

中国科学院研究生院

博士学位论文

多约束下参数刀具路径的时间最优数控插补研究

姓名：樊炜

申请学位级别：博士

专业：应用数学

指导教师：吴文俊；王定康

201205



摘 要

数控插补是数控系统控制部分的核心算法之一,影响数控机床加工精度和加工速度。实际加工中涉及精度的因素众多,例如机床振动、刀具质量、系统稳定性、进给速度等,加工效率受机床性能参数的限制,如进给速度、加速度、加加速度,超精密加工时还需要考虑Jounce (加速度对时间的二阶导数)的限制。由于机床参数限制和用户需求不同,而优秀的插补算法对提高产品的精度和效率有决定性作用,所以插补算法的研究是数控领域里至关重要的环节。

本文针对以上问题做了如下工作:

(1) 引入弓高误差速度限制曲线(CEVLC)的概念,从而把弓高误差约束简化为法向加速度约束,给出弓高误差与加速度约束下参数曲线时间最优插补算法,使速度曲线严格的在CEVLC“之下”,由切向加速度约束或CEVLC控制,给出了关于路径参数速度曲线显示表达式。上机实现弓高误差与加速度约束下参数曲线时间最优插补算法,证实了算法的可行性。

(2) 提出了五轴参数路径加速度和弓高误差约束下近似时间最优算法。在给定五轴参数路径、加速度和弓高误差约束下,通过区间离散化,建立了线性模型,把时间最优问题转化为一个线性规划问题,并且证明该线性规划问题的解具有唯一性,保证了该离散问题的解点点速度最大,给出了五轴加工下弓高误差与进给速度的关系。提出了五轴参数路径加加速度和弓高误差约束下近似时间最优插补算法。五轴加加速度下的插补算法把耗时难解的非线性问题转化为线性问题,提高了计算效率。把非线性的问题近似为线性问题,采用速度和作为优化目标求解,并证明该问题的解满足加加速度限制。通过仿真测试,五轴加速限制下插补算法的效率跟参数路径复杂度无关,可以快速计算出任意形式的参数路径。

(3) 提出了Jounce约束下参数路径插补算法。在超精密加工中为了减少机床振动,提出了Jounce约束的概念,给出了Jounce有界的加减速模式,并证明了Jounce有界时速度过渡中采用的加减速模式的时间最优性。对给定的一条

参数路径, 计算刀具路径的关键点(曲率极值点)及其最大可行速度, 然后使用Jounce约束下的加减速模式把相邻关键点之间的速度衔接起来。经过实际机床加工振动测试, Jounce有界下机床振动比加速度、加加速度有界限制下的振动明显减小。两个真实的数控加工模型的仿真实验说明了算法的可行性。

关键词: 插补, 速度规划, 有界Jounce, 时间最优, 参数曲线, 振动, 弓高误差, 切向加速度, 法向加速度, 高精密加工

Time-optimal Parametric Tool Path Interpolation Algorithms Under Various Constraints

Wei Fan (Major in Applied Mathematics)

Directed by Prof. Wen-Tsun Wu, Ding-Kang Wang

CNC interpolation algorithms play an important role in CNC controller, which influences the machining accuracy and efficiency. In practical machining, there are lots of factors affecting the accuracy, such as the machine tool vibration, machining feedrate and so on. Machining accuracy is limited by performance of machine properties, such as the speed, acceleration and jerk. In high-precision CNC machining, jounce (the second-order derivative of acceleration about time) should be taken into consideration.

Due to different machine constraints and user's requirements, better interpolation algorithms are crucial to machining accuracy and efficiency, thus researches about interpolation algorithms are crucial in the field of CNC machining.

This paper obtain the following results about the above problems:

(1) The concept "Chord Error Velocity Limit Curve" (CEVLC) is introduced and the chord error bound is reduced to a centripetal acceleration bound. We propose a time-optimal interpolation algorithm for parametric tool path under confined chord error, which made the planned velocity under CEVLC and controlled by tangential acceleration or CEVLC. Besides, we give the explicit velocity expression about path parameter. We implement the algorithm in real CNC machining to show the feasibility of the method.

(2) Time-optimal interpolation for five-axis CNC machining along a parametric tool path based on linear programming is proposed. For a given parametric tool path, confined acceleration and chord error, through refinement of intervals, a linear mode is established to transform the time-optimal problem into a linear

programming problem and the uniqueness of solution to the linear programming problem has been proved. This ensures the solution to linear mode is velocity-maximal at any position. We give the relationship between chord error and feedrate in five-axis machining. We propose an algorithm of approximate time-optimal interpolation for five-axis CNC machining, which transforms a nonlinear problem into a linear problem and adopts the sum of velocities as objective function. The solution to the problem is proved to satisfy the constraints. Through simulation test, the computation complexity of the interpolation algorithm is irrelevant to complexity of tool path and can quickly compute the feedrate for the parametric tool paths with any form.

(3) Interpolation algorithm under confined jounce for parametric CNC machining path is proposed. With the purpose of reducing vibration of the machine tool in high-precision machining, we propose jounce constraints and give the acceleration/deceleration (AD) mode under confined jounce. We prove time-optimality of AD mode in velocity transition under confined jounce. For a given parametric tool path, the velocity function is obtained by first computing the critical points of the tool path where the radius of curvature reaches extremal values, then determining the maximal feasible speeds at the critical points, and finally using the jounce confined acceleration/deceleration profile to connect the speeds at the adjacent critical points. A vibration experiment is conducted, which shows that vibration of the CNC machine decreases significantly for motions under confined jounce than that under confined acceleration and jerk. Simulation for two real CNC models are given to show the feasibility of the method.

Keyword: Interpolation, velocity planning, confined jounce, time-optimal, parametric curve, vibration, chord error, tangential acceleration, centripetal acceleration, high-precision manufacturing

第一章 引言

1.1 数控系统的研究背景

1.1.1 数控系统研究的重要性

数控技术是关系到我国产业安全、经济安全和国防安全的国家战略性高新技术。从手机、家电、汽车的制造，到飞机、导弹、潜艇的制造，都离不开数控技术。数控技术是装备制造业中的核心技术，是我国加快转变经济发展方式，实现我国机械产品从“制造”到“创造”升级换代的关键技术之一。数控系统是先进高端制造装备的“大脑”。数控系统确保了数控机床具有高精、高速、高效的功能，可以使装备制造业实现数字化、柔性化和网络化制造。随着我国航空航天、船舶、汽车、电站设备和国防工业等制造业的高速发展，数控机床在装备制造业中的重要性愈来愈明显，中高档数控系统的需求也越来越大。以往高档数控系统基本被国外厂商占领，因此我国中高档数控系统技术必须加快发展。

1.1.2 数控系统的发展

数控系统是一种利用数字信号对执行机构的位移、速度、加速度和动作顺序等实现自动控制的控制系统。从1952年美国麻省理工学院研制出第一台数控系统，到现在已走过了半个世纪。数控系统也由当初的电子管式起步，发展到了今天的开放式数控系统。

现代数控技术是综合了微电子技术，计算机技术，现代控制技术，传感检测技术，信息处理技术，网络通信技术和机械制造技术的最新成就而形成的一种高新技术。它是先进制造技术的核心之一，也是现代制造技术中关键的环节，体现了现代制造技术的高效益和软硬件技术的综合水平，是装备制造业实现数字化、自动化、柔性化、集成化、网络化的核心技术。

1.2 数控插补与运动规划研究

在数控机床中, 刀具不能严格地按照要求加工的曲线运动, 只能用折线轨迹逼近所要加工的曲线。数控插补是机床数控系统依照一定方法确定刀具运动轨迹的过程。也可以说, 已知曲线上的某些数据, 按照某种算法计算已知点之间的中间点的方法, 也称为“数据点的密化”。数控装置根据输入的零件程序的信息, 将程序段所描述的曲线的起点、终点之间的路径进行数据密化, 从而形成要求的轮廓轨迹, 这种“数据密化”机能就称为“插补”。插补计算就是数控装置根据输入的基本数据, 通过计算, 把工件轮廓的形状描述出来, 边计算边根据计算结果向各坐标发出进给脉冲, 对应每个脉冲, 机床在响应的坐标方向上移动一个脉冲当量的距离, 从而将工件加工出所需要轮廓的形状。

插补技术包括经典插补技术、参数曲线插补技术与智能插补技术。在研究插补时需要考虑几个因素, 包括刀具路径、运动学约束、误差精度约束和速度规划算法的选择。

1.2.1 刀具路径的选择

目前大多数的CNC系统只支持直线和圆弧插补功能, 做法是通过CAM软件将曲线曲面按加工精度要求分解成小直线或圆弧段, 送入数控系统, 再由数控系统按直线/圆弧插补的方式对每一小段进行二次插补, 完成数控加工, 数控系统要求实时快速计算, 往往涉及前瞻和回溯处理, 比如文献[20]实现了小线段插补。

为了避免曲线/曲线离散化而导致数据量过大, 另外一种做法是把CAM软件生成的G代码, 在一定的误差条件下通过数据压缩的方式拟合成曲线或曲面的形式, 再对曲线做插补。许多人把研究领域放在参数曲线插补, 包括B样条曲线插补、NURBS曲线插补。SIEMENS、FANUC等高档CNC系统也接收参数曲线作为输入。

1.2.2 运动学约束

机床运动性能的约束称为运动学约束, 这些参数有进给速度、加速度、加加速度等。为了减少机床振动, 提高加工质量, 已有的插补算法考虑了速度、

加速度外还考虑了加加速度约束。不过对于超精密加工,譬如纳米插补等,只考虑加加速度这个层级还是有缺陷的,反映在振动较大,为此现在有学者提出了物理量Jounce(即加加速度对时间的导数),而且理论上认为对Jounce做约束可以减少振动,不过把Jounce作为约束条件加到既有限制一起考虑的工作却比较少,一是目前对于Jounce约束的深入性研究偏少,二是多重限制考虑下速度规划并不简单。

1.2.3 误差精度约束

精度方面的约束参数有弓高误差、系统随动误差等等。弓高误差是指在一个插补周期内对参数路径做插补时引起的误差,是反映轮廓误差的一个重要指标。系统随动误差是指在数控加工中,受机床振动或数控系统内不稳定性因子,如电压和电流变化,导致刀具指令产生的偏差。理论上可以把这些误差约束和加工模型的G代码路径一起考虑。

不过涉及到曲线曲面,通常计算量非常大,目前只有西门子、FANUC等数控系统能实时支持这种高性能计算。因此对一般的数控系统而言,采用的步骤是先对路径曲线做速度规划,生成速度曲线后,把速度曲线和路径曲线放到一起生成新的工件程序,再送入数控系统中加工。每次加工一种零件时,只要用程序生成工件程序再交给数控系统即可。

对于五轴数控插补问题,目前文献[20]研究了小线段方式的插补。对于弓高误差约束下五轴参数路径曲线插补而言,理论上可以类似处理二轴和三轴情形相平面法[23]和[25]得到速度曲线,但是与三轴不同的是五轴牵涉到两个旋转轴的坐标变化问题,导致速度限制曲线的计算非常困难,而且牵涉轴数较多情况复杂,像相平面法处理五轴情形并不容易。文献[38]提出了非线性规划的方法,但缺陷是算法时间复杂度大,而且得到迭代的结果一般只是局部最优解。本文提出了一种线性规划的方法解决了五轴速度规划问题,证明了加速度约束下离散模型的时间最优性,对于加加速约束的情形采用了放缩法把非线性问题简化为线性问题,该算法的速度计算复杂度小,得到的解几乎是时间最优的。

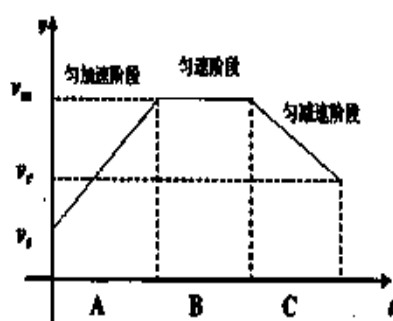


图 1.1: 直线加减速模式

1.2.4 速度规划算法及研究概况

速度规划算法控制了刀具沿刀具路径行进的运动方式,是数控加工高速高精的重要因素之一。特别是合适的动态控制和速度规划对减小机床振动提高加工精度至关重要[14]。

数控系统中的插补算法通常包含两个阶段,即速度规划和参数计算。令 $C(u)$ 为加工路径,确定沿 $C(u)$ 的进给速度 $v(u)$ 这个过程就叫速度规划。当速度 $v(u)$ 已知后,采样阶段(即在一个插补周期计算一个插补点 $u_{i+1} = u_i + \Delta u$)叫做参数计算阶段,对于参数点的计算可参见文献[23, 44, 45]。在插补算法中,速度规划最为关键,也是数控技术研究的热点。

在速度规划阶段中,选择加减速模式是计算速度函数的重要一环。加减速模式即在某种约束下使让速度发生改变的运动方式。

最简单的加减速方式是线性方式,如图1.1所示,这种加减速方式下加速度和速度有界。对每个轴使用线性加减速方式,Borow[21]、Shiller等[22]、Farouki和Timar[15]针对参数路径提出了一种时间最优的速度规划方式。

张梅[24]等针对二次B样条路径简化了[15]的方法,在工业机床上实现了实时加工。袁春明等给出了弓高误差和切向加速度限制下的时间最优速度规划方法[19]。

对于线性加减速模式而言,加速度可能会发生“跳跃”,譬如从最大值瞬间变为最小值,这就会导致机床的振动,影响加工精度。S形加减速模式是

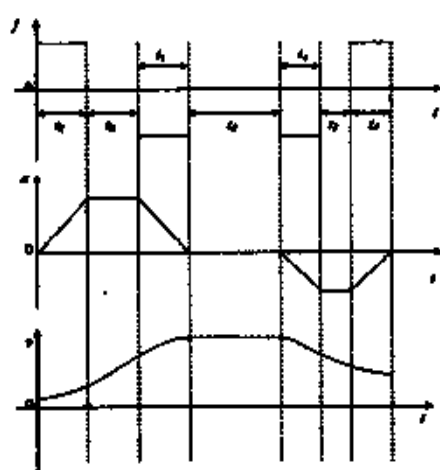


图 1.2: S形加减速模式

较好一点的加减速模式，如图1.2所示，这种加速模式中加加速度是有界的。S形加减速模式广泛用于速度规划中[3, 6, 8, 11-13, 16, 25]，得到加加速有界的运动模式。

另外一种在加加速度约束下获得速度函数的方法就是使用三角函数模式[7]。与S形模式相比，三角函数模式得到的加速度函数不可微，也不是时间最优的。

S形加减速模式增进了速度函数的光滑性。尽管如此，加加速度仍可能发生“跳跃”，譬如加加速度瞬间从最大值变为最小值。由于加加速度的变化反应了加速度的不光滑变化，这种加速模式仍然会带来振动，对超精密加工而言，譬如纳米插补，这会极大的影响加工质量。盖荣立等人[5]使用了平均滤波的方法改进了S形加减速模式，在某种程度下得到了连续有加加速度。但是这种方法破坏了加速度的连续性，并且不是时间最优的。

一种得到更为光滑的速度函数的方法就是使用Jounce约束。令 F 表示数控系统伺服提供的驱动力， F_c 为切削力。各个轴的质量记为 m ， j 表示加加速度。对 j 微分得到

$$\frac{d^2(F - F_c)}{dt^2} = m \frac{dj}{dt} = m\dot{j}, \quad (1.1)$$

这里 s 称为jounce或者snap, 反映加加速度瞬间变化的物理量。如果Jounce有界的话, 可以得到加加速度连续、加速度可微、速度二阶连续的运动模式。

根据刀具路径, 速度规划的算法可分为两大类: 一类是小线段路径速度规划, 另一种则是对参数曲线做速度规划。

小线段路径速度规划是指对刀具路径的G01代码直接做速度规划。文献[20]对小线段路径做了速度规划, 保证了加速度、加加速度满足约束条件。文献[46]对小线段分块处理, 使用前瞻的方法做速度规划。在传统的CAD系统里, 自由曲面的标准表达式是参数函数形式。尽管传统CNC控制器主要使用小线段(G01代码)表示参数路径。如果把参数曲线转化为小线段的话, 会导致一些问题, 譬如数据量庞大, 速度波动从而降低精度。文献[27, 41, 42]中Chou, Yang和Shpitalni等人提出直接使用CNC控制器中的CAD/CAM系统生成的光滑的参数曲线来克服这些缺陷。目前商业中的CNC控制器企业例如西门子公司[43]也在其高档产品中使用样条插补方式。

根据求解方法, 参数路径下的速度规划算法可以粗略的分为四类: 相空间分析法[19, 21-25], 直接采样法[6, 26-30], 关键点法[32-35], 数值优化法[3, 36-38]。

文献[21]、[22]、[23]、[24]和[19]用相空间法可以得到闭合形式解, 其中涉及了速度限制曲线和加速度约束下的积分曲线的概念。文献[25]给出了基于速度限制曲面下的贪心算法。这种方法的缺点是针对复杂的路径曲线时计算量非常大。实际上这种方法只能处理一些简单的参数曲线, 譬如二次曲线和三次的PH曲线[19, 24]。

直接采样法则是通过某种策略计算每个插补周期 $kT, k = 0, 1, \dots$ 的插补点。例如, Bedi等[26]和Yang-Kong[27]使用匀速方式, Yeh和Hsu在必要时使用弓高误差界来控制速度, 而在其他位置采用匀速方式[29]。这些方法简单而有效, 但是没有考虑机床的加速能力。Emami-Arezoo[28]和Lai等人[6]提出了加速度、加加速度约束和弓高误差约束下的时间最优的速度规划方法, 做法是当某个约束违背时通过回溯来调节速度。文献[30]采用相空间分析的思想给出了加速度约束下的直接采样法, 计算复杂度为 $O(M)$, 其中 M 为离散格子数。

在关键点法中, 通过曲率极值来识别刀具路径的关键点再根据弓高误差或

加速度约束来确定关键点处的最大速度。然后用各种加速模式规划每两个相邻关键点之间的路径曲线段对应的速度函数,例如Narayanaswami和Yong提出的S形加速模式, Lee等人[34]提出的三角函数加速模式,第二章提出的Jounce有界加速模式[33]。Tsai等[35]进一步引入了运动学约束。关键点法很实用,但不是时间最优并且弓高误差无法保证。

数值优化法把速度规划问题离散为用标准数值方法求解的非线性优化问题。这是一种求解连续优化问题非常标准的方法。针对在加加速度和弓高误差约束下的插补问题, Erkorkmaz-Altintas [3], Sencer-Altintas-Croft [37]给出了非线性优化法。在文献[36]中, Gasparetto等人为了减小振动,使用了加工时间和整体加加速度的线性组合作为目标函数。数值优化法非常普遍、强大,但是解非线性规划问题一般是非常费时的,并且得到的解不能保证全局最优。本文提出的基于线性规划的速度规划方法在一定程度上克服了这些缺点。

1.3 本文的综述与结构

本文的第二章提出了在弓高误差、进给速度、加速度约束下的插补算法,主要思想是把弓高误差简化为向心加速度约束,而向心加速度约束会形成一条速度限制曲线,称为弓高误差限制曲线(CEVLC),然后做速度规划找到在CEVLC“下方”的切向加速度控制的速度曲线。这两步当中可以找到速度曲线的显示表达式。这种算法被证明是时间最优且严格满足切向加速度和弓高误差约束,仿真结果显示了算法的可行性。

2.1节给出了弓高误差和加速度约束下时间最优速度规划的问题,针对该问题提出了CEVLC、关键点和积分轨迹的概念,分析了速度曲线的类型,最终给出了速度的算法。2.2节是算法的仿真和上机实验。2.3节为全章的总结。

第三章研究了进给速度、五轴加速度、五轴加加速度和弓高误差约束下的刀具参数路径 $\eta(u)$, $u \in [0, 1]$ 的时间最优插补问题。为了实现高速加工,需要让规划的速度尽可能地大才好。为了实现高精加工,规划的速度须满足一系列约束,譬如加速度、加加速度、弓高误差等。因此速度规划问题通常表述为运动学约束和弓高误差约束下的时间最小优化问题。我们采用了数值最优法,但不用非线性规划法而是采用了线性规划来解速度规划问题。

通过把微分方程离散为有限差分形式, 加速度约束下的速度规划问题简化为等价的线性规划问题。并可以证明该线性规划问题有唯一解, 这个唯一解即原速度规划问题的解, 从而也说明了速度点点最大性。我们给出了时间最优的速度规划算法, 其计算复杂度是多项式形式 $O(N^{3.5})$, N 为细分参数区间 $[0,1]$ 的段数。此外, 计算复杂度对任意路径几乎相同, 这对处理一般刀具参数路径形式的速度规划问题是非常有效的。实验说明了该算法的可行性, 计算结果显示规划得到的速度曲线满足约束, 并且是Bang-bang控制的。

我们进一步研究了把加加速度约束加进来下的速度规划问题。我们采用一阶Taylor逼近和不等式放缩法, 用约束更强的线性函数逼近非线性约束使得加加速度约束仍然满足, 同时把非线性的问题转化为线性问题。我们提出了进给速度、五轴加速度和加加速度、弓高误差约束下的插补算法, 例子的计算结果说明该算法的可行性, 也显示了规划得到的速度曲线满足约束条件, 并且几乎是Bang-bang控制的, 而线性规划的解对原问题的逼近效果也很不错。加加速度约束下的速度规划算法相对传统的非线性规划方法, 效率明显提高, 而且细分段数增多时非线性算法失效, 而线性规划算法仍可以在较短时间内得到计算结果, 从而说明了算法的有效性。

3.1节给出了机床的运动学约束和数控加工的弓高误差约束形式。3.2节研究了加速度和弓高误差的约束下的速度规划问题。3.4节研究了加速度、加加速度、弓高误差约束下的速度规划问题。3.5节给出了仿真结果, 第3.6节是对全章的总结。

本文的第四章, 我们设计了一种Jounce约束下的加减速模式, 详细分析了加减速模式的性质, 并证明了这种加速模式对于速度跃迁是时间最优的。并在该加减速模式下给出了参数路径的插补算法。通过LMS SCADAS3传感器测试三种加速模式(即加速度模式、加加速度模式、Jounce模式)的振动情况(见图4.7), 振动测试的结果(见图4.8)显示Jounce约束下的加减速模式相对其他两种模式确实能大大减少刀具振动, 从而能提高加工质量, 同时对比三种加速模式的加工时间(见图4.3.1右侧), 发现相对其他两种加速模式, Jounce模式牺牲的加工时间很小。

Jounce有界下的加减速模式的重要组成部分是速度跃迁中的7段式加速模

式。在整个加减速模式中，首先使用7段式加速模式把速度从初值加到实际最大值，然后保持最大值一段时间，最后使用7段式减速模式把速度从实际最大值减到末速度。第四章详细分析了加减速模式的性质，并证明了这种加速模式对于速度跃迁是时间最优的。

