

密级: \_\_\_\_\_



**中国科学院大学**  
University of Chinese Academy of Sciences

## 博士学位论文

CNC 加工中的轨迹优化方法

作者姓名: 郭建新

指导教师: 高小山 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: 理学博士

学科专业: 应用数学

研究所: 中国科学院数学与系统科学研究院

2014 年 5 月

  
**Y2616004**

**Optimal Trajectory Generation in CNC Machining**

**By**

**Jian-Xin Guo**

**A Dissertation/Thesis Submitted to**

**The University of Chinese Academy of Sciences**

**In partial fulfillment of the requirement**

**For the degree of**

**Doctor of Science**

**Institute of Systems Science**

**Academy of Mathematics and Systems Science**

**Chinese Academy of Sciences**

**May, 2014**



## 摘 要

高速、高精加工是数控系统的前沿研究课题, 轨迹优化是实现高速、高精数控加工的关键问题之一。轨迹优化包括速度优化和位置优化。所谓速度优化是对加工曲线上的每一点的速度进行优化, 使得机床在给定的性能约束下加工时间最短。位置优化主要用于误差控制, 通过重新规划路径提高加工速度与质量。轨迹优化对于提高整个数控加工的速度、提高加工精度至关重要。本文研究了数控加工中轨迹优化中的相关问题, 包括速度优化, 误差控制等, 提出了求解相关问题高效算法并在三轴机床上进行了实验和仿真, 并且收到了很好的效果。论文主要分为三个部分。

1. 带动力学约束的最优速度规划。对于高阶伺服系统, 本文建立了动力学和运动学约束之间的关系, 将含有高阶ODE的跟踪误差约束下的速度规划问题转化成纯运动学约束的时间最优控制问题。进一步证明在一类弱条件下, 原来的非凸规划问题可以转化成凸优化和线性优化问题。从而实现了原始模型的简化情形下的高效求解。本文将该方法在实际数控加工系统上进行实验, 结果证实了本算法的效果。

2. 误差控制的reshape方法和自抗扰控制方法。Reshape方法是一种开环方法, 该方法通过修改插补指令来消除跟踪误差, 保证实际输出就是理想输出。对于系统的不确定部分, 我们采用机器学习的方法进行估计, 这样问题最终归结为反求一个低阶ODE, 此外本文还讨论了该方法的鲁棒性特点。另外本文还运用了一种闭环控制策略ADRC方法。根据已有的工作, 在使用ADRC时候, 在已有位置信号时候运用RESO的控制结构较之ESO会更为有效。最后的仿真也验证了这一个结果, 但此时采用RESO的代价是在控制器切换处产生震动。

3. 速度优化和刀具可靠性问题研究。与传统的时间最优控制问题不同的是, 这里考虑的运动学约束的边界是可变的。由于随着运动学参数的增大, 刀具的可靠性会大大降低, 因此对于边界采用模糊数来表示更符合客观实际情况, 由此得到一个多目标优化问题。本文通过将模糊“硬化”的方法, 将其转化成最大-最小问题进行并进行有效求解。

**关键词:** 数控机床, 速度优化, 误差控制, 刀具可靠性

## Abstract

High speed, high precision are at the forefront of research subjects in CNC machining system, in which trajectory optimization plays a vital role. Conventionally, trajectory optimization includes feedrate optimization and location optimization. The speed optimization aims to optimize every points along the given curve to ensure the total cutting task to be finished in minimal time under the given kinematic constraints. The location optimization aims to control the tracking error. Through modifying the inputs signal, it can improve the cutting speed and quality as well. Hence, the trajectory optimization is vital to improve the whole productivity and accuracy in CNC system. This thesis probes into the relevant issues in trajectory optimization such as feedrate optimization, tracking error control and so forth. Moreover, we proposed corresponding efficient solutions and substantiated its validness through experiment or simulation. The thesis is mainly divided into three parts.

1. Feedrate generation under dynamic constraints. For the high-servo system, we establish the relationship between the kinematic constraint and dynamic constraint, converting the model with ODE constraint into the time optimal control model with pure kinematic constraints. In the following of that, we find a strategy to further simplify the complicated un-convex problem into convex or linear constraints under a weak hypothesis. Hence, we can fulfill high efficiency in solving the original model in its simplification version. We apply our method to the CNC machine, and the experiment results reveal the validness of our method.

2. Tracking error reducing strategy using reshape method and ADRC method. Reshape method is actually an open-loop method, which aims to reduce the tracking error through modifying the interpolation inputs in order to ensure that the output of the system is the desired curve. For the uncertainty part of the system, we use the machine learning method to make an estimation, and thus the final problem is drawn to solve a lower order ODE. We discuss the robustness of the method when the physical parameters is beyond accurate estimation. Besides,

we also apply a kind of closed-loop strategy, ADRC, to control the CNC system. Given the location signal, it is better to use RESO structure compared with ESO according to our established theory. The final simulation substantiates the validness of the corresponding theoretical assertion.

3. Feedrate planning with considering the reliability of the tool. Contrary to the conventional time-optimal model, the bounds of the kinematic constraints are unfixed in this new model. Obviously, as the increasing of the bound of the kinematic constraints, the reliability of the system is decreasing largely. Hence, it is reasonable to show the bound using fuzzy number. The new model is actually a multi-optimization problem. We convert it into a crisp model firstly, and then convert that into a single-optimization model using the max-min operator in order to obtain a tractable solution.

**Keywords:** CNC machine, feedrate optimization, tracking error control, tool reliability.

# 目 录

摘要 .....	i
Abstract .....	iii
目录 .....	v
第一章 引言 .....	1
1.1 数控加工技术的发展 .....	1
1.2 速度优化 .....	1
1.3 跟踪误差控制 .....	3
1.4 刀具可靠性控制 .....	6
1.5 本论文概览 .....	6
第二章 带动力学约束的进给速度优化 .....	9
2.1 本章简介 .....	9
2.2 动力学和运动学的关系 .....	10
2.2.1 问题的数学模型 .....	10
2.2.2 跟踪误差约束的简化 .....	11
2.2.3 PID控制器下的3阶模型 .....	15
2.3 带跟踪误差约束的时间最优控制问题的凸优化算法 .....	16
2.3.1 问题的描述 .....	16
2.3.2 最优控制问题简化 .....	18
2.3.3 问题的凸优化算法 .....	20
2.3.4 实验结果 .....	22
2.4 低阶伺服控制下的动力学和运动学的关系 .....	28
2.4.1 问题的数学模型 .....	28

2.4.2	跟踪误差约束的简化	29
2.5	跟踪误差约束时间最优轨迹规划问题的线性规划算法	30
2.5.1	离散的线性优化算法	30
2.5.2	模型推广	33
2.5.3	仿真结果	33
2.6	本章小结	36
<b>第三章</b>	<b>跟踪误差与轮廓误差控制</b>	<b>39</b>
3.1	本章简介	39
3.2	reshape方法	39
3.2.1	带摩擦力的CNC伺服系统	39
3.2.2	机器学习方法简介	40
3.2.3	reshape方法	43
3.2.4	仿真结果	49
3.3	自抗扰控制方法	57
3.3.1	PMLM模型	57
3.3.2	基于ESO和RESO的ADRC模型	58
3.3.3	实验仿真	59
3.4	本章小结	62
<b>第四章</b>	<b>数控加工速度优化中的刀具可靠性问题初探</b>	<b>65</b>
4.1	本章简介	65
4.2	基于模糊集理论的速度优化问题	65
4.2.1	模糊集理论简介	65
4.2.2	基于时间最优的速度优化问题	66
4.2.3	模糊约束下的时间最优速度优化问题	67
4.2.4	模糊优化问题转化成多目标问题	68
4.2.5	多目标问题转化成单目标问题	69
4.3	单目标问题的基于梯度的凸优化算法	69

4.3.1 运动边界隶属度函数的选择 .....	69
4.3.2 单目标问题的参数化 .....	71
4.3.3 单目标问题的数值求解 .....	71
4.4 单目标问题的性质 .....	72
4.5 实验仿真 .....	76
4.6 本章小结 .....	77
<b>第五章 结论与展望 .....</b>	<b>81</b>
5.1 参与工作简介 .....	81
5.1.1 CNC中的其它速度优化方法 .....	81
5.1.2 机械手中的速度优化方法 .....	82
5.2 本文总结 .....	86
5.3 未来的研究方向 .....	87
<b>参考文献 .....</b>	<b>89</b>
<b>发表文章目录 .....</b>	<b>101</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>103</b>



## 第一章 引言

### 1.1 数控加工技术的发展

数控机床是数字控制机床 (Computer numerical control machine tools) 的简称, 是一种装有程序控制系统的自动化机床。该控制系统能够逻辑地处理具有控制编码或其他符号指令规定的程序, 并将其译码从而使机床动作。数控机床的快速发展是整个世界经济、科技发展的重要体现, 加工速度和精度的优越性使其成为真正的机械之母。世界上主要工业发达国家都十分重视数控加工技术的研究和发展。

自上世纪50年代起数控机床大致经历了五代的发展历程。数控机床的设想产生于军工领域, 源于美国帕森斯公司接受美国空军委托研制飞机螺旋桨叶片轮廓样板的加工设备的历史。随后在美国麻省理工学院的协助下, 第一台大型铣床于1952年诞生。随着硬件水平的提高, 第二代和第三代数控机床相继问世, 相对于第一代数控机床而言它们的特点是体积小, 功率耗损少。直接数控系统(简称DNC)和计算机数控系统(简称CNC)的出现, 标志着以小型化计算机为主要控制终端的数控系统的问世。直至上世纪的后二十年, 随着计算机技术的飞速发展, 出现了以自动编程的数控装置为代表的开放数控装置系统, 数控机床的自动化程度有了更进一步的提高。

现代数控体系的特点是高速高精。对高速的要求是主轴转速、进给速度等达到一定标准; 高精度化体现在CNC系统的加工精度, 其中不乏采取前馈和反馈控制等方法或者是误差补偿技术等等。此外对数控体系的开放性以及可靠性也提出了一定要求 (图 1.1)。

本文考虑了一类开放数控系统中的速度优化, 误差控制和补偿以及系统可靠性等问题, 将在接下来的第1.2, 1.3和1.4小节对相关技术环节做一个综述。第1.5小节概述了本论文在以上问题中的相关工作。

### 1.2 速度优化

从上世纪80年代末以来, 给定路径下时间最优轨迹优化问题吸引了一大批的研究者, 速度优化可以大大提高现代数控的加工效率。通常情况下考虑到机

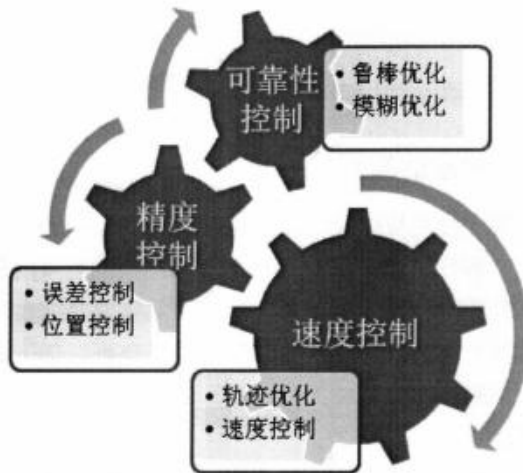


图 1.1: 现代数控的基本要求

床本身的机械负荷以及加工能力，一些约束条件需要被考虑，比如加速度，用来控制惯性和机械振动，jerk（加加速度，也就是加速度的导数）以及jounce（加加速度jerk的导数）用来保证产生光滑的速度曲线。这样整个问题从数学角度来看是一个最优化问题：

$$\begin{aligned} \min T \\ \text{s.t. } |v_f| \leq V_{f\max}, |v_\tau| \leq V_{\max}, |a_\tau| \leq A_{\max}, |j_\tau| \leq J_{\max}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中， $v_f$ 是切向速度， $v_\tau, a_\tau, j_\tau$ 分别是分轴速度，加速度和jerk（加加速度）， $\tau$ 代表分轴。显然如何求解复杂约束下的这个优化问题是非常重要的，许多学者从多角度去探索。此类问题基本可以分成三类：像平面法[8, 22, 69, 86, 93]，数值优化法[7, 18, 25, 45, 67]，其它方法例如基于关键点[21, 73, 85]的方法等。

相平面分析方法重在得到最优解的解析表达式，通过使用速度限制曲线来找到符合约束条件的解析解。Bobrow, Shin, Farouki, Zhang, Yuan等人均考虑了在加速度约束下，通过VLC(velocity limiting curve)曲线，借助bang-bang条件求得解析解的方法。利用同样的思路，Zhang[90]等人引入了VLS(velocity limiting surface)的概念，并且给出了jerk约束下的贪心算法。此类解析求解方法的意义在于可以给出最优解的闭形式，进而从理论层面深入考察解曲线的其

他性质，但是缺点在于，如果路径曲线过于复杂，求解析解是十分困难甚至不可能的。

数值优化方法是可以处理一大类复杂路径的方法，该方法通常是将连续问题离散化，然后通过一系列约束的转换将原问题划归成一个非线性优化问题。这样，随着离散点数目的增多，在离散空间上得到的解就可以很好的逼近原问题的连续解。求解出离散解之后，再用样条插值的方法拟合成连续曲线进而为插补做准备。这样来看，问题的本质困难在于求解大规模的复杂约束下的非线性优化问题。例如B. Sencer[67]研究了5轴的光滑速度优化问题，考虑的约束是速度，加速度和加加速度，他们通过对约束施行加强的策略，一定程度上改变了约束的非线性特征使问题得到了简化；Bendaert[7]等人给出了一种新颖的求解方法，他们的模型同样是建立在速度加速度和加加速度之上的；Fan等人[20]等人则是考虑了一种线性优化算法，该算法通过放缩jerk约束来近似非线性约束，将问题近似成线性优化；Li等[45]人则是将5轴CNC轨迹优化问题看做最优控制问题来处理，再对模型进行离散化之后采用了SQP的优化方法；Erkorkmaz[18]等人则是通过引入机械手路径规划中的方法，考虑了对离散点进行时间样条连接的速度轨迹优化算法；Gasparetto[25]等人通过改变目标函数，他们将目标函数设置成时间和jerk的线性组合在速度和加速度的约束下进行优化。

其他方法诸如关键点法主要通过约束确认最大速度点，进而对不同的关键点直接用不同速度样条规划，比如S-shape[85]，三角样条[43]等；其它算法还有诸如动态规划算法[70]，线性滤子算法等[26]。

### 1.3 跟踪误差控制

在进行速度优化阶段之后，要用相应的算法对生成的参数域上的速度曲线进行重采样，得到便于控制器识别的点列，在伺服控制器的帮助下实现理想的输出，见图1.2。但是，当使用有限带宽的伺服控制器时，伺服延迟成为引起跟踪误差的主要原因，并会随着高速加工时进给速度的提高而更加严重。伺服系统的跟踪性能通常用两个指标来衡量：跟踪误差和轮廓误差。跟踪误差是指控制对象的理想位置与实际位置之差，而轮廓误差是指实际位置和它离加工曲线上最近点之间的距离，如图1.3。

探究两者的关系对CNC的控制精度具有重要意义。首先，在某种意义上讲，如果可以控制跟踪误差那么也就可以控制轮廓误差。在图1.3中，



图 1.2: CNC控制过程

$P$ 是理想插补点,  $P_1$ 是实际输出点,  $|P_1B|$ 是轮廓误差。很容易发现 $|PP_1| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$ , 其中 $e_x$ ,  $e_y$ 和 $e_z$ 是分轴跟踪误差(以3轴为例子)。既然 $P$ 和 $B$ 非常近, 可以近似认为它们在一段圆弧上。这种情况下,  $|P_1B| \leq |PP_1| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$ 。因此, 给定轮廓误差一个界 $\delta$ , 如果让 $e_x = e_y = e_z = \delta/\sqrt{3}$ , 那么限制跟踪误差也就可以限制轮廓误差; 其次, 尽管轮廓误差是影响加工形状的主因, 但是也不能忽视跟踪误差的影响。因为跟踪误差的积累也可以使刀具在路径衔接处出现问题; 最后, 实际问题中控制跟踪误差往往要比控制轮廓误差简单可行, 因此直接控制跟踪误差的方法往往被采纳。

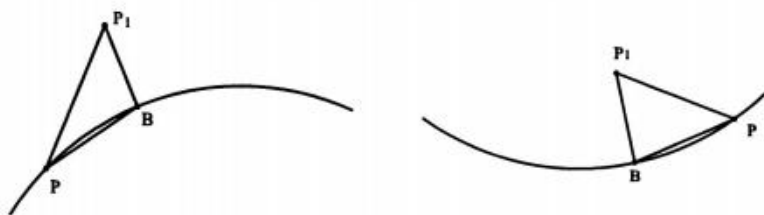


图 1.3: 轮廓误差和跟踪误差

减少轮廓误差的方法大致可以分为三类: 一类是直接提高单轴运动精度, 另一类是对多轴运动进行协调控制, 最后是对误差进行补偿。

提高单轴运动精度的方法本质上是设计快速精确的控制算法来减少跟踪误差。目前工业中大部分伺服控制器采用的是PID控制, 因为PID控制器具有设计简单, 稳定性强, 鲁棒性高等优点, 但是在实际应用中由于它往往要调和这些性能之间的矛盾, 因此在采用一些折衷方法的时候, 会导致系统的性能不是很理想。针对PID的改进工作也是浩如烟海, Osornio-Rios[53]等人设计了一种新的嵌入式编程平台FPGA来辅助PID控制; Huang[33]等人设计了fuzzy的PID位置控制算法, 其考虑了PID可以消除稳态误差的优点, 同时由于fuzzy逻辑下的算法不需要精确模型, 因此对时变和非线性有更强的适应性; Tan等人[72]提出一种学习非线性过程的PID控制器, 这种算法同样不需要精确知道非线性控制模型; Han[30]则是在PID的基础上建立了自抗扰控制理论(active disturbance rejection control), 该控制方法发扬了PID的一些稳定、参数少、鲁棒性强的传统优点, 而且还可以针对信号的模糊, 系统的不确定等问题采取高精度的控制效果。另外, 还有一些高级的控制方法诸如迭代学习控制[10], 预测控制[24], 以及智能控制[29]等等。

协调运动控制方法是在耦合控制的思想建立起来的(cross couple control)。该方法在Koren[39]于1980年提出之后受到广泛关注。它的核心思想是通过实时的轮廓误差信息产生控制算法, 然后再反馈给每一个轴。这类算法有一个核心问题是如何实时的高精度计算轮廓误差; Yeh[83]等人在这项工作中提出了一个轮廓误差的快速估计方法, 随后他们又在[84]中提出了一些快速估计的方法; Chuang[13]等人针对线性扰动系统的情形, 提出了自适应进给速度的耦合控制方法; Barton等人[5]则是将耦合控制和迭代学习控制的方法结合起来, 他们将新的方法在一个机器人平台上进行试验, 并且得到了很好的效果。

以上两类方法的共同之处都是在误差存在的情况下进行矫正。误差补偿的方法却恰恰相反, 该方法通常事先预测出系统产生的误差(离线或者在线), 然后通过修改控制指令的方法(离线或者在线)反向叠加来减少误差。更多情况下, 该思想常用来减少CNC中环境等因素导致的误差, 比如热误差, 几何误差等[15, 77, 81, 87]。但是近些年来, 也有一些学者将这种思想应用在跟踪误差和轮廓误差的补偿方面。Huo[34]等人采用NARX模型对系统进行辨识, 然后模拟系统进行误差预测, 然后在线进行实时补偿; Altintas等[1]提出了五轴加工轮廓误差预测和补偿的SMC方法; Zhang等[92]提出了基于控制器的一个预测方法, 该方法求得了输入是多项式样条下的一类低阶微分方程的特解, 从而得到了跟踪误差的一个估计再对其进行补偿。



## 1.4 刀具可靠性控制

国内外对数控机床的研发,主要追求高速高精和多轴联动复合加工等,随着密集型技术的引入,其导致故障隐患也大大增加。因此,在这种情况下先进性便失去了意义(见图1.4)。所谓的可靠性定义为产品在规定的条件下和规定的时间内完成规定功能的概率[63]。相关的工作涉及到优化问题[41],参数分布的估计[57],系统维护和模型预测等方面[54]。刀具可靠性是其中重要的问题,所谓“刀具可靠性”是指刀具在规定的切削条件下,在规定的切削时间内完成规定的切削工作的能力[48]。由于在切削过程中,切削刀具会受到很大程度上的磨损,因此由于过度磨损或者崩刃导致的停工事件屡见不鲜[31, 44]。于是对于刀具寿命的估计以及磨损的模型的构建具有十分重要的意义。U.Natarajan等人采用了神经网络和PSO优化算法得到了刀具寿命关于速度,进给量和切削深度的估计模型[52];在CNC加工过程中,针对刀具的状态缺乏有效的检测导致的加工误差增大的情况,Huang等人用统计的方法建立了检测刀具破损的自动算法[32];Purushothaman等人则是针对采集的数据首先进行了一些处理,如卡尔曼滤波等方法,将数据集投射到低维的空间上进行神经网络学习来估计刀具寿命[58];Kwon等人则是提出了最优的控制策略,他们通过优化的方法调整了加工的参数,拓展了刀具在某些约束下的使用寿命等[42];Kayan等人则是将可变时间下的刀具寿命模型应用于CNC的调度问题,并且建立了新的调度模型[37];Zdzislaw等人则是讨论了在可变切削速度下刀具的磨损模型[38];需要强调的是,这些工作中,Zdzislaw等人的工作对于可变速度下的刀具可靠性问题的模型刻画方面提供了重要的依据。论文中在探讨刀具可靠性和速度优化关系的问题中,对于可变运动学边界的模糊数描述便是借鉴这一想法。

## 1.5 本论文概览

本论文针对速度优化、加工误差控制以及刀具可靠性控制这三个数控加工中的关键问题提出了一些新的问题和有效算法。

第二章基于以往速度优化和控制方法的工作,提出了一个新的带动力学约束的时间最优轨迹优化模型。新的模型可以在开环速度优化阶段同时控制跟踪误差。针对这种新的带ODE解的约束的大规模优化问题给出了一个近似的最优算法和相应的理论基础。具体而言就是建立了动力学和运动学约束之间

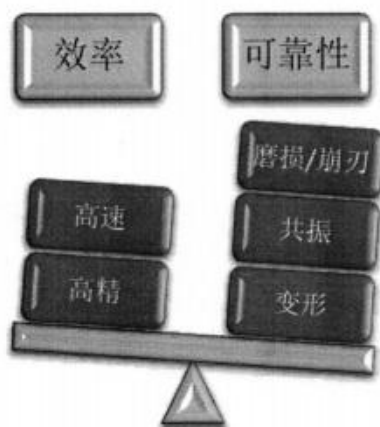


图 1.4: 效率和可靠性

的关系，并在此基础上针对三阶PID系统得到了凸优化算法。这对于数控系统的全过程自动化输入具有重要意义，非常方便end-user的使用。特别的针对低阶PD系统的情形，在该理论框架下的子问题可以划归成一个线性优化问题。

第三章考虑了两类控制方法，一种是开环方法，本文基于机械臂控制中的reshape思想，借助机器学习方法对伺服系统黑箱部分进行学习，求出待修改的控制指令，同时也证明了该方法具有一定的鲁棒性；针对闭环控制方面，本文将自抗扰控制技术应用于一类直线伺服电机控制下的CNC系统，并且得到了一些理论结果，此外相应的仿真也达到了理想的效果。

第四章初步探讨了CNC加工中含有刀具可靠性的速度优化问题。本文提出一个带有不确定风险度量的时间最优控制模型，该模型将运动学约束上界视为可变的。根据Zdzislaw等人的工作[38]，这里类似的对速度和加速度的隶属度函数进行刻画。从某种意义上讲，此时的运动学上界和加工中刀具所承受的风险是正相关的。因此，这种情况下，end-user需要对加工时间和加工风险（刀具可靠性）做权衡，找到它们的均衡点，显然这是一个多目标优化问题。此外，本文针对这个问题得到了一些有趣的理论结果。

最后，第五章介绍了其它一些合作工作并且对本文进行了总结，最后列出了未来可行的研究方向。

此页不缺内容





## 第二章 带动力学约束的进给速度优化

### 2.1 本章简介

本章考虑带有动力学约束的时间最优轨迹优化问题，与以往的只带有运动学约束情形（速度，加速度，jerk）不同的是，这里考虑的出发点是在插补阶段保证加工过程的动态特征（控制跟踪误差）。本文选择工业中常用的PID伺服控制器，此时的伺服系统的动态特征可以被一个3阶ODE描述。这样整个问题就是一个变分问题，约束除了通常的非线性约束外还含有ODE解的约束。显然，直接求解该问题将非常困难。

首先，本文建立了伺服控制下的动力学约束和运动学约束之间的联系，见2.2，2.4。从理论上证明了对于高阶系统，动态跟踪误差实际上可以被运动学的线性组合来界定，进而给出了求解原问题的一种近似方法，此时的非线性优化问题的解可以看成原问题的一个近似最优解；

其次，在2.3小节中介绍了PID伺服控制下的凸优化算法。本文首先计算新模型在低阶运动学约束下的特解，这个特解在对非线性约束线性化的过程中具有重要作用。本文根据低阶情形下已有的速度“点点最大”的结果对jerk项的非线性约束进行放缩，使之变成线性约束；根据同样的思路，又给出了一类很弱的参数关系的条件下，动力学约束（jerk和加速度的线性组合）线性化的方法和理论基础。此时，再考虑到目标函数是凸的特点，整个问题是一个线性约束下的凸优化问题。此凸优化问题的解可以看成原问题的一个近似最优解。

另外，在2.5小节中，本文考虑低阶PD伺服控制器的情形，此时运动学约束仅含速度和加速度。类似于高阶情形，本文将2阶ODE解的约束转化成了速度和加速度的线性组合约束，最后通过柯西不等式将非线性约束转化成了线性约束。此时得到了一个含有线性约束的凸优化问题，它的解同样可以看做原问题的一个近似最优解。特别的，借助类似[17]中的理论方法本文说明了时间指标可以替换成累积速度和，由此就得到了线性优化算法。

本文将3阶模型情形下的算法在商用数控系统上进行了实验，结果符合理论预期的效果。本算法也能容易地推广到五轴加工的情形。第2.6节对本章进行了总结。

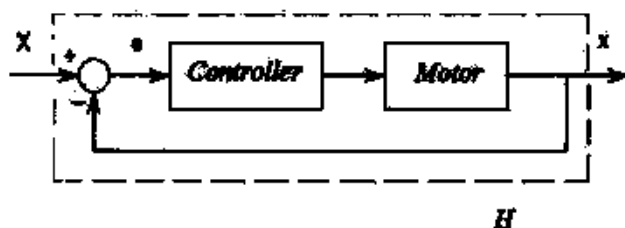


图 2.1: 伺服控制系统

## 2.2 动力学和运动学的关系

### 2.2.1 问题的数学模型

记CNC机床有 $M$ 个轴, 用 $\tau = 1, \dots, M$ 来表示这些轴. 每个轴通过伺服电机来控制, 不考虑电机之间的耦合效应. 在考虑对伺服系统进行摩擦力补偿的情况下, 可以假设每个轴的伺服结构相同, 只是相应的机械参数不同, 且均为 $n$ 阶线性系统. 这样系统的传递函数是:

$$H_{\tau}(s) = \frac{x_{\tau}(s)}{X_{\tau}(s)} = \frac{b_n s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

其中 $X_{\tau}$ 和 $x_{\tau}$ 是位置输入和实际位置输出.

通过图 2.1 中的闭环系统可以计算跟踪误差 $e_{\tau} = X_{\tau} - x_{\tau}$ 和系统的输入之间的关系:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{e_{\tau}(s)}{X_{\tau}(s)} \\ &= \frac{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) - (b_n s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{c_l s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \end{aligned}$$

其中 $l \leq \max(m, n)$ .

