3-031006):1–8, 2009.
- [70] B. Sencer, Y. Altintas, and E. Croft. Feed optimization for five-axis CNC machine tools with drive constraints. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 48(7):733–745, 2008.
- [71] Z. Shiller and H.H. Lu. Computation of path constrained time optimal motions with dynamic singularities. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 114(1):34–40, 1992.
- [72] K. Shin and N. McKay. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(6):531–541, 1985.
- [73] K. Shin and N. McKay. A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(6):491–500, 1986.
- [74] K. Shirase and S. Fujii. Machine tool automation. *Springer Handbook of Automation*, pages 837–857, 2009.

- [75] S.H. Suh, S.K. Kang, D.H. Chung, and I. Stroud. *Theory and design of CNC systems*. Springer, 2008.
- [76] Y.W. Sun, J. Wang, and D.M. Guo. Guide curve based interpolation scheme of parametric curves for precision CNC machining. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(3):235–242, 2006.
- [77] H.H. Tan and R.B. Potts. Minimum time trajectory planner for the discrete dynamic robot model with dynamic constraints. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(2):174–185, 1988.
- [78] S.D. Timar, R.T. Farouki, T.S. Smith, and C.L. Boyadjieff. Algorithms for time-optimal control of CNC machines along curved tool paths. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 21(1):37–53, 2005.
- [79] M. Tomizuka. Zero phase error tracking algorithm for digital control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109(1):65–68, 1987.
- [80] D. Verscheure, M. Diehl, J. De Schutter, and J. Swevers. On-line time-optimal path tracking for robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 599–605. IEEE, 2009.
- [81] F.C. Wang, P.K. Wright, B.A. Barsky, and D.C.H. Yang. Approximately arc-length parametrized C3 quintic interpolatory splines. *Journal of mechanical design*, 121(3):430–439, 1999.
- [82] F.C. Wang and D.C.H. Yang. Nearly arc-length parameterized quintic-spline interpolation for precision machining. *Computer-Aided Design*, 25(5):281–288, 1993.
- [83] S.M. Wang, Y.L. Liu, and Y. Kang. An efficient error compensation system for CNC multi-axis machines. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(11):1235–1245, 2002.
- [84] Y. Wang, X. Ma, L. Chen, and Z. Han. Realization methodology of a 5-axis spline interpolator in an open CNC system. *Chinese Journal of Aeronautics*, 20(4):362–369, 2007.

- [85] M. Weck and G. Ye. Sharp corner tracking using the IKF control strategy. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 39(1):437–441, 1990.
- [86] J. Wu, H. Zhou, X. Tang, and J. Chen. A NURBS interpolation algorithm with continuous feedrate. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 59(5):623–632, 2012.
- [87] D.C.H. Yang and T. Kong. Parametric interpolator versus linear interpolator for precision CNC machining. *Computer-Aided Design*, 26(3):225–234, 1994.
- [88] W.Y. Yang, W. Cao, T.S. Chung, and J. Morris. *Applied numerical methods using MATLAB*. Wiley-Interscience, 2005.
- [89] H.T. Yau, M.T. Lin, and M.S. Tsai. Real-time NURBS interpolation using FPGA for high speed motion control. *Computer-Aided Design*, 38(10):1123–1133, 2006.
- [90] S.S. Yeh and P.L. Hsu. Adaptive-feedrate interpolation for parametric curves with a confined chord error. *Computer-Aided Design*, 34(3):229–237, 2002.
- [91] C.H. Yeung, Y. Altintas, and K. Erkorkmaz. Virtual CNC system. Part I. system architecture. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(10):1107–1123, 2006.
- [92] C.M. Yuan, K. Zhang, W. Fan, and X.S. Gao. Time-optimal interpolation for CNC machining along curved tool paths with confined chord error. *MM Research Preprints*, 30:57–89, 2011.
- [93] A. Yuen, K. Zhang, and Y. Altintas. Smooth trajectory generation for five-axis machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 71:11–19, 2013.
- [94] K. Zhang, J.X. Guo, and X.S. Gao. Cubic spline trajectory generation with axis jerk and tracking error constraints. *Accepted by International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2013.