对给定的参数路径曲线，首先计算刀具路径上的关键点（即曲率极值点），由插补周期和曲率极值，可以确定这些关键点的最大速度。然后，使用回溯的方法对每两个相邻关键点检查最大速度的可达性，即在给定路径长度下，一个关键点的最大速度能否加速或减速到下一个点的最大速度。当发生不可达情况时，需要调节关键点的速度使之可达。最后在每两个相邻的关键点之间，使用Jounce有界的加减速模式把速度衔接起来。最终的速度函数是这些加加速度模式的组合。

4.1节设计并分析了Jounce约束下的7段式加减速模式。4.2节提出参数刀具路径的插补算法。4.3节的振动试验比较了加速度、加加速度、Jounce约束下加减速模式的振动情况，并给出了两个数控加工模型的仿真结果显示了算法的可行性。4.4节是对全章的总结。

第二章 弓高误差和加速度约束下参数路径的时间最优插补

相平面法[21-23]是研究速度规划的有效方法。基于这一方法,可以证明加速度有界下时间最优速度解的唯一性,并给出了解析表达式。但是以上方法未考虑弓高误差,本章在弓高误差与加速度约束下证明了时间最优解是唯一的,并给出了解析解。

2.1 弓高误差和加速度约束下的时间最优速度规划

本节给出弓高误差、进给速度和加速度约束下的时间最优的速度规划算法。

2.1.1 问题

我们考虑连续度 C^1 空间参数曲线 $C(u)$, $u = 0..1$, 譬如B样条、NURBS等等。我们进一步假设曲线的每段是三阶可微的, 在每段的端点处皆有左右极限。

为控制数控机床刀具的运动, 我们需知道刀具路径上每点的速度。参数 u 处的速度用 $v(u)$ 表示, 称为速度曲线。计算速度曲线 $v(u)$ 的过程称为速度规划。

本节我们将证明弓高误差约束可以归结为法向加速度约束, 把速度规划问题表述为切向加速度与法向加速度约束下的优化问题。

对于参数路径曲线 $C(u)$, 记参数速度为:

$$\sigma(u) = \frac{ds}{du} = |C'(u)|,$$

这里'是关于 u 的导数。曲率和曲率半径定义为

$$k(u) = \frac{|C''(u) \times C'(u)|}{\sigma(u)^3}, \rho(u) = \frac{1}{k(u)}. \quad (2.1)$$

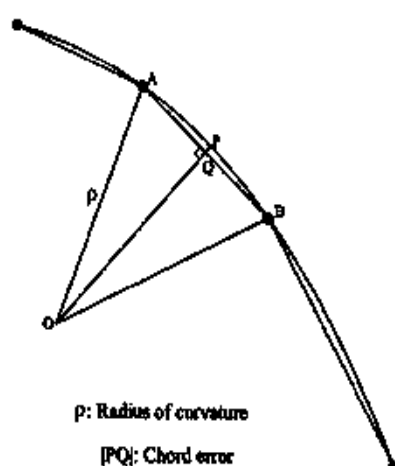


图 2.1: 弓高误差示意图

设数控机床的插补周期为 T , δ 为弓高误差界, $\pm A_T$ 为加速度界。由于一个插补周期内的行走路径是一个非常小的量, 因此在一个插补周期内参数路径可以近似成一个小圆弧, 如图2.1所示, $|PQ|$ 为AB段的弓高误差,

其形式为

$$|PQ| = \rho - \sqrt{\rho^2 - |AB|^2/4}$$

(参见文献[6, 28, 29])。根据上式, 我们有 $-2|PQ|\rho + |PQ|^2 = -|AB|^2/4$ 。由于 $|PQ|$ 与曲率半径 ρ 相比是一个非常小的量, 因此对于每个参数 u 处的弓高误差可以估计为[9, 第103页]

$$|PQ| \approx \frac{|AB|^2}{8\rho}.$$

如果记 $\delta(u)$ 为参数 u 处插补导致的弓高误差, 速度函数为 $v(u)$, 那么我们可以得到弓高误差对速度的约束形式:

$$q(u) = v^2(u) = |AB|^2/T^2 \approx \frac{8\delta\rho(u)}{T^2}. \quad (2.2)$$

记 $a_N(u)$ 为法向加速度, 那么

$$a_N(u) = v(u)^2/\rho(u) = k(u)v(u)^2 = k(u)q(u) \quad (2.3)$$

令

$$A_N = \frac{8\delta}{T^2}. \quad (2.4)$$

那么由(2.2), (2.3)和(2.4)知弓高误差约束可以转化为法向加速度约束:

$$\delta(u) \leq \delta \iff a_N(u) \leq A_N = \frac{8\delta}{T^2}. \quad (2.5)$$

由于

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{du}{ds} \frac{d}{du} = \frac{v}{\sigma} \frac{d}{du}, \quad (2.6)$$

切向加速度为

$$a_T(u) = \frac{dv(u)}{dt} = \frac{v(u)v'(u)}{\sigma(u)} = \frac{q'(u)}{2\sigma(u)}. \quad (2.7)$$

由(2.6), 时间最优速度规划的目的是找到速度函数 $v(u)$ 使得

$$\min_{v(u)} t = \int_0^1 \frac{\sigma(u)}{v(u)} du, \quad (2.8)$$

约束条件为

$$a_N(u) \leq A_N, u = 0..1, \quad (2.9)$$

$$|a_T(u)| \leq A_T, u = 0..1, \quad (2.10)$$

这里 $a_N(u)$ 和 $a_T(u)$ 分别是法向加速度和切向加速度, A_N 可用弓高误差界通过 δ 公式(2.4)计算得到.

注意, 由于 $a_N(u)$ 和 $a_T(u)$ 的方向是垂直的, 因此对每个轴上的加速度来说, 譬如 $a_x(u)$, 很明显不会超过 $\sqrt{A_N^2 + A_T^2}$.

2.1.2 CEVLC及其关键点

本节我们定义CEVLC, 它会在本章所提算法中起到重要作用.

令 δ 为弓高误差界, T 为数控机床插补周期, 根据上述方法可计算 A_N . 如果弓高误差达到边界, 那由(2.5)可知法向加速度也近似达到边界. 在这种情况下, 由(2.3)和(2.4), 我们有 $q(u) = \frac{A_N}{k(u)}$, 这就在 u - v 相平面内定义了一条曲线 $q_{lim}(u) = v_{lim}^2(u) = A_N/k(u) = \frac{8\delta}{k(u)T^2}, u \in [0, 1]$, 或者

$$v_{lim}(u) = \frac{\sqrt{8\delta/k(u)}}{T}, u \in [0, 1], \quad (2.11)$$

其中 $k(u)$ 为刀具路径曲线 $C(u)$ 的曲率。我们称这样的曲线为弓高误差速度限制曲线, 记为CEVLC (Chord Error Velocity Limit Curve)。

很明显真正的速度曲线要满足弓高误差约束的话一定不能超过CEVLC。

CEVLC上的某些点在算法中很重要, 称之为关键点或切换点。

第一类关键点是指CEVLC上不连续点。这些点对应着刀具路径曲线上曲率不连续点。这些点一定是参数曲线的奇点或曲线段的连接点。

$C(u)$ 的奇点可通过解方程 $C'(u) \times C''(u) = 0$ 得到。由(2.11)和(2.1), 这些点处的限制速度 v_{lim} 是 ∞ , 实际的速度曲线是无法达到的, 因此我们可以从关键点中去除这些奇点。这样只需要考虑连接点了。

在第一类关键点 u 处, 速度不连续, 我们用 $v^+(u), v^-(u)$ ($a^+(u), a^-(u)$)分别表示左右速度 (加速度)。如果 $v^+(u) < v^-(u)$, 则令该处的速度和加速度为 $(v^+(u), a^+(u))$; 否则该处的速度和加速度为 $(v^-(u), a^-(u))$ 。

第二类关键点是指CEVLC上连续但不可微的点 (即斜率不连续)。在这些点处的曲率连续但不可微, 因此这些点一定是相邻两个曲线段的连接点。

在第二类关键点 u 处, 切向加速度是不连续的, 定义其为 $\min\{a^+(u), a^-(u)\}$ 。

上述两种类型的关键点可以把CEVLC分为一条条的曲线段, 对每一个CEVLC段而言, 我们可以根据CEVLC的切向加速度是否为 $\pm A_T$ 作进一步划分, 这里 A_T 由(2.10)得到。如果CEVLC上某点的切向加速度为 $\pm A_T$, 那么这点为CEVLC的第三类关键点。我们可以解下列关于 u 的代数方程得到第三类关键点

$$a_{lim}(u) = \frac{q'_{lim}(u)}{2\sigma(u)} = \left(\frac{A_N \sigma(u)^3}{|C'(u) \times C''(u)|} \right)' / (2\sigma(u)) = \pm A_T.$$

这些关键点把CEVLC分为两类CEVLC曲线段:

1. 曲线段称为可行域, 如果该段曲线处所有点的切向加速度的绝对值不超过 A_T , 可行的CEVLC曲线段可能是最终速度曲线的一部分。
2. 曲线段称为不可行域, 如果该段曲线处所有点的切向加速度的绝对值都超过 A_T , 不可行的CEVLC曲线段不可能成为最终速度曲线的一部分。由

于有约束 $a_N(u) \leq A_N$, 最后的速度曲线必须严格的在不可行CEVLC曲线段之下。

注意, 如果在第二类关键点出的左右两边的曲线段都是可行域, 由于它不影响速度规划我们可以删去这个关键点。

2.1.3 积分轨迹

本节介绍当切向加速度达到边界时如何计算速度曲线。

我们使用Bang-bang控制, 即每个时刻至少约束(2.9)或(2.10)中有一个等号成立。如果法向加速度达到边界 A_N , 由第2.1.2节可知, 速度曲线为CEVLC上的一部分。如果切向加速度达到边界, 那么由(2.7), 速度平方 $q(u) = v(u)^2$ 可以通过解微分方程 $q'(u) = 2A_T\sigma(u)$ 得到, 其解为

$$q = 2A_T\pi(u) + c, \quad (2.12)$$

这里 $\pi(u) = \int \sigma du$ 是 $\sigma(u)$ 的原函数, c 是一个可以通过速度曲线上的起始点 $(u^*, q(u^*))$ 确定的常数:

$$c = q(u^*) - 2A_T\pi(u^*).$$

曲线(2.12)被称为 A_T 积分曲线或 A_T 积分轨迹。如果切向加速度达到最小值 $-A_T$, 我们可以用 $-A_T$ 取代 A_T 得到一条 $-A_T$ 积分轨迹。

在阐述算法之前, 我们先给出问题(2.8)解的描述, 这对理解算法有帮助。

令 $v_P(u)$ 为以CEVLC上的 $P = (u_P, v_{lim}(u_P))$ 为起始点向前(+u)向后(-u)两个方向的 A_T 积分轨迹。设 $v_0(u)$ 是从起始点 $P_0 = (0, 0)$ 向前出发的 A_T 积分轨迹, $v_1(u)$ 是从终点 $P_1 = (1, 0)$ 出发向后的 A_T 积分轨迹。当然上面提及的所有速度曲线均定义为 $[0, 1]$ 。

接下来我们给出优化问题(2.8)的解。

定理 2.1. 令 K 为CEVLC上关键点的有限集。那么

$$v(u) = \min_{P \in K} (v_{lim}(u), v_0(u), v_1(u), v_P(u)) \quad (2.13)$$

是最优问题(2.8)的解。

上述定理的证明参见文献[19]的附录部分。

由定理2.1, 我们知道时间最优的速度曲线是CEVLC和过起始点 $(0,0)$ 、终点 $(1,0)$ 和 u - v 平面上的CEVLC所有关键点的积分曲线的最小值。下节里要给出的算法是该定理有效的实现。由该定理亦可知 $v(u)$, $u \in [0,1]$ 是一条连续的分段曲线。

2.1.4 时间最优速度规划算法

由于我们使用看Bang-bang控制策略, 实际的速度曲线要么是CEVLC 的可行部分, 要么是CEVLC “下方” 的积分曲线段。我们要做的是找到这两类速度曲线的转接点。

我们首先速度规划算法的大致思想, 该算法将计算得到以 u 为横轴的 u - v 平面上的速度曲线 $v(u)$ 。

首先, 计算CEVLC, 找到其关键点和这些关键点处的速度。计算向前的 A_T 积分曲线 v_s 。从起始点 $(u, v(u)) = (0,0)$ 计算向前的积分曲线, 然后找到 v_s 与CEVLC的交点 $(u_i, v_s(u_i))$ 。从末尾点 $(1,0)$ 计算向后的 A_T 积分曲线 v_e 。找到CEVLC与 v_e 的交点 $(u_r, v_e(u_r))$ 。

然后, 如果 $u_i \geq u_r$, 找到 v_s 和 v_e 的交点, 返回 v_s 和 v_e 的组合作为最终的速度曲线。否则, 设 $P_c = (u_i, v_s(u_i))$ 为当前点, 考虑如下三种情况。

如果CEVLC上从 P_c 开始向前($+u$)的一段是可行的, 那么我们把这个可行段合并到 v_s , 设该段可行段的结束点为当前点。

如果CEVLC上从 P_c 开始向前($+u$)的一段是不可行, 这时需要考虑两种情况。

第一种情况: 以 P_c 为起始点的向前积分曲线 v_f 在CEVLC之下, 那么令 $(u_i, v_f(u_i))$ 为 v_f 与CEVLC的交点, 把 $v_f(u)$, $u \in [u_r, u_i]$ 合并到 v_s 中。令 $u_i = u_i$, 设 $P_c = (u_i, v_f(u_i))$ 为新的当前点。如图2.2所示。

第二种情况: 以 P_c 为起始点的向前积分曲线 v_f 在CEVLC之上, 那么我们寻找 P_c 右方的第一个关键点 P_n 。计算从 P_n 出发向后的 A_T 积分曲线 v_b , 找到 v_b 与 v_s 的交点, 并把 v_b 并入 v_s 形成新的 v_s 。设 P_n 为新的当前点。如图2.3所示。

由新的当前点, 重复上述步骤知道找到速度曲线为止。

为准确描述算法,需用到下列标识。对于不连续曲线 $f_1(x)$,我们用 $f_1^+(x^*)$ 和 $f_1^-(x^*)$ 分别表示 $f_1(x)$ 在 x^* 的左右极限。定义 $f_1(x^*) = \min(f_1^+(x^*), f_1^-(x^*))$ 。令 $f_2(x)$ 表示 C^0 连续的曲线。如果 $f_2(x^*) = f_1(x^*)$ 或者 $f_2(x^*)$ 在 $f_1(x)$ 在 x^* 的左右极限值之间,那么定义 $(x^*, f_2(x^*))$ 为曲线 $(x, f_2(x))$ 与 $(x, f_1(x))$ 的交点。

下面给出速度规划算法。

算法 2.1 (VP_CETA). 输入: 路径曲线 $C(u), u \in [0, 1]$, 弓高误差界 δ , 切向加速度界 A_T 。

输出: 速度曲线 $v(u), u \in [0, 1]$ (即优化问题(2.8)的解)。

- 1 用公式(2.4)计算法向加速度界 A_N , 用(2.11)式计算CEVLC及第2.1.2节提到的关键点。
- 2 从起始点 $(u, v(u)) = (0, 0)$ 开始计算向前的 A_T 积分曲线 v_s 。计算 v_s 和CEVLC的第一个交点 $(u_i, v_s(u_i))$ 。若不存在交点, 则记 $u_i = 1$ 。
- 3 从结束点 $(u, v(u)) = (1, 0)$ 开始计算向后的 A_T 积分曲线 v_e 。计算 v_e 和CEVLC的第一个交点 $(u_r, v_e(u_r))$ 。若不存在交点, 则记 $u_r = 0$ 。
- 4 如果 $(u_i, v_s(u_i)) = (u_r, v_e(u_r))$, 则返回 v_s 和 v_e 的组合作为最后的速度曲线。如果 $u_i > u_r$, 找出 v_s 和 v_e 的交点 $(u_i, v_s(u_i))$, 返回 $v(u)$, 这里

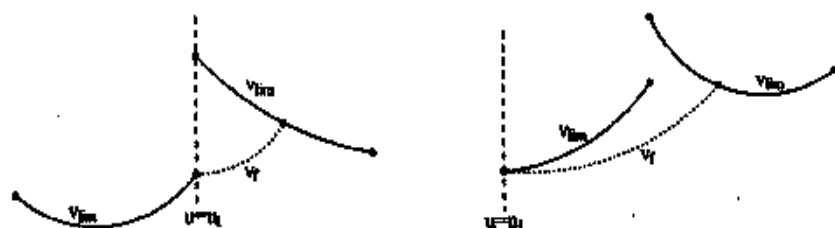
$$v(u) = \begin{cases} v_s, & 0 \leq u \leq u_i \\ v_e, & u_i < u \leq 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

- 5 如果 $(u_i, v_{lim}(u_i))$ 是CEVLC上的不连续点, 考虑三种可能性:

- (5.1) 如果 $v_{lim}^+(u_i) > v_s(u_i) = v_{lim}^-(u_i)$, 进入步骤6。
- (5.2) 如果 $v_{lim}^+(u_i) = v_s(u_i) < v_{lim}^-(u_i)$, 进入步骤8。
- (5.3) 如果 $v_{lim}^+(u_i) \geq v_s(u_i) > v_{lim}^-(u_i)$, 令 $u_n = u_i$ 进入步骤9。

- 6 此时 $(u_i, v_s(u_i))$ 为下一段CEVLC的起始点。考虑三种情况:

- (6.1) 如果CEVLC的下一段可行, 则进入步骤7。



(a) 步骤(5.2). 当前点不连续, 向前做积分是可能的
(b) 步骤(6.2). 当前点连续, 向前做积分是可能的

图 2.2: 步骤8的两种情形: 向前积分曲线 v_f 的计算

(6.2) 如果 $\alpha_{lim}^-(u_i) \geq A_T$, 进入步骤8.

(6.3) 如果 $\alpha_{lim}^-(u_i) \leq -A_T$, 那么沿 $+u$ 方向寻找下一个关键点 $(u_n, v_{lim}(u_n))$, 进入步骤9.

7 令 u_n 表示下一个关键点的参数值, 此时 $u_n > u_i$. 因此区间 (u_i, u_n) 处的CEVLC是可行的. 更新 v_s 为

$$v_s(u) = \begin{cases} v_s(u), & 0 \leq u < u_i \\ v_{lim}(u), & u_i \leq u \leq u_n. \end{cases}$$

令当前点 $u_i = u_n$, 进入步骤4.

8 计算以 $(u_i, v_s(u_i))$ 为起始点向前的 A_T 积分曲线 v_f . 寻找 v_f 与CEVLC的第一个交点 $(u_i, v_f(u_i))$ (见图2.2). 如果没有交点, 设当前点 $u_i = 1$. 更新 v_s 为

$$v_s(u) = \begin{cases} v_s(u), & 0 \leq u < u_i \\ v_f(u), & u_i \leq u \leq u_i. \end{cases}$$

令 $u_i = u_i$, 进入步骤4.

9 计算以 $(u_n, v_{lim}(u_n))$ 为起始点向后的 A_T 积分曲线 v_b . 找到 v_b 与 v_s 的交点 $(u_i, v_b(u_i))$ (见图2.3). 更新 v_s 为

$$v_s(u) = \begin{cases} v_s(u), & 0 \leq u < u_i \\ v_b(u), & u_i \leq u \leq u_n. \end{cases}$$



(a) 步骤(5.3). 当前点是CEVLC的不连续点. (b) 步骤(6.3). 当前点是CEVLC的连接点. 向前做积分不可能, 需要向后做积分

图 2.3: 步骤9的两种情况: 计算向后积分曲线 v_b

令当前点 $u_k = u_n$, 进入步骤 4.

下面的定理证明了所提算法计算得到的优化问题(2.8)的解是唯一的. 该定理的具体证明见[19].

定理 2.2. 通过算法VP_CETA计算得到的速度曲线是方程(2.19)里定义的速度曲线, 它是优化问题(2.8)的唯一解. 更准确地说, 速度曲线在刀具路径上的每一个位置都将达到最大可能值.

根据以上定理的结果我们可知, 对于给定约束下速度规划问题, Bang-bang控制策略是时间最优性的必需方式.

注 2.1. 鉴于机床加速性能的制约, 经常要考虑最大进给速度 V_m , 这时只需要对算法VP_CETA得到的速度函数 $v^*(u)$ 和 V_m 取最小值即可. 即最终的速度曲线为 $v(u) = \min\{v^*(u), V_m\}$. 道理其实很简单, 因为当 $v(u) = v^*(u)$ 时, 固然满足加速度和弓高误差的约束, 此时 $v^*(u) \leq V_m$, 不会超过机床最大速度限制; 当 $v(u) = V_m$ 时, 说明 $v^*(u) > V_m$, 由于 $v^*(u)$ 在CEVLC之下, 那么 V_m 亦满足弓高误差的约束, 而此时 $a_T(u) = 0$, 所以切向加速度约束也满足.

2.2 算法的实现与实际加工

本节我们使用在实际加工零件里提取的样本说明我们算法的可行性, 再用我们的算法实际加工一个模型. 在实现部分, 我们将以二次B样条曲线为例介绍如何用算法VP_CETA计算时间最优速度曲线, 计算“花瓶”中提取的二次B样路径曲线和 Ω 曲线. 用到的软件为C语言和Maple.