或者等价的有

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) \cdot e_{\tau}(s) = (c_l s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0) \cdot X_{\tau}(s).$$

对以上等式两边进行反拉普拉斯变换, 在假定 $e_r(t)$ 和它的各阶导数的初值都是零的情况下, 跟踪误差 $e_r(t)$ 将满足以下微分方程:

$$a_n \frac{d^n e_r}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} e_r}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{de_r}{dt} + a_0 e = c_1 \frac{d^l X_r}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} X_r}{dt^{l-1}} + \cdots + c_1 \frac{dX_r}{dt} + c_0 X_r. \quad (2.1)$$

为了使以上系统稳定, 系统(2.1)的特征根的实部必须是负的[40]。更精确的说系统(2.1)

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.2)$$

的特征根且有负实部。

这样, 最优轨迹规划问题可以被描述成如下含有运动学约束和跟踪误差约束的时间最优控制问题:

$$\begin{aligned} & \min T \\ & s.t. \begin{cases} \left| \frac{dX_r}{dt} \right| \leq X_{\max}^1 \\ \left| \frac{d^2 X_r}{dt^2} \right| \leq X_{\max}^2 \\ \dots \\ \left| \frac{d^m X_r}{dt^m} \right| \leq X_{\max}^m \\ |e_r| \leq E_{\max} \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $r = 1, \dots, N$ 表示轴,  $m$ 是正整数, 表示运动学的最大阶数;  $X_{\max}^j$ 是正实数,  $j = 1, \dots, m$ ;  $e_r(t)$ 满足方程(2.1), 并且 $\frac{dX_r}{dt}, \frac{d^2 X_r}{dt^2}, \dots, \frac{d^{m-1} X_r}{dt^{m-1}}$ 的初值均默认为零。注意到这里 $m$ 实际表示了所得到的速度曲线的光滑度。比如, 若 $m = 2$ , 那么加速度是有界的, 此时的速度曲线是连续的; 如果 $m = 3$ , 此时的加速度和jerk是有界的, 速度曲线是可微的; 如果 $m = 3$ , 那么加速度, jerk和jounce是有界的, 此时加速度曲线是可微的。总的来说, 速度曲线越光滑, 振动发生的可能性就越小[21]。

### 2.2.2 跟踪误差约束的简化

(2.3)中的最后一个约束很难处理, 考虑到这是一个含ODE解的约束, 因此如果直接采用离散化方法计算是十分困难的。在这一小节中, 本文将证明跟踪误差约束可以被运动学的线性组合约束界住, 从而寻求带这种线性组合的新模型的解来近似原问题的最优解。更精确的有:

**定理2.2.1.**

假设 $e_r$ 是第 $r$ 个轴的跟踪误差满足关系式2.1。那么

$$\left| c_l \frac{d^l X_r}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} X_r}{dt^{l-1}} + \cdots + c_1 \frac{dX_r}{dt} + c_0 X_r \right| \leq \delta E_{\max} \quad (2.4)$$

蕴含了约束 $|e_r| \leq E_{\max}$ 。特别的，如果特征方程(2.2)的特征根的实部两两不同，那么(2.4)中的常数 $\delta$ 是 $a_0$ 。

本文将通过两个阶段来证明如上的定理。首先考虑如下结果：

**定理2.2.2.**

假设 $y(t)$ 是一个定义在时间 $t$ 上的函数，满足如下 $n$ 阶ODE

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t), \quad (2.5)$$

其中 $a_i$ 是常数并且 $g(t)$ 是一个定义在 $t$ 上的函数。更有，假设 $y(0) = \cdots = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = 0$ 而且方程(2.2)的根两两不同且具有负实部，那么对于常数 $M$ ，条件 $|g(t)| \leq |a_0| M$ 蕴含了条件 $|y(t)| \leq M$ 。

为了证明如上定理，先介绍如下引理：

**引理2.2.3.**

假设 $y(t)$ 是可微函数定义在 $t \in [0, \infty)$ 并且满足 $y(0) = 0$ ，且 $M$ 和 $r$ 是正实数。如果 $y$ 满足 $|r \frac{dy}{dt} + y| \leq M$ ，那么 $|y| \leq M$ 。

**证明：**考虑到 $r\dot{y} + y \leq M$ ，也就是 $r\dot{y} + y - M \leq 0$ ，定义

$$\bar{y} = y - M.$$

那么 $\dot{\bar{y}} = \dot{y}$ ，所以不等式 $r\dot{y} + y \leq M$ 等价于 $r\dot{\bar{y}} + \bar{y} \leq 0$ ，或者 $\dot{\bar{y}} + \frac{\bar{y}}{r} \leq 0$ 。这样有

$$e^{\frac{t}{r}} \left( \dot{\bar{y}} + \frac{\bar{y}}{r} \right) \leq 0,$$

或者

$$(e^{\frac{t}{r}} \bar{y})' \leq 0,$$

这就意味着在 $[0, \infty)$ 上， $e^{\frac{t}{r}} \bar{y}$ 是一个单调递减函数。因此当 $t \geq t_0$ 时， $e^{\frac{t}{r}} \bar{y} \leq e^{\frac{t_0}{r}} \bar{y}(t_0)$ 。由于 $\bar{y} = y - M$ ，所以

$$e^{\frac{t}{r}} (y - M) \leq e^{\frac{t_0}{r}} (y(t_0) - M),$$

或者

$$y \leq \frac{e^{\frac{y_0}{\sigma^2}}(y(t_0) - M)}{e^{\frac{1}{\sigma^2}}} + M.$$

令  $t_0 = 0$ ,  $y(0) = 0$ , 可以得到  $y(t) \leq M(1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{\sigma^2}}})$ . 同样, 如果  $r(-\dot{y}) + (-y) \leq M$ , 那么  $-y \leq M(1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{\sigma^2}}})$ . 这样的话有,  $|y| \leq M(1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{\sigma^2}}}) \leq M$ .  $\square$

有了引理2.2.3, 再来证明定理2.2.2.

**定理2.2.2的证明:** 根据定理的假设, 方程(2.2)的根具有负实部, 不妨记成  $-\frac{1}{d_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $d_i > 0$ . 那么, 系统(2.5)的特征方程的左端可以被表示成:

$$f(\lambda)/a_0 = (d_1\lambda + 1)(d_2\lambda + 1) \cdots (d_n\lambda + 1) = 0.$$

定义:

$$\begin{cases} z_1 = d_1 \frac{dy}{dt} + y, \\ z_2 = d_2 \frac{dz_1}{dt} + z_1, \\ \dots \\ z_n = d_n \frac{dz_{n-1}}{dt} + z_{n-1}, \end{cases}$$

很容易验证方程(2.5)左端此时变成:

$$(a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y)/a_0 = z_n = d_n \dot{z}_{n-1} + z_{n-1} = g(t)/a_0.$$

这样根据引理2.2.3, 根据  $|g(t)/a_0| \leq M$ , 得到  $|z_{n-1}| \leq M$ . 既然  $z_{n-1} = d_{n-1} \dot{z}_{n-2} + z_{n-2}$  并且  $d_{n-1} > 0$ , 根据引理2.2.3有  $|z_{n-2}| \leq M$ . 反复使用引理, 可以得到  $|z_1| \leq M$ , 因此  $|y| \leq M$ , 这样就证明了结果.  $\square$

第二种情况, 当方程(2.2)有复根的情况. 在给出相关结果之前, 要给出一些定义和引理.

**定义2.2.4.**

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  是矩阵和向量, 如下映射

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

被称为矩阵1范数和向量1范数. 而且, 它们满足如下相容性条件

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1.$$

**引理2.2.5.**

令  $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  且  $x_i(t)$  都是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的可积函数。那么

$$\left\| \int_a^b x(\tau) d\tau \right\|_1 \leq \int_a^b \|x(\tau)\|_1 d\tau.$$

证明:  $\left\| \int_a^b x(\tau) d\tau \right\|_1 = \sum_{j=1}^n \left| \int_a^b x_j(\tau) d\tau \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_a^b |x_j(\tau)| d\tau = \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j(\tau)| \right\} d\tau = \int_a^b \|x(\tau)\|_1 d\tau.$

如下定理给出了在第二种(复根)情况下,跟踪误差约束的简化结果:

**定理2.2.6.**

假设  $y(t)$  是定义在时间  $t$  上的函数满足如下  $n$  阶 ODE

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t), \quad (2.6)$$

其中  $a_i$  是常数,  $g(t)$  是以  $t$  为自变量的函数。而且假定  $y(0) = \dots = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = 0$ 。那么对于常数  $M$ , 条件  $|g(t)| \leq M$  蕴含了条件  $|y| \leq \delta M$ , 其中常数  $\delta$  可以按照如下方式计算:

$$\delta = \int_0^\infty \|e^{\tau A}\|_1 d\tau, \quad (2.7)$$

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

证明: 将 ODE(2.6) 重写成如下矩阵的形式:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(t), \quad (2.8)$$

其中  $y = (y, y_1, \dots, y_{n-1})^T$ ,  $g(t) = (0, 0, \dots, g(t))^T$ , 矩阵  $A$  是定理中给出的。

显然,

$$|\lambda I - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda & -1 \\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & \dots & \lambda + \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

并且这样按照最后一列将这个行列式展开:

$$|\lambda I - A| = \left(\lambda + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\lambda^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\lambda^{n-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\lambda + \frac{a_0}{a_n},$$

其恰好是特征方程(2.6)。因此矩阵 $A$ 的特征根和(2.2)的特征根是一样的。

根据微分方程理论, (2.8)的解可以表示成:

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\mathbf{g}(\tau)d\tau,$$

其中 $\mathbf{y}(0)$ 是初值。因为 $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$ , 根据定义2.2.4和引理2.2.5有

$$\|\mathbf{y}(t)\|_1 = \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)A}\mathbf{g}(\tau)d\tau \right\|_1 = \left\| \int_0^t e^{\tau A}\mathbf{g}(t-\tau)d\tau \right\|_1 \leq \int_0^t \|e^{\tau A}\|_1 \|\mathbf{g}(t-\tau)\|_1 d\tau.$$

这样

$$|y| \leq \|\mathbf{y}(t)\|_1 \leq M \int_0^\infty \|e^{\tau A}\|_1 d\tau.$$

因为(2.2)的特征根有负实部, 因此常数 $\delta = \int_0^\infty \|e^{\tau A}\|_1 d\tau$ 存在。

### 2.2.3 PID控制器下的3阶模型

在多数情况下, 伺服控制器选用的是PID控制器。PID控制器的控制参数由比例, 积分, 微分三个系数构成。图 2.2表示了PID控制器下伺服系统的方块图, 其中 $e_r = X_r - x_r$ 是跟踪误差。其余的参数定义如下: 电流增益 $k_a$ , 将电压控制信号 $u$ 转化成电流控制信号 $i$ 以便来控制电机, 随后通过力矩增益 $k_t$ 产生力矩 $T$ 。力矩 $T$ 决定了电机的角速度, 其中 $J$ 和 $B$ 是转动惯量和阻尼。电机转角 $\theta$ 是通过积分电机转角速度 $\omega$ 来得到的, 此外传动比为 $r_g$ 。简化起见, 令 $K = k_a k_t r_g$ , 因为这三个参数经常一起出现。这样在PID伺服控制系统情形下, 跟踪误差和输入信号满足如下方程:

$$J\ddot{e}_r + (B + Kk_d)\dot{e}_r + Kk_p e_r + Kk_i \int e_r = J\ddot{X}_r + B\dot{X}_r = J\dot{j}_r + Ba_r, \quad (2.9)$$

其中 $a_r$ 和 $j_r$ 是第 $r$ 个轴的加速度和jerk。

注意到实系数3阶系统要么有3个实特征根, 要么有一个实特征根两个复特征根。这样可以得到如下关于系统(2.9)的结论的简化情形:

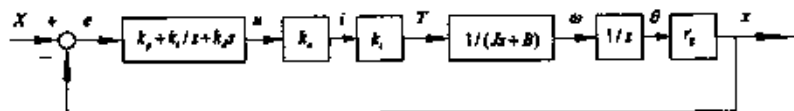


图 2.2: PID伺服系统方框图

**定理2.2.7.**

当不等式

$$\left| \frac{J}{Kk_i} \ddot{x}_r + \frac{B}{Kk_i} \dot{x}_r \right| \leq \delta E_{\max} \quad (2.10)$$

成立时, 跟踪误差约束满足  $|e_r| \leq E_{\max}$ . 更进一步, 令

$$d = 4((B + Kk_d)^2 - 3JKk_p)^3 - (2(B + Kk_d)^3 - 9J(B + Kk_d)Kk_p^2 + 27Kk_iJ^2).$$

那么如果  $d > 0$ , 可以设置  $\delta = 1$ . 如果  $d < 0$ ,  $\delta$  可以通过(2.7)计算.

**证明:**

容易知道三次方程

$$J\lambda^3 + (B + Kk_d)\lambda^2 + Kk_p\lambda + Kk_i = 0 \quad (2.11)$$

要么有一个实根, 要么有3个实根. 根据[35, p. 299]中的准则, 如果  $d > 0$ , 那么方程(2.11)有三个互异实根, 此时根据定理2.2.2  $\delta = 1$ ; 如果  $d < 0$ , 那么方程(2.11)有一个实根和两个共轭复根, 于是定理2.2.7成立.

## 2.3 带跟踪误差约束的时间最优控制问题的凸优化算法

### 2.3.1 问题的描述

考虑3轴的CNC系统  $x, y, z$ . 假定3轴CNC系统的加工路径是具有  $C^2$  连续度的一条参数曲线:

$$r(u) = (x(u), y(u), z(u)), (u \in [0, 1]).$$

为了得到光滑的速度函数, 切向速度, 分轴速度、分轴加速度、分轴jerk被考虑作为约束条件. 此外分轴跟踪误差约束也被考虑到约束中去. 因此, 本文



的问题是求解参数速度曲线  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  使得在加工路径上的每一点都满足运动学和动力学约束, 同时使得加工时间最短, 也就是本文要考虑如下优化问题:

$$\min_{\dot{u}} \int_0^1 \frac{1}{\dot{u}} du \quad (2.12)$$

$$s.t. |v_f| \leq V_{f\max}, |v_r| \leq V_{\max}, |a_r| \leq A_{\max}, |j_r| \leq J_{\max}, |e_r| \leq \delta E_{\max},$$

其中  $r \in \{x, y, z\}$  是分轴,  $v_f$  是切向速度,  $v_r$  是分轴速度,  $a_r$  是分轴加速度,  $j_r$  是分轴jerk,  $e_r$  是分轴跟踪误差满足(2.9), 并且  $V_{f\max}, V_{\max}, A_{\max}, J_{\max}, E_{\max}$  是相应的界, 其中  $\delta$  是通过定理2.2.7给定的。

根据定理2.2.7, 如下优化问题的解的可行域比最优控制问题(2.12)小, 因此它的最优解可以作为问题(2.12)的一个近似最优解:

$$\min_{\dot{u}} \int_0^1 \frac{1}{\dot{u}} du \quad (2.13)$$

$$s.t. \begin{cases} |v_f| \leq V_{f\max} \\ |v_r| \leq V_{\max} \\ |a_r| \leq A_{\max} \\ |j_r| \leq J_{\max} \\ \left| \frac{J}{Kk_i} j_r + \frac{B}{Kk_i} a_r \right| \leq \delta E_{\max}. \end{cases} \quad (2.14)$$

在本节余下部分, 将用数值方法重新表述问题(2.14)。本文记“'”为“ $\frac{d}{du}$ ”。引入三个定义在参数域  $u$  中的函数  $a(u), b(u), c(u)$ :

$$\begin{aligned} a(u) &= \dot{u}(u)^2 = \left( \frac{du}{dt} \right)^2, \\ b(u) &= \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{u}^2)' = \frac{1}{2} a'(u), \\ c(u) &= b'(u) = \frac{d\ddot{u}}{du} = \frac{d\ddot{u}}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{\ddot{u}'}{\dot{u}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

那么运动学变量可以被写成关于  $a, b, c$  的形式:

$$\begin{aligned} v_r &= \tau' \dot{u} = \tau' \sqrt{a(u)}, \\ a_r &= \tau'' \dot{u}^2 + \tau' \ddot{u} = \tau'' a(u) + \tau' b(u), \\ j_r &= \tau''' \dot{u}^3 + 3\tau'' \dot{u} \ddot{u} + \tau' \ddot{u}' = \sqrt{a(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)), \\ v_f &= \sigma \sqrt{a(u)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中  $\sigma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  和  $\tau \in \{x, y, z\}$ 。

设  $c(u)$  为控制变量, 那么问题(2.14)变成了一个经典的最优控制问题:

$$\min_{a(u)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a(u)}} du \quad (2.17)$$

$$s.t. \begin{cases} \sigma^2 a(u) \leq V_{f\max}^2 \\ (\tau')^2 a(u) \leq V_{\max}^2 \\ |\tau'' a(u) + \tau' b(u)| \leq A_{\max} \\ \left| \sqrt{a(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)) \right| \leq J_{\max} \\ \left| \frac{J(\sqrt{a(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u))) + B(\tau'' a(u) + \tau' b(u))}{R k_i} \right| \leq E_{\max}, \end{cases} \quad (2.18)$$

其中  $\tau \in \{x, y, z\}$  是各个分轴。从(2.15)可以得到, 初值是  $a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = 0$ 。

### 2.3.2 最优控制问题简化

要想求得问题(2.17)的数值解仍然是一件比较困难的事情, 原因是约束过于复杂, 正如上一节所述, 含jerk和运动学线性组合的约束都具有强非线性。在这一节中, 本文将在更小的解空间上寻找问题(2.17)的最优解, 作为原问题的一个近似最优解, 并且这个解空间是一个凸优化问题的解空间, 此凸优化问题的约束是一个含有控制和状态的线性约束。

首先, 如下仅含加速度为最高阶运动学约束的时间最优控制问题具有唯一的解:

$$\min_u \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du \quad s.t. \quad |v_f| \leq V_{f\max}, |v_\tau| \leq V_{\max}, |a_\tau| \leq A_{\max}. \quad (2.19)$$

这个模型的解是用来作为化简(2.18)中后两个约束的关键。其次, 本文通过研究相关的动态参数的关系来针对(2.18)中的最后一个强非线性约束建立进一步的化简策略。

就问题(2.19)来讲, 下面的重要结论来自于文献[8, 17]:

#### 引理2.3.1.

问题(2.19)的最优解是点点最大的, 即对参数域中的每一点, 最优解比其它任何的解取值都大。

本文现在将问题(2.17)变换成一个新的形式, 此形式中约束是状态和控制参量 $a, b, c$ 的线性约束。

**定理 2.1.** 令 $a^*(u) = \dot{u}(u)^2$ 是最优控制问题(2.19)的最优解, 那么假定系统动态参数满足如下条件

$$E_{\max} K k_1 - B A_{\max} > 0, \quad (2.20)$$

其中 $K, k_1, B$ 是ODE(2.9)中的参数, 那么可以求解如下最优问题来近似问题(2.17)的最优解:

$$\min_{c(u)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a(u)}} du \quad (2.21)$$

$$s.t. \begin{cases} \sigma^2 a(u) \leq V_{f\max}^2 \\ (\tau')^2 a(u) \leq V_{\max}^2 \\ |\tau'' a(u) + \tau' b(u)| \leq A_{\max} \\ \left| \sqrt{a^*(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)) \right| \leq J_{\max} \\ \left| \frac{J \sqrt{a^*(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)) + B(\tau'' a(u) + \tau' b(u))}{K k_1} \right| \leq E_{\max}, \end{cases} \quad (2.22)$$

其中初值为 $a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = 0$ 。特别的, 如果 $a, b, c$ 满足约束(2.22), 那么他们一定满足约束(2.18)。

**证明:** 因为问题(2.18)中的前三个约束和(2.22)是一样的, 本文仅仅说明(2.22)中的第四个和第五个约束蕴含了(2.18)中的第四个和第五个约束。令 $a(u), b(u), c(u)$ 是问题(2.21)的一个可行解。因为(2.22)的前三个约束和(2.19)的是一样的, 所以对于 $a(u)$ 来说, 它对于问题(2.19)来说是可行的。那么根据引理2.3.1,  $a(u) \leq a^*(u)$ 当 $u \in [0, 1]$ 。于是有

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{a(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)) \right| &= \left| \sqrt{a(u)} \right| \left| (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)) \right| \\ &\leq \left| \sqrt{a^*(u)} \right| \left| (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)) \right|. \end{aligned}$$

因此, (2.22)中的第四个约束蕴含了(2.18)的第四个约束。

对于第五个约束来讲, 为了简化证明, 引入如下记号

$$p^* = \sqrt{a^*(u)} (\tau''' a(u) + 3\tau'' b(u) + \tau' c(u)),$$

$$p = \sqrt{a(u)}(\tau'''a(u) + 3\tau''b(u) + \tau'c(u)),$$

那么  $\frac{p'}{p} = \sqrt{\frac{a''}{a}} \geq 1$ ; 此外记  $q = B(\tau''a(u) + \tau'b(u))$ ,  $Kk_1E_{\max} = E$ , 这样根据加速度约束和定理假设条件, 可以得到  $|q| \leq E$ . 那么本文希望由条件  $|p^* + q| \leq E$ , 推出  $|p + q| \leq E$ .

若否,  $|p + q| > E$ , 即,  $p + q > E$  或者  $p + q < -E$ . 如果  $p + q > E$ , 那么  $p > E - q \geq 0$ , 于是  $p^* \geq p > 0$ , 因此  $p^* + q \geq p + q > E$ , 矛盾. 另一种情况,  $p + q < -E$ , 可以得到  $p < -E - q \leq 0$ , 于是  $p^* \leq p < 0$ , 因此  $p^* + q \leq p + q < -E$ , 矛盾.

从下面的数值方法中不难发现, (2.22)中的约束是关于状态和控制的线性约束, 并且目标函数是凸的[75]. 于是, 问题(2.21)是凸优化问题.

### 2.3.3 问题的凸优化算法

在这一小节中, 直接离散化的方法被用来解决问题(2.21). 上一小节得到问题(2.21)可以被转化成一个有限维的凸优化问题, 求解此类问题已经有比较高效的数值算法.

为了将无限维问题转化成有限维优化问题, 取参数区间为  $[0, 1]$ , 对此参数区间进行  $N$  等分, 等分后的区间端点为  $u_i = \frac{i}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . 这样每一个子区间的长度为  $\Delta = \frac{1}{N}$ . 由于  $\Delta$  非常小, 因此连续约束可以被近似成离散点上的约束, 这里的离散点指  $u_i$ .

问题(2.21)通过两步来解决.

首先, 对于问题(2.19), 类似于[90]或者[75]中的数值方法被用来计算离散情形下的最优解  $a_i^* = a(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

其次, 为了求解问题(2.21), 本文令  $c_i = c(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  作为控制变量, 令  $a_i = a(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  和  $b_i = b(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  作为状态变量, 根据(2.15)它们可以通过有限差分近似:

$$b_i \approx \frac{a_{i+1} - a_i}{2\Delta}, c_i \approx \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta}, i = 0, 1, \dots, N-1.$$

由于 $a(0) = b(0) = a(1) = b(1) = 0$ , 可以得到 $a_0 = a_1 = b_0 = b_N = 0$ 和

$$b_{i+1} = \Delta \sum_{k=0}^i c_k + b_0 = \Delta \sum_{k=0}^i c_k, i = 0, \dots, N-1, \quad (2.23)$$

$$a_{i+1} = 2\Delta \sum_{k=0}^i b_k = 2\Delta^2 \sum_{i=0}^{i-1} (i-1)c_i, i = 1, \dots, N-1. \quad (2.24)$$

根据以上两步, 问题(2.21)可以被近似成如下有限维状态下的优化问题:

$$\min_{c_i} \sum_{j=2}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{a_j}} \text{ s.t. } \begin{cases} \sigma_i^2 a_i \leq V_{f\max}^2 \\ (\tau_i')^2 a_i \leq V_{\max}^2 \\ |\tau_i'' a_i + \tau_i' b_i| \leq A_{\max} \\ |\sqrt{a_i}(\tau_i''' a_i + 3\tau_i'' b_i + \tau_i' c_i)| \leq J_{\max} \\ \left| \frac{J(\sqrt{a_i}(\tau_i''' a_i + 3\tau_i'' b_i + \tau_i' c_i)) + B(\tau_i'' a_i + \tau_i' b_i)}{K k_i} \right| \leq E_{\max} \\ \Xi \in \Omega, \end{cases} \quad (2.25)$$

其中 $\tau \in \{x, y, z\}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $\tau_i' = \tau'(u_i)$ ,  $\tau_i'' = \tau''(u_i)$ ,  $a_i^*$ 是在第一步中求得问题(2.19)的最优解,  $a_i$ 和 $b_i$ 可以从(2.24)和(2.23)得到,  $\Xi$ 表示所有的机械参数集合,  $\Omega$ 是满足(2.20)的参数集合。由于初值 $a_N = b_N = 0$ , 因此可以得到如下关于 $c_i$ 的约束

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i = 0 \text{ 和 } \sum_{i=0}^{N-2} (N-1-i)c_i = 0.$$

问题(2.25)是关于 $c_i$ 的线性约束, 并且目标函数是关于 $c_i$ 的凸函数[75]。于是, 问题(2.25)是一个凸优化问题, 这里迭代二次序列SQP(Sequential Quadratic Programming)的方法[9]被用来求解问题(2.25)。SQP方法将问题转化成一系列子优化问题, 每一个子问题优化一个二次的线性约束的模型。由于本文的问题(2.25)的约束已经是线性的, 因此应用SQP方法时候会更高效。

为了便于使用SQP方法求解问题(2.25), 等分离散数目 $N$ 需要给定。 $N$ 的选取关系到参数曲线上的点 $r(u_i)r(u_{i-1})$ 之间的区间 $\Delta s_i = \|r(u_i) - r(u_{i-1})\|$ 的长度。根据有限元理论[68], 这些长度需要满足 $\Delta s_i \leq 0.1\text{mm}$ 。这样做的目的是为了实现大多数CNC加工过程中高精度的需求。所以关于 $N$ 的下界 $N_i$ 最少要满足 $\Delta s_i \leq 0.1\text{mm}$ ,  $i = 1, \dots, N$ 。进一步讲, 对于加工路径来讲,  $N$ 应当充分大一些, 综上两点, 实验中本文选取的 $N$ 的下界是 $\max\{100, N_i\}$ 。

### 2.3.4 实验结果

这一小节中, 本文将所提出的方法在商业数控机床上进行实验来检验它的有效性。

#### 2.3.4.1 实验建立

本文加工一个梅花曲线如图 2.3, 该图案的参数方程为:

$$\begin{cases} x = (15 + 5 \cdot \cos(10\pi u)) \cdot \cos(2\pi u + 0.5\pi) \\ y = (15 + 5 \cdot \cos(10\pi u)) \cdot \sin(2\pi u + 0.5\pi), u \in [0, 1]. \end{cases}$$

方便起见, 为了满足反拉普拉斯条件不妨假设梅花图案的起点为原点(0, 0)。

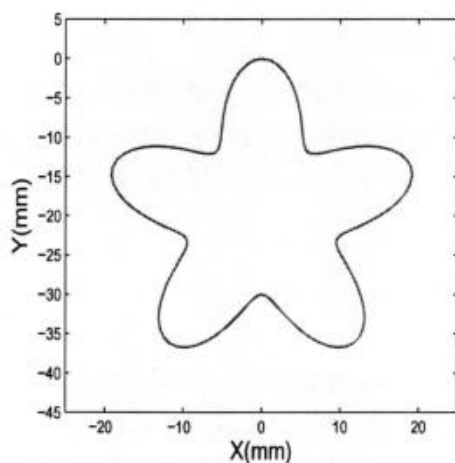


图 2.3: 梅花曲线

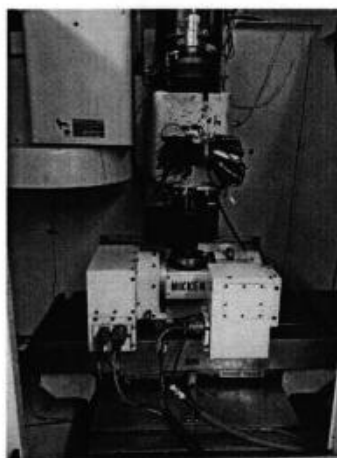


图 2.4: Fadal数控

Fadal数控机床被用来进行实验, 见图 2.4。相关运动学约束被设置成  $V_{f\max} = 150\text{mm/s}$ ,  $V_{\max} = (250, 250)\text{mm/s}$ ,  $A_{\max} = (1500, 1500)\text{mm/s}^2$ ,  $J_{\max} = (18000, 18000)\text{mm/s}^3$ 。它们分别代表切向速度, 分轴速度, 分轴加速度, 分轴jerk。速度和加速度的初始值和末端值均是零。离散点  $N$  选为120。采样周期为1ms。 $x$ 轴和 $y$ 轴的机械参数列在表2.1中。 $x$ 轴和 $y$ 轴的实际位置被架设在刀尖处的传感器所测得。

参数	X-axis	Y-axis
$k_a$ [A/V]	6.5723	6.2274
$k_t$ [Nm/A]	0.4769	0.4769
$r_s$ [mm/rad]	1.5915	1.5915
$J$ [kgm <sup>2</sup> ]	0.0070028	0.0081904
$B$ [kgm <sup>2</sup> /s]	0.023569	0.043009