- [95] K. Zhang, C.M. Yuan, and X.S. Gao. Efficient algorithm for time-optimal feedrate planning and smoothing with confined chord error and acceleration. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 66(9):1685–1697, 2013.
- [96] K. Zhang, C.M. Yuan, X.S. Gao, and H. Li. A greedy algorithm for feedrate planning of CNC machines along curved tool paths with confined jerk. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 28(4):472–483, 2012.
- [97] K. Zhang, A. Yuen, and Y. Altintas. Pre-compensation of contour errors in five-axis CNC machine tools. *Submitted to International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2013.
- [98] L.X. Zhang, R.Y. Sun, X.S. Gao, and H.B. Li. High speed interpolation for micro-line trajectory and adaptive real-time look-ahead scheme in CNC machining. *Science China Technological Sciences*, 54(6):1481–1495, 2011.
- [99] M. Zhang, W. Yan, C.M. Yuan, D.K. Wang, and X.S. Gao. Curve fitting and optimal interpolation on CNC machines based on quadratic B-splines. *Science China Information Sciences*, 54(7):1407–1418, 2011.

此页不缺内容



发表文章目录

- [1] Ke Zhang, Chun-Ming Yuan, Xiao-Shan Gao, Hongbo Li. A greedy algorithm for feedrate planning of CNC machines along curved tool paths with confined jerk. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 28(4):472-483, 2012. (SCI)
- [2] Ke Zhang, Chun-Ming Yuan, Xiao-Shan Gao. Efficient algorithm for time-optimal feedrate planning and smoothing with confined chord error and acceleration. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 66(9):1685-1697, 2013. (SCI)
- [3] Alexander Yuen, Ke Zhang, Yusuf Altintas. Smooth trajectory generation for five-axis machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 71:11-19, 2013. (SCI)
- [4] Ke Zhang, Jian-Xin Guo, Xiao-Shan Gao. Cubic spline trajectory generation with axis jerk and tracking error constraints. Accepted by *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2013. (SCI)
- [5] Wei Fan, Xiao-Shan Gao, Chen-Han Lee, Ke Zhang, Qiang Zhang. Time-optimal interpolation for five-axis CNC machining along parametric tool path based on linear programming. Accepted by *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2013. (SCI)
- [6] 郭建新, 张可, 高小山. CNC固有误差估计新方法. *系统科学与数学*, 32(8):1033-1044, 2012.

已完成的文章

- [7] Ke Zhang, Alexander Yuen, Yusuf Altintas. Pre-compensation of contour errors in five-axis CNC machine tools. Submitted to *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2013.

- [8] Jian-Xin Guo, Ke Zhang, Qiang Zhang, Xiao-Shan Gao. Time optimal feedrate generation under dynamic constraints of high-order CNC servo system. Submitted to *Computer-Aided Design*, 2013.
- [9] Chun-Ming Yuan, Ke Zhang, Wei Fan, Xiao-Shan Gao. Time-optimal interpolation for CNC machining along curved tool pathes with confined chord error. *MM-preprints*, 30:57-89, 2011.



简 历

基本情况

张可, 男, 1986年生于湖北武汉。

教育状况

2004年9月至2008年7月, 中国科学技术大学数学系, 本科, 专业: 信息与计算科学。

2008年9月至今, 中国科学院数学与系统科学研究院, 硕博连读研究生, 专业: 应用数学。

2012年4月至2013年3月, 加拿大英属哥伦比亚大学, 制造自动化实验室(Manufacturing Automation Laboratory, The University of British Columbia, Canada), 访问学生。

研究兴趣

数控加工中的高效算法

联系方式

E-mail: kezhang@mmrc.iss.ac.cn

致 谢

在中科院数学与系统科学研究院五年的学习生活中,首先要特别感谢我的导师高小山研究员的指导与支持。他严谨的学术态度以及对问题敏锐的洞察力都对本文的完成起着至关重要的作用。

此外,衷心感谢数学机械化实验室的李洪波研究员、袁春明副研究员等老师的指导和帮助,以及实验室各位同学的关心与交流。在加拿大英属哥伦比亚大学(University of British Columbia)一年的访问学习中,非常感谢Yusuf Altintas教授以及Alexander Yuen等研究生在数控加工领域专业的意见。清华大学精密仪器与机械学系和中科院沈阳计算所对本文部分实验的完成有很大的帮助,在此一并表示感谢。

最后,谨将本文献给我最亲爱的家人,感谢他们多年以来的支持与陪伴!