2.2.1 算法的实现

令 $C(u), u \in [0, 1]$ 为二次B样条曲线。因为 $C(u)$ 只有 C^1 的连续度且二次曲线无奇点, 所以样条的连接点为第一类和第二类关键点。计算第三类关键点, 考虑一段样条:

$$\begin{aligned} C(u) &= (x(u), y(u), z(u)) \\ &= (a_0 + a_1u + a_2u^2, b_0 + b_1u + b_2u^2, c_0 + c_1u + c_2u^2), \end{aligned}$$

这里 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ 为常数。 $C(u)$ 的曲率 $k(u) = \frac{|C' \times C''|}{\sigma^3}$, 这里

$$\sigma = |C'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{mu^2 + nu + l}.$$

由于 $C(u)$ 是二次的, 参数 m, n, l 可以通过下式计算

$$m = 4(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2), n = 4(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2), l = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

并且

$$|C' \times C''| = \sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}$$

为常数。因此CEVLC是

$$q = v^3 = \frac{A_N}{|k(u)|} = \frac{A_N \sigma^3}{|C' \times C''|} = D \sigma^3 = D(mu^2 + nu + l)^{3/2}, \quad (2.15)$$

这里的 D 是常数。沿CEVLC的切向加速度 $a_{tim} = \frac{(D\sigma^3)'}{2\sigma} = \frac{3}{2}D\sigma\sigma' = \frac{3}{4}D(\sigma^2)'$ 。因此 $a_{tim}(u)$ 是关于参数 u 的线性函数。那么计算第三类关键点可以通过解线性方程 $a_{tim} = \pm A_T$ 。从方程可以看出二次B样条的每段最多有两个第三类关键点。

现在介绍如何计算 A_T 积分轨迹。当切向加速度达到边界 $\pm A_T$ 时, 我们需要解如下微分方程:

$$q' = \pm 2A_T\sigma. \quad (2.16)$$

令

$$\begin{aligned} i(u) &= \pm 2A_T\pi(u) \text{ 这里} \\ \pi(u) &= \left[\frac{1}{4} \frac{(2mu+n)\sqrt{mu^2+nu+l}}{m} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\frac{1}{2}mu+n}{\sqrt{m}} + \sqrt{mu^2+nu+l}\right)l\frac{1}{\sqrt{m}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{8} \ln\left(\frac{\frac{1}{2}mu+n}{\sqrt{m}} + \sqrt{mu^2+nu+l}\right)n^2m^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

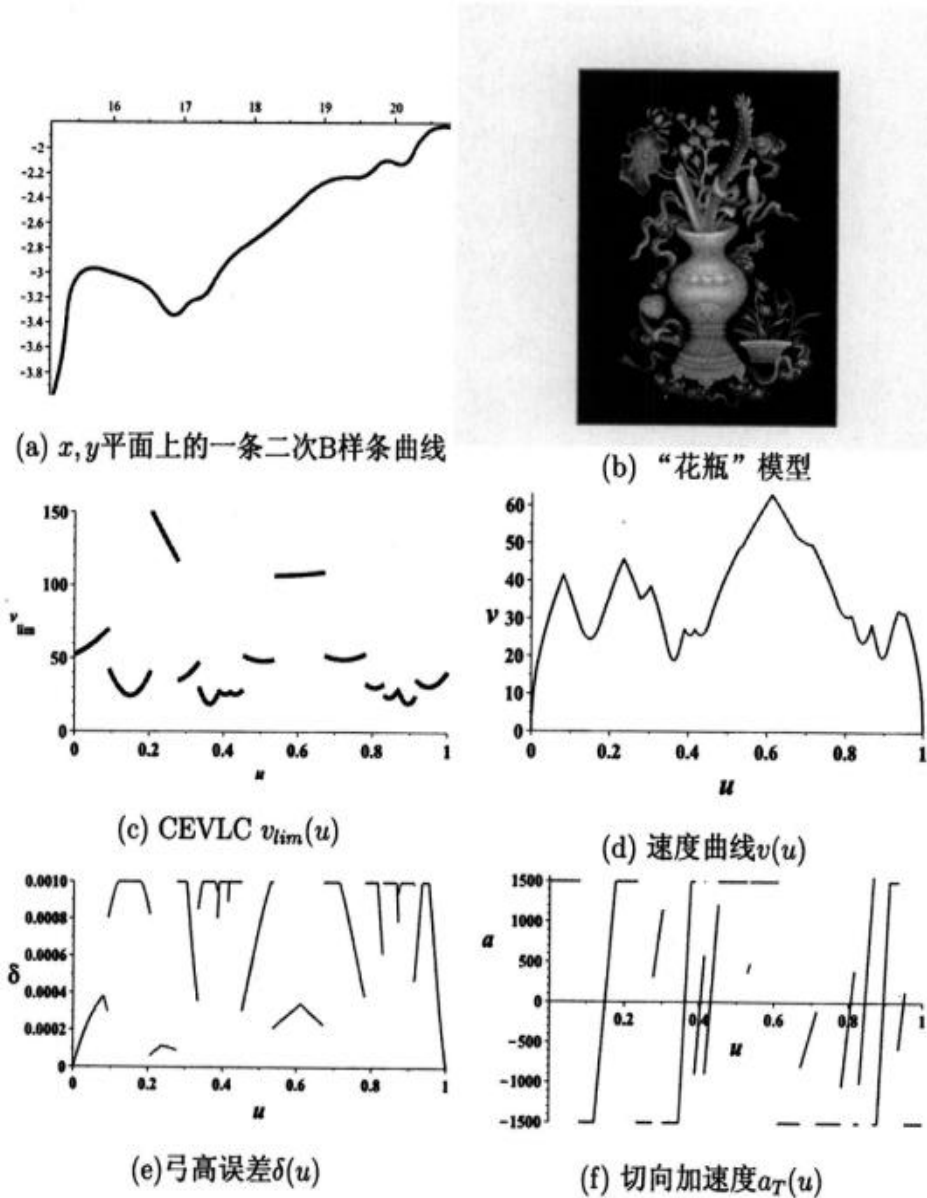
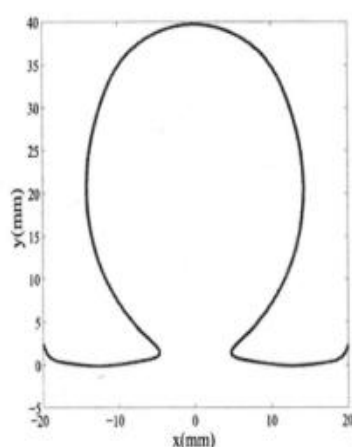
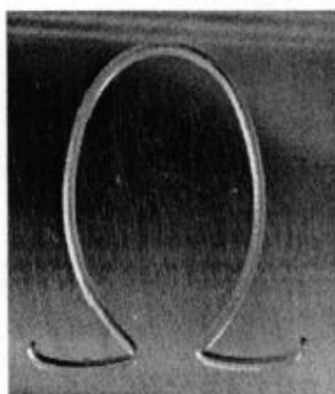


图 2.4: 弓高误差和加速度约束下, 一段二次B样条曲线的最优速度规划。除开(a)和(b), 横坐标表示 $C(u)$ 的参数。速度、加速度和弓高误差单位分别为 mm/s , mm/s^2 和 mm 。

(a) Ω 路径曲线(b) Ω 曲线实际加工图形图 2.5: Ω 路径曲线与实物加工图案

那么, $q(u) = i(u) - i(u^*) + q(u^*)$ 是初值为 $(u^*, q(u^*))$ 的微分方程(2.16)的解。

我们用例子说明算法的操作方式。图2.4(a)的曲线是一个平面的二次B样条曲线 $(x(u), y(u))$, $u \in [0, 1]$, 它由14段二次曲线段组成, 该曲线来自于图2.4(b)的刀具路径。我们设切向加速度和弓高误差界分别为 $A_T = 1500 \text{ mm/s}^2$ 、 $\delta = 1 \mu\text{m}$ 。如果插补周期 $T = 2 \text{ ms}$, 那么由(2.4)式知法向加速度界为 $A_N = 2000 \text{ mm/s}^2$ 。

根据算法VP_CETA, 我们先用最大法向加速度计算CEVLC, 如图2.4(c)所示。最终用算法VP_CETA计算的速度曲线如图2.4(d)所示, 速度曲线由32段组成, 其中其他的由切向加速度控制。图2.4(e)是时间最优速度曲线对应的弓高误差。图2.4(f)是其切向加速度。由这两个图, 可以看出运动过程是Bang-bang控制的。

我们再看一个 Ω 路径曲线的例子, 该曲线是由19段二次曲线段组成, 其路径曲线如图2.2.1(a)所示。我们设切向加速度和弓高误差界分别 $A_T = 1000 \text{ mm/s}^2$ 、 $\delta = 1 \mu\text{m}$ 。设插补周期 $T = 2 \text{ ms}$, 那么由(2.4)式知法向加速度界为 $A_N = 2000 \text{ mm/s}^2$, 此外考虑到机床的最大进给速度 $V_m = 65 \text{ mm/s}$ 。

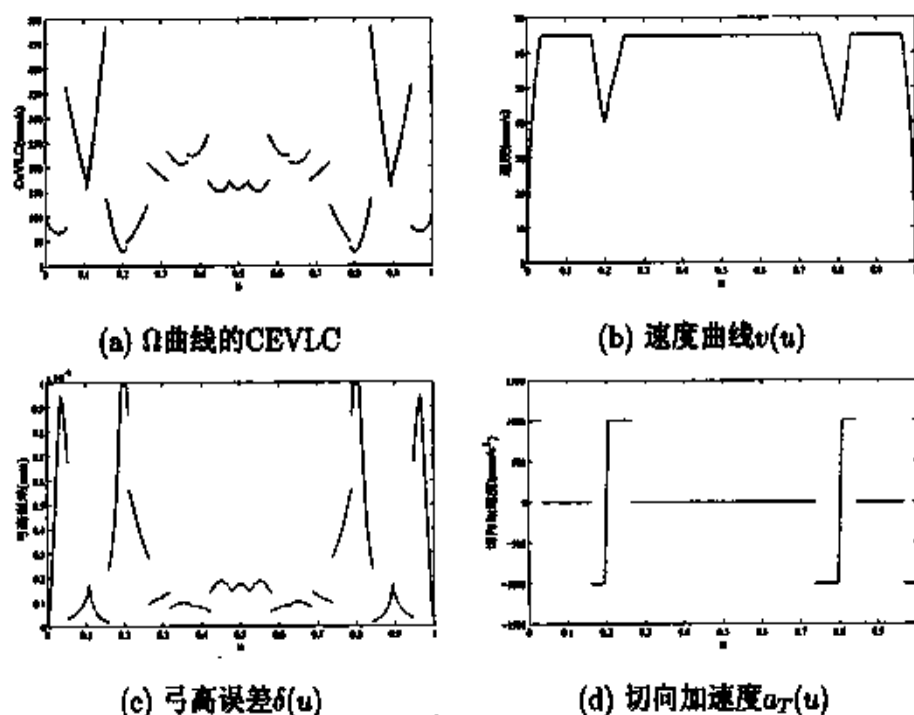


图 2.6: 弓高误差和加速度约束下, Ω 曲线的最优速度规划。速度、加速度和弓高误差单位分别为 mm/s , mm/s^2 和 mm 。

根据算法 VP_CETA, 我们先用最大法向加速度计算 CEVLC, 如图 2.6(a) 所示。最终用算法 VP_CETA 计算的速度曲线如图 2.6(b) 所示, 速度曲线由 32 段组成, 其中其他的由切向加速度控制。图 2.6(c) 是时间最优速度曲线对应的弓高误差。图 2.6(d) 是其切向加速度。由这两个图, 可以看出运动过程是 Bang-bang 控制的。

图 2.7 为 $A_T = 1000 mm/s^2$ 时, Ω 曲线在不同 δ 约束下的速度和对应的弓高误差, 譬如图 2.7(a) 和 (b) 分别代表 $\delta = 1 \mu m$ 约束下的速度和对应的弓高误差。从图中可以发现弓高误差约束越小, 误差 $\delta(u)$ 到达边界的区间长度越大, 相应速度曲线的 CEVLC 段也越长。此外, 当弓高误差约束为 $1 \mu m$ 和 $2 \mu m$ 时, 速度曲线差别不大, 而当误差边界为 $3 \mu m$ 时, 速度曲线较前两者变化明显。

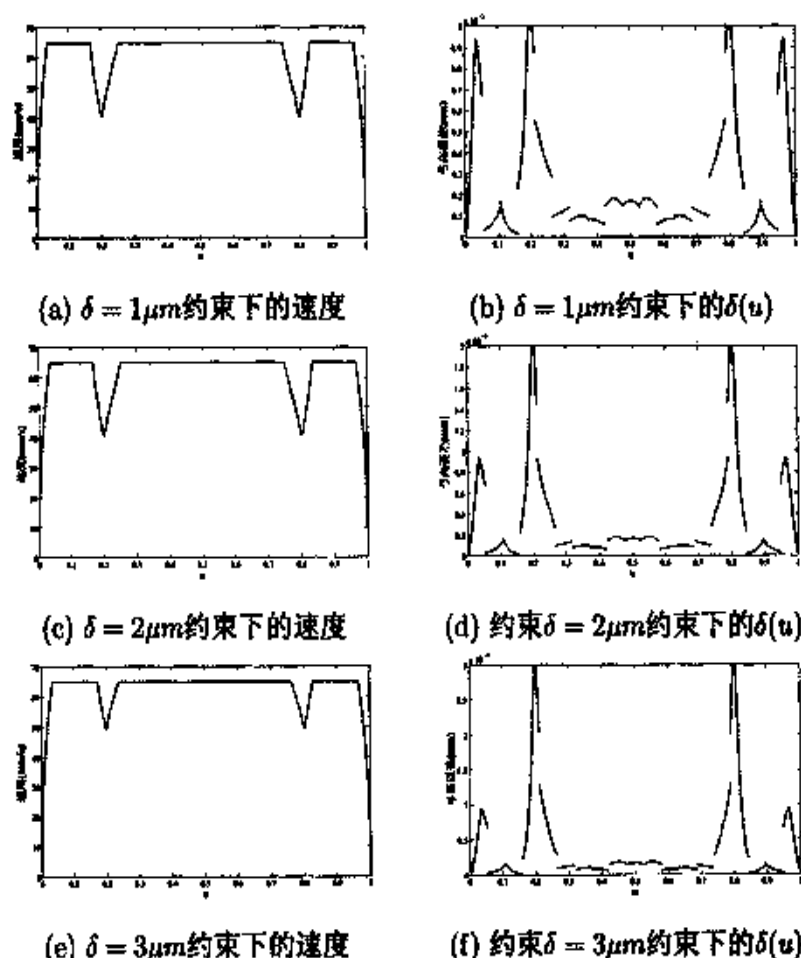


图 2.7: $A_T = 1000\text{mm/s}^2$ 时 Ω 曲线在不同 δ 约束下的速度和对应的弓高误差

2.2.2 算法VP_CETA实现数控加工

本节将针对二次B样条描述的刀具路径曲线, 展示如何在商业CNC控制器当中实施算法VP_CETA, 并给出用三轴工业机床实时加工的结果。

为了在CNC控制器中实现我们的方法, 我们首先离线计算速度曲线, 然后把路径曲线和速度曲线放在一起作为CNC控制器的输入, 实现实时插补。此策略被许多的既有工作采用过, 譬如[4, 6, 24]。

我们首先设计一个新的G代码, 其形式如下:



图 2.8: 数控加工“花瓶”图案

G65.5

a_0	a_1	a_2		
b_0	b_1	b_2		
c_0	c_1	c_2		
flag	k	m	n	l
c^*				
u_1	u_2			

(2.18)

当解释器读到G65.5代码时，参数解释如下：

刀具路径表示为曲线段 $C(u) = (x(u), y(u), z(u)), u \in [u_1, u_2]$ ，其中

$$x(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2, y(u) = b_0 + b_1u + b_2u^2, z(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2.$$

点 $C(u)$ 处对应的速度曲线为 $v(u), u \in [u_1, u_2]$ ，其中

$$v(u) = \begin{cases} \sqrt{k\pi(u) + c^*}, & \text{如果 flag} = 0 \\ \sqrt{\frac{k(mu^2 + nu + l)^{3/2}}{c^*}}, & \text{如果 flag} = 1 \end{cases}$$

(2.19)

在上述方程当中，如果 $\text{flag} = 0$ ，那么 $k = \pm 2A_T$ 而 $\pi(u)$ 根据(2.17)得到， c^* 为积分常数。在这种情形下， $v(u)$ 是由 $k = \pm A_T$ 控制的积分曲线。如果 $\text{flag} = 1$ ，那么 $k = A_N$ 、 $c^* = |C'(u) \times C''(u)|$ 且 $v(u)$ 是 $C(u), u \in [u_1, u_2]$ 这一段的CEVLC。

由于我们知道了 $C(u)$ 处的速度 $v(u)$ ，所以我们可以使用文献[24]提到的方法实时计算插补点。

我们实验用到的CNC控制器是如图(2.8)(a)所示的LT-CNC控制器，它是沈阳蓝天数控公司的商业产品。控制器平台是Linux操作系统，用C语言实

$A_T(mm/s^2)$	$\delta(mm)$	加工时间
1000	0.001	23'33"
1000	0.0015	22'48"
1000	0.002	22'25"
2000	0.001	18'52"
2000	0.0015	17'54"
2000	0.002	17'23"

表 2.1: 图案“花瓶”的加工时间

现。因此我们也用C语言实现算法VP_CETA。我们实验使用的数控机床如图2.8(b)所示,这是一台三轴工业机床。

对于金属加工,我们用算法加工了上面的 Ω 图案,加工实物如图2.6(b)所示。

对于木工材料,实验中加工的模型是一个“花瓶”图案,如图2.4(b)和2.8(c)所示。该模型是由116000多行G01代码组成,刀具路径长度为46.67m。其B样条表达式有42000多段[24]。G01代码和模型的样条表示可在网址<http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/cnc/vase.html>找到。花瓶的刀具路径抖动非常剧烈,这使得最优速度规划比较困难。此外,图2.4所示曲线为花瓶路径中的一段,这是加工过程中用到的速度曲线直观图。

针对 A_T 和 δ ,实验测试了六组数据,插补周期设为 $T = 2ms$,最大进给速度为 $200mm/s$,下表给出了加工时间。从表中我们可以看出 A_T 越大加工时间越短,这也是意料之中的。另外,弓高误差约束值越大加工时间越短,而 δ 对加工时间的影响不如 A_T 对加工时间影响大。

2.3 小结

本章针对参数路径曲线,在弓高误差、进给速度、加速度约束下,给出了时间最优速度规划的方法。我们采用了最简单的加速度模式:切向的线性加速模式。通过引入CEVLC解决了在弓高误差和加速度约束下的时间最优的速度

规划问题。

本章的主要思想是把弓高误差约束简化为法向加速度约束。当法向加速度达到边界时，速度曲线是称为CEVLC的代数曲线。最终的速度曲线是CEVLC与由起始点和结束点及CEVLC上所有关键点出发的积分曲线的最小值。

我们给出了计算时间最优速度曲线的实际算法，并将算法应用于简单的路径曲线中，对于二次B样条曲线，我们给出了最优速度的显式表达式。实际加工证明了我们算法的可行性。

鸣谢 在此感谢中国科学院沈阳计算技术研究所提供的数控加工实验条件和技术帮助。

第三章 基于线性规划的五轴参数路径时间最优插补

本章研究五轴参数路径下数控加工时间最优的速度规划问题,考虑的约束包括弓高误差、各轴的加速度和加加速度。主要思想是通过离散化把复杂难解的非线性问题转化为快速易解的线性规划问题。第一节给出了数控加工中的机床运动约束和加工的弓高误差约束。针对此种约束第二节里研究了速度规划,第三节研究了加上加加速度约束下的速度规划算法,第四节分析了算法的时间复杂度。

3.1 运动学与弓高误差限制

本节将给出五轴数控机床的运动学约束和数控加工中的弓高误差约束,包括最大进给速度,各轴最大加速度,最大弓高误差限制值。第3.2节将给出加加速度限制。在刀具路径的起始点和结束点,进给速度设为0。

3.1.1 加速度限制

假设五轴数控机床的刀具路径是由一组参数函数构成,这些函数至少具有 C^1 的连续度, $\eta(u) = (x(u), y(u), z(u), a(u), c(u))^T, (u \in [0, 1])$, 这里 $r(u) = (x(u), y(u), z(u))$ 为加工路径, $a(u)$ 和 $c(u)$ 分别是绕X轴和Z轴的转角。这些路径可能是NURBS曲线, B-spline曲线等等。注意 $\eta(u)$ 与 $r(u)$ 都是机床坐标系(MCS)下的坐标。本章用“.”表示“ $\frac{d}{du}$ ”, 用“'”表示“ $\frac{d}{ds}$ ”。

记驱动轴速度为 $v_D = (v_x, v_y, v_z)$, s 为驱动轴路径 $r(u)$ 的弧长。引入如下一个重要的量:

$$q = \dot{u}^2, \quad (3.1)$$

在速度规划问题里这个量将作为一个优化变量。后面会提到加速度约束可以写成关于 q 和 q 的导数的线性不等式, 这也是能把速度规划简化成线性规划问题的原因之一。

不失一般性, 考虑 x 轴的速度和加速度,

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} = x' \sqrt{q} \quad (3.2)$$

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv_x^2}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dqx^2}{dx} \quad (3.3)$$

就数控机床来言, 每个轴的加速度约束反映了各轴的加速能力, 是重要的机床参数。五轴机床的加速度约束有如下形式:

$$|a_r(u)| \leq A_r, r \in \{x, y, z, a, c\}, u \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

这里 A_r 是 r 轴的最大加速度。根据(3.3)式, 约束(3.4)等价于如下关于 q 的不等式,

$$\left| \frac{1}{2} \frac{d(qr^2)}{d\tau} \right| \leq A_r, r \in \{x, y, z, a, c\}, u \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

3.1.2 进给速度和五轴加工中的弓高误差约束

进给速度是指刀具上的基准点沿着刀具轨迹相对于工件移动时的速度。最大进给速度是反映机床性能的重要参数。在加工过程中, 进给速度必须服从最大进给速度约束。

弓高误差是指在一个插补周期内对参数路径做插补时引起的误差, 是反映加工图像轮廓误差的一个重要指标。事实上, 在一个插补周期内只有起始点和结束点在刀具路径上, 因此实际的路径与理想的参数路径是不同的。我们用弓高误差来衡量实际路径与理想路径的差别。弓高误差的具体定义为一个插补周期内起始点与结束点的连线和刀具路径的距离, 如图3.1所示。

3.1.2.1 五轴机床与坐标变换

与三轴数控机床不同, 五轴数控机床的弓高误差不是在机床坐标系(MCS)下衡量, 而是在工件坐标系(WCS)下衡量的[38]。

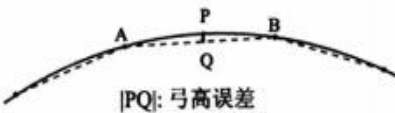


图 3.1: 弓高误差示意图

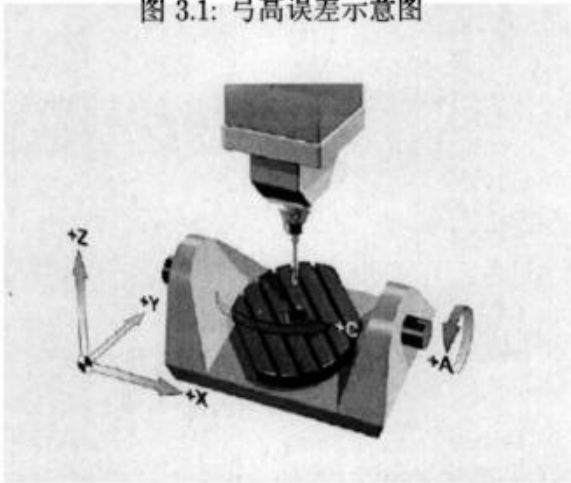


图 3.2: 经典的桌倾式五轴机床

因此WCS和MCS之间的坐标变化是必须的，这个坐标变换取决于数控机床的结构，本章采用广泛使用的桌倾式五轴数控机床作为例子，如图3.2所示。其他类型的五轴数控机床可以用本章类似的方法对待。

在图3.2中的桌倾式机床里， C 表示工作台绕 Z 轴的的转角， A 为工作台绕 X 轴的转角。记 $r_w(u) = (x_w(u), y_w(u), z_w(u))$ 为刀具路径 $r(u)$ 在WCS下的坐标。设MCS的原点在WCS下的起始坐标为 $O_w = (x_{w0}, y_{w0}, z_{w0})$ 。

令 $Rot(a, x)$ 和 $Rot(c, z)$ 分别表示绕 X 轴转角 a 的旋转矩阵和绕 Z 轴转角 c 的旋转矩阵，它们具有如下形式：

$$Rot(a, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Rot(c, z) = \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