表 2.1: 实验中的参数

### 2.3.4.2 实验结果

这一节将用两个例子来说明算法的有效性, 根据特征方程(2.9)的根的情况, 考虑全是实根的情形和含有复根的情形。

#### 实验一: 实特征根情形

PID控制器的比例、积分和微分增益系数取为 $k_p = 30\text{V/mm}$ ,  $k_i = 650\text{V}/(\text{mm}\cdot\text{s})$ , 和 $k_d = 0.4\text{V}/(\text{mm/s})$ , 每轴都相同。不难发现, 此时方程(2.11)的特征根具有负实部。

实验开始, 记录没有跟踪误差约束的误差情况, 也就是记录问题(2.25)不带最后一个约束的解所生成的插补曲线经过控制器后产生的跟踪误差。图 2.5-2.7显示了速度, 加速度, *pseudo tracking error*以及实时跟踪误差在参数域的值。所谓的*pseudo-jerk*, 即 $j^* = \sqrt{a_i'''}(\tau_i''' a_i + \tau_i'' b_i + \tau_i' c_i)$ 是jerk的一个近似, 参见(2.25)。此外, 从图 2.8容易得到, 跟踪误差在 $-0.044\text{mm}$ 和 $0.044\text{mm}$ 之间。

为了更好的做比较, 名义跟踪误差界限 $E_{\max} = (0.022\text{mm}, 0.022\text{mm})$ 被施加在约束当中, 利用本文提供的方法对这个模型进行求解。结果显示在图 2.9-图 2.12中。在图 2.12中, *pseudo tracking error*也就是(2.14)中的表达式 $|\frac{J}{Kk_i}j_r + \frac{B}{Kk_i}a_r|$ 被用来近似真正的跟踪误差。图 2.13记录的是实时的跟踪误差(此时被施加了 $0.022\text{mm}$ 的约束), 不难发现此时的跟踪误差确实被界住了, 这与理论所得的结果吻合, 这也证实了本文所提出的算法的有效性。从图 2.13来看, 加工时间从 $2.7\text{s}$ 增长到 $3.7\text{s}$ , 牺牲的时间也是合理的, 可以看做是为了降低跟踪误差的代价, 但是相比之下效果还是很好的, 因为此时跟踪误差的峰值减少了一半。

与没有添加跟踪误差约束的情况相比较, 此时*pseudo tracking error*约束是bang-bang的, 这一点从图 2.12可以看出来。关于这一点的原因是明显的,

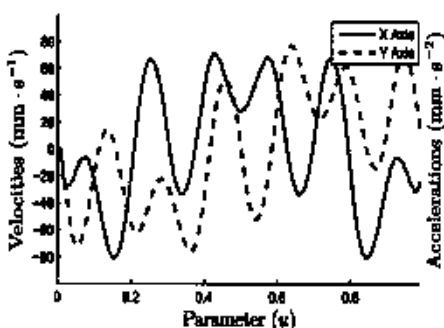


图 2.5: 无跟踪误差约束的速度

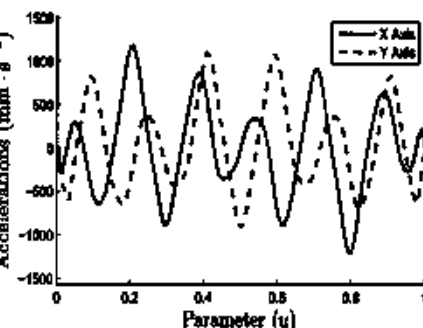


图 2.6: 无跟踪误差约束的加速度

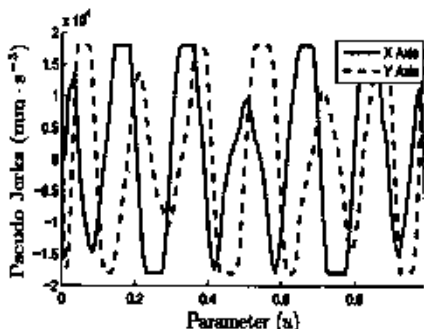


图 2.7: 无跟踪误差约束的伪Jerk

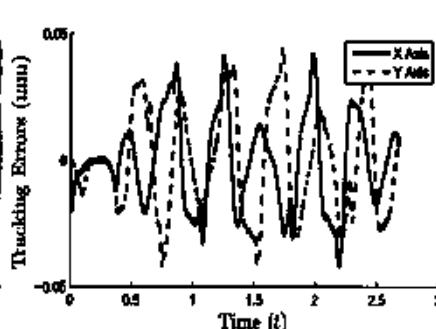


图 2.8: 无跟踪误差约束的跟踪误差

从图 2.8 可以发现跟踪误差在大部分地方超出了边界  $0.022\text{mm}$ 。在施加了跟踪误差约束之后, *pseudo tracking error* 边界在这些地方将会起到限制作用, 并且此时相应的速度和加速度等运动学状态也要做相应的调整来“满足”跟踪误差约束。

最后, 本文比较了不同离散数目情况下问题(2.25)的计算效率。在表 2.2 中  $N$  表示不同的离散数值。本文在  $3.0\text{GHz}$  CPU 的 PC 机上使用 Matlab 软件环境下进行求解, 使用优化工具包在迭代 50 步的时候停止, 然后记录所需时间, 因为此时算法的搜索精度可以保证找到的解已经达到目标解的 99%。另一方面, 如果对于问题(2.17)进行直接求解, 那么对于表中所选取的  $N$  来说, 运算过程均以失败告终。



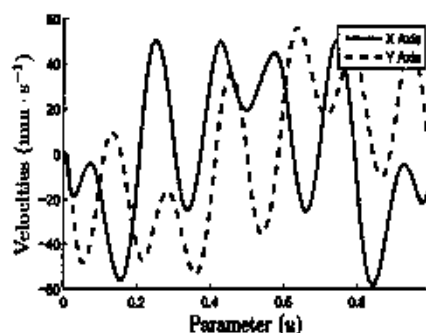


图 2.9: 带跟踪误差约束的速度

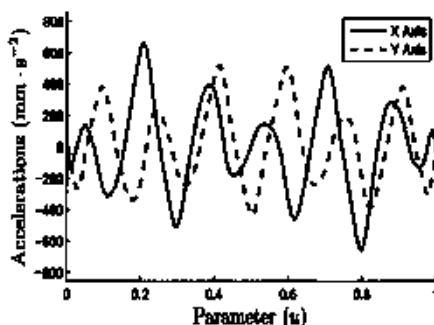


图 2.10: 带跟踪误差约束的加速度

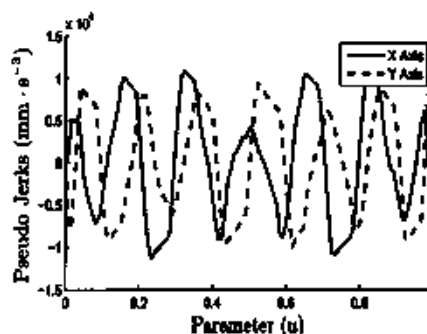
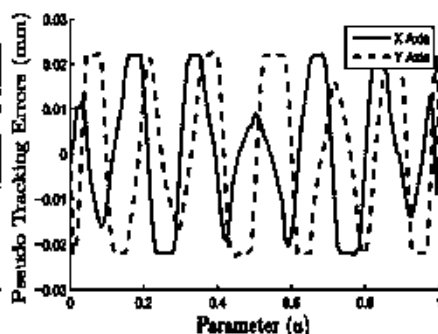


图 2.11: 带跟踪误差约束的Jerk

图 2.12: 以  $E_{\max} = 0.022\text{mm}$  为约束边界的伪跟踪误差

## 实验二: 复特征根的情况

本文选择PID控制器的参数为比例, 积分和微分增益系数为  $k_p = 10 \text{ V/mm}$ ,  $k_i = 480 \text{ V/(mm}\cdot\text{s)}$ , 和  $k_d = 0.4 \text{ V/(mm/s)}$ 。容易验证此时方程(2.11)有两个共轭复根。简化起见, 令  $\delta$  的取值是1。

类似于实验一, 这里进行对照试验。首先, 运行没有跟踪误差约束的插补曲线, 结果显示在2.14中。可以发现, 这种情况下跟踪误差的峰值是  $0.085\text{mm}$ 。接下来, 添加名义跟踪误差约束, 其边界是  $E_{\max} = (0.035\text{mm}, 0.035\text{mm})$ 。相应的结果被显示在2.15中, 从图中不难发现最大跟踪误差的峰值下降到  $0.04\text{mm}$ 。实际上这里的界  $E_{\max}$  没有起到严格的作用, 超界的原因是没有

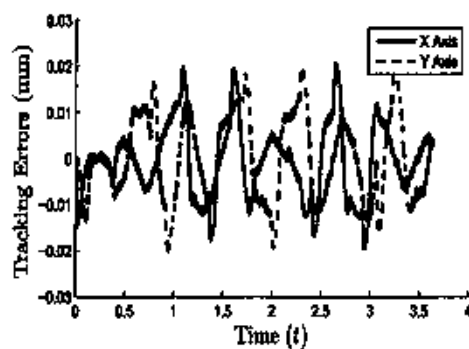


图 2.13: 以  $E_{\max} = 0.022\text{mm}$  为约束边界的跟踪误差

$N$	100	150	200	300	500
Time	22.34s	57.24s	98.68s	275.15s	421.64s

表 2.2: 问题(2.25)的计算效率

添加真正的系数 $\delta$ , 见问题(2.17)。

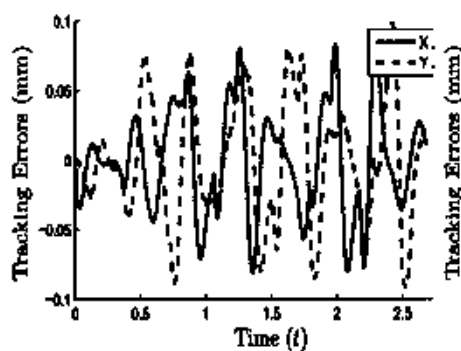


图 2.14: 无跟踪误差约束的跟踪误差

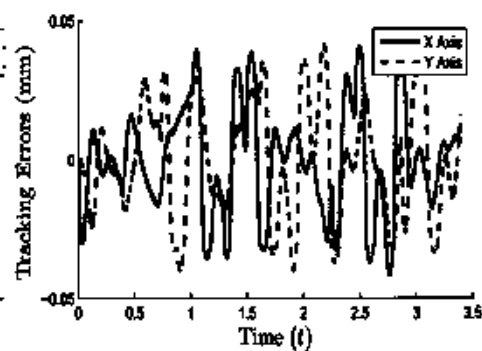


图 2.15: 以  $E_{\max} = 0.035\text{mm}$  为约束边界的跟踪误差

## 2.4 低阶伺服控制下的动力学和运动学的关系

### 2.4.1 问题的数学模型

类似于2.2.1中的模型介绍，这里采用PD控制器作为CNC系统的伺服控制器。根据图 2.16所示的传递函数图，可以写出输入和输出 $X$ 和 $x$ 在拉普拉斯域的关系式，参见[19]：

$$\frac{x}{X} = \frac{K(k_d s + k_p)}{J s^2 + (B + K k_d) s + K k_p}.$$

同样的可以得到此时的跟踪误差和输入之间的关系为：

$$\frac{e_x}{X} = \frac{J s^2 + B s}{J s^2 + (B + K k_d) s + K k_p}.$$

在时间域中跟踪误差 $e_x$ 和它的导函数的初值均为零的情况下，上式变成：

$$J \ddot{e}_x + (B + K k_d) \dot{e}_x + K k_p e_x = J a_x + B v_x,$$

或者

$$\frac{J}{K k_p} \ddot{e}_x + \frac{(B + K k_d)}{K k_p} \dot{e}_x + e_x = \frac{J}{K k_p} a_x + \frac{B}{K k_p} v_x, \quad (2.26)$$

其中 $\dot{e}_x = \frac{de_x}{dt}$ ,  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , 和 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ 是 $x$ 轴的跟踪误差的导数，速度，加速度。类似的可以假定 $e_x(t)$ 定义在 $[0, \infty)$ 上，而且 $e(0) = \dot{e}(0) = 0$ 。

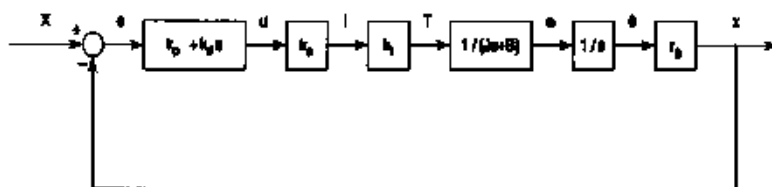


图 2.16: PD伺服控制器

### 2.4.2 跟踪误差约束的简化

假定跟踪误差约束的界是

$$|e_\tau(t)| \leq E_\tau, \quad (2.27)$$

其中 $e_\tau$ 和 $E_\tau$ 是跟踪误差和它的界 $\tau \in \{x, y, z\}$ 是轴, 而且 $e_\tau$ 满足(2.26)。

下面的引理是2.2.3的一个直接的推论, 它说明了对于函数 $y(t)$ 来讲,  $\dot{y}(t)$ 和 $\ddot{y}(t)$ 的线性组合有界蕴含了 $y(t)$ 本身有界。

#### 引理2.4.1.

令 $y(t)$ 是一个可微函数, 定义在时间 $t \in [0, \infty)$ 上, 并且初值 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ , 假定 $a, b$ 都是正实数而且满足 $b^2 - 4a \geq 0$ , 那么 $|a\ddot{y} + b\dot{y} + y| \leq E$ 蕴含了 $|y| \leq E$ 。

证明: 既然 $a > 0, b > 0$ , 而且 $b^2 - 4a \geq 0$ , 那么关于 $p$ 的二次方程 $p^2 - bp + a = 0$ 的两个根都是正的。不妨用 $p$ 代表其中一个根, 令 $\tilde{y} = (b - p)\dot{y} + y$ 且注意到 $p^2 - bp + a = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b-p} = p$ 。所以

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + y = (a\ddot{y} + p\dot{y}) + ((b - p)\dot{y} + y) = p\dot{\tilde{y}} + \tilde{y}.$$

根据引理2.2.3, 从 $|a\ddot{y} + b\dot{y} + y| = |p\dot{\tilde{y}} + \tilde{y}| < E$ 和 $p > 0$ , 所以 $|\dot{\tilde{y}}| < E$ 。既然 $b - p = a/p > 0$ , 而且 $|\tilde{y}| = |(b - p)\dot{y} + y| < E$ , 再次运用引理2.2.3, 可以得到 $|y| \leq E$ 。

作为引理2.4.1的直接本文可以得到如下充分条件来化简模型:

#### 定理2.4.2.

根据(2.26)和(2.27)中注释, 假定动态系统参数满足

$$(B + Kk_d)^2 - 4Kk_pJ \geq 0. \quad (2.28)$$

如果 $\left| \frac{J\ddot{a}_\tau + B\dot{a}_\tau}{Kk_p} \right| \leq E_\tau$ , 那么跟踪误差满足 $|e_\tau| \leq E_\tau$ , 其中 $\tau \in \{x, y, z\}$ 是轴。

下面的定理可以被用来进一步处理跟踪误差约束, 随后将看到这个定理在建立线性优化算法过程中起到重要的作用。

#### 定理2.4.3.

这里假设条件如同定理2.4.2并且令 $\tilde{E}_\tau = \frac{B^2Kk_p}{J\ddot{A}_\tau + B}$ 。那么如果 $\frac{J|\ddot{a}_\tau| + B|\dot{a}_\tau|^2}{Kk_p} \leq \tilde{E}_\tau$ ,  $\tau \in \{x, y, z\}$ 是轴, 那么 $|e_\tau| \leq E_\tau$ 。

证明: 应用柯西不等式有  $\left| \frac{Ja_r + Bv_r}{Kk_p} \right| \leq \frac{J|a_r| + Bv}{Kk_p} = \frac{\sqrt{J|a_r|} \cdot \sqrt{J|a_r|} + \sqrt{Bv} \cdot \sqrt{B}}{Kk_p} \leq \sqrt{\frac{J|a_r| + Bv^2}{Kk_p}} \sqrt{\frac{J|a_r| + B}{Kk_p}}$ . 既然  $\frac{J|a_r| + Bv_r^2}{Kk_p} \leq \tilde{E}_r$  和  $J|a_r| + B \leq JA_r + B$ , 所以

$$\left| \frac{Ja_r + Bv_r}{Kk_p} \right| \leq \sqrt{\frac{\tilde{E}_r(JA_r + B)}{Kk_p}} = E_r.$$

根据定理2.4.2, 可以得到  $|e| \leq E_r$  定理获证。  $\square$

## 2.5 跟踪误差约束时间最优轨迹规划问题的线性规划算法

### 2.5.1 离散的线性优化算法

类似的假定加工路径为

$$\vec{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)), u \in [0, 1],$$

并且二阶连续。定义速度曲线  $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$  和切向速度曲线 (machining feedrate)  $v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . 同样用“'”表示“ $\frac{d}{du}$ ”。

引入变量  $q$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \sqrt{q},$$

作为本文的优化变量, 故有

$$\ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d\dot{u}}{dt} \cdot \frac{u}{\dot{u}} = \frac{d(\dot{u}^2)}{2dt} \cdot \frac{1}{\dot{u}} = \frac{d(\dot{u}^2)}{2dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{d(\dot{u}^2)}{2du} = \frac{1}{2} (\dot{u}^2)' = \frac{1}{2} q'.$$

对于  $x$  轴,

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} = x' \sqrt{q}, \quad (2.29)$$

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d(x'\dot{u})}{dt} = x''\dot{u}^2 + x'\ddot{u} = x''q + x'\frac{q'}{2}. \quad (2.30)$$

同样的可以写出  $y$  轴和  $z$  轴的相关运动学参数表达式。另外易得:

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{x'^2q + y'^2q + z'^2q} = \sigma\sqrt{q}, \quad (2.31)$$

其中  $\sigma = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ .

另外, 加工时间  $T$  可以被写成:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^1 \frac{du}{\dot{u}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}}. \quad (2.32)$$

考虑切向速度, 分轴速度和加速度以及跟踪误差约束下的时间最优问题, 也就是要规划参数速度 $\dot{u}$ , 数学模型为:

$$\min_{u(t)} T = \min_{u(t)} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}} \quad (2.33)$$

$$s.t. \begin{cases} |v_f| \leq V_{\max} \\ |a_r| \leq A_r \\ |e_r| \leq E_r \\ \frac{J}{Kk_p} \ddot{e}_r + \frac{(B+Kk_d)}{Kk_p} \dot{e}_r + e_r = \frac{J}{Kk_p} a_r + \frac{B}{Kk_p} v_r. \end{cases} \quad (2.34)$$

其中 $a_r$ 是加速度在 $r \in \{x, y, z\}$ 轴上的,  $e_r$ 是跟踪误差 $r \in \{x, y, z\}$ ,  $V_{\max}, A_r, E_r$ 是各自的界。

根据定理2.4.2, 当系统动力学参数满足(2.28)时, 跟踪误差约束 $e_r(t) \leq E_r$ 可以被替换成 $|\frac{J a_r}{Kk_p} + \frac{B v_r}{Kk_p}| \leq E_r$ , 只不过相对于求解问题(2.33), 此时的优化问题是在更小的解空间上寻找原问题的最优解, 也就是:

$$\min_{u(t)} T = \min_{u(t)} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}} \quad (2.35)$$

$$s.t. \begin{cases} |v_f| \leq V_{\max} \\ |a_r| \leq A_r \\ \left| \frac{J a_r + B v_r}{Kk_p} \right| \leq E_r. \end{cases} \quad (2.36)$$

根据[17][p. 385]此优化问题的最优解是唯一的, 而且点点最大, 根据这一性质有:

#### 引理2.5.1.

优化问题(2.35)的解是唯一的, 而且在任何时间点点最大。

根据这个结果, 问题(2.35)等价于如下优化问题。

$$\max_{u(t)} \int_0^1 q du \quad (2.37)$$

$$s.t. \begin{cases} |v_f| \leq V_{\max} \\ |a_r| \leq A_r \\ \left| \frac{J a_r + B v_r}{Kk_p} \right| \leq E_r. \end{cases} \quad (2.38)$$

更有, 根据定理2.4.3, 与其考虑问题(2.37), 可以直接考虑如下优化问题:

$$\max_{u(t)} \int_0^1 q \, du \quad (2.39)$$

$$s.t. \begin{cases} |v_f| \leq V_{\max} \\ |a_r| \leq A_r \\ \frac{J a_r + B v_r^2}{K k_p} \leq \bar{E}_r \\ \frac{-J a_r + B v_r^2}{K k_p} \leq \bar{E}_r, \end{cases} \quad (2.40)$$

其中  $\bar{E}_r = \frac{B^2 K k_p}{J A_r + B}$  和  $r \in \{x, y, z\}$ .

这里本文采用类似2.3.3的离散方法, 不同的是这里采用差分格式, 记  $i$  表示相应变量在  $u_i = \frac{i}{N}$  处的值 (例如  $q_i = q(\frac{i}{N})$ ); 此时

$$\begin{cases} q'_i \approx \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta} \\ q''_i \approx \frac{q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i}{\Delta^2} \end{cases}$$

根据(2.29)-(2.32), 优化问题(2.37)可以被近似成如下非线性优化问题,

$$\max_{q_i} \sum q_i \quad (2.41)$$

$$s.t. \begin{cases} |\sigma_i^2 q_i| \leq V_{\max}^2 \\ \left| \tau_i'' q_i + \frac{\tau_i'}{4\Delta} (q_{i+1} - q_{i-1}) \right| \leq A_r \\ \left| \frac{J}{K k_p} (\tau_i'' q_i + \frac{\tau_i'}{4\Delta} (q_{i+1} - q_{i-1})) + \frac{B}{K k_p} (\tau_i' \sqrt{q_i}) \right| \leq \bar{E}_r. \end{cases} \quad (2.42)$$

其中  $i = 0, 1, \dots, N$  和  $r \in \{x, y, z\}$ . (2.42)中前两个约束关于  $q_i$  是线性的, 最后一个约束关于  $q_i$  是非线性的. 根据等式(2.30)-(2.32), 优化问题(2.39)可以被近似成如下线性优化问题:

$$\max_{q_i} \sum q_i \quad (2.43)$$

$$s.t. \begin{cases} |\sigma_i^2 q_i| \leq V_{\max}^2 \\ \left| \tau_i'' q_i + \frac{\tau_i'}{4\Delta} (q_{i+1} - q_{i-1}) \right| \leq A_r \\ \left( \frac{J}{K k_p} (\tau_i'' q_i + \frac{\tau_i'}{4\Delta} (q_{i+1} - q_{i-1})) + \frac{B}{K k_p} (\tau_i'^2 q_i) \right) \leq \bar{E}_r \\ \left( -\frac{J}{K k_p} (\tau_i'' q_i + \frac{\tau_i'}{4\Delta} (q_{i+1} - q_{i-1})) + \frac{B}{K k_p} (\tau_i'^2 q_i) \right) \leq \bar{E}_r. \end{cases} \quad (2.44)$$

其中  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $r \in \{x, y, z\}$ ,  $\bar{E}_r = \frac{B^2 K k_p}{J A_{\max} + B}$ . 根据线性优化已有的结果, 容易知道:



## 定理2.5.2.

对于给定的 $N$ ，求解问题(2.43)的最坏情形的算法复杂度为 $O(N^{3.5})$ 。

证明：注意到对于线性优化问题(2.43)，它的变量的数目和约束的数目都是 $O(N)$ 。根据Karmarkar的著名算法的结果[36]，求解线性优化问题的最优解的复杂度为 $O(N^{3.5})$ 。

## 2.5.2 模型推广

应当说明的是，本章提供的模型和算法也可以适应于其他复杂控制器。拿2阶控制器为例，在图 2.17中，P-PD结构控制器被使用，PD控制器来实现位置闭环控制，P控制器来实现速度闭环控制。相应的微分方程为：

$$J\ddot{e} + (B + Kk_{vp}k_{pd} + Kk_{vp})\dot{e} + Kk_{vp}k_{pp}e = Ja + Bv.$$

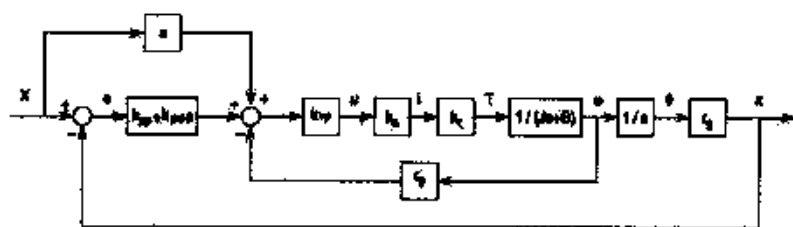


图 2.17: PD-P 控制器

## 2.5.3 仿真结果

本节将算法在Matlab/Simulink进行仿真，结果显示(2.43)的问题的求解过程可以被很高效的运行，同时跟踪误差界也确实起到了作用。平面曲线三叉戟在图中显示，该参数曲线来自[74]。将该路径起点设置在(0,0)。相关仿真用到的参数如下： $V_{\max} = 200\text{mm/s}$ ， $A_x = A_y = 1000\text{mm/s}^2$ ， $E_x = E_y = 0.1\text{mm}$ ， $K = k_0 k_t r_g = 0.2\text{Nm}^2/\text{V}$ ， $J = 0.03\text{kgm}^2$ ， $B = 0.05\text{kgm}^2/\text{s}$ ， $k_p = 1000\text{V/mm}$ ， $k_d = 25\text{V}/(\text{mm/s})$ 。离散点数 $N$ 为 $N = 100$ 。另外可以计

算出 $\bar{E}_x = \bar{E}_y = 0.07\text{mm}$ 。不难验证(2.28)中要求的条件是满足的,于是可以用(2.43)来求解相应的问题。

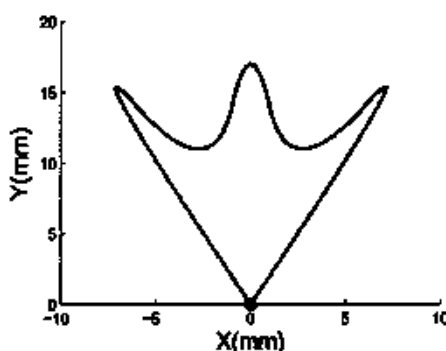


图 2.18: 三叉戟曲线

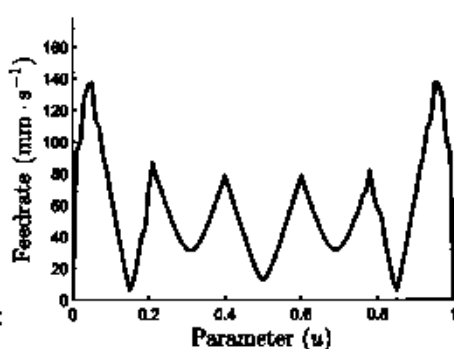


图 2.19: 切向速度曲线

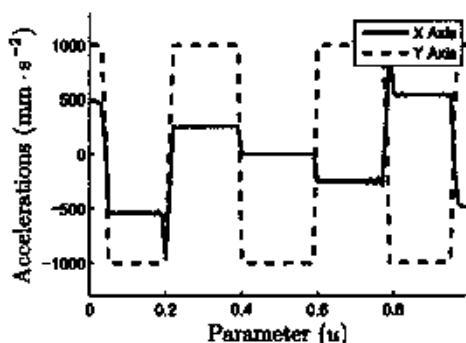


图 2.20: 分轴加速度曲线

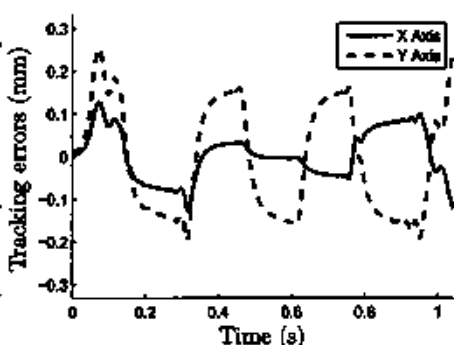


图 2.21: 分轴实时跟踪误差曲线

首先,还是计算没有跟踪误差约束的速度优化问题,切向速度和加速度在图 2.19和图 2.20中展示。显然此时整个控制过程是bang-bang的。图 2.21是实时的跟踪误差,测量的方法同2.3.4,只不过这里的控制器是基于Matlab-Simulink的,控制算法时间间隔为0.001s。显然此时的跟踪误差的峰值大约为0.25mm。