记平移矩阵为 $Tran(O_w)$ ，表示如下：

$$\text{Tran}(O_w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_{w0} & y_{w0} & z_{w0} & 1 \end{pmatrix}$$

WCS下的坐标 (x_w, y_w, z_w) 和MCS下的坐标 (x, y, z) 具有如下关系,

$$(x_w \ y_w \ z_w \ 1) = (x \ y \ z \ 1) \cdot \text{Tran}(O_w) \cdot \text{Rot}(a, x) \cdot \text{Rot}(c, z) \quad (3.6)$$

上式可以写成

$$\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & \cos a \sin c & \sin a \sin c \\ -\sin c & \cos a \cos c & \sin a \cos c \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + x_{w0} \\ y + y_{w0} \\ z + z_{w0} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

根据(3.7)式,可以得到MCS到WCS下的坐标变换。

令 $\mu = (x_w, y_w, z_w)^T$, $\eta = (x, y, z, a, c)^T$ 。对方程(3.7)两边微分,得到如下的微分关系:

$$\frac{d\mu}{du} = M_t \cdot \frac{d\eta}{du} \quad (3.8)$$

这里

$$M_t = \begin{pmatrix} \cos c & \cos a \sin c & \sin a \sin c & z_w \sin c & y_w \\ -\sin c & \cos a \cos c & \sin a \cos c & z_w \cos c & -x_w \\ 0 & -\sin a & \cos a & -(y + y_{w0}) \cos a - (z + z_{w0}) \sin a & 0 \end{pmatrix}$$

对方程(3.8)两边微分得到向量 μ 的二阶导数:

$$\frac{d^2\mu}{du^2} = \frac{dM_t}{du} \cdot \frac{d\eta}{du} + M_t \cdot \frac{d^2\eta}{du^2} \quad (3.9)$$

这里

$$\frac{dM_t}{du} = \begin{pmatrix} -c' \sin c & -c' \cos c & 0 \\ -a' \sin a \sin c + c' \cos a \cos c & -a' \sin a \cos c - c' \cos a \sin c & -a' \cos a \\ a' \cos a \sin c + c' \sin a \cos c & a' \cos a \cos c - c' \sin a \sin c & -a' \sin a \\ c' z_w \cos c + z'_w \sin c & -c' z_w \sin c + z'_w \cos c & -y' \cos a - z' \sin a - z_w a' \\ y'_w & -x'_w & 0 \end{pmatrix}^T$$

而 x'_w, y'_w, z'_w 可以通过(3.8)式确定。

3.1.2.2 进给速度和弓高误差约束形式

我们先给出进给速度的约束形式。由于进给速度是刀具相对于工件的速度,因此这个速度是在WCS衡量的。如果最大进给速度 V_m 给定,进给速度 v 必须满足如下约束,

$$v(u) \leq V_m, u \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

根据(3.8)式,可知 $v(u) = |\dot{\mu}| = |\mu'|\sqrt{q} = |M_i \eta'|\sqrt{q}$ 。那么不等式(3.10)可以写成关于 q 的不等式,即 $q(u) \leq \frac{V_m^2}{|M_i \eta'|^2}, u \in [0, 1]$ 。记 $\sigma_w = |M_i \eta'|$,进给速度的约束可以写成

$$q(u) \leq \frac{V_m^2}{\sigma_w^2}, u \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

现在我们给出弓高误差的约束形式。五轴WCS下的弓高误差与三轴类似,因为一个插补周期的是非常短的,在一个插补周期内的刀具路径可以近似的看做一段圆弧。设插补周期为 T ,在WCS下的刀具路径为 $r_w(u) = (x_w(u), y_w(u), z_w(u))$,那么弓高误差 $\delta(u)$ 和WCS下的速度 $v(u)$ 有如下关系[19],

$$\delta(u) = \rho_w(u) - \sqrt{\rho_w(u)^2 - \frac{v(u)^2 T^2}{4}}$$

这里 $\rho_w(u)$ 为在WCS下的刀具路径曲率,且 $\rho_w(u) = \frac{|r_w'(u)|^2}{|r_w'(u) \times r_w''(u)|}$ 。令 δ_m 表示最大允许弓高误差值,那么

$$\rho_w(u) - \sqrt{\rho_w(u)^2 - \frac{v(u)^2 T^2}{4}} \leq \delta_m.$$

即

$$v(u) \leq \frac{\sqrt{8\rho_w(u)\delta_m - 4\delta_m^2}}{T}.$$

因为 δ_m 与 $\rho_w(u)$ 比是一个极小量,在WCS下参数 u 处的限制速度 $v(u)$ 可以近似的写成:

$$v(u) \leq \frac{\sqrt{8\delta_m\rho_w(u)}}{T} \quad (3.12)$$

因为 $\frac{v}{\sigma_w} = \dot{\mu} = \sqrt{q}$,所以(3.12)式可以简写为

$$q \leq \frac{8\delta_m\rho_w(u)}{\sigma_w^2 T^2} = \frac{8\delta_m\sigma_w}{|r_w'(u) \times r_w''(u)| T^2} \quad (3.13)$$

由(3.8)和(3.9)式, 约束(3.13)可以写成关于 q 的不等式

$$q \leq \frac{8\delta_m |M_t \eta'|}{|M_t \eta' \times (M_t' \eta' + M_t \eta'')| T^2}. \quad (3.14)$$

3.2 加速度约束下基于线性规划的速度规划算法

本节将给出一种多项式时间的算法。在加速度和弓高误差约束下, 该算法能找到速度规划问题的时间最优解。

3.2.1 问题的表述

速度规划问题可以表述为多个约束下的优化问题。加工时间的表达式为 $t = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}}$, 因此在进给速度、加速度、弓高误差约束下, 时间最优速度规划问题可以表示成如下形式:

$$\min_q \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}} \quad (3.15)$$

服从约束(3.5)、(3.11)和(3.14)。

以上优化问题有一个非常重要的性质, 这个性质将在下面的定理里给出, 该定理在文献[19, 21-23, 25, 38]中用多种方法证明得以证明。

定理 3.1. 问题(3.15)的最优速度 $v_0(u)$, $u \in [0, 1]$ 在任何的参数 u 处是最大的。即, 令 $v_f(u)$ 为另外一个满足约束(3.5)、(3.11)和(3.14)的速度函数, 那么对任意的 $u \in [0, 1]$ 有 $v_f(u) \leq v_0(u)$ 。并且, 最优的速度函数是Bang-bang的, 即在任意参数 u 处, 三个约束(3.5)、(3.11)和(3.14)中至少有一个约束的等号成立。

根据定理3.1易知最优问题(3.15)的解是唯一的。

3.2.2 优化问题的离散形式

上述时间最优问题的三轴情形在文献[19, 21-23]中能得到解析解。尽管理论上五轴也能得到解析解, 但实际上很难用有效的方法得到解析解, 因为约束(3.14)是一个非常复杂的表达式。因此针对弓高误差约束下的五轴速度规划问题, 开发一种有效的数值方法是非常有必要的。为了用数值方法解问题(3.15), 本节给出了该问题的一种离散形式。

我们把区间 $[0, 1]$ 细分成带端点的 N 个相等的部分 $u_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$ 。每个子区间的长度为 $\Delta = 1/N$ 。因为在两个端点处的速度为零, 故 $q_0 = q_N = 0$ 。由于 Δ 非常小, 约束(3.5)、(3.11)和(3.14)可以近似转化成下列的线性不等式:

$$0 \leq q_i \leq \frac{V_m^2}{\sigma_m(u_i)^2} \quad (3.16)$$

$$|q_{i+1}\tau_{i+1}^2 - q_i\tau_i^2| \leq 2A_\tau|\tau_{i+1} - \tau_i|, \tau \in \{x, y, z, a, c\} \quad (3.17)$$

$$0 \leq q_i \leq \frac{8\delta_m|M_{ii}\eta'_i|}{|M_{ii}\eta'_i \times (M'_{ii}\eta'_i + M_{ii}\eta''_i)|T^2} \quad (3.18)$$

这里 $q_i = q(u_i)$, $\tau_i = \tau(u_i)$, $\tau'_i = \tau'(u_i)$, 而 η'_i 、 M_{ii} 和 M'_{ii} 分别表示 $\eta'(u)$ 、 $M'_i(u)$ 和 $M_i(u)$ 在 u_i 处的值。对应地, 优化问题(3.15)转化成具有如下目标函数的非线性规划问题,

$$\min_{\{q_i\}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{q_i}} \quad (3.19)$$

其约束条件为(3.16)、(3.17)和(3.18)。

我们不解非线性问题3.19, 而是解具有如下目标函数的线性规划问题:

$$\max_{\{q_i\}} \sum_{i=1}^{N-1} q_i \quad (3.20)$$

其约束条件为(3.16)、(3.17)和(3.18)。

下面, 我们将证明线性规划问题的解是原问题(3.15)的近似解。一个重要的思想是只需要证明线性规划问题(3.20)的最优解 q_i^* , ($i = 1, \dots, N-1$)具有唯一性, 并且每个 q_i^* 是所有可行解中的最大值。根据这个性质和定理3.1, 假设可以证明。

定理 3.2. 当 N 足够大时, 问题(3.15)的唯一解足以逼近线性规划问题(3.20)的唯一解。

证明. 由约束(3.16)、(3.17)和(3.18)确定的可行域 $q_i = 0$, ($i = 1, \dots, N-1$)很明显是一个有限紧集, 那么线性规划问题至少有一个解 $Q^* = \{q_i^*, (i = 1, \dots, N-1)\}$ 。

断言对每个 i , q_i^* 是所有可行解中最大的。假设断言不成立, 那么至少存在另外一个可行解 $\{q_k, (k = 1, \dots, N-1)\}$ 使得至少有一个 j 满足 $q_j > q_j^*$ 。

因为对一个线性规划问题, 目标函数的最优值是唯一的, 故一定存在一个 k 使得 $q_k < q_k^*$. 注意 $q_0 = q_0^* = q_N = q_N^* = 0$. 那么存在 $i < j$ 使得 $q_i^* \geq q_i$ 并且 $q_k^* < q_k, (k = i + 1, \dots, j - 1)$, 而 $q_j^* \geq q_j$. 因为 q_i, q_{i+1} 和 q_i^*, q_{i+1}^* 满足约束(3.17), 所以有

$$|q_{i+1}\tau_{i+1}^2 - q_i\tau_i^2| \leq 2A_r|\tau_{i+1} - \tau_i|,$$

$$|q_{i+1}^*\tau_{i+1}^2 - q_i^*\tau_i^2| \leq 2A_r|\tau_{i+1} - \tau_i|.$$

令 $a_1 = q_{i+1}\tau_{i+1}^2, a_2 = q_i\tau_i^2, b_1 = q_{i+1}^*\tau_{i+1}^2, b_2 = q_i^*\tau_i^2, B = 2A_r|\tau_{i+1} - \tau_i|$. 因此 $|a_1 - a_2| \leq B, |b_1 - b_2| \leq B$. 由假设 $q_i^* \geq q_i, q_{i+1}^* < q_{i+1}$, 有 $a_1 > b_1$ 且 $a_2 \leq b_2$. 故

$$a_1 - b_2 = a_1 - b_1 + b_1 - b_2 \geq b_1 - b_2 \geq -B,$$

$$a_1 - b_2 = a_1 - a_2 + a_2 - b_2 < a_1 - a_2 \leq B.$$

所以 $|a_1 - b_2| \leq B$. 即

$$|q_{i+1}\tau_{i+1}^2 - q_i^*\tau_i^2| \leq 2A_r|\tau_{i+1} - \tau_i|.$$

因此 q_i^* 和 q_{i+1} 满足约束条件(3.17). 类似地可以证明 q_{j-1} 和 q_j^* 也满足约束(3.17). 因为约束(3.16)和(3.18)都能自动满足, 用 $q_k, (k = i + 1, \dots, j - 1)$ 代替 $q_k^*, (k = i + 1, \dots, j - 1)$, 可以得到线性规划问题一个新的可行解. 这个可行解对应的目标函数值更大, 这样就导致了矛盾. 因此断言得以证明.

从上面得到的结论可知线性规划问题(3.20)有唯一解 $q_i^*, (i = 0, \dots, N)$. 并且因为对每个 i 来说, 解 q_i^* 是所有可行解中最大的, 所以问题(3.20)的解即问题(3.19)的解. 而目标函数(3.19)是(3.15)的离散形式, 所以线性问题(3.20)的解能够尽可能好的逼近问题(3.15)的解.

3.2.3 基于线性规划的最优速度规划

在前面的章节里, 我们证明定理速度规划问题可以转化为线性最优问题, 本节将给出最优速度的线性规划算法.

为了使用MatLab中的标准求解器, 我们把线性规划问题(3.20)写成如下标准形式:

$$\max_Q cQ \quad (3.21)$$

约束为 $MQ \leq R$ 且 $Q \geq 0$, 这里 $Q = (q_1, \dots, q_{N-1})^T$, $q_0 = q_N = 0$, 系数向量 c 为 $(1, \dots, 1)$ 大小为 $1 \times (N-1)$, R 和 M 将在下面给出.

记 $h(u) = \min\{\frac{V_m^2}{\sigma_m(u)^2}, \frac{8d_m|M_t\sigma'(u)|}{|M_t\sigma'(u) \times (M_t\sigma'(u) + M_t\sigma''(u))|^2}\}$, $\lambda_i = (x_i^2, y_i^2, z_i^2, a_i^2, c_i^2)^T$, 这里 $x_i' = x'(u_i)$. 令 $\pi_i = (2A_x|x_{i+1} - x_i|, 2A_y|y_{i+1} - y_i|, 2A_z|z_{i+1} - z_i|, 2A_a|a_{i+1} - a_i|, 2A_c|c_{i+1} - c_i|)$. 那么 $R = (\pi_0, \pi_0, h(u_0), \dots, \pi_{N-2}, \pi_{N-2}, h(u_{N-2}), \pi_{N-1}, \pi_{N-1})^T$ 大小为 $(11N-1) \times 1$. 系数矩阵 M 有如下形式, 大小为 $(11N-1) \times (N-1)$.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{N-2} & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-2} & -\lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

求解线性规划问题(3.21), 可以得到最优问题的解集 $Q^* = (q_1^*, \dots, q_{N-1}^*)^T$, 加上初始和结束状态 $q_0^* = q_N^* = 0$. 从方程(3.1)可知, 最优进给速度可以根据 $v_i^* = v(u_i) = |M_t v_i'| \sqrt{q_i^*}$, ($i = 0, \dots, N$) 得到. 我们可以使用标准技术拟合离散的速度, 从而得到优化的速度函数 $v^*(u)$, $u \in [0, 1]$.

根据以上分析, 给出下面的速度规划算法.

算法 3.1. VPA LP

输入: MCSF的五轴刀具路径 $\eta(u), u \in [0, 1]$, 插补周期 T , 最大进给速度 V_m , 五轴最大加速度界 $(A_x, A_y, A_z, A_a, A_c)$, 弓高误差界 δ_m , 区间细分数 N , MCS的原点在WCS下的初始位置 (x_{w0}, y_{w0}, z_{w0}) .

输出: 问题3.15的近似最优速度函数 $v(u), u \in [0, 1]$.

1. 计算 $\eta_i = \eta(u_i)$, λ_i , 和本节定义的 π_i , 这里 $u_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$. 得到(3.22)中的系数矩阵 M .
2. 计算弓高误差误差和最大速度限制函数

$$h(u_i) = \min\left\{\frac{V_m^2}{\sigma_w(u_i)^2}, \frac{8\delta_m|M_i(u_i)\eta'(u_i)|}{|M_i(u_i)\eta'(u_i) \times (M_i'(u_i)\eta'(u_i) + M_i(u_i)\eta''(u_i))|^2}\right\},$$

$i = 1 \dots N-1$. 得到右边向量

$$R = (\pi_0, \pi_0, h(u_1), \dots, \pi_{N-2}, \pi_{N-2}, h(u_{N-1}), \pi_{N-1}, \pi_{N-1})^T$$

3. 解线性规划问题(3.21)得到最优解 $Q^* = (q_1^*, \dots, q_{N-1}^*)^T$. 令 $q_0^* = q_N^* = 0$.
4. 计算速度函数. 例如用最简单的方法, 我们可以给出如下的分段线性表达式

$$v(u) = v_i^* \frac{u - u_{i+1}}{u_i - u_{i+1}} + v_{i+1}^* \frac{u_i - u}{u_i - u_{i+1}}$$

这里 $v_i^* = \sigma_w(u_i)\sqrt{q_i^*}$, $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$.

算法3.1一个好的特点是给出计算复杂度的最坏情况, 这种情况发生的可能性很小. 因为算法3.1的主要步骤是第3步, 我们只需要估计这一步的复杂度.

根据求解线性规划问题的Karmarkar著名算法[39], 如果采用浮点数运算, 算法需要 $O(N)$ 步, 每步需要的运算次数量级为 $O(N^{2.5})$, 因此我们有下面的定理.

定理 3.3. 对给定的细分段数 N , 用浮点数运算, 算法3.1最坏情况下的计算复杂度为 $O(N^{3.5})$.

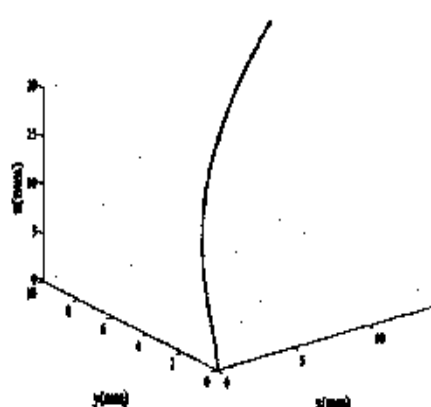


图 3.3: 空间刀具路径曲线

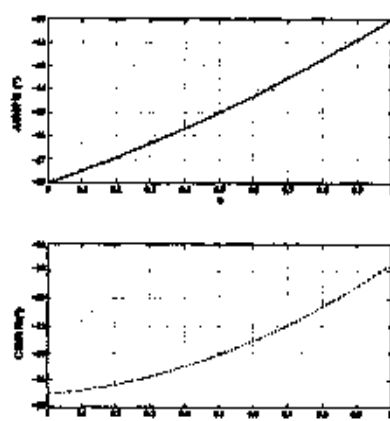


图 3.4: A轴和C轴曲线

算法3.1只需要计算刀具路径 $\eta(u)$ 在参数 $u_k, k = 0, \dots, N$ 处的值, 这个过程的计算复杂度为 $O(N)$ 。因此对任意刀具路径 $\eta(u)$ 而言, 算法的计算复杂度都是相同的。文献[19, 21-25]中用到的相平面法要涉及到积分和非线性代数方程求解, 只能处理一些简单的路径[19, 24]。与相平面法相比, 这是很好的特性。这是一个很好的特性。

3.2.4 一个说明性的例子

本节给出一个说明性的例子, 该例子的五轴路径是三次多项式函数的集合,

$$\eta(u) = (15u^3, 10u^2, 20u, 2u^2 + 5u - 68, 7.5u^2 + 2u - 27), u \in [0, 1].$$

图3.3和图3.4分别是空间刀具路径曲线和两个转动轴曲线。

数控机床参数设置如下: $A_x = 1000 \text{ mm/s}^2$, $A_y = 1000 \text{ mm/s}^2$, $A_z = 1000 \text{ mm/s}^2$, $A_a = 500^\circ/\text{s}^2$, $A_c = 500^\circ/\text{s}^2$, $V_m = 110 \text{ mm/s}$, $\delta_m = 0.05 \mu\text{m}$, $T = 1 \text{ ms}$, $O_w = (1, 1, 1)$, $N = 200$ 。

图3.5 和图3.6分别是算法VPA_LP得到的速度曲线和对应的理论弓高误差, 其中理论的弓高误差用下式计算

$$\delta(u) = \frac{q(u)|M_i \eta' \times (M_i' \eta' + M_i \eta'')|T^2}{8|M_i \eta'|}. \quad (3.23)$$

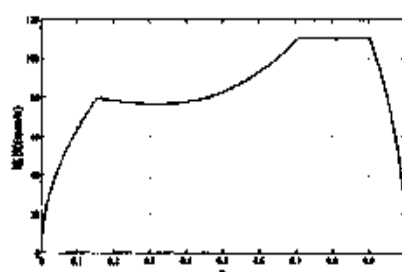


图 3.5: 规划的速度

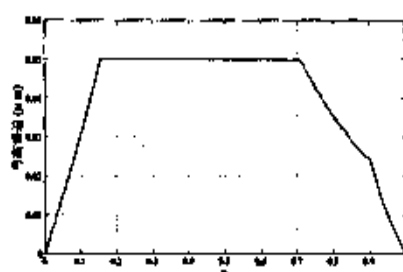
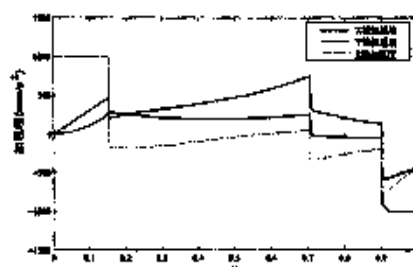
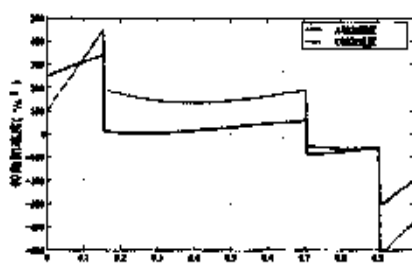


图 3.6: 弓高误差



(a) X, Y, Z轴的加速度



(b) A轴和C轴的加速度

图 3.7: 五轴的加速度

图3.7(a)是速度曲线对应的X、Y、Z轴的加速度曲线。图3.7(b)是两个旋转轴A轴和C轴的加速度曲线。

由图3.5, 3.6和3.7, 不难发现规划的速度函数是Bang-bang-singular的, 这意味着在任何时候, 五个轴的加速度、进给速度和弓高误差约束中至少有一个约束达到边界。整个加工过程可以分为五个阶段。当 $u \in [0, 0.155]$ 时, Z轴的加速度达到最大值 1000 mm/s^2 。当 $u \in [0.155, 0.71]$, 弓高误差达到边界值。当 $u \in [0.71, 0.905]$ 时, 进给速度达到最大值 V_m 。当 $u \in [0.905, 0.925]$ 时, C轴的加速度达到最小值 $-500^\circ/\text{s}^2$ 。最后, 当 $u \in [0.925, 1]$ 时, X轴速度达到最小值 -1000 mm/s^2 。

由定理3.1知Bang-bang-singular 控制是此优化问题的必要条件。我们的解是Bang-bang-singular的暗示了这些解确实对原问题的最优解逼近效果不错。

尽管如此, 从图3.5不难发现进给速度函数在某些点处并不光滑, 例如 $u = 0.155$, $u = 0.71$ 和 $u = 0.905$ 这些位置。实际加工中在这些点处会造成很

大的刀具振动,从而影响加工质量。在下节中这个问题可以通过引入加加速度约束处理。

3.3 加加速度约束下基于线性规划的速度规划算法

本节将考虑加加速度约束下的时间最优速度规划,并给出基于线性规划下的近似算法。

3.3.1 问题的表述

设刀具路径 $\eta(u) = (x(u), y(u), z(u), a(u), c(u))^T, (u \in [0, 1])$ 拥有 C^2 的连续性。五轴的最大加加速度 $J_m = (J_x, J_y, J_z, J_a, J_c)$ 是描述五轴能承受的加速度最大变化率。因此在加工过程中每个轴的加加速度应该满足如下约束:

$$|j_\tau(u)| \leq J_\tau, u \in [0, 1], \tau \in \{x, y, z, a, c\}. \quad (3.24)$$

使用第3.1节的记号,由于五轴的加速度 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z, a_a, a_c)$ 可以用如下形式表示,

$$a_\tau = \ddot{\tau} = \frac{d(\sqrt{q}\tau')}{dt} = \frac{d(\sqrt{q}\tau')}{du} \sqrt{q} = \tau''q + \frac{\tau'}{2}q',$$

加加速度 $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z, j_a, j_c)$ 可以写成

$$j_\tau = \dot{a}_\tau = a'_\tau \sqrt{q} = (\tau''q + \frac{3\tau'}{2}q' + \frac{\tau'}{2}q'')\sqrt{q}, \quad (3.25)$$

这里 $\tau \in \{x, y, z, a, c\}$ 。注意到(3.25)是关于 q, q' 和 q'' 的非线性表达式。

时间最优速度规划问题为

$$\min_q \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{q}} \quad (3.26)$$

服从约束(3.11)、(3.5)、(3.14)和(3.25)。

注意,加上加加速度约束后,定理3.1还没有充分证明。我们不知道问题(3.26)的最优解是否是点点最大的。但是,我们知道问题(3.26)的最优解一定是Bang-bang-singular的[25, 38]。

3.3.2 速度规划问题的离散形式

与第3.2节类似, 区间 $[0, 1]$ 等分成 N 份, 这些子区间的结点 $u_i = i/N$, ($i = 0, \dots, N$). 采用差分方法表示 q 的一阶导数和二阶导数:

$$\begin{aligned} q'_i &\approx \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta u}, \\ q''_i &\approx \frac{q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i}{\Delta u^2}, i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

因此, 约束(3.25)能离散化为如下形式:

$$|(\alpha_n q_{i-1} + \beta_n q_i + \gamma_n q_{i+1})\sqrt{q_i}| \leq J_r, i = 1, \dots, N-1 \quad (3.27)$$

这里

$$\alpha_n = \frac{\tau'_i}{2\Delta u^2} - \frac{3\tau''_i}{4\Delta u}, \beta_n = \tau'_i - \frac{\tau''_i}{\Delta u^2}, \gamma_n = \frac{\tau'_i}{2\Delta u^2} + \frac{3\tau''_i}{4\Delta u}$$

而 $\tau'_i = \tau'(u_i)$, $\tau''_i = \tau''(u_i)$, $\tau'''_i = \tau'''(u_i)$.