在施加跟踪误差约束 $E_x = E_y = 0.1\text{mm}$ 优化问题(2.43)的求解通过Matlab的线性优化工具箱。相关结果显示在图 2.22-2.25中。可以发现(2.40)中 $a_r$ 和 $v_r^2$ 的线性组合几乎每点都达到了边界 $\bar{E}_r$ ,这就意味着问题(2.43)的解同样具有bang-

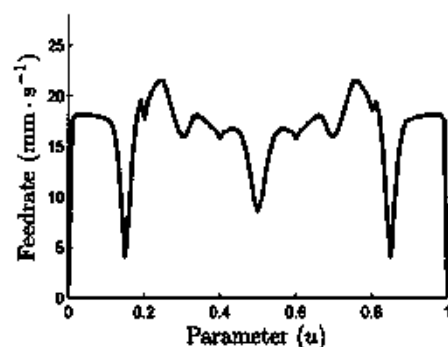


图 2.22: 切向速度曲线

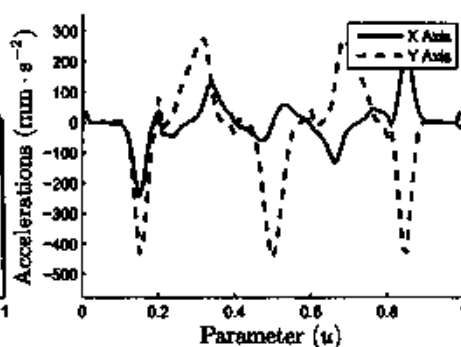
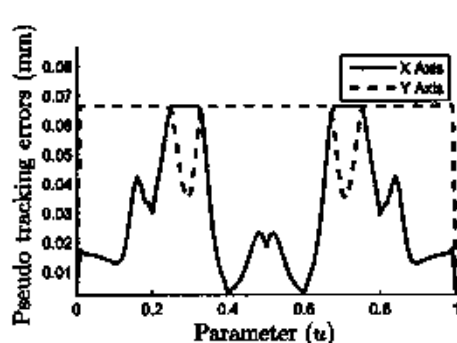
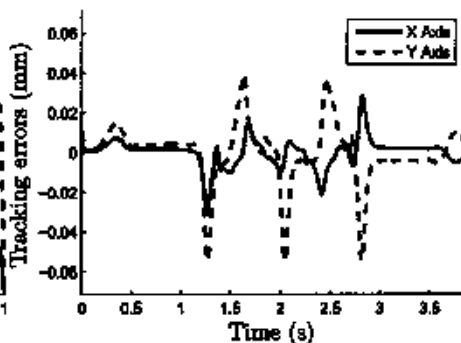


图 2.23: 分轴加速度曲线

图 2.24:  $\tilde{e}(u) = \frac{J|a_r| + Bv_r^2}{Kk_p}$ 图 2.25: 以  $\tilde{E}_r = 0.07\text{mm}$  为界的分轴跟踪误差曲线

bang结构。从图 2.25 可以发现跟踪误差的峰值在大约 0.06mm 左右。这意味着跟踪误差的界满足要求。实际上当用  $\frac{J|a_r| + Bv_r^2}{Kk_p} \leq \tilde{E}_r$  替换  $e_r \leq E_r$  的时候, 可行域变小了。当跟踪误差从 0.25mm 降到 0.06mm 的同时, 加工时间从 1.1s 增长到 3.9s。

图 2.26-2.28 显示了三叉戟大曲率位置的放大的情形。绿色星状线标记了原始曲线, 蓝色点状线标记了无跟踪误差约束输出轮廓, 红色点状线标记了跟踪误差约束边界是 0.1mm 的输出轮廓。不难发现轮廓误差明显的减小了。

同样对于问题(2.41)这个非线性优化问题(NLP)和问题(2.43)线性优化问题(LP)。本文做了计算效率的比较,  $N$  是离散点的数目, 结果被列在表 2.3 中。

不难发现, 问题(2.43)在离散点数目比较多的情况下仍然可以高效求解。

$N$	100	150	200	300	500
Time(NLP)	3.24s	8.10s	10.80s	Fail	Fail
Time(LP)	0.25s	0.40s	0.50s	0.50s	1.50s

表 2.3: NLP方法和LP对于不同的 $N$ 的计算效率

## 2.6 本章小结

如何充分利用CNC的机床的能力来充分的提高生产效率, 并且同时控制加工误差是一个很有意义的研究课题。此类问题一般可以被描述成时间最优控制下的轨迹优化问题, 进而转化成带有多约束的优化问题。为了产生光滑的速度曲线, 加速度和加加速度通常被施加约束。另一方面, 由于过大的运动学状态势必导致伺服系统的动态响应延迟, 加工误差会无形增大。于是考虑带动力学约束的时间最优模型下的轨迹优化问题就显得格外重要。这种思想的出发点就是在开环优化阶段同时保证加工精度。

此外文中讨论了高阶伺服系统的一般情形, 建立了运动学和动力学之间的关系。同时, 为了求解复杂的非线性优化问题, 本文讨论了一组很弱情形下的约束变换策略, 根据这种策略, 复杂的动力学和高阶的运动学约束被松弛成线性约束, 这样可以有效的求解原问题的一个近似最优解。

针对低阶伺服控制器的特殊情形, 进一步发展了以上思路, 借助点最大的结论, 将该问题转化为一个线性优化问题。尽管线性优化算法可以高效计算此类问题, 但是进一步紧化约束条件的做法也在一定程度上影响了跟踪误差的控制效果。

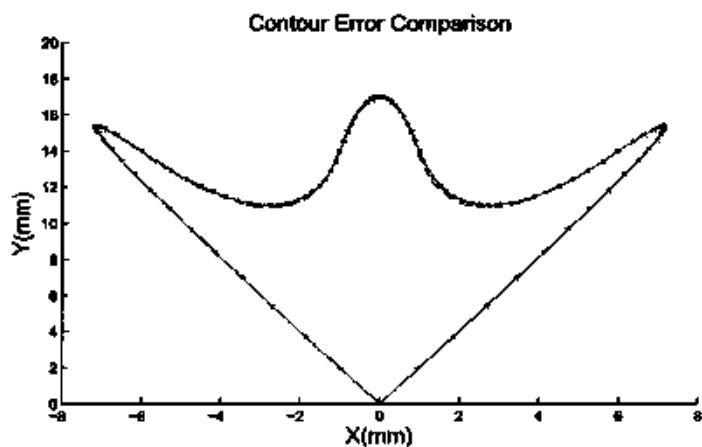


图 2.26: 轮廓误差对比  
Contour Error Comparison

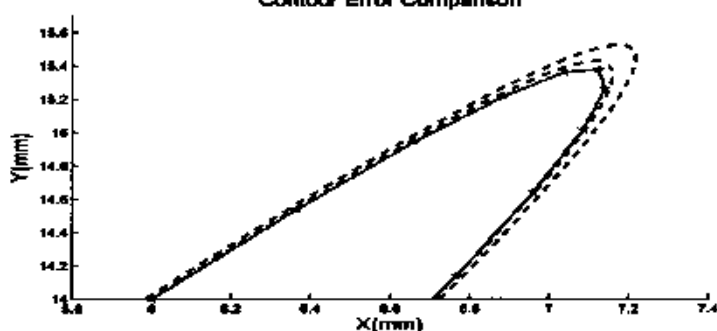


图 2.27: 右转角  
Contour Error Comparison

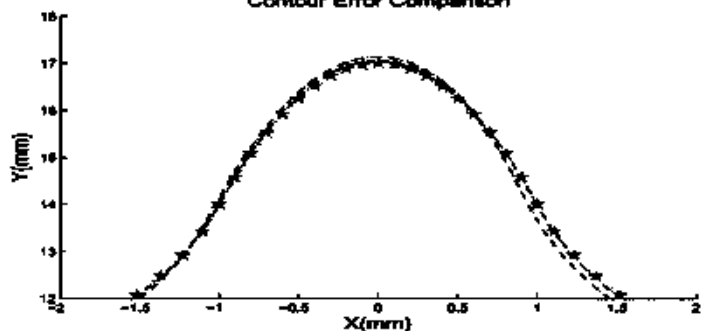


图 2.28: 中间隆起

此页不缺内容



## 第三章 跟踪误差与轮廓误差控制

### 3.1 本章简介

本章将给出控制加工误差的两种不同的方法。第3.2节提出了CNC加工过程中的reshape方法,该方法最早出现在机械臂伺服系统,近几年相同的思想被Farouki等人[19, 65]研究过。在控制阶段,由于伺服控制器带宽的限制,在大曲率位置会有相应的延迟,如果一味的加大增益来对电机进行控制,可能出现非平滑控制,这样对控制器会带来很多不良的影响。实际上就控制器的反馈过程来讲,误差很难消除。reshape方法是一种开环控制方法,该方法通过修改控制指令,通过前馈的方式对输入信号做适当的修改,使得输出曲线就是实际的理想曲线。本文考虑了PID控制系统下,带摩擦力等外部扰动的伺服模型,非线性摩擦部分通过机器学习方法来估计,在对其进行补偿后,可以通过反求一个低阶ODE进而修改输入指令。从实验仿真可以发现在大曲率位置的拓扑改变是明显的。此外,本文对该方法的鲁棒性也做了相应的讨论。

第3.3节使用了一种闭环的方法来控制跟踪误差。自抗扰控制技术ADRC (Active Disturbance Rejection Control),是Han[30]建立的新颖的控制方法,该方法并不依赖具体的控制模型。ADRC是对经典的PID控制器的改进,具有简单、高效、高精的特点。ADRC可以利用状态观测器来对系统总的扰动进行估计,并通过微分跟踪器,和非线性反馈等方式进行调节和控制,它的优点也吸引了一大批学者(见[27],[94],[80],[62]等)。与传统的采用ESO观测器不同的是,这里采用了RESO(降阶观测器)来对系统扰动进行估计,根据已有的相关理论[78],在控制效果方面,使用RESO要好于ESO。最后,针对CNC加工的一个实际例子,本文进行了仿真,仿真的结果也证实了相关结论。

### 3.2 reshape方法

#### 3.2.1 带摩擦力的CNC伺服系统

这里仍然选取PID作为CNC系统的控制器,由于在实际当中,存在未知摩擦力等扰动,这里设外界扰动为 $T_f$ 。这样,整个系统可参见图3.1。 $T_d$ 是伺服

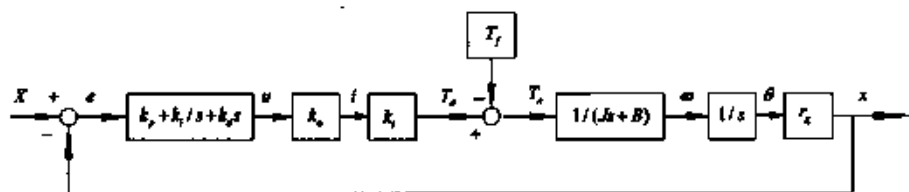


图 3.1: 带扰动的PID闭环伺服控制器

控制的输出力矩, 受到不确定的摩擦力矩  $T_f$  的磨损, 变为名义控制力矩  $T_n$ 。相关环节的方程如下:

$$\ddot{x} = -\frac{B\dot{x}}{J} + \frac{r_g T_n}{J}, \quad (3.1)$$

$$T_d = T_n + T_f, \quad (3.2)$$

$$T_d = k_d k_t u. \quad (3.3)$$

### 3.2.2 机器学习方法简介

这一节将介绍机器学习的方法, 随后将介绍其中的结构神经网络模型, 这个模型被用来估计带有跳跃点的非线性映射。

机器学习方法最初研究的动机是让计算机系统具有人的学习能力, 以便实现人工智能。随着计算机技术的日益发展, 人类手机数据、存储数据的能力有了极大的提高, 在社会各个领域积累了大量的数据。如何对这些数据进行分析, 掌握其中的规律几乎成了各个领域的共同需求。什么叫机器学习, 这一概念没有统一的定义。一种广义的定义是: 机器学习是研究如何使用机器模拟人类学习活动的一门学科。稍微严格的定义是: 机器学习是一门研究机器获取新知识和新技能, 并识别现有知识的学问。

机器学习分为监督和非监督学习, 监督学习的训练数据中包括样本的真实输出, 因此可以利用真实输出来评价学习结果的优劣; 非监督学习的训练数据中没有经验知识, 学习过程中需要建立对输出的评价方法。随后本文采用的SNN就是监督学习一类。这一类学习的流程如图 3.2。

反向传播神经网络[11] BPNN (Back Propagation Neural Network)就是一类应用很广的监督类机器学习方法, 它经常被用来估计非线性映射, 见图 3.3。





图 3.2: 监督类机器学习流程图

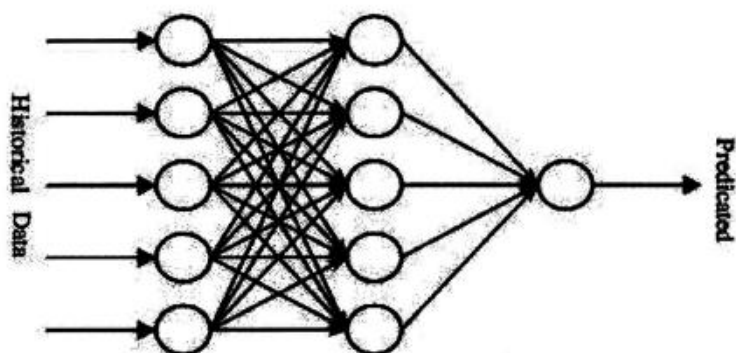


图 3.3: BPNN模型

根据机器学习系统的定义, 假定要估计的函数满足以下映射

$$F: \mathbf{x} \rightarrow y,$$

其中向量 $\mathbf{x} \in R^I$ 而且 $y \in R$ 。假设点集 $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kI}), k = 1, \dots, N$ 和它们所对应的值 $y_k, k = 1, \dots, N$ 已知, 这里的任务是建立BPNN模型来估计映射 $F$ 。下标 $k$ 表示采样点集。

通常情况下, BPNN模型(图 3.3)由三层网络组成, 输入层, 隐藏层和输出层。对于一个输入 $\mathbf{x}_k$ , 第 $j$ -th个隐藏层神经元 $h_j (j = 1, 2, \dots, H)$ 被表示成

$$h_{kj} = f\left(\sum_{i=1}^I w_{ij}^1 \cdot x_{ki} + \theta_j^1\right),$$

其中 $f(x)$ 指如下sigmoid函数:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)},$$

$w_{ij}^1$ 是第 $i$ 个输入和 $h_j$ 之间的权, 并且 $\theta_j^1$ 是第 $j$ 个隐藏层的偏度值。输出层 $\hat{y}_k$ 可以被表示成:

$$\hat{y}_k = f\left(\sum_{j=1}^H w_j^2 \cdot h_{kj} + \theta^2\right), \quad (3.4)$$

其中 $w_j^2$ 和 $\theta^2$ 是相应的权和偏度。

为了建立BPNN模型, 需要训练 $w_{ji}^1, \theta_j^1, w_j^2, \theta^2$ 等参数通过某些学习规则。在这之前需要给这些参数一个初值。学习过程如下, 根据(3.4)计算 $\hat{y}_k, k = 1, \dots, N$ , 更新参数的值:

$$\begin{aligned} w_j^2 &= w_j^2 + \eta \cdot (\hat{y}_k - y_k) \cdot \hat{y}_k \cdot (1 - \hat{y}_k), \\ w_{ji}^1 &= w_{ji}^1 + \eta \cdot (\hat{y}_k - y_k) \cdot w_j^2 \cdot h_j \cdot (1 - h_j) \cdot x_{ki}, \\ \theta^2 &= \theta^2 + \eta \cdot (\hat{y}_k - y_k) \cdot \hat{y}_k \cdot (1 - \hat{y}_k), \\ \theta_j^1 &= \theta_j^1 + \eta \cdot (\hat{y}_k - y_k) \cdot w_j^2 \cdot h_j \cdot (1 - h_j), \end{aligned}$$

其中 $\eta$ 是学习参数, 选择在0.5-0.7之间。这样的更新过程大约经过1000步左右, 直到优化目标 $J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\hat{y}_k - y_k)^2$  小于给定值为止。

尽管三层神经网络BPNN可以拟合任意的光滑非线性函数, 但是对于有间断点的函数显然拟合效果会不好。图 3.5中的例子来说明这个问题, 其中

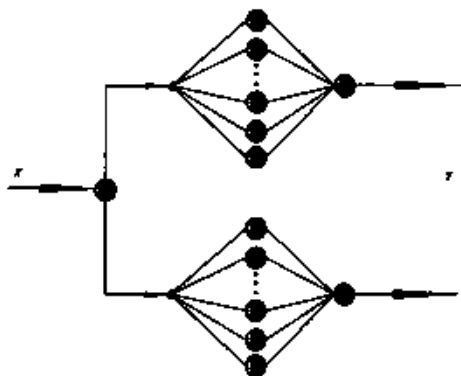


图 3.4: SNN模型

蓝色分段直线代表原函数，红色是不同的神经网络拟合函数。众所周知，Strikbek摩擦力（见仿真部分）包含了跳跃点。所以对于类似这种不连续函数，本文采用结构神经网络SNN(Structured Neural Network)来对它进行好的估计，见图 3.4 [66]。

假设函数  $F$  有有限个跳跃点  $c_1, c_2, \dots, c_N$ ，也就是它在如下的区间上  $I_i = [c_{i-1}, c_i], i = 2, \dots, N$  连续。那么它可以用如下SNN模型估计：

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N+1} I_i(x) \cdot \hat{F}_i(x),$$

其中  $I_i(x)$  是第  $i$  个区间的集函数，定义如下：

$$I_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_i \\ 0 & x \notin I_i, \end{cases}$$

其中  $\hat{F}_i(x)$  是BPNN模型对  $F(x)$  在区间  $I_i$  上进行的估计。

### 3.2.3 reshape方法

假设平面曲线  $(x(u), y(u)), u \in [0, 1]$  被用于本文的方法。在施加了速度，加速度等运动学约束之后，通过插补算法，可以得到一系列插补点  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ ，例如通过[90]中的优化算法。这些插补点被送入CNC的控制器，由于存在跟踪误差，实际的输出曲线会和理想曲线差别很大。

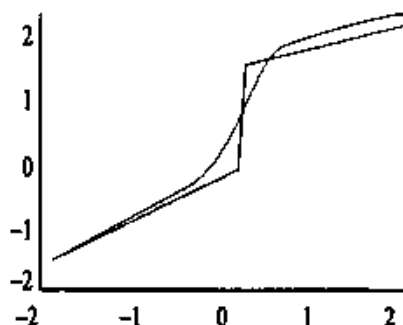


图 3.5: BPNN 估计

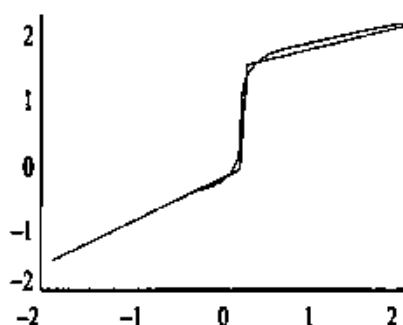


图 3.6: SNN 估计

这一小节中, 本文将给出计算一系列新的插补点的方法, 新的插补点记做  $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, N$ 。这样当把这些插补点送往控制器中的时候, 实际的输出曲线就是实际想要的理想曲线  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ 。这个过程包含了以下三步:

### 3.2.3.1 SNN对摩擦力的估计

这一小节中, 这里将展示如何借用SNN来估计系统为止的扰动, 也就是估计通过  $\omega$  来估计  $T_f$  (见图 3.1)。

在某些复杂情况下, 扰动不仅和速度有关, 还是其它动力学的函数。这里假定扰动只和速度有关, 更一般的情况可以采用类似的处理方法。

以  $x$  轴作为例子, 为了使用SNN来估计函数  $T_f = f(\omega)$ , 这里首先需要收集样本数据, 作为SNN计算的输入和输出值。根据(3.1), (3.2)和(3.3)有:

$$T_f = T_d - T_n = k_a k_t u - J\ddot{x}/r_g - B\dot{x}/r_g. \quad (3.5)$$

注意到  $\omega(t) = \frac{\dot{x}(t)}{r_g}$ 。因此, 在机械参数已知的情况下, 如果可以测量控制电压  $u$  和输出  $x$ , 便能够计算数组  $(\omega_k, T_{fk}), k = 1, \dots, N$ 。

实际上  $u$  和  $x$  的值可以通过具体的测量工具得到。在后面的仿真中, 用示波器来代替这一过程, 收集相关数据。为了保证预测的精度, 需要采集的学习的数据的值域应当尽可能大, 这样可以充分覆盖更一般的情形。一个常用的技巧是, 将原始的插补点  $(x_k, y_k), k = 1, \dots, N$  作为输入, 先进行一次“预加工”, 记录此时的数值作为样本值。

记 $T$ 是插补周期, 由于插补点 $(x_k, y_k), k = 1, \dots, N$ 已经足够密, 因此 $\dot{x}_k = \dot{x}(kT), \ddot{x}_k = \ddot{x}(kT), k = 1, \dots, N$ 可以用有限差分去估计, 对 $k = 2, \dots, N-1$ :

$$\dot{x}_k \approx \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2T} = \frac{x(k(T+1)) - x(k(T-1))}{2T}, \quad (3.6)$$

$$\ddot{x}_k \approx \frac{x_{k+1} + x_{k-1} - 2x_k}{T^2} = \frac{x(k(T+1)) + x(k(T-1)) - 2x(k(T))}{T^2}. \quad (3.7)$$

通常假定 $\dot{x}_1 = \ddot{x}_N = 0$ . 将插补点 $(x_k, y_k), k = 1, \dots, N$ 送入控制器的時候, 就可以记录电压 $u_k, k = 1, \dots, N$ 的值. 利用(3.5), 相应的 $(w_k, T_{fk}), k = 1, \dots, N$ 值可以被计算如下:

$$T_{fk} = k_a k_d u_k - J \ddot{x}_k / r_g - B \dot{x}_k / r_g, \quad (3.8)$$

$$\omega_k = \dot{x}_k / r_g,$$

对所有的 $k = 1, \dots, N$ .

至此, 可以在得到样本数组 $(w_k, T_{fk}), k = 1, \dots, N$ 的情况下用SNN来拟合函数 $T_f = f(\omega)$ . 在假定未知扰动 $T_f$ 有唯一的间断点的情况下, 不妨 $\omega = 0$ , 此时可以用SNN对 $T_f$ 进行估计.

为了保证预测的精度, 对数组 $(w_k, T_{fk})$ 进行标准化变换. 这样做的主要目的在于保证数值的统计特征比较均匀. 标准化的数组拥有零均值和单位方差, 具体的就是:

$$\bar{\omega}_k = \frac{\omega_k - \omega_{\min}}{\omega_{\max} - \omega_{\min}}, \quad \bar{T}_{fk} = \frac{T_{fk} - T_{f\min}}{T_{f\max} - T_{f\min}}, k = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

其中 $\omega_{\max}$ 和 $\omega_{\min}$ 是 $\omega_k$ 的最大和最小值,  $T_{f\max}$ 和 $T_{f\min}$ 是 $T_{fk}$ 的最大和最小值. 数组 $(\bar{\omega}_k, \bar{T}_{fk}), k = 1, \dots, N$ 将被用作构建SNN, 范围是 $(0, 1)$ .

最后, 记用SNN方法拟合的 $\omega \rightarrow T_f$ 的映射为 $\hat{T}_f$ .

### 3.2.3.2 理想力矩计算

以 $x$ 轴为例, 在图3.1中, 名义力矩 $T_n$ 满足(3.1).

因为插补点 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ 足够的密,  $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 可以通过计算(3.6)和(3.7)得到. 对于等式(3.1),  $T_n = T_n(\dot{x}T)$ 可以通过(3.10)计算得到:

$$T_{n_k} = T_n(kT) = \frac{J \ddot{x}_k + B \dot{x}_k}{r_g}. \quad (3.10)$$

因此, 通过(3.2)理想力矩为 $T_{di} = T_{ni} + \hat{T}_{fi}, i = 1, \dots, N$ , 其中 $\hat{T}_{fi}$ 是在输入是 $\omega_i = \frac{\dot{x}_i}{r_g}$ 的时候经过SNN估计的力矩.

### 3.2.3.3 计算新的插补点

将等式(3.10)代入(3.3)有:

$$k_d \ddot{e} + k_p \dot{e} + k_i e = \frac{\dot{T}_d}{k_a k_i}. \quad (3.11)$$

为了得到新的跟踪误差需要求解一个ODE(3.11), 它的初值为 $e(0) = \dot{e}(0) = 0$ . 这里用固定步长的Runge-Kutta方法求解一个二阶ODE(3.11)后, 可以得到跟踪误差 $e_i = e(iT), i = 1, \dots, N$ . 然而,  $iT, i = 1, \dots, N$ 点以外的函数值 $T_d(t)$ 需要知道. 为了得到这些值, 对 $T_d$ 用三次样条进行插补, 从而可以计算它的导函数.

既然 $T_d$ 分段连续, 就需要分段求解(3.11). 以第一个分段区间为例, 假定有 $k-1$ 个分段区间, 结点是 $t_1, t_2, \dots, t_k$ . 这里用如下的三次多项式样条去估计 $T_d$ :

$$S(t) = \begin{cases} S_1(t), t \in [t_1, t_2] \\ S_2(t), t \in [t_2, t_3] \\ \dots \\ S_{n-1}(t), t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

其中 $S(t)$ 被定义成

$$S_i(t) = \frac{z_{i+1}(t-t_i)^3 + z_i(t_{i+1}-t)^3}{6h_i} + \left(\frac{T_{d_{i+1}}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1}\right)(t-t_i) + \left(\frac{T_{d_i}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i\right)(t_{i+1}-t), \quad (3.12)$$

其中 $t_i = iT$ ,  $h_i = t_{i+1} - t_i$ . 这样值 $z_i$ 可以通过求解如下线性等式获得:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = 6\left(\frac{T_{d_{i+1}} - T_{d_i}}{h_i} - \frac{T_{d_i} - T_{d_{i-1}}}{h_{i-1}}\right) \\ z_k = 0. \end{cases}$$

有了新构建的函数 $T_d(t)$ , 采用固定步长的四阶Runge-Kutta方法, 就会得到 $e_i, i = 1, \dots, k$ . 对于第二个区间,  $e$ 和 $\dot{e}$ 的初值被选为第一个区间的末值. 这样做是合理的, 因为 $e$ 和 $\dot{e}$ 也是连续的 (即使系统受到来自外界的不连续扰动).

重复这样的过程, 可以求得所有的 $e_i, i = 1, \dots, N$ . 最后, reshape下新的输入为

$$X_i = x_i + e_i, i = 1, \dots, N.$$

同样的过程可以用在 $y$ 轴。这样经过reshape后的信号 $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, N$ 就可以求得。

### 3.2.3.4 鲁棒性分析

这一小节将讨论reshape方法的鲁棒性，也就是讨论在动力学参数不精确的情况下文中方法的有效性。

首先，从(3.1)，(3.2)和(3.3)可以得到：

$$\frac{J}{K} \ddot{x} + \left( \frac{B + Kk_d}{K} \right) \dot{x} + k_p \dot{x} + k_i x + \frac{1}{k_a k_t} \frac{dT_f}{dt} = k_d \ddot{X} + k_p \dot{X} + k_i X. \quad (3.13)$$

此方程对分析系统的鲁棒性而言非常重要。为了避免分析 $\frac{dT_f}{dt}$ 的导数，做替换 $y = \int_0^t x(\tau) d\tau$ ,  $Y = \int_0^t X(\tau) d\tau$ 。由于初值 $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ 和 $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$ 和 $\dot{Y}$ 都是零，方程(3.13)变成：

$$\frac{J}{K} \ddot{y} + \left( \frac{B + Kk_d}{K} \right) \dot{y} + k_p \dot{y} + k_i y + \frac{T_f}{k_a k_t} = k_d \ddot{Y} + k_p \dot{Y} + k_i Y. \quad (3.14)$$

与以上真实模型相比，在reshape过程中，实际考虑的是如下方程：

$$\frac{J}{K} \ddot{y} + \left( \frac{B + Kk_d}{K} \right) \dot{y} + k_p \dot{y} + k_i y + \frac{\hat{T}_f}{k_a k_t} = k_d \ddot{Y} + k_p \dot{Y} + k_i Y. \quad (3.15)$$

其中 $\hat{T}_f$ 是扰动的估计，这个估计是通过SNN模型得到的。在(3.14)和(3.15)，左端所包含的 $y$ (理想输出)是已知的，右端的 $Y$ 是要求的。根据以上讨论，实际当中，参数是不准确的。假设 $J$ 和 $B$ 被错误的估计成 $\bar{J}$ 和 $\bar{B}$ 。因此，在参数不精确的情况下，采用reshape方法的时候，是用的如下的方程来计算 $Y$ 的：

$$\frac{\bar{J}}{K} \ddot{y} + \left( \frac{\bar{B} + Kk_d}{K} \right) \dot{y} + k_p \dot{y} + k_i y + \frac{\tilde{T}_f}{k_a k_t} = k_d \ddot{Y} + k_p \dot{Y} + k_i Y. \quad (3.16)$$

其中 $\tilde{T}_f$ 是在参数 $\bar{J}$ ,  $\bar{B}$ 的情况下，通过SNN模型对系统扰动的估计。

因此，通过(3.16)将得到非精确的reshape的值 $\tilde{Y}$ ，然而精确的reshape值 $Y$ 是应当通过方程(3.15)求得的。

在执行reshape的过程的时候，只有方程(3.15)的右边包含变量。这样定义方程(3.15)的左端为 $\theta(t)$ ，此时方程(3.15)变成：

$$k_d \ddot{Y} + k_p \dot{Y} + k_i Y = \theta(t), \quad (3.17)$$

其中

$$\theta(t) = \frac{J}{K} \ddot{y} + \left( \frac{B + Kk_d}{K} \right) \dot{y} + k_p y + k_i y + \frac{\hat{T}_f}{k_a k_t}.$$

另外, 记方程(3.16)的左端为 $\tilde{\theta}(t)$ 。为了分析 $Y, \dot{Y}, \ddot{Y}$ 还有 $\tilde{Y}, \dot{\tilde{Y}}, \ddot{\tilde{Y}}$ 的关系, 将方程(3.17)变形成如下矩阵形式, 并记 $\xi = (Y, \dot{Y})^T$ :

$$\dot{\xi} = A\xi + \eta(t), \xi(t_0) = \xi_0, \quad (3.18)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{k_d} & -\frac{k_2}{k_d} \end{pmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(t) \end{pmatrix}.$$

虽然, 这个ODE的右端可以是不连续的, 但是可以考虑它的分段连续情形。假设这里有 $k$ 个区间,  $I_1, \dots, I_k$ , 在每个区间 $I_k$ 上 $\theta(t)$ 连续。如今考虑ODE(3.18)在第一个区间 $I_1$ 上的情形。假设 $\tilde{\xi}$ 对于(3.18)来件的解关于参数是不精确的, 满足

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + \tilde{\eta}(t), \tilde{\xi}(t_0) = \tilde{\xi}_0, \quad (3.19)$$

其中 $\|\eta(t) - \tilde{\eta}(t)\|_1 \leq \varepsilon$ 和 $\|\cdot\|_1$ 表示1-范数。

方程(3.18)的解和(3.19)可以被写成:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 + \int_0^t A\xi(\tau) + \eta(\tau) d\tau, \\ \tilde{\xi}(t) &= \tilde{\xi}_0 + \int_0^t A\tilde{\xi}(\tau) + \tilde{\eta}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

这样有

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\|_1 &\leq \|\xi_0 - \tilde{\xi}_0\|_1 + \int_0^t \|A\xi(\tau) - A\tilde{\xi}(\tau)\|_1 d\tau + \int_0^t \|\eta(\tau) - \tilde{\eta}(\tau)\|_1 d\tau \\ &\leq \varepsilon_0 + \|A\|_1 \int_0^t \|\xi(\tau) - \tilde{\xi}(\tau)\|_1 d\tau + \int_0^{T_1} \|\eta(\tau) - \tilde{\eta}(\tau)\|_1 d\tau \\ &\leq \varepsilon_0 + \|A\|_1 \int_0^t \|\xi(\tau) - \tilde{\xi}(\tau)\|_1 d\tau + \varepsilon_1 \\ &= \varepsilon + \|A\|_1 \int_0^t \|\xi(\tau) - \tilde{\xi}(\tau)\|_1 d\tau, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ ,  $T_1$ 是第一个区间 $I_1$ 的长度。

根据Grownwall不等式[55]有:

$$\|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\|_1 \leq \varepsilon e^{\|A\|_1 t} \leq \varepsilon e^{\|A\|_1 T_1}.$$



这样, 只要初值 $\xi_0$ 和 $\eta$ 的变化比较小, 那么在区间 $I_1$ 上, 新的解就不能离原来的解太远。在余下的区间 $I_2, \dots, I_k$ 中同样可以做类似的分析。

因此, 为了考察reshape方法的鲁棒性, 只需要考察当参数 $J$ 和 $B$ 微小变动时, 对 $\eta$ 带来的影响, 或者说是 $\theta(t)$ 的变化情况。从(3.17)可以发现, 不考虑 $\hat{T}_f$ 部分的时候,  $\theta(t)$ 线性取决于 $B$ 和 $J$ 。所以, 需要知道 $J$ 和 $B$ 在微小的变化情况下,  $\hat{T}_f$ 的变化。为此记 $\hat{T}_f$ 为 $\hat{T}_f(J, B)$ 。

注意到 $\hat{T}_f(J, B)$ 是从映射

$$F: \omega \rightarrow T_f,$$

中学习到的, 而且 $T_f$ 可以通过 $u$ 和 $x$ 的观测来得到, 具体的:

$$T_f = T_d - T_n = k_a k_t u - \frac{J\ddot{x} + B\dot{x}}{r_g}.$$

显然,  $T_f$ 取决于 $J$ 和 $B$ 的连续变化。这样当 $J$ 和 $B$ 有一个微小的变化 $\Delta J$ 和 $\Delta B$ 时, 新的映射为:

$$\tilde{F}: \omega \rightarrow T_f + \varepsilon, \quad (3.20)$$

其中 $\varepsilon = \frac{\Delta J\ddot{x} + \Delta B\dot{x}}{r_g}$ 。因此, 在 $J$ 和 $B$ 有微小扰动的时候,  $\hat{T}_f$ 和 $\tilde{T}_f$ 是充分近的。

基于以上的分析可以发现, 即使在参数不精确的情况下, 采用reshape方法得到的曲线也不会造成太大的偏离。当然, 前提是这些参数的扰动很小。这也就说明了reshape曲线具有鲁棒性的特点。

### 3.2.4 仿真结果

#### 3.2.4.1 系统搭建

这里用文献[82]中的蝴蝶曲线作为例子, 见图 3.7。首先本文用[90]中的方法生成速度曲线, 这里所用的运动学边界为 $V_m = 150\text{mm/s}$ 和 $A_{x\max} = A_{y\max} = 3000\text{mm/s}^2$ 。进而用[91]中的方法计算插补点 $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ 其中 $N$ 为100, 插补周期为 $1\text{ms}$ 。

第一步, 离线训练SNN, 从而得到对扰动 $T_f$ 的估计模型。以 $x$ 轴为例, 由于 $x_k$ 已经知道, 从等式(3.8)中不难发现还需要知道 $u_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ 。类似的电压 $u$ 通过图3.9中的示波器记录。相应的系统的参数列在表3.1中。

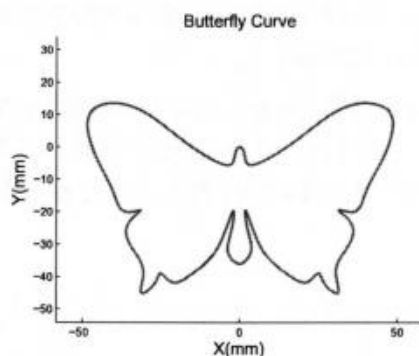


图 3.7: 蝴蝶曲线

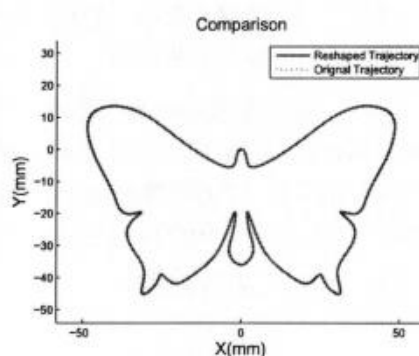


图 3.8: 实验一中结果对比

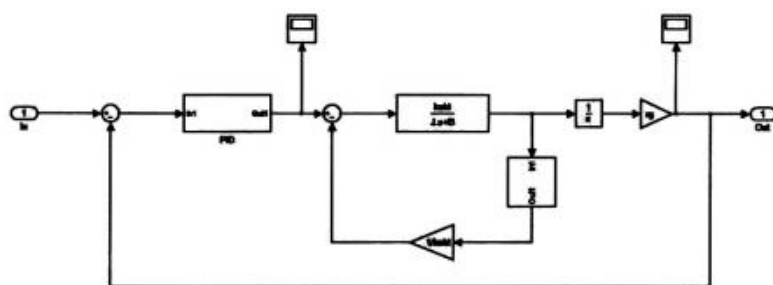


图 3.9: Simulink环境流程图

表 3.1: 仿真中用到的参数

含义	参数	单位	取值
电流增益	$k_a$	$A/V$	5
电枢电阻	$k_t$	$Nm/A$	2
传动比	$r_g$	$rad/m$	0.005
传输增益	$K$	$Nm^2/V$	0.05
库仑摩擦系数	$f_c$	$Nm$	500
静摩擦系数	$f_s$	$Nm$	100
粘滞摩擦系数	$f_v$	$Nm/rad$	0.05

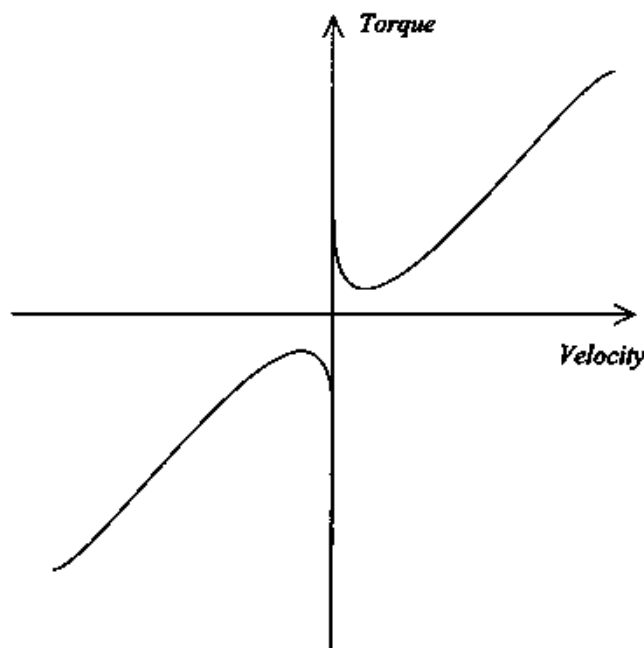


图 3.10: Stribeck型摩擦力模型

为了和真实的环境相吻合, 如下的Stribeck型摩擦力[71]被用来作为未知系统损耗进行仿真, 如图 3.10。

$$T_f = (f_c + f_s e^{-(\frac{\omega}{\omega_s})^2} + f_v |\omega|) \text{sign}(\omega), \quad (3.21)$$

其中 $f_c$ 是库伦摩擦力,  $f_s$ 是静摩擦力参数,  $f_v$ 是粘滞摩擦力参数,  $\omega$ 是电机角速度。这些参数的值在表3.1中给出。

现在,  $u_k, k = 1, \dots, N$ 可以通过 $x_k, k = 1, \dots, N$ 来获得, 因此扰动模型 $\hat{T}_f$ 也可以得到。

根据本节的方法, 可以得到 $x$ 轴的reshape坐标 $X_k, k = 1, \dots, N$ 。

#### 3.2.4.2 仿真结果

这里将进行三组实验。前两组实验分别采用不同的转动惯量, 最后一组用来验证鲁棒性。这三组实验的PID参数均相同。

实验一: 小参数 $J$ 和 $B$ 。

表 3.2: 仿真参数

参数	实验一	实验二
$J$	$0.003\text{kgm}^2$	$0.01\text{kgm}^2$
$B$	$0.006\text{kgm}^2/\text{s}$	$0.02\text{kgm}^2/\text{s}$
$K_p$	$1000\text{V}/\text{mm}$	$1000\text{V}/\text{mm}$
$K_i$	$1000\text{V}/(\text{mm}\cdot\text{s})$	$1000\text{V}/(\text{mm}\cdot\text{s})$
$K_d$	$10\text{V}/(\text{mm}/\text{s})$	$10\text{V}/(\text{mm}/\text{s})$

实验一中的参数在表 3.2 中列出。图 3.11-图 3.14 展示了四个大曲率位置的 reshape 路径的情况。从图中可以清楚的看到在这几个位置，修改指令前后的变化是明显的。要想得到实际位置输出，修改的指令必须事先转弯来抵消伺服器的滞后效应。从图 3.15-图 3.16，可以发现  $x$  轴和  $y$  轴的跟踪误差峰值均在  $250\mu\text{m}$ - $300\mu\text{m}$  之间。经过 reshape 方法，可以发现输出曲线和实际的理想曲线的差几乎是零。图中小的波动是由于数值解所带来的。另外，图 3.23-图 3.26 显示了通过 SNN 对磨损电压的估计效果，不难发现估计效果比较理想。

#### 实验二：大参数 $J$ 和 $B$ 。

实验二中用到的参数在表 3.2 中，结果显示在图 3.17-图 3.20 中。比较实验一，不难发现 reshape 曲线较原曲线产生了更大的变化。在图 3.19 中，reshape 路径包含了一个圈用来响应控制器对于大曲率位置的相应时滞。同样的问题在图 3.20 中也可以发现。不难观测到此时过大的惯性产生过大的误差，就如图 3.21 和图 3.22 中所展示的一样。

#### 实验三：鲁棒性。

本实验仍然采用实验一中的参数。这里假定对参数  $J$  和  $B$  估计不精确。精确值是  $J = 0.003$ ,  $B = 0.006$ 。估计值为  $\bar{J} = 0.00375$ ,  $\bar{B} = 0.0045$ 。假定其余的参数值是精确的。不难发现，这里的估计误差百分比达到了 25%，这样做是为了方便观察鲁棒性的效果，实际当中的估计误差百分比要远小于这个值。图 3.27 和图 3.28 展示了在错误的参数估计下所得到的结果。不难发现 reshape 曲线产生的误差不再是零，但却是在可接受的范围内，因为它们比原始的跟踪误差还是要小很多。此外，通过 SNN 对扰动进行的估计是重要一环。图 3.29 和图 3.30 是在精确参数和非精确参数下得到的函数  $u_f = f(v)$ 。在图 3.30 中可以发现一个“管道”，实际上根据 (3.8) 以及 (3.20) 不难发现这种现象是由扰动造成的。

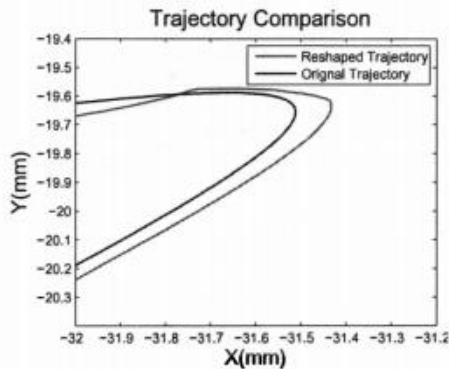


图 3.11: 实验一左拐角

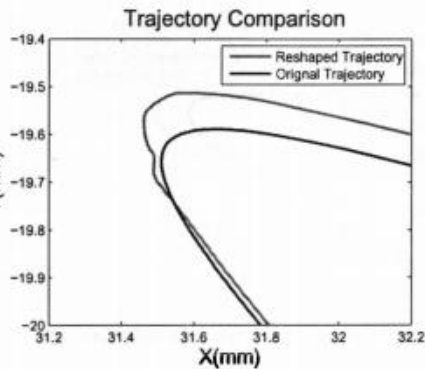


图 3.12: 实验一右拐角

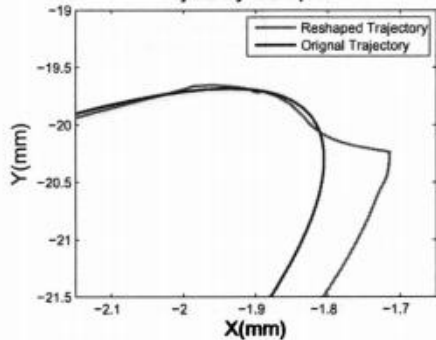


图 3.13: 实验一中间部分左拐角

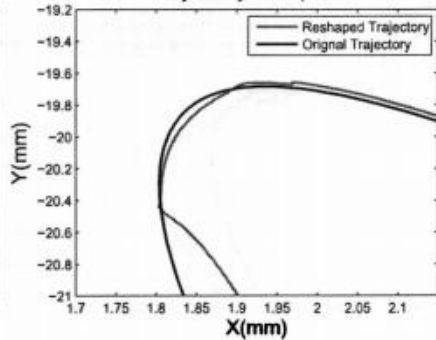


图 3.14: 实验一中间部分右拐角

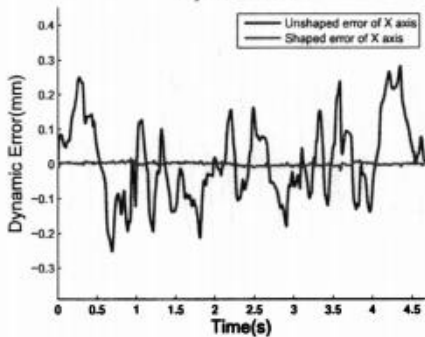


图 3.15: 实验一中X轴的跟踪误差

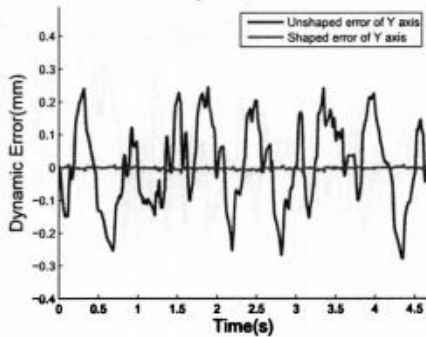


图 3.16: 实验一中Y轴的跟踪误差

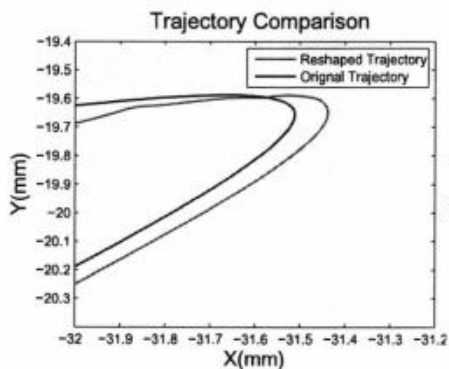


图 3.17: 实验二左拐角  
Trajectory Comparison

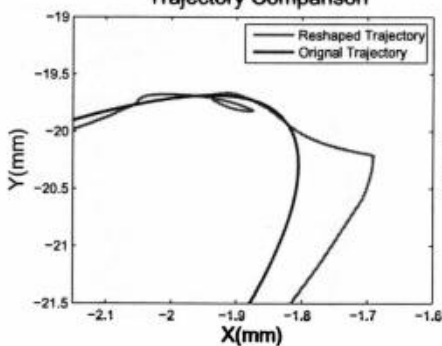


图 3.19: 实验二中间部分左拐角  
Dynamic Error

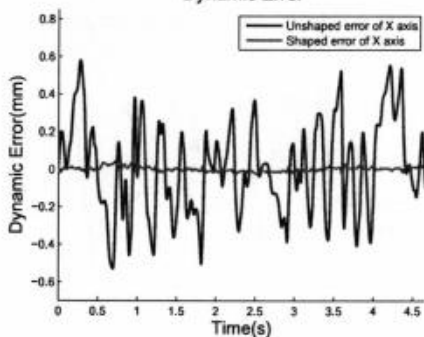


图 3.21: 实验二中X轴跟踪的误差

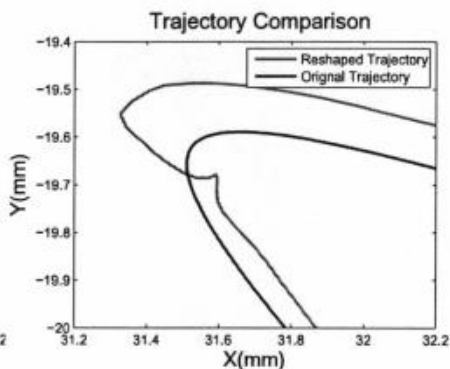


图 3.18: 实验二右拐角  
Trajectory Comparison

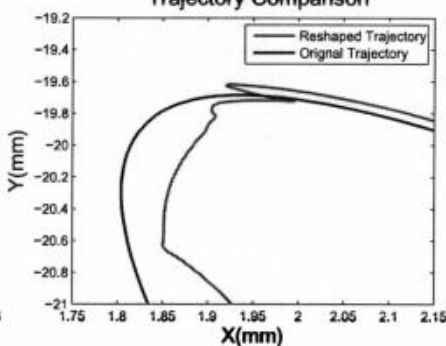


图 3.20: 实验二中间部分右拐角  
Dynamic Error

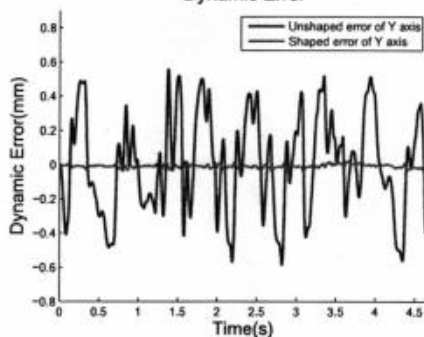


图 3.22: 实验二中Y轴跟踪的误差

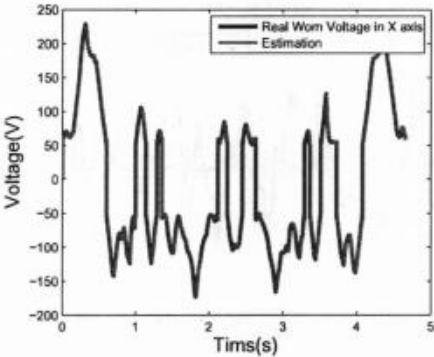


图 3.23: 实验一中X轴的磨损电压

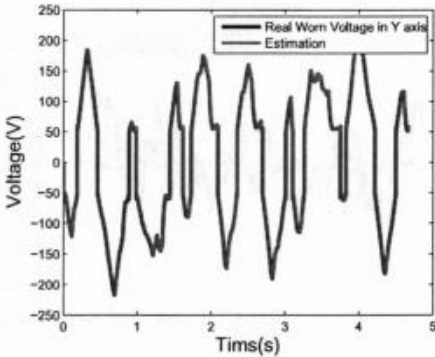


图 3.24: 实验一中Y轴的磨损电压

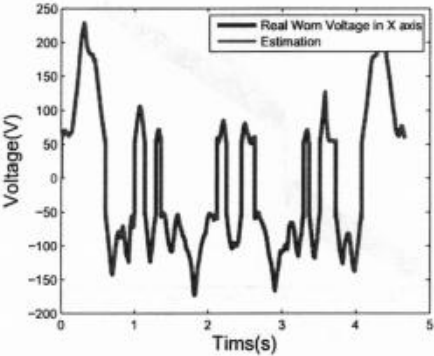


图 3.25: 实验二中X轴的磨损电压

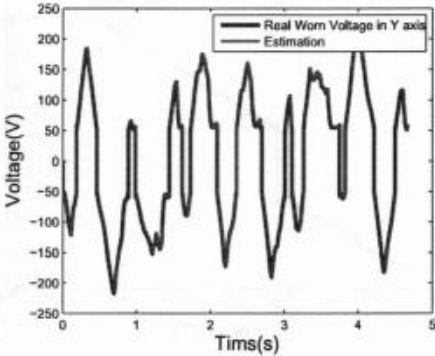


图 3.26: 实验二中Y轴的磨损电压



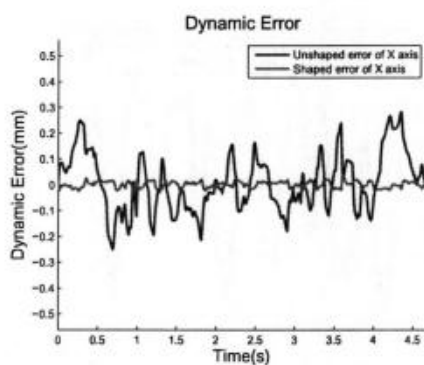


图 3.27: 实验三中X轴的跟踪误差

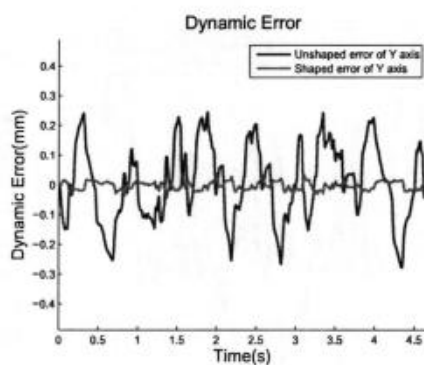


图 3.28: 实验三中Y轴的跟踪误差

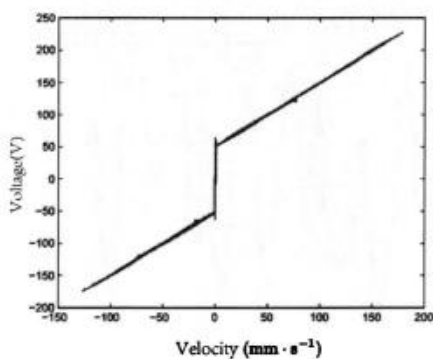


图 3.29: 无扰动情形下的磨损电压

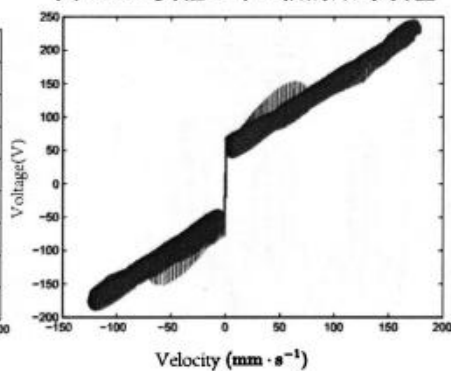


图 3.30: 有扰动情形下的磨损电压



### 3.3 自抗扰控制方法

#### 3.3.1 PMLM模型

为了描述伺服控制系统, 这里采用永磁直线电机PMLM (Permanent Magnet Linear Motor), 它的机械动力方程, 电流方程和力矩方程如下所示[79]:

$$M\ddot{x}_1 + D\dot{x}_1 + F_d = K_f i(t), \quad (3.22)$$

电压平衡方程

$$K_e \dot{x}_1 + L\dot{i} + Ri = u(t), \quad (3.23)$$

其中 $x_1$ 是运动位置,  $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$ , 其中的参数有如下含义:

$M$ 是电机质量,  $D$ 是粘滞摩擦系数,  $F_d$ 是负载力矩,  $K_f$ 是电机产生的力的系数,  $i(t)$ 电流系数,  $K_e$ 反电动势系数,  $L$ 电感常数,  $R$ 电阻,  $u(t)$ 电压。

这里, 假定负载力含有三个部分, 外部扰动(有界的)、ripple力和摩擦力[16, 71]。所以总的负载力可以写成:

$$F_d = F_{load} + F_{fric} + F_{ripple};$$

其中 $F_{load}$ ,  $F_{fric}$ 和 $F_{ripple}$ 是外界负载力, 摩擦力, 和ripple力。这里假定:

$$|F_{load}(t)| \leq F_{IM} \quad (t > 0),$$

摩擦力被假定为:

$$F_{fric} = (F_c + (F_s - F_c)e^{-(\frac{\dot{x}_1}{x_s})^2} + F_v |\dot{x}_1|) \text{sign}(\dot{x}_1);$$

其中 $F_c$ 是库伦摩擦力,  $F_s$ 是静摩擦力,  $F_v$ 是粘滞摩擦力,  $x_s$ 是润滑系数。实际其中涟波力是十分复杂的, 但是它却有一定的周期性和峰值[71]:

$$F_{ripple} = A_r \sin(\omega x_1 + \phi),$$

其中 $A_r, \omega, \phi$ 是常系数。另外, 所有的参数可以通过实验测量, 这里都认为是已知的。

最后, 因为电感系数要远远小于机械参数, 所带来的延迟可以忽略, 这样根据(3.22)和(3.23), 可以得到一个二阶系统:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{M} \left( \frac{K_f K_e}{R} + D \right) \dot{x}_1 - \frac{F_d}{M} + \frac{K_f u(t)}{MR}.$$

将电流视为内部扰动,  $a_1 = \frac{1}{M}(\frac{K_f K_e}{R} + D)$ ,  $b_0 = \frac{K_f}{MK}$ , 且  $f_d(\dot{x}_1, x_1, w(t)) = \frac{F_d}{M}$ , 以上的方程可以进一步写成:

$$\ddot{x}_1 = -a_1 \dot{x}_1 - f_d + b_0 u(t).$$

定义  $x_2 = \dot{x}_1$ , 因此可以得到系统状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + b_0 u \\ y = x_1, \end{cases} \quad (3.24)$$

其中  $x_3 = -a_1 x_2 - f_d$ .