我们假设起始和结束的速度和加速度为零:

$$q(0) = q(1) = 0, a(0) = a(1) = 0.$$

因为

$$j_r = \frac{da_r}{dt} = a_r \frac{da_r}{dv_r} = \frac{1}{2} \frac{da_r^2}{dv_r},$$

对第一个小区间 $[0, u_1]$ 而言, $|j_n| = |(a_n^2 - a_0^2)/(2v_n - 2v_0)| = |a_n^2/(2\tau'_1\sqrt{q_1})| = |N^2\tau_2'^2\sqrt{q_1}q_2/8\tau'_1| \leq J_r$.

类似地, 针对最后一个小小区间 $[u_{N-1}, 1]$, $|j_{rN}| = |N^2\tau_{N-2}'^2\sqrt{q_{N-1}}q_{N-2}/8\tau'_{N-1}| \leq J_r$. 因此第一和最后一个小小区间的加加速度约束可以写成

$$|N^2\tau_2'^2\sqrt{q_1}q_2/8\tau'_1| \leq J_r \quad (3.28)$$

$$|N^2\tau_{N-2}'^2\sqrt{q_{N-1}}q_{N-2}/8\tau'_{N-1}| \leq J_r \quad (3.29)$$

相应地, 优化问题(3.26)可以转化为具有如下目标函数的非线性规划问题:

$$\min_{\{q_i\}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{q_i}} \quad (3.30)$$

约束条件为(3.16)、(3.17)、(3.18)、(3.27)、(3.28)和(3.29)。

我们可以使用既有方法解上述非线性问题,但是求解过程一般是相当耗时的,并且得到的解不能保证是最优的。下一节,我们会把这个问题简化成一个线性规划问题。

3.3.3 把非线性问题放缩为线性规划问题

本节通过放缩技巧把非线性问题(3.30)简化为一个线性规划问题。

线性问题具有如下目标函数,

$$\max_Q cQ \quad (3.31)$$

约束条件为 $\dot{M}Q \leq \hat{R}$, $Q \geq 0$, 这里 $Q = (q_1, \dots, q_{N-1})$, 系数向量 $c = (1, \dots, 1)$, 系数矩阵 \dot{M} 将会在后面给出。目标函数与(3.21)式相同,意思是让整体的速度最大化。

注意,约束(3.16)、(3.17)和(3.18)在 Q 中已经是线性的。接下来我们将说明如何把约束(3.27)、(3.28)和(3.29)简化为线性形式。

令问题(3.21)的最优解为 $\{q_i^*\}_{i=0, \dots, N}$ 。在约束(3.27)-(3.29)的两边乘上 $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}$, 我们有

$$|(\sqrt{q_i^*} \alpha_{\tau} q_{i-1} + \sqrt{q_i^*} \beta_{\tau} q_i + \sqrt{q_i^*} \gamma_{\tau} q_{i+1})| \leq J_{\tau} \sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}, i = 1, \dots, N-1 \quad (3.32)$$

$$|\frac{N^2 \tau_2^2}{8 \tau_1^2} \sqrt{q_1^*} q_2| \leq J_{\tau} \sqrt{\frac{q_1^*}{q_1}} \quad (3.33)$$

$$|\frac{N^2 \tau_{N-2}^2}{8 \tau_{N-1}^2} \sqrt{q_{N-1}^*} q_{N-2}| \leq J_{\tau} \sqrt{\frac{q_{N-1}^*}{q_{N-1}}} \quad (3.34)$$

这里 $\tau \in \{x, y, z, a, c\}$ 。约束(3.32)-(3.34)的左边关于 q_i 是线性的。下面将说明如何把这些不等式的右边是线性形式。

满足约束(3.30)的任何的 q_i 一定也满足定理3.2中的约束。根据定理3.2可知任何这样的 q_i 一定满足 $q_i \leq q_i^*$, ($i = 0, \dots, N$)。因此,我们可以用约束(3.32)-

(3.34)中的 $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}} \geq 1$ 代替1得到

$$|(\sqrt{q_i^*} \alpha_i q_{i-1} + \sqrt{q_i^*} \beta_i q_i + \sqrt{q_i^*} \gamma_i q_{i+1})| \leq J_r, i = 1, \dots, N-1 \quad (3.35)$$

$$|\frac{N^2 \tau_2^2}{8 \tau_1'} \sqrt{q_1^*} q_2| \leq J_r \quad (3.36)$$

$$|\frac{N^2 \tau_{N-2}^2}{8 \tau_{N-1}'} \sqrt{q_{N-1}^*} q_{N-2}| \leq J_r. \quad (3.37)$$

最后得到一个线性规划问题, 其目标函数为(3.31), 约束条件为(3.16)、(3.17)、(3.18)、(3.35)、(3.36)、(3.36)和(3.37)。该线性规划问题的解满足问题(3.26)的所有约束。

松弛条件 $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}} \geq 1$ 是严格成立的。下面的引理对 $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}$ 做了一个更好的估计。

引理3.4.

如果 $\{q_i^*\}_{i=1, \dots, N-1}$ 是问题(3.21)的最优解, $\{q_i\}_{i=1, \dots, N-1}$ 是问题(3.30)的最优解, 那么

$$\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}} \geq \frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \geq 1.$$

证明. 由定理3.2, 我们有 $q_i \leq q_i^*$, 因此 $\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \geq 1$. 令 $t = \sqrt{q_i/q_i^*}$, 那么

$$\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}} - (\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*}) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} - \frac{3}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} - \frac{3}{2} \geq 3\sqrt{\frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{2t}} - \frac{3}{2} = 0.$$

由引理3.4, 如果 q_i 满足如下约束, 那么也满足约束(3.32)-(3.34).

$$|(\sqrt{q_i^*} \alpha_i q_{i-1} + \sqrt{q_i^*} \beta_i q_i + \sqrt{q_i^*} \gamma_i q_{i+1})| \leq J_r (\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*}) \quad (3.38)$$

$$|\frac{N^2 \tau_2^2}{8 \tau_1'} \sqrt{q_1^*} q_2| \leq J_r (\frac{3}{2} - \frac{q_1}{2q_1^*}) \quad (3.39)$$

$$|\frac{N^2 \tau_{N-2}^2}{8 \tau_{N-1}'} \sqrt{q_{N-1}^*} q_{N-2}| \leq J_r (\frac{3}{2} - \frac{q_{N-1}}{2q_{N-1}^*}) \quad (3.40)$$

现在, 我们将给出问题(3.31)的系数矩阵 \hat{M} . 因为(3.22)中的 M 表示约束(3.16)、(3.17)和(3.18), 因此, \hat{M} 与 M 有 $11N-1$ 行相同。

令 $\hat{\alpha}_{\tau_0} = J_{\tau}/(2q_1^*)$, $\hat{\beta}_{\tau_0} = \sqrt{q_1^*} N^2 \tau_2'^2 / (8\tau_1')$, $\hat{\alpha}_{\tau_N} = \sqrt{q_{N-1}^*} N^2 \tau_{N-2}'^2 / (8\tau_{N-1}')$, $\hat{\beta}_{\tau_N} = J_{\tau}/(2q_{N-1}^*)$, $\hat{\alpha}_{\tau_i} = \alpha_{\tau_i} \sqrt{q_i^*}$, $\hat{\beta}_{\tau_i} = \beta_{\tau_i} \sqrt{q_i^*} + J_{\tau}/(2q_i^*)$, $\hat{\gamma}_{\tau_i} = \gamma_{\tau_i} \sqrt{q_i^*}$, $\theta_{\tau_i} = J_{\tau}/q_i^* - \hat{\beta}_{\tau_i}$, $i = 1, \dots, N-1$, $\hat{\alpha}_i = (\hat{\alpha}_{x_i}, \hat{\alpha}_{y_i}, \hat{\alpha}_{z_i}, \hat{\alpha}_{a_i}, \hat{\alpha}_{c_i})^T$, $\hat{\beta}_i = (\hat{\beta}_{x_i}, \hat{\beta}_{y_i}, \hat{\beta}_{z_i}, \hat{\beta}_{a_i}, \hat{\beta}_{c_i})^T$, $\hat{\gamma}_i = (\hat{\gamma}_{x_i}, \hat{\gamma}_{y_i}, \hat{\gamma}_{z_i}, \hat{\gamma}_{a_i}, \hat{\gamma}_{c_i})^T$, 和 $\theta_i = (\theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}, \theta_{a_i}, \theta_{c_i})^T$. 把不等式约束(3.38)-(3.40) 加到 M 中得到 \hat{M} 为

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\beta}_1 & \hat{\gamma}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \theta_1 & -\hat{\gamma}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & \hat{\gamma}_2 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{\alpha}_2 & \theta_2 & -\hat{\gamma}_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{N-2} & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-2} & -\lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\alpha}_{N-1} & \hat{\beta}_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{\alpha}_{N-1} & \theta_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{N-1} \\ \hat{\alpha}_0 & \hat{\beta}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_0 & -\hat{\beta}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\alpha}_N & \hat{\beta}_N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{\alpha}_N & \hat{\beta}_N \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

优化问题(3.31)的右端向量为

$$\hat{R} = (\pi_0, \pi_0, 1.5J_m, 1.5J_m, h(u_1), \dots, \pi_{N-2}, \pi_{N-2}, 1.5J_m, 1.5J_m, h(u_{N-1}), \pi_{N-1}, \pi_{N-1},$$

$1.5J_m, 1.5J_m)^T$ 。

至此, 问题(3.31)中的所有参数已经给出, 下面给出速度规划的算法。

算法 3.2. VPJLP

输入: MCS下的五轴刀具路径 $\eta(u), u \in [0, 1]$, 插补周期 T , 进给速度界 V_m , 五轴加速度界 $(A_x, A_y, A_z, A_a, A_c)$, 弓高误差约束 δ_m , 五轴加加速度界 $(J_x, J_y, J_z, J_a, J_c)$, 区间细分数 N , MCS的原点在WCS下的起始位置 (x_{w0}, y_{w0}, z_{w0}) 。

输出: 问题3.15的近似最优速度函数 $v(u), u \in [0, 1]$ 。

该算法与算法3.1大致相同, 不过不是解线性规划(3.21)而是解(3.31)。因为矩阵 \bar{M} 大小为 $(21N+9) \times (N-1)$, 算法3.1的计算复杂度也是 $O(N^{3.5})$ 次浮点运算操作。

3.4 实验仿真

本节用仿真结果说明算法3.2可以非常有效的用于计算近似最优速度函数。

3.4.1 仿真结果

对于图3.3的刀具路径, 使用算法3.2计算服从加加速度约束的速度函数。令 $J_x = J_y = J_z = 100000 \text{ mm/s}^3$, $J_a = J_c = 15000^\circ/\text{s}^3$ 。其他的参数与第3.2.4节所给相同。

图3.8给出了分别通过算法3.1和算法3.2 计算得到的速度函数。加上了加加速度约束的约束, 可以“抹平”加速度约束下的速度曲线的尖角。

图3.9 给出了加加速度约束下的速度曲线对应的理论弓高误差, 理论弓高误差是通过(3.23)式计算得到的。在某些位置, 图3.9的弓高误差比图3.6小。

图3.10和3.11给出了五轴加速度曲线, 这些加速度曲线是连续的, 没有跳跃现象。

图3.12和3.13给出了加加速度约束下五轴加加速度曲线, 从图中可以看出加加速度满足约束条件。

从图3.8-3.13中, 我们可以看出速度控制模式是近似Bang-bang-singular的。事实上, 当 $u \in [0, 0.001]$ 时, A轴加加速度达到最大值 J_a 。当 $u \in [0.001, 0.125]$ 时,

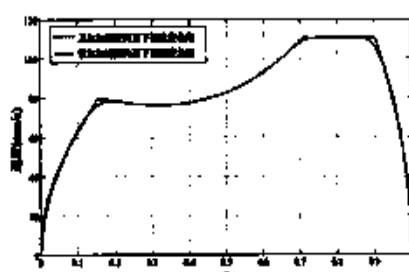


图 3.8: 进给速度

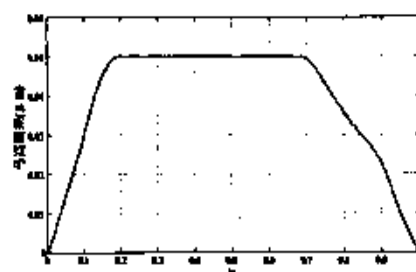


图 3.9: 加加速度约束下的弓高误差

Z轴加速度达到 A_z 。当 $u \in [0.125, 0.192]$ 时, A轴加加速度达到最小值 $-J_a$ 。当 $u \in [0.192, 0.68]$ 时, 弓高误差达到最大值。当 $u \in [0.68, 0.733]$ 时, C轴加加速度达到最小值 $-J_c$ 。当 $u \in [0.733, 0.86]$ 时, 进给速度达到最大值 V_m 。当 $u \in [0.86, 0.93]$ 时, C轴加加速度再次达到最小值 $-J_c$ 。当 $u \in [0.93, 0.997]$ 时, X轴加加速度达到最小值 $-A_x$ 。当 $u \in [0.997, 1]$ 时, C轴加加速度达到最大值 J_c 。

现在计算一个更复杂的五轴刀具路径, 如图3.14所示。该五轴曲线是图3.14(c)所示的叶轮上的一条刀具路径。空间路径曲线和转动轴曲线都是由10段曲线段构成的三次B样条曲线, 具有 C^2 的连续度。

参数设置为 $V_m = 10 \text{ mm/s}$, $A_x = A_y = A_z = 200 \text{ mm/s}^2$, $A_a = A_c = 500^\circ/\text{s}^2$, $J_x = J_y = J_z = 5000 \text{ mm/s}^3$, $J_a = J_c = 5000^\circ/\text{s}^3$, $\delta_m = 0.1 \mu\text{m}$, $T = 3 \text{ ms}$, $N = 500$ 。

图3.15给出了算法VPA_LP与算法VPJ_LP得到的速度曲线, 也给出了VLC (弓高误差下的速度限制曲线), 即不违背弓高误差约束的最大速度, 在文献[19]中有定义。图3.16给出了有与没有加加速度约束下的弓高误差。图3.17和图3.18给出了五轴的加速度。图3.19和图3.20分别给出了X、Y、Z轴的加加速度和转动轴A、C的加加速度。很容易发现规划的速度满足所有的约束条件, 运动模式几乎是Bang-bang的。因此, 得到的速度是原速度规划问题(3.26)的非常合适的解。

3.4.2 计算复杂度分析

算法VPA_LP里使用了线性规划得到最优解。区间细分的数量 N 越大,

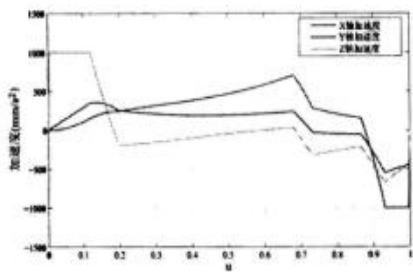


图 3.10: X、Y、Z轴的加速度

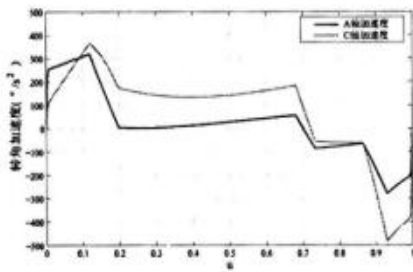


图 3.11: A轴和C轴的加速度

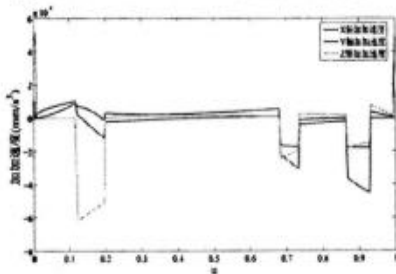


图 3.12: X、Y、Z轴的加加速度

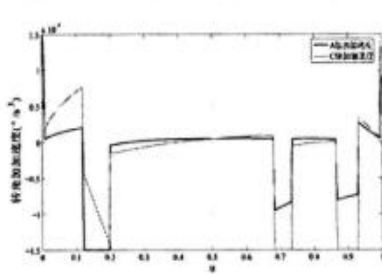


图 3.13: A轴和C轴的加加速度

算法VPA_{LP}越逼近原问题(3.15)的解。另一方面, 当 N 越大时, 计算量也会上升。本节我们用实验数据说明对于我们的问题, 计算复杂度比最坏情况 $O(N^{3.5})$ 要好得多。

表3.1给出了在不同的细分段数 N 下, 算法VPA_{LP}计算图3.3和图3.14所示刀具路径的速度曲线所需的计算时间。

由表3.1, 我们可以看到。首先, 实际上算法VPA_{LP}的计算复杂度大约

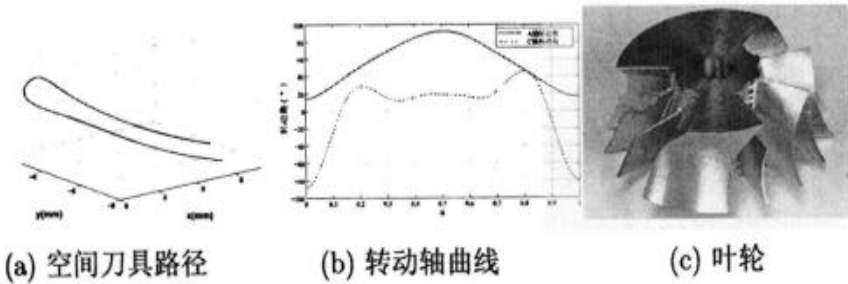


图 3.14: 叶轮上的一段曲线空间刀具路径曲线和转动轴路径曲线

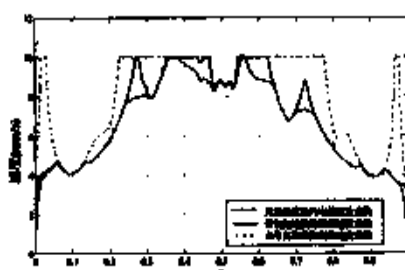


图 3.15: 速度曲线对比图

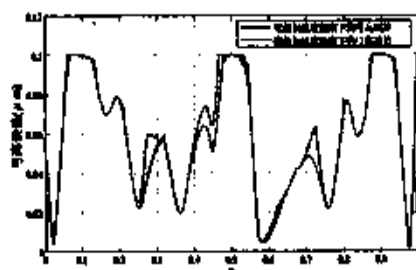


图 3.16: 弓高误差对比图

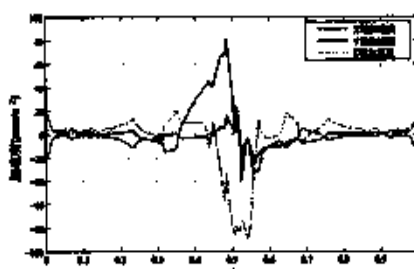


图 3.17: X、Y、Z轴的加速度曲线

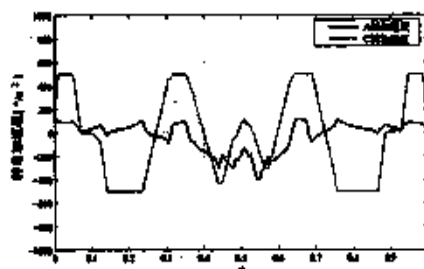


图 3.18: A、C轴的加速度曲线

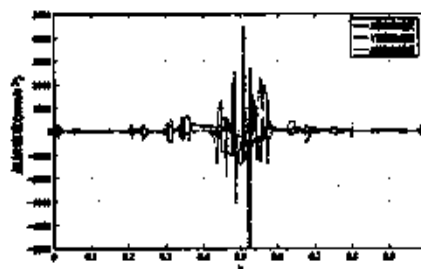


图 3.19: X、Y、Z轴的加加速度曲线

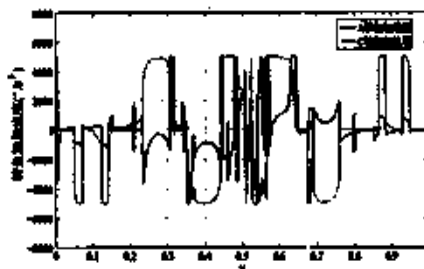


图 3.20: A、C轴的加加速度曲线

N	100	200	300	500	1000
图3.3	0.328秒	0.625秒	0.922秒	2.187秒	3.594秒
图3.14	0.390秒	0.844秒	1.218秒	2.485秒	5.047秒