在ADRC的框架下,  $x_3$ 被看成系统的总的扰动, 是内扰和外扰的和。注意到  $f_d$  可以写成  $f_d = f_v x_2 + f_0$ ,  $f_v = \frac{F_v}{M}$ ,  $f_0 = \frac{1}{M}[F_{load} + F_{ripple} + (F_c + (F_s - F_c)e^{-(\frac{x_2}{v_s})^2})\text{sign}(x_2)]$ 。此外  $f_0$  是有界的。

### 3.3.2 基于ESO和RESO的ADRC模型

这一小节, 给出基于ADRC的PMLM控制模型。完整的ADRC系统是由TD跟踪器, 扩展状态观测器和非线性反馈构成。既然信号的导函数已知, 那么TD跟踪器可以不使用。有关ADRC的概述可以参见[30]。对于PMLM系统(3.24), 它的扩展状态观测器ESO有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \beta_1(\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - \beta_2(\hat{x}_1 - y) + b_0 u \\ \dot{\hat{x}}_3 = -\beta_3(\hat{x}_1 - y), \end{cases} \quad (3.25)$$

其中  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  通过ESO的带宽  $\omega$  决定:  $\beta_1 = 3\omega$ ,  $\beta_2 = 3\omega^2$ ,  $\beta_3 = \omega^3$ .

在非线性反馈的环节中, 这里只使用线性化的方式:

$$u_0 = k_p(v - \hat{x}_1) + k_d(\dot{v} - \hat{x}_2) + \dot{v}, \quad (3.26)$$

其中  $v$  表示参考信号;  $k_p$  和  $k_d$  可以通过控制器的带宽来决定  $\omega_c$ :  $k_p = \omega_c^2$ ,  $k_d = 2\omega_c$ .

使用线性反馈有两个原因, 首先这样的结构现实中更容易实现; 其次, 很多的例子已经证明, 与非线性反馈相比, 使用线性反馈也可以得到很好的跟踪效果[23, 80, 94]。

这样, 用来执行PMLM系统(3.24)的相应的控制率为:

$$u = \frac{u_0 - \hat{x}_3}{b_0}. \quad (3.27)$$

由于系统的输出  $y = x_1$  可以直接被测量, 所以没有必要再对  $x_1$  用  $\hat{x}_1$  进行估计。根据降阶的扩展状态观测器(RESO)相关理论[78], 就系统(3.24)而言, 可以设计如下RESO结构:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\hat{v}}_2 \\ \dot{\hat{v}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 1 \\ -\beta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta_1 & 1 \\ -\beta_2 & 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_0 u \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} x_1. \end{cases} \quad (3.28)$$

类似于ESO,  $\beta_1, \beta_2$  通过RESO的带宽来决定  $\omega$ :  $\beta_1 = 2\omega, \beta_2 = \omega^2$ . 这样, 基于RESO的系统(3.24)的控制为:

$$\begin{cases} u = \frac{u_0 - \hat{x}_3}{b_0} \\ u_0 = k_p(v - x_1) + k_d(\dot{v} - \hat{x}_2) + \ddot{v}, \end{cases} \quad (3.29)$$

其中  $k_p, k_d$  通过控制器带宽  $\omega_c$  来决定:  $k_p = \omega_c^2, k_d = 2\omega_c$ .

### 3.3.3 实验仿真

有关RESO和ESO对于PMLM的理论结果可以参考[78], 其中也得到了带宽和跟踪误差之间的关系。这里仅对实验部分进行说明。在如下的仿真中应用PMLM电机来控制各个轴, 分别使用带ESO和RESO的ADRC, 整个系统如图 3.31所示:

这里选取插值离散点的方法, 两个相邻的离散点使用时间参数样条连接, 算法来自文献[2]。优化问题的约束包含分轴速度, 加速度和jerk。平面的蝴蝶曲线被离散成100个参考点。约束被设置成  $\vec{V}_{max} = (200, 200)$  mm/s,  $\vec{A}_{max} = (4000, 4000)$  mm/s<sup>2</sup>,  $\vec{J}_{max} = (50000, 50000)$  mm/s<sup>3</sup>。速度和加速度的初末值均为零, 这里将图案的起点移到了原点。控制器采样周期为1ms, 采用两轴加工, 不失一般性, 假定它们的物理参数都是一样的, 见表 3.3。特别的,  $F_{load}$  在仿真中是分段连续的, 周期是3s, 在80%的周期上取值50, 其余

表 3.3: 仿真参数

含义	参数	单位	取值
推力轴承的质量	$M$	Kg	5.4
粘滞系数	$D$	Ns/m	10
电枢电阻	$R$	Ohms	16.8
电枢电感	$L$	Henry	$17.4 \times 10^{-3}$
电能机械能转换常数	$K_f$	N/A	130
反电动势电压	$K_e$	v/m/s	123
库仑摩擦力系数	$f_c$	Newton	10
静摩擦力系数	$f_s$	Newton	20
粘滞摩擦力参数	$f_v$	Newton	10
涟波力参数1	$A_r$	Newton	8.5
涟波力参数2	$\omega$	Rad/m	314
涟波力参数3	$\varphi$	unit	$0.05\pi$
有界负载力	$f_{im}$	Newton	100
粘滞参数	$x_s$	m/s	0.1

的取值100。为了对比ESO和RESO下的ADRC对PMLM的控制效果，文中采用了Matlab/Simulink软件。这两种情形下的控制器带宽均为 $\omega_c=800$ 和 $\omega=1000$ ，效果如下图所示。

图 3.32和图 3.33是跟踪误差对比。记 $N$ 为指插补点的个数，不难发现在定义 $e_{mean} = (\sum_{i=1}^N |e_i|)/N$ 来表示平均误差的意义下，那么两个轴的平均误差水平为 $e_{mean}^{ESO} = (0.0060, 0.0079)mm$ 和 $e_{mean}^{RESO} = (0.0032, 0.0038)mm$ 。也就是在同样带宽参数的情形下，ESO产生的跟踪误差要大于RESO所产生的跟踪误差。但是

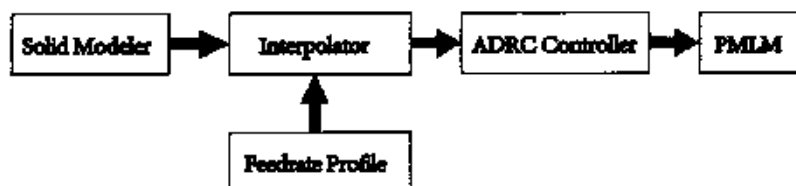


图 3.31: CNC系统

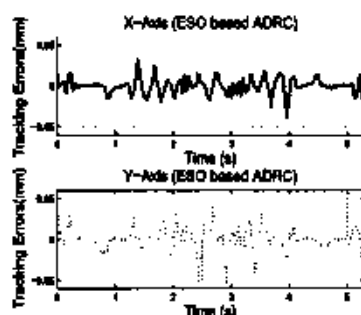


图 3.32: 基于ESO-ADRC的跟踪误差

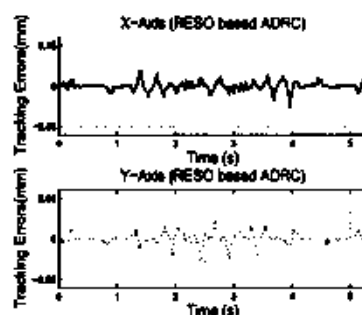


图 3.33: 基于RESO-ADRC的跟踪误差

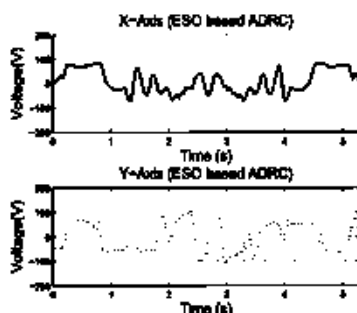


图 3.34: 基于ESO-ADRC的控制电压

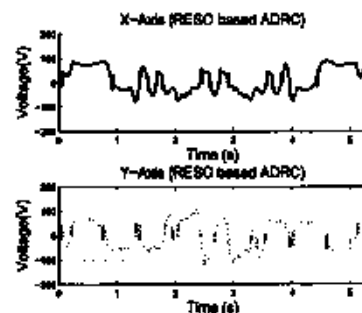


图 3.35: 基于RESO-ADRC的控制电压

此时RESO的控制电压会产生微小的震动,如图3.35中控制电压在零点附近的情况。

图3.36和图3.37以及图3.38和图3.39是在测量受到噪声的影响的情况下的跟踪误差和控制电压效果对比。本文记X轴和Y轴的原始信号为 $X_{original}$ 和 $Y_{original}$ ,其中 $X_{original}, Y_{original} \in R^N$ 。X轴和Y轴的噪声信号记做 $\varepsilon_X$ 和 $\varepsilon_Y$ ,其中噪声满足高斯分布:

$$\varepsilon_X \sim N(0, 0.002\% \|X_{original}\|_{\infty}), \varepsilon_Y \sim N(0, 0.002\% \|Y_{original}\|_{\infty}).$$

这样,真实的信号为:

$$X_{real} = X_{original} + \varepsilon_X, Y_{real} = Y_{original} + \varepsilon_Y.$$

实验仿真演示了所设计的控制器对噪声满足一定的滤波效果。从图中不难发现ESO的滤波效果要好于RESO的滤波效果,这主要是由于ESO的阶数

高于RESO, 深入的理论分析可以参考[28]。因此本文建议在选择基于ESO或者RESO的ADRC时, 要根据具体的控制对象的特点, 在控制效果和对噪声的滤波效果之间取舍。

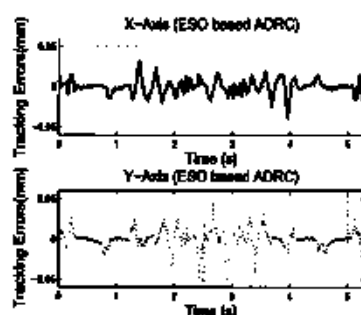


图 3.36: 噪声情形下基于ESO-ADRC的跟踪误差

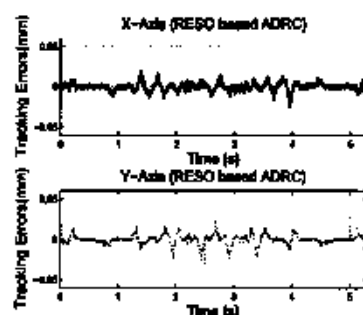


图 3.37: 噪声情形下基于RESO-ADRC的跟踪误差

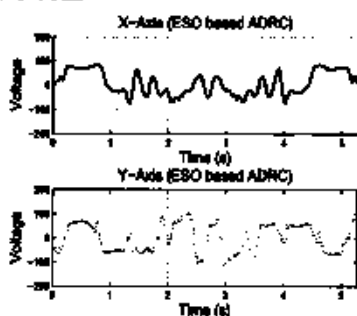


图 3.38: 噪声情形下基于ESO-ADRC的控制电压

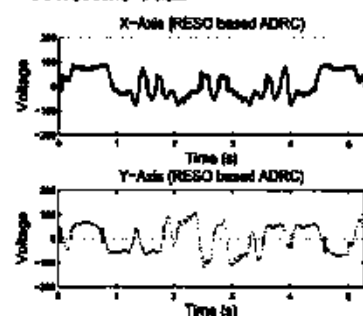


图 3.39: 噪声情形下基于RESO-ADRC的控制电压

### 3.4 本章小结

本章介绍了两种控制跟踪误差的方法, reshape方法可以看成是一个开环方法, ADRC方法则是一种闭环控制方法。

这里将reshape方法成功应用于数控系统中, 并且讨论了PID伺服控制器模型。该方法主要分为三步: 不确定磨损的估计, 电压补偿和修改指令。文中用机器学习方法估计系统的不确定部分; 在指令修改一步, 需要计算一个大规模

低阶ODE方程。值得说明的是，文中证明了该方法具备一定的鲁棒性，不难发现这是由于伺服电机的局部线性化结构决定的。

第二种方法是基于闭环的控制方法，这里采用了ADRC方法，与传统的使用ESO的ADRC方法不同，由于已经知道位置信号，所以采用RESO的结构会使控制效果更精确。另外，这里比较了在同样的带宽控制参数情形下的控制效果。结果显示，尽管相比于使用ESO而言RESO在跟踪误差的控制精度方面要好一些，但是它会对控制器带来一些振动的后果。

此页不缺内容





## 第四章 数控加工速度优化中的刀具可靠性问题初探

### 4.1 本章简介

本章初步探讨了数控加工中的运动学状态和刀具可靠性的关系问题。可靠性是指产品在规定的环境、寿命和使用条件内可以完成其规定功能的能力，是一项具有时间性和统计性的质量评价指标。低可靠性意味着冲床故障率高、加工质量不稳定、维修成本高、正常生产易受影响甚至导致意外事故的发生。本文对数控加工中切削速度和刀具可靠性的关系问题做了初步探讨。根据本论文1.4部分所描述的刀具寿命方面的模型，可以将刀具的磨损程度看做加工中刀具的可靠性。磨损量越大，刀具可靠性越低。在此种意义下，刀具可靠性就是一些动力学参数的函数，这些动力学参数诸如速度、切削力（或者看成是加速度）等。根据[38]在可变刀具的磨损方面的模型的相关讨论，这里类似的假定可变速度和可变切削力（或加速度）下的刀具磨损拥有类似的性质。本文采取模糊数的方法来表示可变的运动学特征所对应的刀具的可靠性。此时，相应的隶属度函数就对应着不同运动边界条件下刀具的磨损水平。模糊集理论是一种刻画主观可信程度的理论，该理论首先由Zadeh[88]引入，目的在于建立工程中不精确信息下的决策模型，如[56]。在模糊环境下进行的决策需要同时满足目标决策和模糊测度下的风险隶属度[4, 50, 96]。这样，模糊优化模型就被转化成了一个多目标优化问题，这种多目标优化问题已经有很多方法可以解决[51]。针对这个新的模型，文中将其单目标化后，用梯度方法进行求解。最后文中通过一个例子来说明该模型的用途。

### 4.2 基于模糊集理论的速度优化问题

#### 4.2.1 模糊集理论简介

假设 $X$ 是一个域论，其中的元素设为 $x$ 。传统的经典集合论中，如果元素 $x$ 属于集合 $G$ 那么可以定义如下的特征函数：

$$\mu_G = \begin{cases} 1 & x \in G \\ 0 & x \notin G. \end{cases}$$

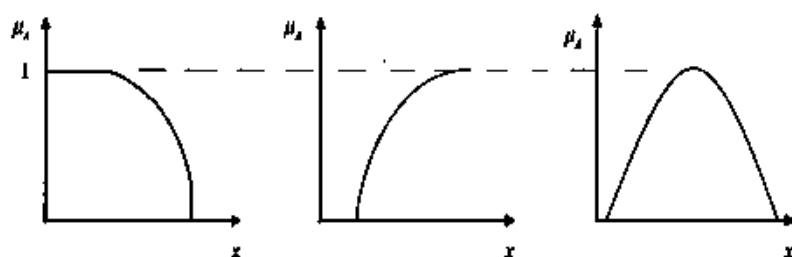


图 4.1: 常见隶属度函数

当集合  $\{0, 1\}$  被连续闭集  $[0, 1]$  代替时候, 可以通过一个映射  $\mu_A(x)$

$$\mu_A: x \mapsto [0, 1].$$

来定义模糊集合  $A \subseteq X$ 。也就是  $A$  中的每一个元素  $x$  都有区间  $[0, 1]$  中的实数与之对应。因此集合  $A$  可以被如下描述:

$$A = \{[x, \mu_A(x)] : x \in X, 0 \leq \mu_A(x) \leq 1\}.$$

这样将模糊集合  $A$  记做  $\tilde{A}, \mu_A(x)$  称作该模糊集合的隶属度函数[95]。由定义可知, 隶属度函数是对模糊集合的完整描述, 隶属度函数和模糊集合是等价的。图 4.1 列举了几种常见的隶属度函数。在研究加工过程中速度和刀具可靠性的关系问题中, 可以将相关的模糊信息用模糊集合来表示。

#### 4.2.2 基于时间最优的速度优化问题

基于时间最优的速度优化问题可以表示成:

$$\min T \text{ s.t. } |v_r| \leq V_{\max}, |a_r| \leq A_{\max}. \quad (4.1)$$

或者用以下等价形式, 以便于接下来的讨论:

$$\min T \text{ s.t. } |v_r^2| \leq V_{\max}^2, |a_r| \leq A_{\max}. \quad (4.2)$$

这个问题的数值解在前几章已经被充分的讨论了, 为了下文讨论的方便, 记这个问题为  $P_0(V_{\max}, A_{\max})$ ; 它的一个可行解, 将它记成关于边界  $V_{\max}, A_{\max}$  的函数的形式:  $v(V_{\max}, A_{\max}), a(V_{\max}, A_{\max})$ , 相应的目标函数值记为  $J(V_{\max}, A_{\max})$ 。特别的, 此问题的最优解记做  $v^*(V_{\max}, A_{\max}), a^*(V_{\max}, A_{\max})$ , 最优目标函数值记做  $J^*(V_{\max}, A_{\max})$ 。此外在本章如下小节均需要以下假设:

假设4.2.1.

$P_0$ 问题的最优解存在。

#### 4.2.3 模糊约束下的时间最优速度优化问题

实际当中,运动学边界的取值往往是通过实验估计得到的,这其中有很多主观经验的成分。此时,如果一味的采用大的边界就可能对刀具带来过大的冲击,会发生诸如磨损,甚至刀崩停机等事故隐患。另一方面,如果过于保守的选择小的边界则会降低生产效率,因此一个折中的方法有待研究。这样在时间最优轨迹优化模型中,考虑不确定的运动学边界对加工时间和刀具可靠性的影响是有意义的。

这里采用模糊理论将运动学的边界 $V_{\max}, A_{\max}$ 进行模糊化,称模糊数 $\tilde{V}_{\max}, \tilde{A}_{\max}$ 的隶属函数分别为速度边界和加速度边界的可靠性函数。这样,在速度边界或加速度边界可靠性函数取值为 $\mu = 0$ 的情况下,意味着此时对运动学边界 $V_{\max}$ 或 $A_{\max}$ 所做的选择是风险最大的(对刀具而言);在速度边界或加速度边界可靠性函数取值为 $\mu = 1$ 的情况下,意味着此时对运动学边界 $V_{\max}$ 或 $A_{\max}$ 所做的选择是无风险的(对刀具而言)。此外,其它情况下的加工过程中刀具可靠度就对应着区间 $\mu \in (0, 1)$ 中的某个实数。

根据以上观点,首先将问题 $P_0$ 的右端进行模糊化。这样基于时间最优的速度优化模型的模糊形式为:

$$\min T \text{ s.t. } |v_r^2| \leq \widetilde{|V_{\max}|^2}, |a_r| \leq \tilde{A}_{\max}. \quad (4.3)$$

符号“ $\leq$ ”表示在模糊意义下的小于。这里它左边的模糊数的大小要根据速度和加速度的隶属度函数来定义,也就是 $\mu_V(x)$ 和 $\mu_A(x)$ ,它们往往是连续的,具体地:

$$\mu_V(x) = \begin{cases} 1 & x < V^2 \\ \mu_1(x) & V^2 \leq x \leq (V + dV)^2 \\ 0 & (V + dV)^2 < x, \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x < A \\ \mu_2(x) & A \leq x \leq A + dA \\ 0 & A + dA < x, \end{cases}$$

其中 $\mu_i, i = 1, 2$ 是一个减函数:  $V = V_{\max}, A = A_{\max}$ 是安全界限;  $dV, dA$ 是滑动窗口。

#### 4.2.4 模糊优化问题转化成多目标问题

这里利用[50, 96]中的技巧可以将模糊优化问题转化成多目标优化问题(Multi Objective Optimization), 这个过程叫做“硬化”(crisp)。在定义 $J = -T$ 的情况下, 模糊优化问题可以被转化成如下的形式:

$$\begin{aligned} \max \{J, \mu_V(v_r^2), \mu_A(a_r)\} \\ \text{s.t. } |v_r|^2 \leq (V + dV)^2, |a_r| \leq A + dA. \end{aligned} \quad (4.4)$$

需要说明的是这样一个事实, 如果 $x(u)$ 是一个关于参数 $u \in \Gamma$ 的函数, 那么 $\mu_V(x)$ 是一个集合, 此时定义:  $\mu_V(x) = \{\mu_V(x(u)) | u \in \Gamma\}$ . 相应的,  $\max\{\mu_V(x)\} = \max\{\mu_V(x(u)) | u \in \Gamma\}$ . 类似的定义同样适合于 $\mu_A$ . 另外, 为了保证优化问题在数值求解的时候“维度”相同, 这里考虑了如下两个问题:

$$\begin{array}{ll} \max J & \max J \\ P_1: \text{s.t.} & P_2: \text{s.t.} \\ |v_r|^2 \leq V^2, |a_r| \leq A. & |v_r|^2 \leq (V + dV)^2, |a_r| \leq A + dA. \end{array}$$

为此需要定义目标函数的隶属度函数:

$$\mu_J(x) = \begin{cases} 0 & x < J^- \\ \mu_0(x) & J^- \leq x \leq J^+ \\ 1 & J^+ < x, \end{cases}$$

其中 $J^-$ 和 $J^+$ 是问题 $P_1$ 和 $P_2$ 相应的解; 这里 $\mu_0(x)$ 是一个增函数。这样问题(4.4)可以被重新表述成:

$$\begin{aligned} \max \{\mu_J(u), \mu_V(v_r^2), \mu_A(a_r)\} \\ \text{s.t. } |v_r|^2 \leq (V + dV)^2, |a_r| \leq A + dA. \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.2.5 多目标问题转化成单目标问题

为了求解多目标问题(4.5)，这里采用最大-最小 (Max-Min) 方法将其转化成单目标问题：

$$\begin{aligned} & \max \min \{ \mu_J(u), \mu_V(v_r^2), \mu_A(a_r) \} \\ & \text{s.t. } |v_r|^2 \leq (V + dV)^2, |a_r| \leq A + dA. \end{aligned} \quad (4.6)$$

于是定义

$$\lambda = \min \{ \mu_J(u), \mu_V(v_r^2), \mu_A(a_r) \},$$

那么最大-最小问题(4.6)可以被转化成单目标问题：

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \text{s.t. } \begin{cases} |v_r|^2 \leq (V + dV)^2 \\ |a_r| \leq A + dA \\ \lambda \leq \mu_0(J) \\ \lambda \leq \mu_1(|v_r^2|) \\ \lambda \leq \mu_2(|a_r|) \\ 0 \leq \lambda \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

事实上优化问题(4.7)和优化问题(4.6)是等价的，具体证明参见[47]。

## 4.3 单目标问题的基于梯度的凸优化算法

### 4.3.1 运动边界隶属度函数的选择

直观的讲，速度和加速度的隶属度函数应当是一个递减函数。然而，对于优化指标来讲，它的隶属度函数应当是相反的情况。正如本章开始所讨论的情况，这种选择不唯一，要从实际情况去考虑[64][46]。下面的假设是本文所进一步探讨优化问题(4.7)所需要的：

假设4.3.1.

隶属度函数  $\mu_0(x)$ ,  $\mu_1(x)$ ,  $\mu_2(x)$  都是单调的连续函数。

不失一般的情况，这里仅仅选择线性函数来说明所提出的模型，如图4.2中所示：

$$\mu_0(x) = \frac{x}{dJ} - \frac{J}{dJ}, x \in [J, J + dJ],$$

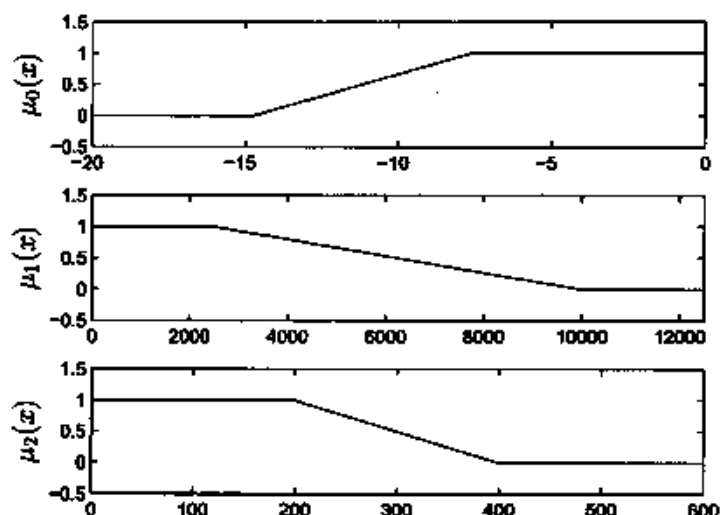


图 4.2: 线性隶属度函数

$$\mu_1(x) = \frac{(V+dV)^2}{(V+dV)^2 - V^2} - \frac{x}{(V+dV)^2 - V^2}, x \in [V^2, (V+dV)^2],$$

$$\mu_2(x) = \frac{A+dA}{dA} - \frac{x}{dA}, x \in [A, A+dA].$$

于是可以将问题(4.7)中相应的目标函数和约束进行转化:

$$\mu_0(-T) \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{(-T)}{dJ} - \frac{J}{dJ} \geq \lambda \Leftrightarrow \lambda dJ + J + T \leq 0,$$

考虑到  $v_r = v_r(u)$ ,  $a_r = a_r(u)$ , 也就是对于每一个  $u \in [0, 1]$  有:

$$\mu_1(|v_r^2|) \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{(V+dV)^2}{(V+dV)^2 - V^2} - \frac{|v_r^2|}{(V+dV)^2 - V^2} \geq \lambda \Leftrightarrow \lambda(2V+dV)dV + |v_r^2| \leq (V+dV)^2,$$

$$\mu_2(|a_r|) \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{A+dA}{dA} - \frac{|a_r|}{dA} \geq \lambda \Leftrightarrow \lambda dA + |a_r| \leq A + dA.$$

这样原问题的最终形式为:

$$\max \lambda$$

$$s.t. \begin{cases} |v_r^2| \leq (V + dV)^2 \\ |a_r| \leq A + dA \\ \lambda dJ + J + T \leq 0 \\ \lambda(2V + dV)dV + |v_r^2| \leq (V + dV)^2 \\ \lambda dA + |a_r| \leq A + dA \\ 0 \leq \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

其中  $v_r = v_r(u)$ ,  $a_r = a_r(u)$ , 不等式对于每一个  $u \in [0, 1]$  都成立。

### 4.3.2 单目标问题的参数化

这里本文采用类似2.3.3的参数化方法直接求解问题(4.8)。记“'”为“ $\frac{d}{du}$ ”。引入  $a(u)$ ,  $b(u)$ :

$$\begin{aligned} a(u) &= \dot{u}(u)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2, \\ b(u) &= \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{u}^2)' = \frac{1}{2}a'(u). \end{aligned}$$

运动学约束为:

$$\begin{aligned} v_r &= \tau' \dot{u} = \tau' \sqrt{a(u)}, \\ a_r &= \tau'' \dot{u}^2 + \tau' \ddot{u} = \tau'' a(u) + \tau' b(u). \end{aligned}$$

其中  $\tau \in \{x, y, z\}$ .