表 3.1: 不同细分段数 N 下VPA-LP的计算时间

N	图3.3		图3.14	
	VPJ.LP	NP	VPJ.LP	NP
100	1.609秒	42分钟	2.740秒	67分钟
200	3.766秒	149分钟	5.000秒	175分钟
300	5.797秒	失效	6.641秒	失效
500	10.875秒	失效	10.813秒	失效
1000	32.640秒	失效	27.047秒	失效

表 3.2: 不同细分段数 N 下算法NP和VPJ.LP的计算时间

是 $O(N)$, 即计算时间与 N 大致成正比关系。这与Smale的结果是一致的, 即在一定条件下解线性规划问题的平均运算次数跟变量数成正比关系[40]。其次, 对不同的刀具路径来说, 计算次数几乎没有什么不同, 这在实际中非常有用因为实际问题中的刀具路径可能相当复杂。

算法VPJ.LP用到了线性规划方法得到了加加速约束下时间最优速度规划问题的近似最优解。加加速度约束下的速度规划原问题(3.30)是非线性规划问题, 记为(NP), 这个非线性问题在MatLab中理论上是可以解的。在表3.2中, 我们比较了不同细分段数 N 下算法VPJ.LP和算法NP的计算时间。

从表3.2我们可以看出算法VPJ.LP比非线性算法NP要快得多。当 N 超过300时, NP不能解决非线性问题, 而算法VPJ.LP仍可以正常工作得到最优解。

3.5 小结

本章研究了在弓高误差、加速度、加加速度约束下的五轴参数曲线路径的时间最优速度规划问题。

参数区间 $[0, 1]$ 被分为 N 等份, 微分被离散为有限差分形式。然后加速度约束下的速度规划问题简化为等价的线性规划问题。我们给出了多项式时间计算复杂度为 $O(N^{2.5})$ 的算法, 得到问题的最优解。

考虑加加速度约束条件时, 用线性函数逼近非线性的加加速度约束, 因此

加加速度约束下的速度规划问题可以近似为线性规划问题。

最后给出了弓高误差、加速度和加加速度约束下，五轴参数路径的近似时间最优速度规划算法，该算法具有多项式时间复杂度。

仿真结果和复杂度分析说明了提出的算法可以解决任意形式刀具路径的时间最优插补问题。并与传统的非线性规划方法做比较，实验说明本章所提算法更加有效率，更具可行性。

第四章 Jounce约束下参数刀具路径的插补算法

为了减少数控机床振动、提高加工精度,本章提出了一种Jounce(加速度的二阶导数)、加加速度、加速度和速度约束下的参数路径插补方法,给出了在这四重约束下的加减速模式,并证明该模式在速度变迁时是时间最优的。对一段给定的参数刀具路径,首先计算关键点(曲率极值点),然后确定关键点处的限制速度,然后对每两个相邻关键点使用Jounce约束下的加减速模式计算速度函数。本章的第2节设计并分析了Jounce约束下的7段式加减速模式,第3节提出了参数路径下插补算法,第4节给出了实验和仿真结果,振动实验说明与传统的加速度或加加速度约束下的加减速模式相比,Jounce约束下的加减速模式对机床振动明显减小。

4.1 给定Jounce、加加速度、加速度和速度下的最优加减速模式

本节给出经过距离 d_m 并且速度从 v_0 过渡到 v_e 情形下的加减速模式,并证明在给定条件下该模式是时间最优的。由于获得的速度函数的Jounce、加加速度、加速度和速度都是有界的,所以它具有 C^2 的连续度。

4.1.1 7段式加速模式

本节介绍速度从0加速到 $v_m > 0$ 的7段式模式。该模式是4.1.4节给出的加速模式的讨论基础。7段式加速模式如图4.1所示,其中横轴表示时间 t 。该模式分7个阶段使速度从0加速到 $v_m > 0$ 。如果速度从 v_m 减到0,可以使用上述方法的逆过程。

我们假设Jounce有界,给定的界为 S_m ,那么Jounce $s(t)$ 应该满足下列关系:

$$|s(t)| \leq S_m. \quad (4.1)$$

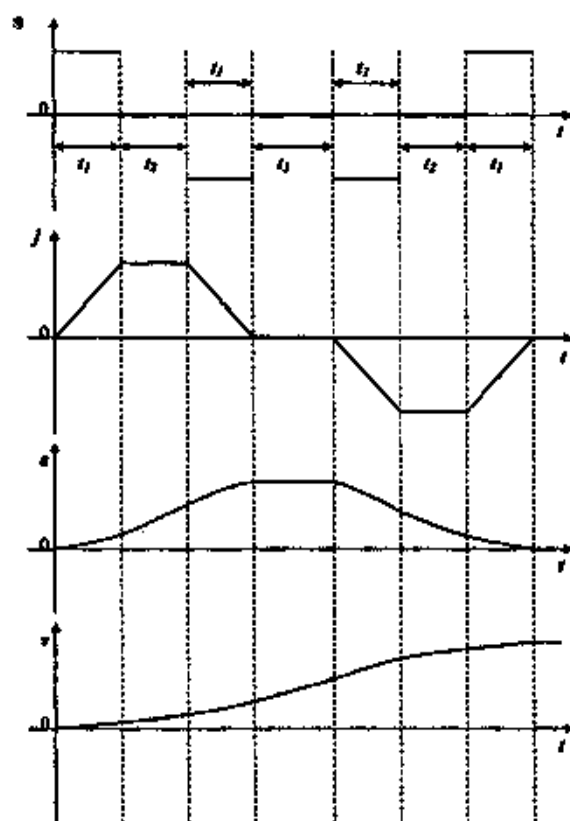


图 4.1: Jounce(s), 加加速度(j), 加速度(a), 速度(v)

为了与其他相似的速度模式更容易连接, 在起始点与结束点处加速度与加加速度设为0, 因此有以下关系:

$$a_s = a_e = 0; j_s = j_e = 0.$$

如图4.1所示, 第一个时段 t_1 里加加速度用最大Jounce值 S_m 从0加到最大值 j_m 。第二个时段 t_2 里加加速度保持恒定值 j_m , 此时加速度继续增大。第三个时段 t_3 里用最小Jounce值 $-S_m$ 把加加速度从 j_m 减到0, 同时加速度增加到最大值 a_m 。第四个时段 t_4 保持加速度 a_m 不变进一步增加速度。最后三个时段关于前三个时段是反对称的, 用来把速度加到最大值 v_m , 同时把加速度从 a_m 减到0。

$$s(t) = \begin{cases} S_m, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t < t_1 + t_2, \\ -S_m, & t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2, \\ 0, & 2t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2 + t_3, \\ -S_m, & 2t_1 + t_2 + t_3 \leq t < 3t_1 + t_2 + t_3, \\ 0, & 3t_1 + t_2 + t_3 \leq t < 3t_1 + 2t_2 + t_3, \\ S_m, & 3t_1 + 2t_2 + t_3 \leq t < 4t_1 + 2t_2 + t_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$j(t) = \begin{cases} S_m t, & 0 \leq t < t_1, \\ S_m t_1, & t_1 \leq t < t_1 + t_2, \\ S_m(2t_1 + t_2 - t), & t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2, \\ 0, & 2t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2 + t_3, \\ S_m(2t_1 + t_2 + t_3 - t), & 2t_1 + t_2 + t_3 \leq t < 3t_1 + t_2 + t_3, \\ -S_m t_1, & 3t_1 + t_2 + t_3 \leq t < 3t_1 + 2t_2 + t_3, \\ S_m(t - 4t_1 - 2t_2 - t_3), & 3t_1 + 2t_2 + t_3 \leq t < 4t_1 + 2t_2 + t_3 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} S_m t^2, & 0 \leq t < t_1, \\ S_m t_1 t - \frac{1}{2} S_m t_1^2, & t_1 \leq t < t_1 + t_2, \\ -\frac{1}{2} S_m (2t_1 + t_2 - t)^2 + S_m(t_1 t_2 + t_1^2), & t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2, \\ S_m(t_1 t_2 + t_1^2), & 2t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2 + t_3, \\ S_m(t_1 t_2 + t_1^2) - \frac{1}{2} S_m (2t_1 + t_2 + t_3 - t)^2, & 2t_1 + t_2 + t_3 \leq t < 3t_1 + t_2 + t_3, \\ 2S_m t_1 t_2 + \frac{7}{2} S_m t_1^2 + S_m t_1 t_3 - S_m t_1 t, & 3t_1 + t_2 + t_3 \leq t < 3t_1 + 2t_2 + t_3, \\ \frac{1}{2} S_m (t - 4t_1 - 2t_2 - t_3)^2, & 3t_1 + 2t_2 + t_3 \leq t < 4t_1 + 2t_2 + t_3 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$v_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}S_m t^3, & 0 \leq t < t_1, \\ \frac{1}{2}(t-t_1)^2 S_m t_1 + \frac{1}{2}(t-t_1)S_m t_1^2 + \frac{1}{6}S_m t_1^3, & t_1 \leq t < t_1+t_2, \\ \frac{1}{3}S_m t_1^3 + \frac{1}{2}S_m t_1^2 t_2 - S_m t_1^2 t + \frac{1}{2}S_m t_1 t_2^2 - S_m t_1 t_2 t \\ + S_m t_1 t^2 + \frac{1}{6}S_m t_2^3 - \frac{1}{2}S_m t_2^2 t + \frac{1}{2}S_m t_2 t^2 - \frac{1}{6}S_m t^3, & t_1+t_2 \leq t < 2t_1+t_2, \\ -S_m t_1^3 - \frac{3}{2}S_m t_1^2 t_2 - \frac{1}{2}S_m t_1 t_2^2 + S_m t_1 t_2 t + S_m t_1^2 t, & 2t_1+t_2 \leq t < 2t_1+t_2+t_3, \\ S_m(t_1 t_2 + t_1^2)(t-2t_1-t_2-t_3) + \frac{1}{6}S_m(2t_1+t_2+t_3-t)^3 \\ + S_m t_1^3 + \frac{3}{2}S_m t_1^2 t_2 + \frac{1}{2}S_m t_1 t_2^2 + S_m t_1 t_2 t_3 + S_m t_1^2 t_3, & 2t_1+t_2+t_3 \leq t < 3t_1+t_2+t_3, \\ 2S_m t_1 t_2 t + \frac{7}{2}S_m t_1^2 t + S_m t_1 t_3 t - \frac{1}{2}S_m t_1 t^2 - 4S_m t_1^2 t_2 \\ - S_m t_1 t_2^3 - S_m t_1 t_2 t_3 - \frac{25}{6}S_m t_1^3 - \frac{5}{2}S_m t_1^2 t_3 - \frac{1}{2}S_m t_1 t_3^2, & 3t_1+t_2+t_3 \leq t < 3t_1+2t_2+t_3, \\ -\frac{26}{3}S_m t_1^3 + 4S_m t_1 t_3 t - 7S_m t_1 t_2 t_3 + 8S_m t_1 t_2 t + 2S_m t_2 t_3 t \\ - 7S_m t_1 t_2^2 + 8S_m t_1^2 t - 2S_m t_1 t^2 - 13S_m t_1^2 t_2 - 7S_m t_1^2 t_3 \\ - 2S_m t_1 t_3^2 - S_m t_2 t^2 - \frac{1}{2}S_m t_3 t^2 + 2S_m t_2^2 t + \frac{1}{2}S_m t_3^2 t \\ - 2S_m t_2^2 t_3 - S_m t_2 t_3^2 + \frac{1}{6}S_m t^3 - \frac{4}{3}S_m t_2^3 - \frac{1}{6}S_m t_3^3, & 3t_1+2t_2+t_3 \leq t < 4t_1+2t_2+t_3, \\ 2S_m t_1^3 + S_m t_1 t_2 t_3 + S_m t_1 t_2^2 + 3S_m t_1^2 t_2 + S_m t_1^2 t_3, & 4t_1+2t_2+t_3 \leq t \end{cases} \quad (4.5)$$

以上整个过程持续时间为 $t_m = 4t_1 + 2t_2 + t_3$ 。很明显7段加速度模式是“Bang-bang”控制, 这意味着在任何时刻 $v(t), a(t), j(t), s(t)$ 中至少有一个到达边界值。

7段模式是由三个参数 t_1, t_2, t_3 与Jounce的最大值 S_m 唯一确定, 因此三元组 (t_1, t_2, t_3) 可以用来表示一个7段模式。

当三元组 (t_1, t_2, t_3) 给定后, 很容易得到 $v_0(t), a(t), j(t), s(t), (t \in [0, t_m])$ 的表达式。

假设起始速度 $v_s = 0$, 下列公式为7段式加速模式(如图4.1所示)的Jounce函数 $s(t)$, 加加速度函数 $j(t)$, 加速度函数 $a(t)$, 和速度函数 $v(t), t \in [0, t_m]$ 的表达式。

很明显这些表达式有如下形式:

$$\begin{aligned} s(t) &= 6m_0 \\ j(t) &= 6m_0t + 2m_1 \\ a(t) &= 3m_0t^2 + 2m_1t + m_2 \\ v_0(t) &= m_0t^3 + m_1t^2 + m_2t + m_3 \end{aligned}$$

其中 $s(t)$ 是三个值 $0, S_m, -S_m$ 的分段常数函数, $j(t)$ 关于时间是分段线性函数, $a(t)$ 是 $j(t)$ 关于时间 t 的积分, 因此是关于时间 t 光滑的分段线性或二次多项式。 $v(t)$ 是 $a(t)$ 关于 t 的积分因此是 C^2 连续的关于 t 的分段线性, 二次或三次多项式。

从图4.1与公式(4.2)-(4.5)可以得到 $j(t), a(t), v_0(t)$ 的最大值 j_m, a_m, v_m 满足

$$j_m = S_m t_1, \quad (4.6)$$

$$a_m = S_m(t_1 t_2 + t_1^2), \quad (4.7)$$

$$v_m = 2S_m t_1^3 + S_m t_1 t_2^2 + 3S_m t_1^2 t_2 + S_m t_1 t_2 t_3 + S_m t_1^2 t_3 \quad (4.8)$$

这里 S_m 表示Jounce的边界值。根据以上提到的可以知道, 加加速度在 $t = t_1$ 时达到最大, 记为 j_m ; 加速度在 $t = 2t_1 + t_2$ 时达到最大, 记为 a_m ; 速度在 $t = t_m = 4t_1 + 2t_2 + t_3$ 时达到最大, 记为 v_m 。该过程行进的距离按下式计算

$$\begin{aligned} d_m &= 4S_m t_1^4 + 8S_m t_1^3 t_2 + S_m t_1 t_2^3 + 5S_m t_1^2 t_2^2 + \frac{9}{2}S_m t_1^2 t_2 t_3 + \frac{3}{2}S_m t_1 t_2^2 t_3 \\ &+ \frac{1}{2}S_m t_1 t_2 t_3^2 + 3S_m t_1^3 t_3 + \frac{1}{2}S_m t_1^2 t_3^2 \\ &= \frac{v_m}{2}(4t_1 + 2t_2 + t_3). \end{aligned} \quad (4.9)$$

现在, 假设起始速度为 v_s , 末速度为 v_e 。根据(4.8), 我们有

$$v_e = v_s + 2S_m t_1^3 + S_m t_1 t_2 t_3 + S_m t_1 t_2^2 + 3S_m t_1^2 t_2 + S_m t_1^2 t_3. \quad (4.10)$$

进而易得, 完成7段式加速过程所需要的距离为

$$\begin{aligned} d_{min} = & 4S_m t_1^4 + 8S_m t_1^3 t_2 + S_m t_1 t_2^3 + 5S_m t_1^2 t_2^2 + \frac{9}{2}S_m t_1^2 t_2 t_3 + \frac{3}{2}S_m t_1 t_2^2 t_3 \\ & + \frac{1}{2}S_m t_1 t_2 t_3^2 + 3S_m t_1^3 t_3 + \frac{1}{2}S_m t_1^2 t_3^2 + v_s(4t_1 + 2t_2 + t_3) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \frac{v_s + v_e}{2}(4t_1 + 2t_2 + t_3) = \frac{v_s + v_e}{2}t_m. \quad (4.12)$$

4.1.2 速度从 v_s 到 v_e 的最优加速模式

本节将讨论在给定CNC机床性能参数的情况下, 速度从 v_s 加速到 v_e 过程中如何使用7段式加速模式。并且证明加速模式是时间最优的。

我们需要考虑数控机床的三个基本参数: 最大Jounce S_m , 最大加加速度 J_m , 最大加速度 A_m 。因此加速度限制、加加速度限制、Jounce限制有如下形式

$$|a(t)| \leq A_m, |j(t)| \leq J_m, |s(t)| \leq S_m. \quad (4.13)$$

7段式加速模式的初始状态如下:

$$a_s = a(0) = a_e = a(t_m) = 0; \quad j_s = j(0) = j_e = j(t_m) = 0. \quad (4.14)$$

不失一般性, 假设 $v_s \leq v_e$ 。

本节的目的是在限制(4.13)和(4.14)下, 确定速度从 v_s 加速到 v_e 过程中的7段式加速模式。本章也会给出这个过程中刀具行进的距离, 但本节暂不考虑行进距离的限制。

从前面提到的可以看出确定7段式加速模式需要先确定 (t_1, t_2, t_3) 。

首先根据 S_m, J_m, A_m 的值确定是否 $t_2 = 0$ 。

从(4.6)和(4.7)两式可得

$$S_m a_m = S_m j_m t_2 + j_m^2. \quad (4.15)$$

针对 S_m, A_m, J_m 的大小关系,分以下三种情况考虑:

如果 $J_m^2 > S_m A_m$,那么加加速度不能达到最大值 J_m ,此时 $t_2 = 0$ 。事实上,假设 $t_2 > 0$,由(4.15)式有 $J_m^2 + S_m t_2 J_m = S_m a_m$ 。因为 $0 \leq a_m \leq A_m$,所以 $t_2 = (S_m a_m - J_m^2)/(S_m J_m)$ 一定为负,因此假设矛盾, $t_2 = 0$ 。

如果 $J_m^2 = S_m A_m$,那么加加速度 j 在 $t_1 = J_m/S_m$ 时刻达到最大值 J_m ,并且 $t_2 = 0$ 。在 $t = 2t_1$ 时刻,加速度达到最大值 A_m 。

如果 $J_m^2 < S_m A_m$ 并且无末速度与行进距离的限制,那么根据(4.6)和(4.15),加加速度在 $t_1 = J_m/S_m$ 时刻达到最大值 J_m ,加速度在 $t = 2t_1 + t_2$ 时刻达到最大值 A_m ,并且 $t_2 = (S_m A_m - J_m^2)/(S_m J_m) > 0$ 。当然,如果对末速度 v_m 有限制的话, t_2 可能为0,这点后面将会讨论。

总结以上分析,有如下性质

命题 4.1. 1. 如果 $J_m^2 \geq S_m A_m$,那么 $t_2 = 0$ 。这种情况下,加加速度 j 不能达到最大值 J_m ,除非等号成立。

2. 如果 $J_m^2 < S_m A_m$ 没有其他限制,那么在 $t_1 = J_m/S_m$ 时刻加加速度达到最大值 J_m ,在 $t = 2t_1 + t_2$ 时刻加速度达到 A_m ,并且 $t_2 = (S_m A_m - J_m^2)/(S_m J_m) > 0$ 。

以上的分析里,末速度 v_m 限制没有考虑到。现在需要讨论的问题是,考虑 v_m 的限制,如何用7段式加速模式使得速度从0加速到 v_m 。根据性质4.1,考虑以下两种情况。

情况1. $J_m^2 \geq S_m A_m$ 。由性质4.1, $t_2 = 0$ 。如果加速度达到 A_m ,那么根据(4.7)我们有 $t_1 = \sqrt{A_m/S_m}$ 。令

$$v_0 = 2S_m t_1^3 = 2S_m \left(\frac{A_m}{S_m}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.16)$$

那么 (t_1, t_2, t_3) 能由下面的情况确定

情况1.1 如果 $v_m > v_0$,那么在 $t = 2t_1 = 2\sqrt{A_m/S_m}$ 时刻, $a(t)$ 达到 A_m 。为了达到 v_m ,存在匀加速度时间段 t_3 ,根据(4.8)用下式计算 t_3

$$t_3 = \frac{v_m - 2S_m t_1^3}{S_m t_1^2} = \frac{v_m - 2S_m t_1^3}{A_m} = \frac{v_m - v_0}{A_m} > 0, \quad (4.17)$$

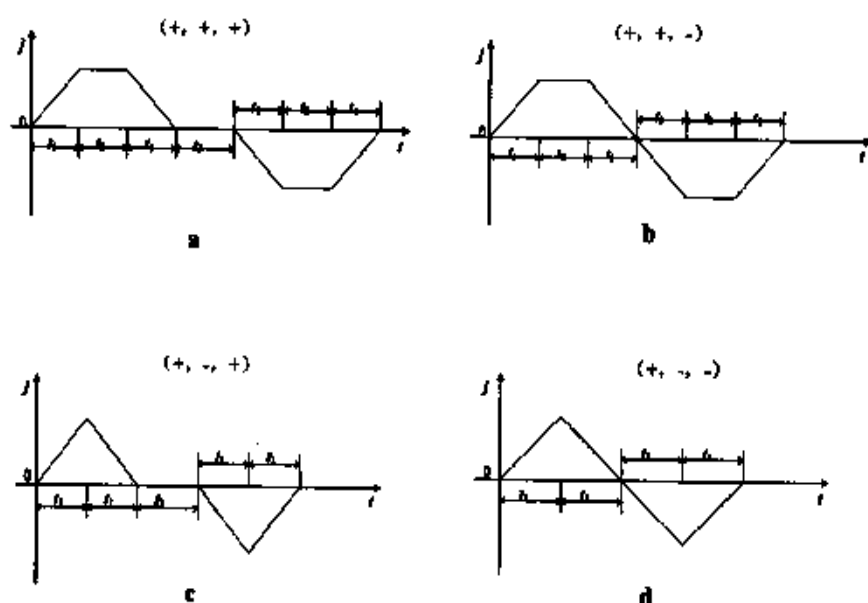


图 4.2: 所有可能的加加速度情形

这里的 $t_1 = \sqrt{\frac{A_m}{S_m}}$.

对于 $i = 1, 2, 3$, 引入符号 $\hat{t}_i = +$ 表示 $t_i \neq 0$; $\hat{t}_i = -$ 表示 $t_i = 0$. 那么使用 $(\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3)$ 表示 7 段式加速模式的形状. 对于情况 1.1, 加速度模式为 $(+, -, +)$, 如图 4.2(c) 所示.

情况 1.2 如果 $v_m \leq 2S_m(\frac{A_m}{S_m})^{\frac{1}{3}}$, 那么加速度不会达到 A_m 除非等号成立.

反之假设加速度能达到 A_m , 根据 (4.17) 式, t_3 为负, 这是不可能的.

因此 $t_3 = 0$ 并且由 v_m 通过公式 (4.8) 确定 t_1 : $t_1 = \sqrt[3]{\frac{v_m}{2S_m}}$. 那么加速模式为 $(+, -, -)$, 如图 4.2(d) 所示.

情况 2. $J_m^2 < S_m A_m$. 由性质 4.1, 如果加加速度达到 J_m , 那么 $t_1 = J_m/S_m$ 并且若加速度达到 A_m 那么 $t_2 = (S_m A_m - J_m^2)/(S_m J_m)$. 在以上提到的约束

条件下, 令

$$\begin{aligned} v_1 &= 2S_m t_1^3 = \frac{2J_m^3}{S_m^2} \\ v_2 &= 2S_m t_1^3 + S_m t_1 t_2^2 + 3S_m t_1^2 t_2 = \frac{A_m(S_m A_m + J_m^2)}{S_m J_m} \end{aligned}$$

那么可以根据下式确定 (t_1, t_2, t_3) :

情况2.1 如果 $v_m > v_2$, 那么加加速度与加速度都能达到最大值, $t_3 \neq 0$,

由(4.8) t_3 由下式计算

$$t_3 = \frac{v_m - v_2}{A_m} = \frac{v_m}{A_m} - \left(\frac{J_m}{S_m} + \frac{A_m}{J_m} \right). \quad (4.18)$$

加速模式为 $(+, +, +)$ 如图4.2(a)所示。

情况2.2 如果 $v_1 < v_m \leq v_2$, 那么 $t_3 = 0$, 加加速度能达到 J_m , 并且 $a(t)$

不能达到 A_m 除非 $v_m = v_2$. 进而可知, 已知 v_m 的话, t_2 可以根据(4.8)由下式确定

$$t_2 = \frac{\sqrt{t_1^2 + \frac{4v_m}{J_m}} - 3t_1}{2} = \frac{\sqrt{J_m^3 + 4v_m S_m^2} - 3J_m^{\frac{3}{2}}}{2S_m \sqrt{J_m}} \quad (4.19)$$

此加速模式为 $(+, +, -)$, 如图4.2(b)所示。

情况2.3 如果 $v_m \leq v_1$, 那么加加速度和加速度都不能达到各自的最大值

(只有 $v_m = v_1$ 时加加速度才能达到最大值), 此时 $t_2 = t_3 = 0$. 进而 t_1 根据(4.8)式由下式确定:

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{v_m}{2S_m}}.$$

此加速模式为 $(+, -, -)$, 如图4.2(d)所示。

根据以上的分析, 现在给出速度从 v_s 加速到 v_e 过程中的7段式加速模式算法。如果 $v_e > v_s$, 可以类似的设计一个减速过程。先假设这个加/减速过程行进的距离足够长, 然后我们在4.1.4节检查距离的可达性。

算法 4.1. PRO_VV(v_s, v_e)

输入: 数控系统参数: S_m, J_m, A_m , 起始 v_s 与末速度 v_e .

输出: 7段加速模式参数(t_1, t_2, t_3).

1. 令 $v^* = |v_e - v_s|$. 如果 $J_m^2 \geq S_m A_m$, 那么进行步骤2, 否则进入步骤3.

2. 用下面的公式计算 t_1, t_2, t_3 并且输出(t_1, t_2, t_3).

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{\frac{A_m}{S_m}}, t_2 = 0, t_3 = \frac{v^* - 2S_m t_1^3}{A_m}, & \text{如果 } v^* > 2S_m \left(\frac{A_m}{S_m}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ t_1 = \sqrt[3]{\frac{v^*}{2S_m}}, t_2 = 0, t_3 = 0, & \text{如果 } v^* \leq 2S_m \left(\frac{A_m}{S_m}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

3. 用下面的公式计算 t_1, t_2, t_3 并且计算(t_1, t_2, t_3).

$$\begin{cases} t_1 = \frac{J_m}{S_m}, t_2 = \frac{A_m - \frac{J_m^2}{S_m}}{J_m}, t_3 = \frac{v^* - (2S_m t_1^3 + 3S_m t_1^2 t_2 + S_m t_1 t_2^2)}{A_m}, & \text{如果 } v^* > \frac{A_m^2}{J_m} + \frac{A_m J_m}{S_m}, \\ t_1 = \frac{J_m}{S_m}, t_2 = \frac{\sqrt{t_1^2 + \frac{4v^{*2}}{S_m^2}} - 3t_1}{2}, t_3 = 0, & \text{如果 } \frac{2J_m^2}{S_m^2} < v^* \leq \frac{A_m^2}{J_m} + \frac{A_m J_m}{S_m}, \\ t_1 = \sqrt[3]{\frac{v^*}{2S_m}}, t_2 = 0, t_3 = 0, & \text{如果 } v^* \leq \frac{2J_m^2}{S_m^2} \end{cases}$$

使用标示符($\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3$), 算法PRO_VV 可以归纳如图4.3的流程图.

很明显参数 t_1, t_2, t_3 的选择不是唯一的. 例如在情况1中, 我们可以让加速度增加到 $j_m < J_m$ 然后保持匀加速度一个时间段 $t_2 > 0$. 同样的, 在情况2中, 如果(+, +, +) 模式不成立, 似乎(+, +, -) 模式与(+, -, +) 模式都可以选择. 为了证明我们的参数选择方式能获得本问题的时间最优解, 先看下面一个引理.

引理4.2.

[1][p.24-26] 令 y, z 分别为以下微分方程的解

$$y' = F(x, y), z' = G(x, z),$$

这里 $F(x, y) \leq G(x, y), a \leq x \leq b$, 且 F or G 满足 Lipschitz 条件. 如果 $y(a) = z(a)$, 那么对任意 $x \in [a, b]$, 有 $y(x) \leq z(x)$.

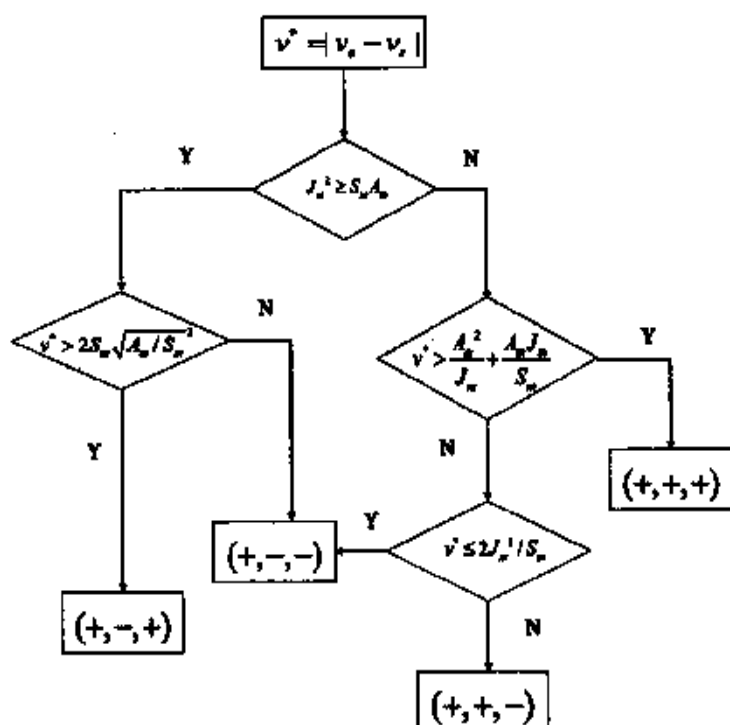


图 4.3: 算法PRO_VV流程图

定理 4.3. 在约束条件(4.13)与(4.14)下, 算法PRO_VV保证速度从 v_s 增加到 v_e 是时间最优的过程。

证明. 首先, 证明7段式加加速模式是时间最优的。

记 $v(t), t \in [0, t_m]$ 为7段式加加速度模式的速度曲线, 这里 $t_m = 4 * t_1 + 2 * t_2 + t_3$; 记 $j(t), a(t)$ 分别是其对应的加加速度和加速度。先断言对于其他满足约束(4.13)和(4.14)的任意速度曲线 $v^*(t), t \in [0, t^*]$, 有 $t^* \geq t_m$ 。设 $j^*(t), a^*(t), s^*(t)$ 分别为 $v^*(t)$ 的加加速度、加速度、Jounce, 假设断言不成立, 那么存在 $t_4 \in [0, t^*]$, 使得 $v(t_4) < v^*(t_4)$ (特别地取 $t_4 = t^*$), 证明这样的 $t_4 \in [0, t_m]$ 是不存在的。

情况1: $t_4 \notin [0, t_1 + t_2]$ 。因为在区间 $t \in [0, t_1 + t_2]$ 内, $j(t) \geq j^*(t)$, 那么 $a(t) \geq a^*(t)$ 且 $v(t) \geq v^*(t)$ 。

情况2: $t_4 \notin (t_1 + t_2, 2 * t_1 + t_2]$ 。如果这种情形不成立, 则存在 $t_5 \in$

$(t_1 + t_2, t_4]$ 使得 $a(t_5) < a^*(t_5)$ 。断言 $j(t_5) \leq j^*(t_5)$ 。如果断言不成立, 即 $j(t_5) > j^*(t_5)$, 那么由定理4.2 可知 $j(t) = j(t_5) + \int_t^{t_5} S_m dt_s > j^*(t) + \int_t^{t_5} s^*(t_s) dt_s = j^*(t)$, $t \in [t_1 + t_2, t_5]$ 。那么由情况1的讨论可知 $a(t_5) < a^*(t_5)$ 是不成立的。令 $t_6 = 2 * t_1 + t_2 - t_5$, 则根据定理4.2 知 $j^*(t) = j^*(t_5) - \int_{t_5}^t s^*(t_s) dt_s \geq j(t)$, $t \in [t_5, t_5 + t_6]$ 。那么由定理4.2,

$$\begin{aligned} a^*(t_5 + t_6) &= a^*(t_5) + \int_{t_5}^{t_5+t_6} j^*(t) dt \\ &\geq a^*(t_5) + \int_{t_5}^{t_5+t_6} j(t) dt \\ &> a(t_5) + \int_{t_5}^{t_5+t_6} j(t) dt \\ &> A_m \end{aligned}$$

这与约束(4.13)矛盾。

情况3: $t_4 \notin (2 * t_1 + t_2, 2 * t_1 + t_2 + t_3]$ 。如果此情况不成立, 则存在 $t_5 \in [0, 2 * t_1 + t_2]$ 使得 $a(t_5) < a^*(t_5)$ 。由情况1和情况2的讨论可知, 这是不成立的。

情况4: $t_4 \notin (2 * t_1 + t_2 + t_3, t_m)$ 。记 $\bar{v}^*(t)$ 为

$$\bar{v}^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_m - t^*] \\ v^*(t + t^* - t_m), & t \in [t_m - t^*, t_m] \end{cases}$$

与情况1、情况2和情况3相似, 对于区间 $t \in [2 * t_1 + t_2, t_m]$, 以时间轴的反方向 $-t$ 看, $v(t)$ 使用极大减速能力减小速度。因此 $v(t) \leq \bar{v}^*(t)$, $t \in [2 * t_1 + t_2, t_m]$ 。因为 $v(t)$ 是单调函数, 令 $t_5 = 2 * t_1 + t_2 + t^* - t_m \in [0, 2 * t_1 + t_2]$, 则 $v(t_5) < v(t_5 + t_m - t^*) \leq \bar{v}^*(t_5 + t_m - t^*) = v^*(t_5)$ 。这与情况1和情况2的讨论相矛盾。

其他类型的时间最优性质可以加上不同的约束通过用类似的方法得以证明。

目前, 已经证明在约束(4.13)、(4.14)下, 速度从 v_s 加速到 v_e 的算法 PRO_VV 是时间最优的。

还需要证明的是在第2节中具体的加加速度模式选择是合理的。为简单起见, 仅考虑模式 $(+, +, +)$ 到 $(+, +, -)$ / $(+, -, +)$ 的选择, 以及模式 $(+, +, -)$ 到 $(+, -, -)$ / $(+, -, +)$ 的选择。不失一般性, 令 $v_s = 0$ 。

首先, 很明显可以知道在可行的情况下, 模式 $(+, +, +)$ 是最优的情形。但是在 $J_m^2 < S_m A_m$ 条件下, 如果 $v_e < \frac{A_m^2}{J_m} + \frac{A_m v_s}{S_m}$, 那么对模式 $(+, +, +)$ 来说,

v_c 是不够大的, 这时应该将考虑模式的选择。如果采用模式(+, -, +), 那么 $t_2 = 0$ 且 $t_3 > 0$, $j_m \leq J_m < \sqrt{S_m A_m}$ 。

很明显 $t_1 = \frac{j_m}{S_m}$ 。由(8)式知 v_c 有以下形式

$$v_c = 2S_m t_1^3 + S_m t_1 t_2 t_3 + S_m t_1 t_2^2 + 3S_m t_1^2 t_2 + S_m t_1^2 t_3 = 2S_m t_1^3 + S_m t_1^2 t_3,$$

故 $t_3 = \frac{v_c S_m}{j_m^2} - \frac{2j_m}{S_m}$ 并且模式(+, -, +)的时间为 $t_{(+, -, +)} = t(j_m) = \frac{v_c S_m}{j_m^2} + \frac{2j_m}{S_m}$ 。因此当 $v_c < \frac{j_m^2}{S_m} + \frac{4j_m^2}{S_m}$ 时, 根据 v_c 的值讨论以下两种情形。

情形 a: $v_c > \frac{2j_m^2}{S_m}$ 。因为 $t(j_m)$ 在 $j_m \in (0, (v_c S_m^2)^{\frac{1}{3}}]$ 上是单调递减的, 并且 $j_m \leq J_m < (\frac{v_c S_m^2}{2})^{\frac{1}{3}}$, $t(j_m) \geq \frac{v_c S_m}{j_m^2} + \frac{2j_m}{S_m}$ 。易得 $\frac{v_c S_m}{j_m^2} + \frac{2j_m}{S_m} > \frac{j_m}{S_m} + \sqrt{\frac{j_m^3}{S_m^2} + \frac{4j_m^2}{S_m}} = t_{(+, +, -)}$ 。所以 $t_{(+, -, +)} > t_{(+, +, -)}$ 。模式(+, +, -)的时间比模式(+, -, +)要少。

情形 b: $v_c \leq \frac{2j_m^2}{S_m}$ 。在这种情形下模式(+, +, -)失效, 否则 j_m 会超过 J_m 。现在证明模式(+, -, -)比模式(+, -, +)时间少。如果采用模式(+, -, +), 那么 $t_1 = \frac{j_m}{S_m}$, $t_2 = 0$ 并且 $t_3 = \frac{v_c S_m}{j_m^2} - \frac{2j_m}{S_m} > 0$ 。故 $j_m < (\frac{v_c S_m^2}{2})^{\frac{1}{3}}$ 。记 $t(j_m) = 4t_1 + t_3$ 为最大加速度 j_m 下的总加速时间。因为 $t(j_m)$ 在 $j_m \in (0, (v_c S_m^2)^{\frac{1}{3}}]$ 是单调递减, 所以模式(+, -, +)的时间 $t_{(+, -, +)} = t(j_m) > t((\frac{v_c S_m^2}{2})^{\frac{1}{3}}) = 4(\frac{v_c}{2S_m})^{\frac{1}{3}} = t_{(+, -, -)}$ 。因此模式(+, -, -)的时间比模式(+, -, +)的时间少。

因此这两种模式选择的最优性得以证明, 其他的情形可以得到类似证明, 定理4.3得以证明。

如果加速模式是对称的, 那么意味着把速度从 v_c 加速到 v_e 所需距离是最短的, 因为距离 $d = \frac{v_e + v_c}{2} t^*$ 。这里 t^* 为整体加速时间。

4.1.3 行进距离 d_m 初速度 v_c 的加速模式

给定行进距离 d_m 、初速度 v_c 条件下, 本节将给出加速模式计算能达到的最大速度。

类似4.1.2节, 首先分两种情况给出计算7段式加速模式参数(t_1, t_2, t_3)的方法。

情况1. $J_m^2 \geq S_m A_m$ 。由性质4.1, $t_2 = 0$ 。如果加速度达到 A_m , 那么根据(4.7)

有 $t_1 = \sqrt{A_m/S_m}$. 令

$$d_0 = 4S_m t_1^4 + 4v_s t_1 = 4 \frac{A_m^2}{S_m} + 4v_s \sqrt{\frac{A_m}{S_m}}. \quad (4.20)$$

那么 (t_1, t_2, t_3) 能由下述步骤确定:

情况1.1 如果 $d_m > d_0$, 那么最大加速度 A_m 是可达的, $t_1 = \sqrt{A_m/S_m}$.

并且, 存在匀加速段 $t_3 \neq 0$. 由(4.12)式可知, 通过解下面的二次方程得到 t_3 :

$$d_m = 4S_m t_1^4 + 3S_m t_1^3 t_3 + \frac{1}{2} S_m t_1^2 t_3^2 + v_s (4t_1 + t_3). \quad (4.21)$$

由于 $d_m > d_0$, 很容易知道上面的方程只有一个正根.

该加速模式为 $(+, -, +)$, 如图4.2(c)所示.

情况1.2 如果 $d_m \leq d_0$, 那么 A_m 是不可达的 (除非 $d_m = d_0$) 且 $t_3 = 0$.

并且由行进距离 d_m , 根据(4.12)式通过解如下的方程获得 t_1 :

$$d_m = 4S_m t_1^4 + 4v_s t_1. \quad (4.22)$$

此加速模式为 $(+, -, -)$, 如图4.2(d)所示.

情况2. $J_m^2 < S_m A_m$. 根据性质4.1, 如果加加速度达到 J_m , 那么 $t_1 = J_m/S_m$

并且如果加速度地达到 A_m , 那么 $t_2 = (S_m A_m - J_m^2)/(S_m J_m)$. 根据上述的条件, 令

$$\begin{aligned} d_1 &= 4S_m t_1^4 + 4v_s t_1 = 4 \frac{J_m^4}{S_m^3} + 4v_s \frac{J_m}{S_m} \\ d_2 &= 4S_m t_1^4 + 8S_m t_1^3 t_2 + S_m t_1 t_2^3 + 5S_m t_1^2 t_2^2 + v_s (4t_1 + 2t_2) \quad (4.23) \\ &= A_m \left(\frac{A_m}{J_m} + \frac{J_m}{S_m} \right)^2 + 2v_s \left(\frac{A_m}{J_m} + \frac{J_m}{S_m} \right). \end{aligned}$$

那么用下面的步骤确定 (t_1, t_2, t_3) .

情况2.1 如果 $d_m > d_2$, 那么加速度与加加速度都能达到各自的最大值,

匀加速时间段 $t_3 \neq 0$ 并且能够通过解方程(4.12)获得 t_3 的值.

此加速模式为 $(+, +, +)$, 如图4.2(a)所示.

情况2.2 如果 $d_1 < d_m \leq d_2$, 那么加加速度能达到 J_m 而加速度不能达到 A_m 除非 $d_m = d_2$. 因此, 匀加速段 $t_3 = 0$ 而由(4.12), t_2 可以通过解下面关于 t_2 的二次方程

$$d_m = 4S_m t_1^4 + 8S_m t_1^3 t_2 + S_m t_1 t_2^3 + 5S_m t_1^2 t_2^2 + v_s(4t_1 + 2t_2).$$

此加速模式为(+, +, -) 如图4.2(b)所示。

情况2.3 如果 $d_m \leq d_1$, 那么加加速度和加速度都不能达到各自的最大值 (除非 $d_m = d_1$), 而 $t_2 = t_3 = 0$. 由(4.12)式知 t_1 可以通过解方程 $d_m = 4S_m t_1^4 + 4v_s t_1$ 获得. 此加速模式为(+, -, -) 如图4.2(d)所示。

根据上述分析, 已知初速度 v_s 和行进距离 d_m , 给出确定末速度的算法。

此外, 算法的输出是参数 (t_1, t_2, t_3) , 把这三个参数带到(4.10)式中可以计算得到末速度 v_e . 速度函数 $v(t)$ 可以用 $v(t) = v_s + v_0(t)$ 计算获得, 这里 $v_0(t)$ 定义于(4.5)式。

算法 4.2. PRO_VD(v_s, d_m)

输入: 数控系统参数 S_m, J_m, A_m , 初速度 v_s , 行进距离 d_m .

输出: 7段式加速模式时间参数 (t_1, t_2, t_3) .

1. 如果 $J_m^2 \geq S_m A_m$, 那么进入步骤2, 否则进入步骤3.
2. 令 $t_2 = 0$, d_0 由(4.20)式给定. 如果 $d_m > d_0$, 令 $t_1 = \sqrt{A_m/S_m}$, 用方程(4.21)计算 t_3 ; 否则令 $t_3 = 0$, 用方程(4.22)计算 t_1 , 输出 (t_1, t_2, t_3) .
3. 令 d_1 和 d_2 为(4.23)式所给.

$$\begin{cases} t_1 = \frac{J_m}{S_m}, t_2 = \frac{A_m - \frac{J_m^2}{S_m}}{J_m}, \text{解方程 (4.12) 找到 } t_3, & \text{若 } d_m > d_2 \\ t_1 = \frac{J_m}{S_m}, t_3 = 0, \text{解方程 (4.12) 找到 } t_2, & \text{若 } d_1 < d_m \leq d_2 \\ t_2 = t_3 = 0, \text{解方程 (4.12) 找到 } t_1, & \text{若 } d_m \leq d_1 \end{cases}$$

输出 (t_1, t_2, t_3) .