### 4.3.3 单目标问题的数值求解

问题(4.8)是无限维优化问题, 通过之前类似的离散化方法将它化成有限维的优化问题。不同的是, 这里用  $b_i = b(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  以及  $\lambda$  表示控制变量, 用  $a_i = a(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  表示状态变量, 并且注意到关系  $b_i \approx \frac{a_{i+1} - a_i}{2\Delta}$ . 此外注意到  $a(u)$  的初值为  $a(0) = a(1) = 0$ , 对于  $i = 1, \dots, N-1$  有  $a_{i+1} = 2\Delta \sum_{k=1}^i b_k$ . 因此, 问题(4.8)可以被近似成如下关于  $b_i$  和  $\lambda$  的优化问题, 记做  $\lambda$ -MMP:

$$\max \lambda$$

$$s.t. \begin{cases} |\tau_i'^2 a_i(u)| \leq (V + dV)^2 \\ |\tau_i'' a_i(u) + \tau_i' b_i(u)| \leq A + dA \\ \lambda dJ + J \leq (-\sum \frac{1}{\sqrt{a_i(u)}}) \\ \lambda(2V + dV)dV + |\tau_i'^2 a_i(u)| \leq (V + dV)^2 \\ \lambda dA + |\tau_i'' a_i(u) + \tau_i' b_i(u)| \leq A + dA \\ 0 \leq \lambda \leq 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

其中  $\tau \in \{x, y, z\}$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

#### 4.4 单目标问题的性质

这一小节着重考察问题  $\lambda$ -MMP 的性质。首先, 介绍一些有用的概念、假设以及引理:

##### 引理4.4.1.

问题  $P_0$  的最优速度曲线是点, 点最大的。

证明: 参见引理(2.3.1)。

定义 4.1. 对于数组  $V_{max}, A_{max}$ , 问题  $P_0(V_{max}, A_{max})$  的最优解  $v^*(V_{max}, A_{max})$ ,  $a^*(V_{max}, A_{max})$  关于速度和加速度是 pseudo-bang-bang 的, 当且仅当  $v^*(V_{max}, A_{max})$  和  $a^*(V_{max}, A_{max})$  都至少有一点达到它们的边界。

##### 假设4.4.2.

如果问题  $P_0(V + dV, A)$  的最优解是关于速度和加速度 pseudo-bang-bang 的, 那么对于任何数  $V_{max}, A_{max}$ ,  $V_{max} \in [V, V + dV]$ ,  $A_{max} \in [A, A + dA]$ , 问题  $P_0(V_{max}, A_{max})$  的最优解都是关于速度和加速度 pseudo-bang-bang 的。此时称作数组  $(V_{max}, A_{max})$  在叉积  $[V, V + dV] \times [A, A + dA]$  上对问题  $P_0$  是 “cross-valid”, 或者称  $[V, V + dV]$  关于  $[A, A + dA]$  (或者  $[A, A + dA]$  关于  $[V, V + dV]$ ) 是 “cross-valid”。

##### 引理4.4.3.

对问题  $P_0$ , 假设数组  $(V_{max}, A_{max})$  关于叉积  $[V, V + dV] \times [A, A + dA]$  是 “cross-valid”。那么对于  $P_0(V_{max}, A_{max})$ , 定义相关的可靠性指数:

$$\mu_j = \mu_0(J^*(V_{max}, A_{max})), \mu_v = \min \mu_1(|v^*(V_{max}, A_{max})|^2), \mu_a = \min \mu_2(|a^*(V_{max}, A_{max})|).$$



这样 $\mu_v$ 和 $\mu_a$ 关于 $V_{max}$ 和 $A_{max}$ 是连续的; $\mu_j$ 是关于 $(V_{max}, A_{max})$ 的严格单调增函数。这里的 $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ 定义同(4.7)。

证明: 既然 $[V, V + dV]$ 是cross-valid关于 $[A, A + dA]$ , 这样根据连续性假设(4.3.1):

$$\mu_v = \min \mu_1(|v^*(V_{max}, A_{max})|^2) = \mu_1(\max |v^*(V_{max}, A_{max})|^2) = \mu_1(V_{max}^2),$$

$$\mu_a = \min \mu_1(|a^*(V_{max}, A_{max})|) = \mu_1(\max |a^*(V_{max}, A_{max})|) = \mu_1(A_{max}),$$

结论成立。另外, 在此cross-valid的 $[V, V + dV] \times [A, A + dA]$ 又积上。此外, 根据引理(4.4.1)易得 $\mu_j$ 是关于 $(V_{max}, A_{max})$ 的严格单增调函数。 |

假设4.4.4.

$\mu_j$ 关于 $(V_{max}, A_{max})$ 是连续的。

引理4.4.5.

$\mu_j$ 关于 $\mu_v$ 和 $\mu_a$ 也是连续的。

证明: 在cross-valid条件下, 只要注意到假设(4.3.1), (4.4.4)和

$$\mu_v = \min \mu_1(|v^*(V_{max}, A_{max})|^2) = \mu_1(\max |v^*(V_{max}, A_{max})|^2) = \mu_1(V_{max}^2),$$

$$\mu_a = \min \mu_2(|a^*(V_{max}, A_{max})|) = \mu_2(\max |a^*(V_{max}, A_{max})|) = \mu_2(A_{max})$$

即可。

这样进一步可以得到如下结果:

引理4.4.6.

假设 $\lambda$ -MMP的最优解对应的速度, 加速度和优化指标分别是 $v_r$ ,  $a_r$ 和 $J$ , 那么它们满足如下必要条件:

$$\mu_0(J) = \min\{\mu_1(|v_r|^2)\} = \min\{\mu_2(|a_r|)\}.$$

证明: 方便起见, 采用类似(4.4.3)中的记号:

$$\mu_j = \mu_0(J), \mu_v = \min\{\mu_1(|v_r|^2)\}, \mu_a = \min\{\mu_2(|a_r|)\}. \quad (4.10)$$

定义数组 $(\mu_r, \mu_s, \mu_t)$ 是 $\mu_v, \mu_a$ 和 $\mu_j$ 的一个排列, 且 $\mu_r \leq \mu_s \leq \mu_t$ , 其中 $\mu_r, \mu_s, \mu_t \in \{\mu_v, \mu_a, \mu_j\}$ . 这样 $\lambda$ -MMP的目标函数 $\lambda$ 是 $\mu_v, \mu_a$ 和 $\mu_j$ 的函数(或 $\mu_r, \mu_s$ 和 $\mu_t$ 的函数), 即 $\lambda = \lambda(\mu_v, \mu_a, \mu_j) = \lambda(\mu_r, \mu_s, \mu_t) = \mu_r$ . 定义序关系“ $\prec$ ”,  $(\mu_{r1}, \mu_{s1}, \mu_{t1}) \prec (\mu_{r2}, \mu_{s2}, \mu_{t2})$ 当且仅当 $\mu_{r1} \leq \mu_{r2}$ , 也就是对 $\lambda$ -MMP来讲, 此时数组 $(\mu_{r2}, \mu_{s2}, \mu_{t2})$ 所对应的解优于 $(\mu_{r1}, \mu_{s1}, \mu_{t1})$ 所对应的解.

这样, 对于 $\lambda$ -MMP的最优解所对应的三元指标 $(\mu_r, \mu_s, \mu_t)$ 来讲, 如果 $\mu_j$ 是 $\mu_a, \mu_v$ 三个值当中严格最小的, 那么可以断言至少存在 $\lambda$ -MMP的另一组解, 它所对应的指标 $(\bar{\mu}_r, \bar{\mu}_s, \bar{\mu}_t)$ , 满足 $\bar{\mu}_v = \bar{\mu}_j$  (新的解所对应的指标 $\bar{\mu}_{(i)}$ 的定义类似(4.10)). 而且此时

$$\min(\mu_r, \mu_s, \mu_t) = \mu_j < \min(\bar{\mu}_r, \bar{\mu}_s, \bar{\mu}_t),$$

这与最优解的定义矛盾.

下面来证明这一矛盾. 事实上, 由于 $\mu_j$ 是严格最小的, 因此更有 $\mu_j < \mu_v$ . 那么考虑问题 $P_0(\sqrt{\mu_1^{-1}(\mu_v)}, \mu_2^{-1}(\mu_a))$ 的最优解. 不失一般性在采用(4.10)的记号下, 它所对应的三元组 $(\mu_v^*, \mu_a^*, \mu_j^*)$ 在序关系“ $\prec$ ”的定义下, 优于三元组 $(\mu_v, \mu_a, \mu_j)$ , 因为此时 $\mu_v^* = \mu_v, \mu_a^* = \mu_a, \mu_j^* \geq \mu_j$ .

如果 $\mu_j^* > \mu_j$ 那么就可以找到一个优于原来的解, 矛盾. 若否, 考虑此时的问题 $P_0(V_{\max}, A_{\max})$ , 其中 $V_{\max} = \sqrt{\mu_1^{-1}(\mu_v)}, A_{\max} = \mu_2^{-1}(\mu_a)$ .

此时, 在固定 $A_{\max}$ 不变的情况下, 根据引理(4.4.3)和假设(4.4.4),  $\mu_j$ 关于 $V_{\max}$ 是连续单调递增的; 另外, 在 $A_{\max}$ 不变的情况下, 同样根据引理(4.4.3),  $\mu_v$ 关于 $V_{\max}$ 是连续单调递减的. 因此, 在 $\mu_j < \mu_v$ 的情况下, 如果连续增大 $V_{\max}$ , 那么必然存在点 $\bar{\mu}_j, \bar{\mu}_v \in [\mu_j, \mu_v]$ 满足 $\bar{\mu}_j = \bar{\mu}_v$  (注意到此时 $A_{\max}$ 始终没有变, 因此 $\mu_a$ 不变). 实际上此时已经找到了这样一个解, 它是优化问题 $P_0(\sqrt{\mu_1^{-1}(\bar{\mu}_v)}, \mu_2^{-1}(\mu_a))$ 的最优解, 它也是 $\lambda$ -MMP的可行解, 却优于原来的最优解, 这就导致矛盾. 同样的道理,  $\mu_v$ 和 $\mu_a$ 也都不能是严格最小. 因为采取同样的策略可以找到 $\lambda$ -MMP的另一个解, 它优于原先的解. 这就意味着问题 $\lambda$ -MMP的最优解一定要满足它至少有两个可靠性指标是相等的.

以下不妨考虑形如 $\mu_j = \mu_v \neq \mu_a$ 这种类型的最优解. 不失一般情况, 考虑 $\mu_j = \mu_v < \mu_a$ 的情况即可. 仍然可以采取相同的策略找到这样的解, 它对应的可靠性指标介于 $[\mu_j = \mu_v, \mu_a]$ 之间, 满足 $\bar{\mu}_j = \bar{\mu}_a$ . 这是容易做到的, 只要注意到假设(4.4.2), 因为此时连续变动 $A_{\max}$ 的时候, 相应的 $\mu_v$ 是不变的.

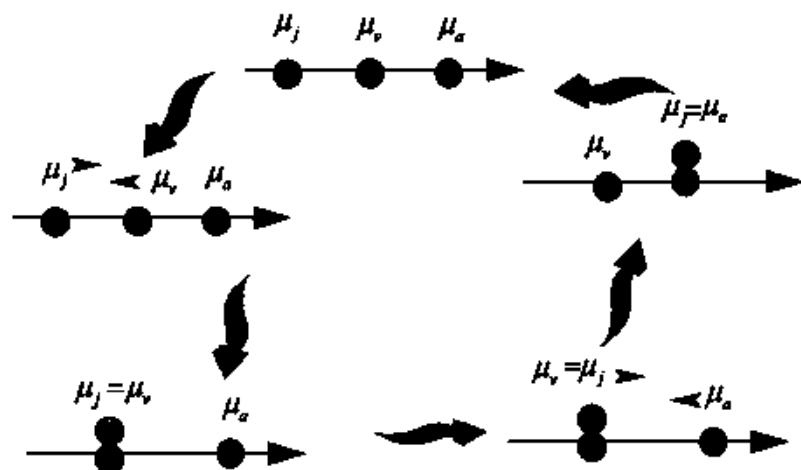


图 4.3: 引理的证明图解

这样, 实际上可以找到点列  $(\bar{\mu}_v^1 = \bar{\mu}_j^1, \bar{\mu}_a^1) \rightarrow (\bar{\mu}_v^2, \bar{\mu}_a^2 = \bar{\mu}_j^2) \rightarrow (\bar{\mu}_v^3 = \bar{\mu}_j^3, \bar{\mu}_a^3) \dots \rightarrow (\bar{\mu}_v^{2n-1} = \bar{\mu}_j^{2n-1}, \bar{\mu}_a^{2n-1}) \rightarrow (\bar{\mu}_v^{2n}, \bar{\mu}_a^{2n} = \bar{\mu}_j^{2n}) \dots$

显然  $\{\bar{\mu}_v^n\}$  是单调有界数列, 因此极限存在, 记  $\mu_v^* = \lim\{\bar{\mu}_v^n\}$ , 同理记  $\mu_a^* = \lim\{\bar{\mu}_a^n\}$ .

根据引理(4.4.5)  $\mu_j = \mu_j(\mu_v, \mu_a)$  是连续的, 因此极限  $\lim \bar{\mu}_j^n = \lim \mu_j(\bar{\mu}_v^n, \bar{\mu}_a^n)$  存在, 记为  $\bar{\mu}_j^*$ . 又易得  $\mu_v^* = \liminf \mu_j(\bar{\mu}_v^n, \bar{\mu}_a^n) = \limsup \mu_j(\bar{\mu}_v^n, \bar{\mu}_a^n) = \bar{\mu}_a^*$ .

综上, 实际上从数轴上任意三点  $\mu_v, \mu_a$  以及相应的  $\mu_j$  出发, 按照上述寻找策略, 一定可以找到一个均衡点, 满足  $\bar{\mu}_j^* = \mu_v^* = \bar{\mu}_a^*$ . 实际上此时  $\lambda$ -MMP 所对应的最优解为

$$P_0(\sqrt{\mu_1^{-1}(\bar{\mu}_v^*)}, \mu_2^{-1}(\bar{\mu}_a^*))$$

问题的最优解. 证明的过程可以参考图 4.3.

#### 引理 4.4.7.

问题  $\lambda$ -MMP 的最优解存在, 而且一定是某个  $P_0$  问题的最优解.

证明: 首先, 容易证明对于问题  $\lambda$ -MMP 来讲, 满足  $\mu_j = \mu_v = \mu_a$  的可行解最多只有一个. 而且, 此时如果有这样的可行解存在, 那么它一定是最优的. 其次, 根据引理(4.4.6)的证明过程, 找到的解  $P_0(\sqrt{\mu_1^{-1}(\bar{\mu}_v^*)}, \mu_2^{-1}(\bar{\mu}_a^*))$  便是问题  $\lambda$ -MMP 的最优解.

引理4.4.8.

优化问题 $\lambda - \text{MMP}$ (4.7)的解是全局最优的。

证明: 只需要注意到问题 $\lambda - \text{MMP}$ 是凸优化问题即可。

定理 4.1. 问题 $\lambda - \text{MMP}$ 的最优解存在且唯一, 并且是全局最优的。

证明: 根据引理(4.4.7)和引理(4.4.8)可以得到结论。

## 4.5 实验仿真

这一小节用所提出的数值方法来计算一个实际加工中遇到的例子。这里仍然采用迭代二序列方法Sequential Quadratic Programming(SQP)[9]。所有的例子在基于Matlab的软件环境下运行(PC机32-bit system, 2.10 GHz inter(R) Core(TM)2 Duo T6570 processor, and 2GB of RAM 内存)。加工的曲线(如图4.4)采用样条格式, 控点和结点为:

knots: 0, 0, 0, 1/6, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 5/6, 1, 1, 1;

coefs:

[0, 0]; [-150, 50]; [-50, 50]; [0, 150]; [150, 150]; [150, 0]; [50, -50]; [50, -150]; [0, 0].

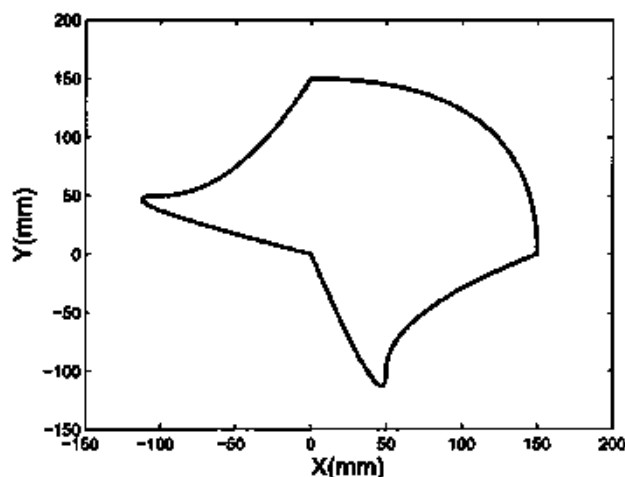


图 4.4: 帽子曲线

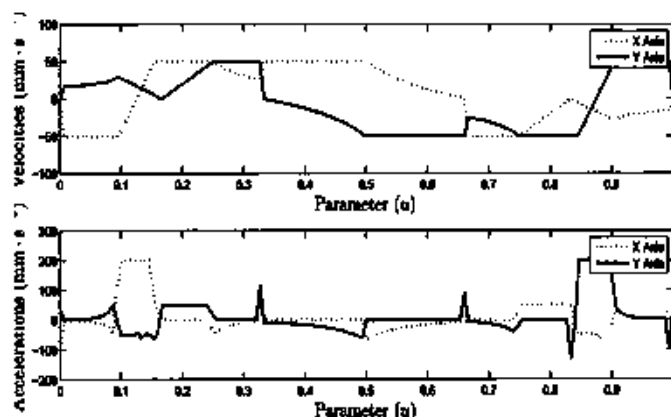


图 4.5: 无风险解

作为比较, 考虑三种情况, 无风险边界  $V_{\max} = 50\text{mm/s}$ ,  $A_{\max} = 200\text{mm/s}^2$ , 最大风险边界  $V_{\max} = 100\text{mm/s}$ ,  $A_{\max} = 400\text{mm/s}^2$ ; 还有就是模糊边界的情形, 此时相应的模型(4.7)中边界的值为  $V = 50\text{mm/s}$ ,  $A = 200\text{mm/s}^2$  和  $dV = 50\text{mm/s}$ ,  $dA = 200\text{mm/s}^2$ .

图 4.5和图 4.6是无风险边界和最大风险边界下的速度和加速度的优化结果。此时结果由加速度作为控制变量, 结果是bang-bang的。而且整个结果是pseudo-bang-bang的。这两种情况下的加工时间分别是14.7s和7.7s。可以发现, 通过采用无风险边界的时候, 大大牺牲了加工时间。

图 4.7是模糊情形下的速度和加速度的优化结果。这里的方法找到了在给定可靠性函数的情形下的最优速度和加速度边界分别是  $V = 73\text{mm/s}$ ,  $A = 275\text{mm/s}^2$ 。另外, 通过计算不难发现, 速度和加速度以及时间的的可靠性指数此时均为0.62, 这也从一定程度上证实了引理(4.4.6)。

## 4.6 本章小结

如何在保证加工速度的同时, 尽量避免过大的摩擦力矩对刀刃的冲击来提高刀具的可靠性是一个新的研究问题。本章对这一问题进行了初步的探讨。通过改变传统的时间最优控制问题的固定边界, 对运动学边界用模糊集理论中模糊数的方法来表示, 符合实际的客观情况。关于模糊数的选取的方式, 本文根

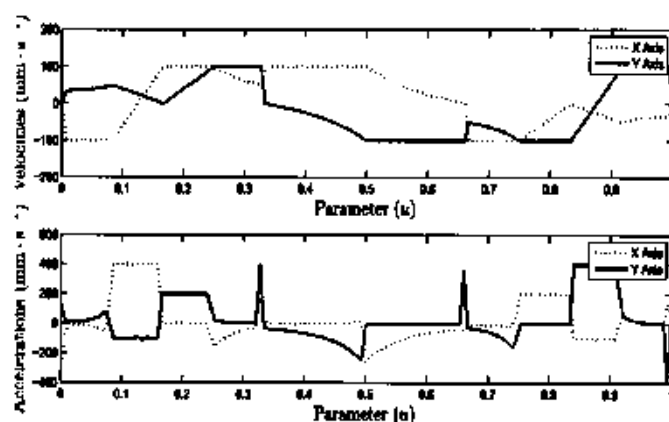


图 4.6: 最大风险解

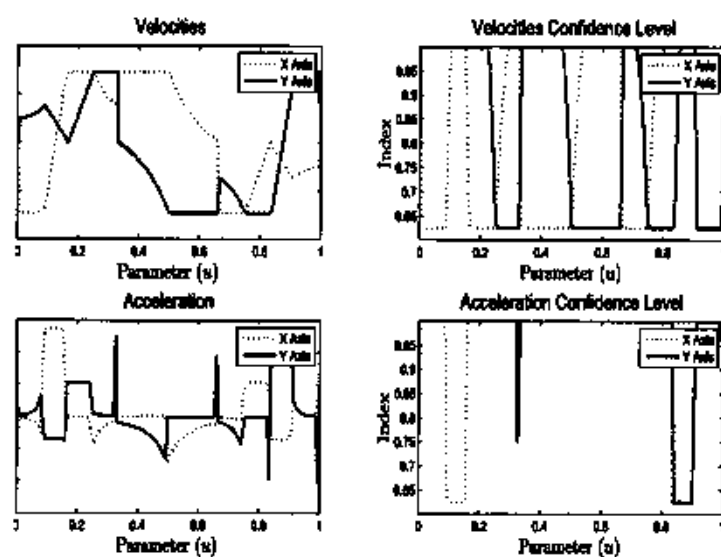


图 4.7: 模糊解

据已有的文献结果，类似的构造了相应的隶属度函数，随后通过一系列优化手段对模型采取“硬化”的方法达到求解目的。值得说明的是，该模型在理论上也是有意义的，问题本身的存在唯一性可以放到更高阶的情形中去探讨。

此页不缺内容





## 第五章 结论与展望

### 5.1 参与工作简介

这一小节中,对参与合作的工作(见附录)进行简介。

#### 5.1.1 CNC中的其它速度优化方法

在[89]中,考虑了直接对G01代码进行速度优化。假定路径上的参考节点为 $p_i, i=0, \dots, n$  (其中 $p_1$ 和 $p_{n-1}$ 是自由的,这是为了求解问题所留的自由度)。假定

$$h_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, n,$$

其中 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 是通过节点之间的曲线的时间长度。假定在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ 内的路径曲线是时间参数的三次样条形式:

$$C_i(t) = \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_i}\right)^2 \left(2\frac{t-t_{i-1}}{h_i} + 1\right) p_{i-1} + \left(\frac{t-t_i}{h_i}\right)^2 (t-t_{i-1}) v_{i-1} \\ + \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_i}\right)^2 \left(2\frac{t_i-t}{h_i} + 1\right) p_i + \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_i}\right)^2 (t-t_i) v_i. \quad (5.1)$$

这样可以将问题的速度,加速度和jerk的表达式写出。结合跟踪误差约束,可以得到模型:

$$\min_{h_i > 0} (h_1 + \dots + h_n) \\ s.t. \begin{cases} |v| \leq V_{max} \\ |a| \leq A_{max} \\ |j| \leq J_{max} \\ |c| \leq E_{max}. \end{cases} \quad (5.2)$$

其中跟踪误差约束满足(2.2.1)中的PID方程。由于路径曲线是3次样条形式,因此在每一段路径 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 上,可以得到速度,加速度和jerk简单的表达式,因此问题(5.2)中相应的约束可以大大的化简。特别的,在此形式下跟踪误差可以由一个特解近似表示,于是它的约束也可以利用类似(2.2.2)的结果进行化简,从而整个问题变成一个离散的非线性优化问题,具体可以参考[89]。

### 5.1.2 机械手中的速度优化方法

由于数控加工是一种特殊的机械手,因此有关数控加工的相关理论也可以类比到机械手系统。另外,根据机械手系统自身的特点考虑了一些实际当中会遇到的新的问题。这里只对模型进行简单介绍,具体求解策略可以参见已经完成的工作。

考虑了一个N-DOF机械手系统[14],它满足如下的一个动态方程:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

其中 $q \in \mathbb{R}^n$ 是位置角度关节向量,  $\tau \in \mathbb{R}^n$ 是力矩关节向量,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是操作惯性矩阵,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 包含了向心力和Coriolis力,  $G(q) \in \mathbb{R}^n$ 是向心力矩。假定路径是参数 $s$ 的函数:

$$r = r(s) = [x_1(s), \dots, x_n(s)]^T, s \in [0, 1]. \quad (5.3)$$

而且,假定 $r$ 是光滑的,对任意的 $s \in [0, 1]$ 存在 $l \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $\frac{dx_l(s)}{ds} \neq 0$ 。

定义 $' = \frac{d}{ds}$ 和 $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$ ,其中 $t$ 是时间。考虑雅克比转换矩阵:

$$\dot{r} = J(q)\dot{q}, \quad (5.4)$$

其中 $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 假定是行满秩。速度和加速度为:

$$\dot{q} = q's, \quad \ddot{q} = q's' + q''s^2, \quad (5.5)$$

其中 $q' = J^{-1}r'$ 和 $q'' = J^{-1}r'' + (J^{-1})'r'$ 。

根据(5.4)和(5.5),动力学模型可以被写成 $\ddot{s}$ 和 $\dot{s}^2$ 的函数:

$$\tau = m(s)\ddot{s} + c(s)\dot{s}^2 + g(s), \quad (5.6)$$

其中 $m(s) = M(q(s))q'(s) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c(s) = M(q(s))q''(s) + q'(s)^T C(q(s))q'(s) \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(s) = G(q(s)) \in \mathbb{R}^n$ 。

这样关于机械手系统的时间最优轨迹优化模型可以写成:

$$\begin{aligned} \min_{b(s)} J_T &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a(s)}} ds \\ \text{s.t. } a'(s) &= 2b(s), \forall s \in [0, 1], \\ a(s) &> 0, \forall s \in (0, 1), a(0) &= a_0, a(1) &= a_1, \\ m(s)b + c(s)a + g(s) &= \tau(s), \\ \tau_{\min} &\leq \tau(s) \leq \tau_{\max}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中  $a = \dot{s}^2$ ,  $b = \ddot{s}$ ,  $\tau_{\min}$  和  $\tau_{\max}$  是力矩边界向量, 边界值  $a(0)$  和  $a(1)$ 。以及速度边界值:  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ ,  $\dot{q}(1) = \dot{q}_f$ 。这样当  $b(s) = \ddot{s}$  已知,  $\ddot{s}$  和  $q(t)$  可以被唯一决定。

下面的工作均是在这一模型(5.7)的基础上扩展得到的, 下面进行逐一介绍。

### 5.1.2.1 鲁棒轨迹规划

假设动态模型(5.7)中有不确定因素, 于是真实模型为:

$$\tau(s) = (m(s) + \Delta m(s)) \ddot{s} + (c(s) + \Delta c(s)) \dot{s}^2 + (g(s) + \Delta g(s)) - \Delta d(s), \quad (5.8)$$

其中  $\Delta m(s)$ ,  $\Delta c(s)$ ,  $\Delta g(s)$  和  $\Delta d(s)$  是  $m(s)$ ,  $c(s)$ ,  $g(s)$  和力矩的扰动。本文假定扰动满足:

$$\mathcal{D}(\Delta m, \Delta c, \Delta g, \Delta d) : \left\{ \begin{array}{l} |\Delta m_l(s)| \leq B_m(l, s), l = 1, \dots, n \\ |\Delta c_l(s)| \leq B_c(l, s), l = 1, \dots, n \\ |\Delta g_l(s)| \leq B_g(l, s), l = 1, \dots, n \\ |\Delta d_l(s)| \leq B_d(l, s), l = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

其中  $\Delta m_l(s)$ ,  $\Delta c_l(s)$ ,  $\Delta g_l(s)$  和  $\Delta d_l(s)$  是向量元素  $\Delta m(s)$ ,  $\Delta c(s)$ ,  $\Delta g(s)$  和  $\Delta d(s)$  中的分量。

用最大最小方法[49], 可以得到如下两阶段模型:

$$\begin{aligned} \max_{b(s)} \quad & J_F = \int_0^1 \|r'(s)\|^2 a(s) ds \\ s.t. \quad & a'(s) = 2b(s), a(s) > 0, s \in (0, 1), a(0) = a_0, a(1) = a_1, \\ \max_{\mathcal{D}(\Delta m, \Delta c, \Delta g, \Delta d)} \quad & (m(s) + \Delta m(s))b(s) + (c(s) + \Delta c(s))a(s) + (g(s) + \Delta g(s)) - \Delta d(s) \leq \tau_{\max} \\ \max_{\mathcal{D}(\Delta m, \Delta c, \Delta g, \Delta d)} \quad & (m(s) + \Delta m(s))b(s) + (c(s) + \Delta c(s))a(s) + (g(s) + \Delta g(s)) - \Delta d(s) \geq \tau_{\min}, \end{aligned}$$

其中  $\mathcal{D}(\Delta m, \Delta c, \Delta g, \Delta d)$  是(5.9)中定义的。

以上模型进一步通过[6]中的方法, 再用离散化的方法可以求解, 具体可参见文[61]。这样模型所求得解满足在(5.9)扰动情形下的约束, 因此具有鲁棒性。

### 5.1.2.2 带电压约束的轨迹规划

考虑直流电机的控制系统, 假设第*i*个轴的电机的参数如下: 电阻( $R_i$ ), 电感( $L_i$ ), 反电动势( $K^e_i$ ), 传动比( $N_i$ ), 力矩常数( $K^r_i$ ), 控制电压( $u_i$ ), 电流 $I_i$ , 电机转角 $\theta_i$ 。那么第*i*个轴动力学方程为[12]:

$$\begin{aligned} L_i \dot{I}_i + R_i I_i + K^e_i \dot{\theta}_i &= u_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{\theta}_i &= N_i \dot{q}_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

另外力矩正比于电流有:

$$\tau_i = N_i K^r_i I_i. \quad (5.10)$$

这样根据[12]有:

$$\mathbf{L}\dot{\tau} + \mathbf{D}\tau + \mathbf{K}\dot{s} = \mathbf{u}, \quad (5.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{diag} \left\{ \frac{L_i}{N_i K^r_i}, i = 1, 2, \dots, n \right\} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{D} &= \text{diag} \left\{ \frac{R_i}{N_i K^r_i}, i = 1, 2, \dots, n \right\} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{K}_e &= \text{diag} \{ K^e_i N_i, i = 1, 2, \dots, n \} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \end{aligned}$$

是对角正定矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e \mathbf{q}' \in \mathbf{R}^n$ 。方便起见用 $L_{ii}$ ,  $D_{ii}$ , 和 $K_{eii}$ 来表示 $L(i, i)$ ,  $D(i, i)$ , 和 $K_e(i, i)$ 。

根据[76], 为了防止控制电压出现跳跃的情形, 引入它的变化率约束:

$$-\dot{\tau}_B \leq \dot{\tau} \leq \dot{\tau}_B, \quad (5.12)$$

这样定义

$$x_1(s) = \ddot{s}, x_2(s) = \dot{s}, x_3(s) = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}, s \in [0, 1]. \quad (5.13)$$

在模型(5.7)的基础上, 连同

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\dot{\tau} + \mathbf{D}\tau + \mathbf{K}\dot{s} = (\mathbf{L}\tau' + \mathbf{K})\sqrt{\dot{x}_1} + \mathbf{D}\tau, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau} = \tau' \dot{s} &= \mathbf{m} \ddot{s} + (\mathbf{m}' + 2\mathbf{c}) \dot{s} \dot{s} + \mathbf{c}' \dot{s}^2 + \mathbf{g}' \dot{s} \\ &= (\mathbf{m} x_3 + (\mathbf{m}' + 2\mathbf{c}) x_2 + \mathbf{c}' x_1 + \mathbf{g}') \sqrt{x_1}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

可以得到优化问题:

$$\begin{aligned}
 \min_{x_3} J_{\text{obj}} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x_1}} ds \\
 \text{s.t. } x_1'(s) &= 2x_2, \quad x_1(0) = x_{1,0}, \quad x_1(1) = x_{1,1}, \\
 x_2'(s) &= x_3, \quad x_2(0) = x_{2,0}, \quad x_2(1) = x_{2,1}, \\
 \tau(s) &= mx_2 + cx_1 + g, \\
 \tau'(s) &= mx_3 + (m' + 2c)x_2 + c'x_1 + g', \\
 \dot{\tau} &= \tau'(s) \sqrt{x_1}, \\
 \mathbf{u} &= (\mathbf{L}\tau' + \mathbf{K})\sqrt{x_1} + \mathbf{D}\tau, \\
 -\tau_B &\leq \tau(s) \leq \tau_B, \\
 -\dot{\tau}_B &\leq \dot{\tau} \leq \dot{\tau}_B, \\
 -\mathbf{u}_B &\leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_B.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

这个优化问题的直接求解是十分困难的, 这里采用类似(2.3.2)的求解策略将其约束进行线性化再求解, 具体可参见[59].

### 5.1.2.3 混合整数规划

在很多机械过程中, 有一些多阶段过程, 比如打孔, 焊接等. 这些任务的目标在于规划一条路径使它通过一系列给定的地点, 同时满足运动学和动力学约束和优化指标. 这样整个问题实际上是一个混合整数规划问题. 比较容易处理的一类情况是机械手在每个节点处停留, 也就是整个过程是一个不连续的过程的情形. 在这种情况下, 混合整数规划问题可以被分解成两阶段模型, 它们是decoupled的. 但是在连续工作的时候, 也就是每个节点处不停留的情况下, 是一个真正意义上的混合整数规划问题.

假定 $n_c$ 是给定的节点的数目, 那么给定节点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{n_c}$ 可以表示为 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ . 这样在模型(5.7)的基础上有:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{q}(t)} \quad & T_f \\
 \text{s.t. } \quad & \begin{cases} \mathbf{q}(t_i) - \mathbf{Q}\mathbf{W}_i = 0, \\ \dot{\mathbf{q}}(t_i) = \dot{\mathbf{q}}_i, i = 1, 2, \dots, n_c, \\ \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{W}_i = [1, 1, \dots, 1]_{n_c}^T, \\ \tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}), \\ -\tau_B \leq \tau \leq \tau_B, -\dot{\mathbf{q}}_B \leq \dot{\mathbf{q}} \leq \dot{\mathbf{q}}_B, \end{cases}
 \end{aligned}$$

其中 $t_i$ 指的是到达第 $i$ 条路径末端的时间间隔,  $Q = [p_1, p_2, \dots, p_{n_c}]_{n \times n_c}$ 是可能路径上的节点集合 $W \in \mathbb{Z}^{n_c \times n_c}$ ,  $W_i \in \{0, 1\}^{n_c}$ 是一个单位向量,  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n_c} = T_f$ .

通过遗传算法来对这个模型进行求解, 具体参见[60].

## 5.2 本文总结

本论文考虑了多轴数控加工中的基于时间最优的速度优化、跟踪误差控制的开闭环方法、以及数控加工中速度和刀具可靠性的关系问题。基于时间最优的速度优化中, 考虑了带伺服控制约束的情况, 这样可以在开环优化过程中保证加工的动力学特征; 跟踪误差的控制方法考虑了reshape来修改插补指令, 还有通过搭建精度较高的闭环控制ADRC策略来实现; 最后, 文中初步探讨了数控加工过程中刀具的可靠性问题, 在速度优化阶段引入模糊边界, 可以在保证刀具可靠性的情况下进行高速切削, 是一种针对传统加工方法的修正。本论文的主要创新点如下:

在进行实际的加工时, 输入伺服控制器的插补点是由之前的速度优化阶段首先产生的速度曲线。传统的速度曲线的生成方法往往是基于时间最优的运动学约束下的最优控制模型来实现的。由于实际加工过程在较大运动学状态或者加工曲线曲率较大的位置处容易产生较大的跟踪误差, 所以本文意在速度规划阶段控制误差精度。于是, 本文提出了带有动力学约束的时间最优控制模型。文中首次从理论上严格的证明了动力学约束和运动学约束之间的关系, 从而利用运动学的线性组合约束来代替动力学约束建立相应的近似优化算法。在讨论了动力学参数之间的关系后, 本文首次提出了在一类条件很弱的情形下的凸优化算法。该算法可以高效处理大规模离散点的情形。此类方法和理论已经被实验验证, 因此可以有效的应用到实际的加工当中。由于其开环特征, 非常方便数控开放系统使用者进行使用。

本文利用了两种控制方法来对CNC伺服系统进行控制。reshape方法意在插补后期, 通过修改插补点的输入指令来使得伺服输出和理想输出一致。文中讨论了该方法具备一定的鲁棒性的特点。本文使用的闭环控制策略ADRC是一种高级的伺服控制策略, 该方法是传统PID控制方法的改进, 在保证高精度控制的同时, 还保留了传统PID控制的一些优点。在作者已有的工作中, 从理论上证明了使用ESO和RESO对PMLM的收敛性和收敛速度, 这给出了使

用ESO或者RESO的ADRC时候的参数调节方法的理论基础。本文进行的实验也证实了所做工作中的推论。值得一提的是,在知道跟踪信号的路径分量的时候,相比于使用ESO搭建ADRC控制器,使用RESO是一种很好的策略。

本文对数控加工中速度和刀具可靠性的关系方面做了初步的探讨,考虑了在速度优化阶段同时保证刀具加工的可靠性问题,意在防止速度和加速度过大对刀具带来的过度磨损、甚至崩刃等不良后果。这样就在适当牺牲加工时间的前提下,保证加工中刀具的可靠性。通过引入模糊集理论,本文考虑了可变边界约束下的时间最优轨迹优化问题,通过一系列优化技巧,将模糊优化问题转化成一个单目标优化问题。另外,本文考察了在一类较弱的假设下,优化问题所满足的一些必要条件。随后,针对线性隶属度函数的情形,本文给出了求解此类问题的一个实例。

值得说明的是,关于数控系统中的上述方法,也可以很好的类比到机械手系统中,并在此基础上提出一系列新的模型和相应的求解策略。

### 5.3 未来的研究方向

本文提出的带动力学约束的时间最优轨迹规划模型可以推广到带有小扰动的动力学约束的情形。此外带有微分方程约束的优化问题也可以根据本文的相关理论对问题进行化简。此外,带有动力学约束的模型可以嵌入CAM等优化过程中,实现路径、速度、控制同时优化的模型。

关于reshape的方法可以推广到高阶伺服系统,同时也可以快速地机器学习方法对系统的不确定性进行在线辨识,从而可以将该方法应用于在线的加工过程。关于ADRC的运用,有关特殊情形下的非连续跳跃情形还没有理论方面的工作,今后可以在此方向进行研究。

关于刀具可靠性的问题,可以将该模型推广到带有机械手的轨迹规划问题当中,将力矩边界作为模糊变量,同时相应的理论基础也可以做适当的推广。

此页不缺内容





## 参考文献

- [1] Y. Altintas and B. Sencer. High speed contouring control strategy for five-axis machine tools. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 59(1):417-420, 2010.
- [2] Y. Altintas and K. Erkorkmaz. Feedrate optimization for spline interpolation in high speed machine tools. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 52(1):297-302, 2003.
- [3] J. Ashayeri. Development of computer-aided maintenance resources planning (camrp): A case of multiple cnc machining centers. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 23(6):614-623, 2007.
- [4] K.B. Aviso, R.R. Tan, A.B. Culaba, and J.B. Cruz Jr. Bi-level fuzzy optimization approach for water exchange in eco-industrial parks. *Process Safety and Environmental Protection*, 88(1):31-40, 2010.
- [5] K.L. Barton and A.G. Alleyne. A cross-coupled iterative learning control design for precision motion control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 16(6):1218-1231, 2008.
- [6] D. Bertsimas, D.B. Brown, and C. Caramanis. Theory and applications of robust optimization. *SIAM review*, 53(3):464-501, 2011.
- [7] X. Beudaert, P.Y. Pechard, and C. Tournier. 5-axis tool path smoothing based on drive constraints. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 51(12):958-965, 2011.
- [8] J.E. Bobrow, S. Dubowsky, and J.S. Gibson. Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths. *The International Journal of Robotics Research*, 4(3):3-17, 1985.

- [9] P.T. Boggs and J.W. Tolle. Sequential quadratic programming for large-scale nonlinear optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1):123–137, 2000.
- [10] D.A. Bristow, M. Tharayil, and A.G. Alleyne. A survey of iterative learning control. *Control Systems, IEEE*, 26(3):96–114, 2006.
- [11] F. Cheng, K.C. Fan, J.W. Miao, B.K. Li, and H.Y. Wang. A bpmn-pid based long-stroke nanopositioning control scheme driven by ultrasonic motor. *Precision engineering*, 36(3):485–493, 2012.
- [12] C.S. Chiu, K.Y. Lian, and T.C. Wu. Robust adaptive motion/force tracking control design for uncertain constrained robot manipulators. *Automatica*, 40(12):2111–2119, 2004.
- [13] H.Y. Chuang and C.H. Liu. Cross-coupled adaptive feedrate control for multiaxis machine tools. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 113(3):451–457, 1991.
- [14] D. Costantinescu and E.A. Croft. Smooth and time-optimal trajectory planning for industrial manipulators along specified paths. *Journal of robotic systems*, 17(5):233–249, 2000.
- [15] G.W. Cui, Y. Lu, D. Gao, and Y.X. Yao. A novel error compensation implementing strategy and realizing on siemens 840d cnc systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 61(5-8):595–608, 2012.
- [16] C.C. De Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(3):419–425, 1995.
- [17] J.Y. Dong and J.A. Stori. Optimal feed-rate scheduling for high-speed contouring. *Journal of manufacturing science and engineering*, 129(1):63–76, 2007.

- [18] K. Erkorkmaz and Y. Altintas. High speed cnc system design. part i: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation. *International Journal of machine tools and manufacture*, 41(9):1323–1345, 2001.
- [19] C.A. Ernesto and R.T. Farouki. Solution of inverse dynamics problems for contour error minimization in cnc machines. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49(5-8):589–604, 2010.
- [20] W. Fan, X.S. Gao, C.H. Lee, K.Zhang, and Qiang Zhang. Time-optimal interpolation for five-axis cnc machining along parametric tool path based on linear programming. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 69(5-8):1373–1388, 2013.
- [21] W. Fan, X.S. Gao, W. Yan, and C.M. Yuan. Interpolation of parametric cnc machining path under confined jounce. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 62(5-8):719–739, 2012.
- [22] R.T. Farouki and Y.F. Tsai. Exact taylor series coefficients for variable-feedrate cnc curve interpolators. *Computer-Aided Design*, 33(2):155–165, 2001.
- [23] Z.Q. Gao, Y. Huang, and J.Q. Han. An alternative paradigm for control system design. In *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 5, pages 4578–4585. IEEE, 2001.
- [24] C.E. Garcia, D.M. Prett, and M. Morari. Model predictive control: theory and practice—a survey. *Automatica*, 25(3):335–348, 1989.
- [25] A. Gasparetto, A. Lanzutti, R. Vidoni, and V. Zanotto. Experimental validation and comparative analysis of optimal time-jerk algorithms for trajectory planning. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 28(2):164–181, 2012.
- [26] C.G. Lo Bianco and O. Gerelli. Online trajectory scaling for manipulators subject to high-order kinematic and dynamic constraints. *Robotics, IEEE Transactions on*, 27(6):1144–1152, 2011.

- [27] B.Z. Guo and Z.L. Zhao. On convergence of the nonlinear active disturbance rejection control for mimo systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(2):1727–1757, 2013.
- [28] J.X. Guo, W.C. Xue, T. Hu. Active disturbance rejection control for pmlm servo system applied in cnc machines. Submitted to *J Syst Sci Complex*(under revision), 2013.
- [29] M.M. Gupta and N.K. Shinha. *Intelligent control system*. IEEE Press, 1996.
- [30] J.Q. Han. From pid to active disturbance rejection control. *Industrial Electronics, IEEE transactions on*, 56(3):900–906, 2009.
- [31] B.M. Hsu and M.H. Shu. Reliability assessment and replacement for machine tools under wear deterioration. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 48(1-4):355–365, 2010.
- [32] P.T. Huang, J.C. Chen, and C.Y. Chou. A statistical approach in detecting tool breakage in end milling operations. *Journal of Industrial Technology*, 15(3):1–7, 1999.
- [33] X.D. Huang and L.T. Shi. Simulation on a fuzzy-pid position controller of the cnc servo system. In *Intelligent Systems Design and Applications, 2006. ISDA'06. Sixth International Conference on*, volume 1, pages 305–309. IEEE, 2006.
- [34] F. Huo and A.N. Poo. Nonlinear autoregressive network with exogenous inputs based contour error reduction in cnc machines. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 67:45–52, 2013.
- [35] N. Jacobson. *Basic algebra I*. Courier Dover Publications, 2012.
- [36] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. pages 302–311, 1984.

- [37] R.K. Kayan and M.S. Akturk. A new bounding mechanism for the cnc machine scheduling problems with controllable processing times. *European Journal of Operational Research*, 167(3):624–643, 2005.
- [38] Z. Klim, E. Ennajimi, M. Balazinski, and C. Fortin. Cutting tool reliability analysis for variable feed milling of 17-4ph stainless steel. *Wear*, 195(1):206–213, 1996.
- [39] Y. Koren. Cross-coupled biaxial computer control for manufacturing systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102(4):265–272, 1980.
- [40] B.C. Kuo and M.F. Golnaraghi. *Automatic control systems*, volume 4. John Wiley & Sons New York, 2003.
- [41] W. Kuo and V.R. Prasad. An annotated overview of system-reliability optimization. *Reliability, IEEE Transactions on*, 49(2):176–187, 2000.
- [42] Y.J. Kwon and G.W. Fischer. A novel approach to quantifying tool wear and tool life measurements for optimal tool management. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43(4):359–368, 2003.
- [43] A.C. Lee, M.T. Lin, Y.R. Pan, and W.Y. Lin. The feedrate scheduling of nurbs interpolator for cnc machine tools. *Computer-Aided Design*, 43(6):612–628, 2011.
- [44] C.Y. Li and Y.M. Zhang. Time-variant reliability assessment and its sensitivity analysis of cutting tool under invariant machining condition based on gamma process. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 2012.
- [45] S.R. Li, Q. Zhang, X.S. Gao, and H.B. Li. Minimum time trajectory planning for five-axis machining with general kinematic constraints. *MM Res Prepr*, 31:1–20, 2012.
- [46] R.H. Liang and J.H. Liao. A fuzzy-optimization approach for generation scheduling with wind and solar energy systems. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 22(4):1665–1674, 2007.

- [47] J.L. Dong, C.Y. Lin. *Multi-objective optimization theory and method*(in Chinese). Jilin Education Press, 1992.
- [48] H.M. Liu and V. Makis. Cutting-tool reliability assessment in variable machining conditions. *Reliability, IEEE Transactions on*, 45(4):573-581, 1996.
- [49] J. Löfberg. *Minimax approaches to robust model predictive control*. Univ., 2003.
- [50] M.K. Luhandjula. Fuzzy stochastic linear programming: survey and future research directions. *European Journal of Operational Research*, 174(3):1353-1367, 2006.
- [51] R.T. Marler and J.S. Arora. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimization*, 26(6):369-395, 2004.
- [52] U. Natarajan, V.M. Periasamy, and R. Saravanan. Application of particle swarm optimisation in artificial neural network for the prediction of tool life. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 31(9-10):871-876, 2007.
- [53] R.A. Osornio-Rios, R.Je. Romero-Troncoso, G. Herrera-Ruiz, and R. Castañeda-Miranda. The application of reconfigurable logic to high speed cnc milling machines controllers. *Control Engineering Practice*, 16(6):674-684, 2008.
- [54] T. Özel and A. Nadgir. Prediction of flank wear by using back propagation neural network modeling when cutting hardened h-13 steel with chamfered and honed cbn tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(2):287-297, 2002.
- [55] B.G. Pachpatte. A note on gronwall-bellman inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44(3):758-762, 1973.

- [56] D. Peidro, J. Mula, R. Poler, and J. Verdegay. Fuzzy optimization for supply chain planning under supply, demand and process uncertainties. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(18):2640–2657, 2009.
- [57] D.N. Prabhakar Murthy, M. Bulmer, and J.A. Eccleston. Weibull model selection for reliability modelling. *Reliability Engineering & System Safety*, 86(3):257–267, 2004.
- [58] S. Purushothaman. Tool wear monitoring using artificial neural network based on extended kalman filter weight updation with transformed input patterns. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 21(6):717–730, 2010.
- [59] Q. Zhang, J.X. Guo, S.R. Li and X.S. Gao. Time-optimal path tracking for robots under dynamics constraints based on convex optimization. Submitted to *Robotics and computer integrated manufacturing*.
- [60] S.R. Li, Q. Zhang, and J.X. Guo. Mixed integer optimal control in minimum time multi-points traversal problem of robotic manipulators. Accepted by *IFAC, 2014*.
- [61] Q. Zhang, S.R. Li, J.X. Guo and X.S. Gao. Tractable algorithm for robust time-optimal path-tracking control of robotics manipulators under confined torque. Preprinted.
- [62] Q. Zheng and Z.Q. Gao. On practical applications of active disturbance rejection control. In *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese*, pages 6095–6100. IEEE, 2010.
- [63] M. Rausand and A. Høyland. *System reliability theory: models, statistical methods, and applications*, volume 396. John Wiley & Sons, 2004.
- [64] K. Sasikumar and P.P. Mujumdar. Fuzzy optimization model for water quality management of a river system. *Journal of water resources planning and management*, 124(2):79–88, 1998.

- [65] T.F. Schraeder and R.T. Farouki. Experimental performance analysis of an inverse dynamics cnc compensation scheme for high-speed execution of curved toolpaths.
- [66] R.R. Selmic and F.L. Lewis. Neural-network approximation of piecewise continuous functions: application to friction compensation. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 13(3):745-751, 2002.
- [67] B. Sencer. Five-axis trajectory generation methods. Master's thesis, The University of British Columbia, September 2005.
- [68] B. Sencer, Y. Altintas, and E. Croft. Feed optimization for five-axis cnc machine tools with drive constraints. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 48(7):733-745, 2008.
- [69] K.G. Shin and N.D. McKay. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 30(6):531-541, 1985.
- [70] K.G. Shin and N.D. McKay. A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 31(6):491-500, 1986.
- [71] K.K. Tan, S.N. Huang, and T.H. Lee. Robust adaptive numerical compensation for friction and force ripple in permanent-magnet linear motors. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(1):221-228, 2002.
- [72] K.K. Tan, T.H. Lee, and H.X. Zhou. Micro-positioning of linear-piezoelectric motors based on a learning nonlinear pid controller. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 6(4):428-436, 2001.
- [73] M.S. Tsai, H.W. Nien, and H.T. Yau. Development of an integrated look-ahead dynamics-based nurbs interpolator for high precision machinery. *Computer-Aided Design*, 40(5):554-566, 2008.



- [74] M.S. Tsai, H.W. Nien, and H.T. Yau. Development of an integrated look-ahead dynamics-based nurbs interpolator for high precision machinery. *Computer-Aided Design*, 40(5):554–566, 2008.
- [75] D. Verscheure, B. Demeulenaere, J. Swevers, J. De Schutter, and M. Diehl. Time-optimal path tracking for robots: A convex optimization approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(10):2318–2327, 2009.
- [76] D. Verscheure, B. Demeulenaere, J. Swevers, J. De Schutter, and M. Diehl. Time-optimal path tracking for robots: A convex optimization approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(10):2318–2327, 2009.
- [77] Y. Wang, G. Zhang, K.S. Moon, and J.W. Sutherland. Compensation for the thermal error of a multi-axis machining center. *Journal of materials processing technology*, 75(1):45–53, 1998.
- [78] W.C. Xue. *On theoretical analysis of active disturbance rejection control*. PhD thesis, Academy of Mathematics and Systems Science Chinese Academy of Sciences, 2012.
- [79] Y. Xiao and K.Y. Zhu. Optimal synchronization control of high-precision motion systems. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 53(4):1160–1169, 2006.
- [80] W.C. Xue and Y. Huang. On performance analysis of adrc for nonlinear uncertain systems with unknown dynamics and discontinuous disturbances. In *Control Conference (CCC), 2013 32nd Chinese*, pages 1102–1107. IEEE, 2013.
- [81] H. Yang and J. Ni. Dynamic neural network modeling for nonlinear, non-stationary machine tool thermally induced error. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 45(4):455–465, 2005.
- [82] H.T. Yau, M.T. Lin, and M.S. Tsai. Real-time nurbs interpolation using fpga for high speed motion control. *Computer-Aided Design*, 38(10):1123–1133, 2006.

- [83] S.S. Yeh and P.L. Hsu. A new approach to bi-axial cross-coupled control. In *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, pages 168–173. IEEE, 2000.
- [84] S.S. Yeh and P.L. Hsu. Estimation of the contouring error vector for the cross-coupled control design. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 7(1):44–51, 2002.
- [85] T. Yong and R. Narayanaswami. A parametric interpolator with confined chord errors, acceleration and deceleration for nc machining. *Computer-Aided Design*, 35(13):1249–1259, 2003.
- [86] C.M. Yuan, K. Zhang, and W. Fan. Time-optimal interpolation for cnc machining along curved tool pathes with confined chord error. *Journal of Systems Science and Complexity*, 26(5):836–870, 2013.
- [87] J.X. Yuan and J. Ni. The real-time error compensation technique for cnc machining systems. *Mechatronics*, 8(4):359–380, 1998.
- [88] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.
- [89] K. Zhang, J.X. Guo, and X.S. Gao. Cubic spline trajectory generation with axis jerk and tracking error constraints. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 14(7):1141–1146, 2013.
- [90] K. Zhang, C.M. Yuan, and X.S. Gao. Efficient algorithm for time-optimal feedrate planning and smoothing with confined chord error and acceleration. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 66(9-12):1685–1697, 2013.
- [91] K. Zhang, C.M. Yuan, and X.S. Gao. Efficient algorithm for time-optimal feedrate planning and smoothing with confined chord error and acceleration. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 66(9-12):1685–1697, 2013.

- [92] K. Zhang, A. Yuen, and Y. Altintas. Pre-compensation of contour errors in five-axis cnc machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 74:1–11, 2013.
- [93] M. Zhang, W. Yan, C.M. Yuan, D.K. Wang, and X.S. Gao. Curve fitting and optimal interpolation on cnc machines based on quadratic b-splines. *Science China Information Sciences*, 54(7):1407–1418, 2011.
- [94] Q. Zheng, Z.Z. Chen, and Z.Q. Gao. A practical approach to disturbance decoupling control. *Control Engineering Practice*, 17(9):1016–1025, 2009.
- [95] H.J. Zimmermann. *Fuzzy Set Theory and Its Applications Second, Revised Edition*. Springer, 1992.
- [96] Z. Zmeskal. Application of the fuzzy-stochastic methodology to appraising the firm value as a european call option. *European Journal of Operational Research*, 135(2):303–310, 2001.

此页不缺内容



## 发表文章目录

- [1] Jinan-Xin Guo, Ke Zhang, Qiang Zhang, Xiao-Shan Gao. Efficient time optimal feedrate planning under dynamic constraints for high-order CNC servo system. *Computer-Aided Design*, 45:1538-1546, 2013. (SCI)
- [2] Jinan-Xin Guo, Qiang Zhang, Xiao-Shan Gao, Hong-Bo Li. Time optimal feedrate generation with confined tracking error based on linear programming.(Accepted) *J Syst Sci Complex*, 2013. (SCI)
- [3] Jinan-Xin Guo, Qiang Zhang, Xiao-Shan Gao. Tracking error reduction in CNC machining by reshaping the kinematic trajectory. *J Syst Sci Complex*, 26(5):817-835,2013. (SCI)
- [4] Jinan-Xin Guo, Ke Zhang, Xiao-Shan Gao. A new method to estimate the intrinsic error of CNC machining. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 32(8):1033-1044,2012. (Chinese Core)
- [5] Ke Zhang, Jinan-Xin Guo, Xiao-Shan Gao. Cubic spline trajectory generation with axis jerk and tracking error constraints. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 14(7):1141-1146, 2013. (SCI)
- [6] Qiang Zhang, Shu-Rong Li, Jinan-Xin Guo. Smooth time-optimal tool trajectory generation for CNC manufacturing systems. *Journal of Manufacturing Systems*, 31:280-287, 2012. (SCI)
- [7] Qiang Zhang, Shu-Rong Li, Jinan-Xin Guo. Mixed integer optimal control in minimum time multi-points traversal problem of robotic manipulators. (Accepted) *IFAC, 2014*.

## 已完成的文章

- [8] Jinan-Xin Guo, Wen-Chao Xue, Tao Hu. Active disturbance rejection control for PMLM servo system applied in CNC machines. Submitted to *J Syst Sci Complex*(under revision), 2013.
- [9] Qiang Zhang, Jinan-Xin Guo, Xiao-Shan Gao, Shu-Rong Li. Tractable algorithm for robust time-optimal path-tracking control of robotics manipulators under confined torque. *Preprinted*
- [10] Jinan-Xin Guo, Ke Zhang. Feedrate optimization under kinematic constraints with fuzzy bound. *Preprinted*.
- [11] Qiang Zhang, Shu-Rong Li, Jinan-Xin Guo, Xiao-Shan Gao. Time-optimal path tracking for robots under dynamics constraints based on convex optimization. Submitted to *Robotics and computer integrated manufacturing*.

## 致 谢

在中科院数学与系统科学研究院五年的学习生活中，我特别感谢我的导师高小山研究员的指导与支持。他对于科研的热情和不苟的态度、创新精神和深刻的洞察力对本文的完成起着至关重要的作用。

此外，衷心感谢数学机械化实验室的李洪波研究员、袁春明副研究员等老师的指导和帮助，以及实验室各位同学的关心与交流；感谢复杂系统实验室的黄一研究员，薛文超助理研究员的指导和帮助；感谢中国科学院大学申立勇副教授的指导和帮助；感谢中国石油大学（华东）李树荣教授的一些背景的介绍；加拿大英属哥伦比亚大学(University of British Columbia)机械工程实验室对本文部分实验的完成有很大的帮助，在此一并表示感谢。

最后，谨将本文献给我最亲爱的家人，感谢他们多年以来的支持与陪伴！