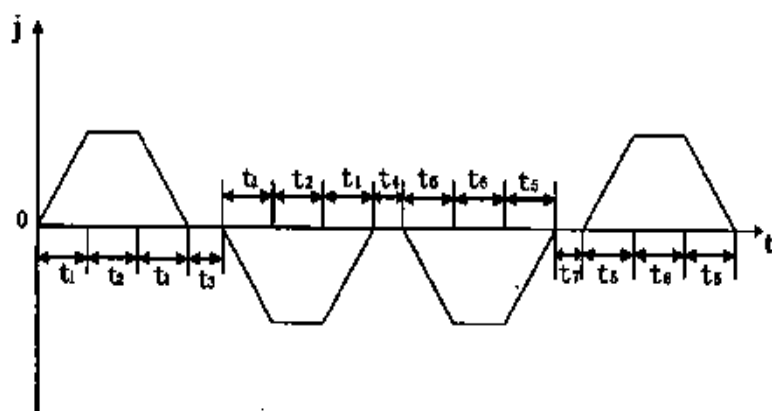


图 4.4: 15段加/减速模式的加加速度曲线

与定理4.3类似, 由于使用7段式加速模式时, 此算法能输出最大末速度, 因此我们能够证明该算法的最优性。

定理 4.4. 给定初速度 v_s 和行进距离 d_m 下, 采用7段式加速模式, 算法PRO_VD输出最大速度。

同样, 算法PRO_VD(v_s, d_m)也能很容易计算可达到的最小速度。

4.1.4 Jounce、加加速度、加速度、速度有界条件下的加/减速模式

4.1.2节和4.1.3节是准备工作。在Jounce、加加速度、加速度、速度有界条件下, 针对速度从 v_s 变化为 v_e 并经过距离 d_m 这个过程, 本节我们将给出完整的加减速模式。

如图4.4所示, 15段式加/减速模式包含三个阶段。首先, 采用7段式加速模式速度从 v_s 增加到最大速度 V_m ; 然后保持恒定速度 V_m ; 然后采用7段式减速模式速度从 V_m 减速到 v_e 。令 (t_1, t_2, t_3) 表示第一阶段中7段式加速模式的时间参数, t_4 表示匀速时间段, (t_5, t_6, t_7) 表示第三阶段中7段式减速模式的时间参数。因此加/减速模式可以用7个参数唯一地表示 $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)$ 速度曲线可以

用(4.24)式计算。7段式模式满足(4.14)式中的初始状态,因此加减速模式的速度函数是 C^2 连续的。

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v_s + v_0(t), v_0(t) \text{ 源自(4.5) 并带有 } (t_1, t_2, t_3), & t \in [0, t_{m1}] \\ V_m, & t \in [t_{m1}, t_{m1} + t_4] \\ V_m - v_0(t - t_{m1} - t_4), v_0(t) \text{ 源自(4.5) 并带有 } (t_5, t_6, t_7), & t \in [t_{m1} + t_4, t_m] \end{cases} \quad (4.24)$$

这里 $t_{m1} = 4t_1 + 2t_2 + t_3$, $t_{m2} = 4t_5 + 2t_6 + t_7$, $t_m = t_{m1} + t_4 + t_{m2}$ 。由(4.12)式,加减速所需距离为

$$d = \frac{(v_s + V_m)t_{m1}}{2} + t_4 V_m + \frac{(v_e + V_m)t_{m2}}{2} \quad (4.25)$$

首先对算法做一个简要介绍。不失一般性,假设 $v_s \leq v_e$ 。首先,检查当初速度为 v_s 、行进距离 d_m 时末速度 v_e 的可达性。用算法PRO_VV(v_s, v_e)可以去顶速度从 v_s 加速到 v_e 需要的最小距离 d_{min} 。如果 $d_m \geq d_{min}$,那么 v_e 是可达的;否则算法终止。

现在假设 v_e 是可达的。用算法PRO_VV(v_s, V_m)和算法PRO_VV(v_e, V_m)分别计算速度从 v_s 加速到 V_m 和速度从 V_m 减速到 v_e 所需要最小行进距离 d_1 和 d_2 。如果 $d_1 + d_2 \leq d_m$,那么 V_m 是可达的存在速度为 V_m 的匀速段。如果 $d_1 + d_2 > d_m$,那么 V_m 是不可达的,这时需要计算实际可达的最大速度 v_m 。速度 v_m 可以通过解一系列的代数方程得到。但是由于参数 $t_i, i = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ 复杂的选择过程,这种直接解代数方程的方法是不可行的。取而代之的是使用二分法计算 v_m 。令 $v_0 = V_m, v_1 = v_e, v_2 = (v_0 + v_1)/2$ 。然后计算速度从 v_s 加速到 v_2 所需要最小行进距离 d_1 ,计算速度从 v_2 减速到 v_e 所需要最小行进距离 d_2 。如果 $d_1 + d_2 \leq d_m$,那么 v_2 是可达的,令 $v_0 = \max\{v_0, v_1\}, v_1 = v_2$ 。否则, v_2 是不可达的,令 $v_1 = \min\{v_0, v_1\}, v_0 = v_2$ 。重复以上二分法过程直到 $|d_{10} + d_{20} - d_m|$ 比给定的精度小为止,然后使用最后计算得到的 v_2 作为最终的 v_m 。

有了以上的分析,Jounce、加加速度、加速度、速度有界条件下加/减速模式的算法如下表示:

算法 4.3. PRO_AD(v_s, v_e, d_m)

输入: 数控系统参数 S_m, J_m, A_m, V_m , 初速度 v_s , 末速度 v_e , 行进距离 d_m .

输出: 速度 v_e 不可达, 或者 v_e 可达时加减速模式的时间参数 $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)$.

1. 用算法 PRO_VV(v_s, v_e) 计算 (t_1, t_2, t_3) . 令 d_{\min} 表示用 (t_1, t_2, t_3) 和 (4.12) 式计算得到的距离. 如果 $d_{\min} > d_m$, v_e 是不可达的, 算法终止.
2. 令 (t_1, t_2, t_3) 和 (t_5, t_6, t_7) 分别表示算法 PRO_VV(v_s, V_m) 和算法 PRO_VV(v_e, V_m) 的输出, d_i 和 d_d 分别表示通过 (4.12) 式计算得到的速度从 v_s 加速到 V_m 、速度从 V_m 减速到 v_e 需要的最短距离.
3. 如果 $d_i + d_d \leq d_m$, 那么 V_m 是可达的. 计算 $t_4 = (d_m - d_i - d_d)/V_m$. 输出 $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)$.
4. 如果 $d_i + d_d > d_m$, 则 V_m 不可达. 令 $t_4 = 0, v_0 = V_m, v_1 = v_e, \epsilon = 10^{-4}$.
 - (a) 令 $v_2 = (v_0 + v_1)/2$.
 - (b) 令 (t_1, t_2, t_3) 和 (t_5, t_6, t_7) 分别是算法 PRO_VV(v_s, v_2) 和算法 PRO_VV(v_e, v_2) 的输出, d_i 和 d_d 分别表示通过 (4.12) 式计算得到的速度从 v_s 加速到 v_2 、速度从 v_2 减速到 v_e 需要的最短距离.
 - (c) 如果 $|d_i + d_d - d_m| < \epsilon$, 输出 $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)$.
 - (d) 如果 $d_i + d_d \leq d_m$, 那么 v_2 是可达的. 令 $v_0 = \max\{v_0, v_1\}, v_1 = v_2$, 进入步骤 (a).
 - (e) 如果 $d_i + d_d > d_m$, 则 v_2 不可达. 令 $v_1 = \min\{v_0, v_1\}, v_0 = v_2$, 进入步骤 (a).

根据定理 4.3 和定理 4.4, 可以证明以上的算法是时间最优的. 更精确的表述如下

定理 4.5. 在 (4.13) 和 (4.14) 约束下, 算法 PRO_AD 针对行进距离为 d_m 且速度从 v_s 变化到 v_e 这个过程, 得到的是一个时间最优的解.

4.2 Jounce、加加速度、加速度、速度约束下的参数刀具路径的插补

本节将给出Jounce、加加速度、加速度、速度约束下的参数刀具路径的插补方法。

算法按照下面的步骤进行。首先,对参数刀具路径做检索,找出关键点(即参数路径上的曲率局部极值点)。由弓高误差与速度的关系,允许加工速度在这些位置也会达到局部极值,这个速度极值我们叫它限制速度。

然后,通过回溯算法,调节关键点的限制速度使得这些关键点的速度都可达。最后使用算法PRO_VV或算法PRO_AD对每两个相邻的关键点中间的一段路径做插补。

4.2.1 刀具路径上的关键点

本节将介绍计算刀具路径上关键点(这些点处加工限制速度达到局部极值)的方法。

设刀具路径是具有如下表达形式的 k 阶B样条曲线。

$$C(u) = \{x(u), y(u), z(u)\} = \sum_{i=0}^n Q_i N_{i,k}(u), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (4.26)$$

这里 Q_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 表示 $n+1$ 个控点, $N_{i,k}(u)$ 为定义在结向量 $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k+1}\}$ 上的 k 阶B样条的基函数, u 是曲线参数。注意,其他的参数曲线例如NURBS 都可以类似对待。

定义

$$\sigma(u) = \frac{ds}{du} = |C'(u)|,$$

为曲线 $C(u)$ 的参数速度,其中 $'$ 是关于 u 的导数。曲率和曲率半径定义如下

$$\kappa(u) = \frac{|C'(u) \times C''(u)|}{\sigma(u)^3}, \quad \rho(u) = \frac{1}{\kappa(u)} \quad (4.27)$$

众所周知在刀具路径 $C(u)$ 处的 $u = u_0$, 插补速度被弓高误差约束 δ 所限制。

将 $C(u)$ 在 $C(u_0)$ 的领域内做如下泰勒展开:

$$C(u_0 + \Delta u) = C(u_0) + a_0 \Delta u + \frac{1}{2} \kappa_0 b_0 (\Delta u)^2 + \frac{1}{6} (-\kappa_0^2 a_0 + \kappa_0 b_0 + \kappa_0 \tau_0 c_0 + \epsilon) (\Delta u)^3, \quad (4.28)$$

这里 κ_0, τ_0 分别表示曲率和挠率, a_0, b_0, c_0 分别表示切向量 \mathbf{a} 、主法向 \mathbf{b} 和副法向 \mathbf{c} 在 $u = u_0$ 处的值, ϵ 是一个非常小的量。

由(4.28)式可知, 当使用直线逼近样条曲线时, 二阶剩余项只和曲率有关, 三阶剩余项和挠率有关。因此, 在 $u = u_0$ 处用一个半径是 $\rho(u_0)$ 圆弧可以局部近似该段曲线。一个插补周期内使用小线段逼近直线引起弓高误差, 插补的轮廓误差可以由弓高误差 δ 的限制约束住。

用 δ 表示弓高误差的边界值, Δu 表示不违背弓高误差限制下一个周期内最大可能的参数增加量。因此可以得到下面的关系[19]:

$$\Delta L(u) = |C(u)C(u + \Delta u)| \approx \sqrt{8\rho\delta}.$$

令 T 表示插补周期。因此在 $C(u)$ 处由弓高误差引起的最大可能速度是

$$v_{lim}(u) = \Delta L(u)/T = \sqrt{8\rho(u)\delta}/T. \quad (4.29)$$

速度 $v_{lim}(u)$ 被称为 $C(u)$ 处的限制速度。

根据(4.29)式, $v_{lim}(u)$ 与曲率半径函数 $\rho(u)$ 有相同的极值点, 由(4.27)式知与曲率函数有相同的极值点。这些极值点被称为刀具路径上的关键点。通过解如下关于 u 的代数方程可以计算曲线 $C(u)$ 每段的 $v_{lim}(u)$ 极值点。

$$\kappa'(u) = 0. \quad (4.30)$$

另外, 如果在结合点处样条曲线的连续度没达到 C^2 , 则认为该连接点为关键点, 并且取两段曲线在该连接点处曲率值中的小那一个作为该点的限制速度。

极值点也可以用下面离散的方法计算。

首先对曲线 $C(u), u \in [0, 1]$ 用速度 $v_{lim}(u)$ 、插补周期 T 做一次检索(粗插补)找到插补点 $u_0 = 0, u_1, \dots, u_n = 1$ 。然后从 $v_{lim}(u_i)$ 中找出极值点。

根据以上分析, 用下面算法计算极值点。

算法 4.4. CRPTS($C(u), u \in [0, 1]$)

输入: p 段的 B 样条曲线 $C(u)$, $u \in [0, 1]$, 插补周期 T , 数控系统的最大进给速度 V_m .

输出: 关键点的参数值 $u_i, i = 0, \dots, N$.

1. 针对输入曲线 $C(u), u \in [0, 1]$ 和限制速度 $v_{lim}(u), u \in [0, 1]$ 使用算法 4.7 找出插补点 $\bar{u}_0 = 1, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n = 1$.

2. 选择满足下面条件的参数 \bar{u}_k

$$(v_{lim}(\bar{u}) - v_{lim}(\bar{u}_{k-1}))(v_{lim}(\bar{u}_k) - v_{lim}(\bar{u}_{k+1})) \geq 0.$$

把这些参数记为 u_1, \dots, u_{N-1} . 输出 $u_0 = 0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N = 1$.

注 4.1. 当参数曲线形式简单时, 可以通过直接解方程(4.30)得到极值点, 而对高次参数曲线, 采用算法 4.4 计算极值点.

令 $C(u_i), i = 0, \dots, N$ 表示以上算法找到的点. 如果限制速度 $\min\{v_{lim}(u), V_m\}$ 在 u_i 处取得局部极小(极大)值, 那么 u_i 被称为极小(极大)关键点. 如果曲线 $C(u)$ 至少二阶可微, 极小和极大关键点会交替出现.

4.2.2 可达性测试

由于每两个相邻关键点的距离限制, 用前一节的算法找到的关键点处速度有可能是不可达的. 因此必须检测每两个相邻关键点的速度可达性并且调节不可达的使其可达.

考虑从限制速度为 v_k 的 $C(u_k)$ 处到限制速度为 \hat{v}_{k+1} 的 $C(u_{k+1})$ 处的可达性.

令 L_k 表示曲线段 $C(u), u \in [u_k, u_{k+1}]$ 的长度. 采用算法PRO_VD(v_k, L_k)计算初速度为 v_k 行进距离 L_k 的能达到的最大速度 v^+ 和最小速度 v^- . 如果 $v^- \leq \hat{v}_{k+1} \leq v^+$, 那么 $v_{k+1} = \hat{v}_{k+1}$ 可达的. 如果 $\hat{v}_{k+1} > v^+$, 那么 v_k 不能加速到 \hat{v}_{k+1} , 令 $v_{k+1} = v^+$. 如果 $v^- > \hat{v}_{k+1}$, 那么 v_k 不能减速到 $v_{k+1} = \hat{v}_{k+1}$, 必须从点 u_{k+1} 开始向后做回溯.

算法 4.5. REACH($u_i, i = 0, \dots, N$)

输入: 刀具路径 $C(u)$ 上的关键点 $u_i, i = 0, \dots, N$, 其中 $u_0 = 0, u_N = 1$. 插补周期 T , 数控加工的最大进给速度 V_m

输出: 关键点处的可达的速度 $v_k, k = 0, \dots, N$.

1. 令 $i = 0, v_0 = 0, v_N = 0$.
2. 如果 $i = N$, 那么终止算法; 否则令 L_i 表示曲线段 $C(u), u \in [u_i, u_{i+1}]$ 的长度.
3. 用算法PRO_VD(v_i, L_i) 计算初速度为 v_i 行进距离 L_i 的能达到的最大速度 v^+ 和最小速度 v^- .
4. 如果 $i + 1 = N$ 那么令 $\hat{v}_{i+1} = 0$, 否则令 $\hat{v}_{i+1} = \min\{v_{lim}(u_{i+1}), V_m\}$, 这里的 v_{lim} 定义于(4.29).
5. 如果 $v^- \leq \hat{v}_{i+1} \leq v^+$, 则 \hat{v}_{i+1} 可达, 令 $v_{i+1} = \hat{v}_{i+1}, i = i + 1$, 进入步骤2.
6. 如果 $\hat{v}_{i+1} > v^+$, 那么令 $v_{i+1} = v^+, i = i + 1$, 进入步骤2.
7. 如果 $\hat{v}_{i+1} < v^-$, 那么令 $v_{i+1} = \hat{v}_{i+1}, i = i + 1, j = i$, 并且执行下列的回溯步骤.
 - (a) 使用算法PRO_VD(v_j, L_{j-1})计算初速度为 v_j 行进距离为 L_{j-1} 这个过程的最大速度 v^* .
 - (b) 如果 $v_{j-1} \leq v^*$, 那么从速度 v_{j-1} 变化到 v_j 是可达的, 进入步骤2.
 - (c) 如果 $v_{j-1} > v^*$, 那么速度从 v_{j-1} 变化到 v_j 是不可达的. 令 $v_{j-1} = v^*, j = j - 1$. 如果 $j \geq 2$, 则进入步骤(a); 否则进入步骤2.

设 $C(u_i), i = 0, \dots, N$ 为关键点. 速度调整完毕后, 在某些关键点处速度会变小, 极大极小速度交替出现的性质不再成立.

因此可以删掉一些关键点使得速度继续保持极大极小交替呈现的性质, 即删掉满足 $(v_i - v_{i-1})(v_i - v_{i+1}) < 0$ 的点 u_i . 注意这种策略能提高插补速度.

4.2.3 给定的约束下的插补

本节在给定Jounce, 加加速度, 加速度和速度约束下给出插补算法, 尽量使弓高误差越小越好。

通常情况下, 插补过程被分为两个阶段: 1. 速度规划阶段, 此阶段输出速度函数; 2. 插补阶段, 在此阶段通过得到的速度函数计算插补点。

先考虑速度规划阶段。令 $C(u_i), i = 0, \dots, N$ 表示刀具路径的 $C(u)$ 的关键点, 那么在点 $C(u_i)$ 与 $C(u_{i+1})$ 之间, 限制速度要么是单调递增要么是单调递减。最后在每两个关键点之间的刀具路径段使用算法PRO_VV做插补。

令 $v(t), t \in [0, t_m]$ 表示算法PRO_VV(v_i, v_{i+1})得到的速度函数, d_m 表示用(4.12)式计算得到的行进距离, L_i 表示曲线段 $C(u), u \in [u_i, u_{i+1}]$ 的长度。那么 $\bar{v}(t) = v(\frac{t}{t_m}), t \in [0, \frac{L_i}{d_m}]$ 是描述速度从 v_i 增加到 v_{i+1} 过程的速度函数。因为这个过程的距离是 L_i , 所以用 $\bar{v}(t)$ 对曲线段 $C(u), u \in [u_i, u_{i+1}]$ 做插补。注意在两个相邻关键点之间, $\bar{v}(t)$ 和速度限制曲线 $v_{lim}(u)$ 都是单调的并且在端点处的值相等, 弓高误差近似的在给定的界。由7段式模式的初始状态(4.14)可知得到的速度函数是 C^2 连续的。

如果在某些关键点处达到最大速度 V_m , 那么上面的算法没有充分利用机床的加速能力。事实上, 假设 $v_{lim}(u_i) < V_m$ 且 $v_{lim}(u_{i+1}) > V_m$ 并且存在 $u^* \in (u_i, u_{i+1})$ 使得在 $[u^*, u_{i+1}]$ 内的每个点的限制速度比 V_m 大的话, 那么按照以上算法在 $[u^*, u_{i+1}]$ 内无法达到 V_m 。一般来说, 找到这么一个 u^* 计算上是非常耗时的。处理这个问题可以使用一种简单的改进算法PRO_AD而不是采用算法PRO_VV。

假设 $v_i < V_m$ 且 $v_j = V_m, j = i + 1, \dots, i + s$, 那么使用算法PRO_AD对 $C(u), u \in [u_i, u_{i+s+1}]$ 做插补。注意算法PRO_AD将找到一个近似值 u^* , 然后最大速度 V_m 将会用到。

根据以上分析, 下面给出Jounce有界下的速度规划算法。

算法 4.6. VP_CJ($C(u), u \in [0, 1]$)

输入: 刀具路径B样条曲线 $C(u), u \in [0, 1]$, 数控机床基本参数 S_m, J_m, A_m , 最大进给速度 V_m , 插补周期 T , 弓高误差上界 δ 。

输出: 刀具路径下满足约束条件的速度函数.

1. 令 $s = 1, u_1 = 0, k = 1$.
2. 使用算法 CR_PTS($C(u), u \in [0, 1]$) 计算关键点 $\hat{u}_i, i = 1, \dots, p$.
3. 针对得到的关键点, 使用算法 REACH($\hat{u}_i, i = 1, \dots, p$) 计算可达的速度点 $v_i, i = 1, \dots, p$.
4. 如果 $v_{k+1} < V_m$, 进入步骤5, 否则进入步骤6.
5. 用算法 PRO_VV 做插补.

(a) 使用算法 PRO_VV(v_k, v_{k+1}) 解出 (t_1, t_2, t_3) .

(b) 令 $v_0(t)$ 表示由 (4.5) 式和参数 (t_1, t_2, t_3) 确定的速度函数, $t_m = 4t_1 + 2t_2 + t_3$ 和 d_m 是由 (4.12) 式计算得到的加减速距离. 如果 $v_k \leq v_{k+1}$, 那么速度函数为 $v(t) = v_k + v_0(t)$; 否则速度函数为 $v(t) = v_k - v_0(t)$.

(c) 令 L 表示曲线段 $C(u), u \in [u_k, u_{k+1}]$ 的长度.

(d) 令 $\bar{t}_m = \frac{t_m L}{d_m}$, 令 $\bar{v}(t) = v(\frac{t d_m}{L}), t \in [0, \bar{t}_m]$ 表示曲线段 $C(u), u \in [u_k, u_{k+1}]$ 对应的速度函数.

(e) 令 $k = k + 1$, 进入步骤4.

6. 采用算法 PRO_AD 插补.

(a) 令 w 表示在满足 $v_{k+j} = V_m, j = 1, \dots, w$ 的最大整数.

(b) 设 L 为曲线段 $C(u), u \in [u_k, u_{k+w+1}]$ 的长度.

(c) 使用算法 PRO_AD(v_k, v_{k+w+1}, L) 解出 $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)$.

(d) 由 (4.25) 式, 用 $d_c = (4t_1 + 2t_2 + t_3)(v_k + V_m)/2 + V_m t_4 + (4t_5 + 2t_6 + t_7)(v_{k+w+1} + V_m)/2$ 表示15段加减速模式下的刀具行进距离

(e) 令 $v(t)$ 表示速度函数用 (4.24) 式和参数 $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)$ 计算得到的速度函数.

(f) 令 $t_m = 4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4 + 4t_5 + 2t_6 + t_7$, $\bar{t}_m = \frac{t_m}{L}$. 设 $\bar{v}(t) = v(\frac{L}{t})$, $t \in [0, \bar{t}_m]$ 表示曲线段 $C(u)$, $u \in [u_k, u_{k+w+1}]$ 对应的速度函数.

(g) 令 $k = k + w + 1$ 进入步骤4.

速度函数得到后, 需要计算插补点的参数值. 设待插补的曲线段是 $C(u)$, $u \in [u_1, u_2]$, 通过算法 VP_CJ 可以得到速度函数 $\bar{v}(t)$, $t \in [0, t_m]$.

令 T 为插补周期. 那么插补点处的速度为 $v_j = \max(\bar{v}(T \cdot j), 0.1)$, $j = 0, 1, \dots$. 注意我们需要取 0.1 作为最小加工速度以确保刀具能在样条曲线开始时能移动.

设当前加工位置对应的参数值为 u_0 , 相应的插补速度为 v_j . 为了找到下一个参数值 $u_0 + \Delta u$, 首先计算插补步长

$$\Delta L = v_j T \approx |C(u_0)C'(u_0 + \Delta u)|.$$

这里 T 是插补周期. 因为在一个插补周期内的插补段 ΔL 可以近似的看做圆弧. 相邻参数步长关于弧长的近似关系为: [17]

$$\Delta u = \frac{\Delta L}{\sigma(u_0)} - \frac{C'(u_0) \cdot C''(u_0) \Delta L^2}{2\sigma(u_0)^4} + O(\Delta L^2). \quad (4.31)$$

因为插补步长 ΔL 是一个非常小的量, 从(4.31) 我们可以用一阶泰勒展开近似计算 Δu

$$\Delta u = \frac{\Delta L}{\sigma(u_0)} \quad (4.32)$$

或者用二阶泰勒逼近

$$\Delta u = \frac{\Delta L}{\sigma(u_0)} - \frac{D \Delta L^2}{2\sigma(u_0)^4} \quad (4.33)$$

这里 $D = (\frac{d\sigma}{du} \frac{d^2\sigma}{du^2} + \frac{d\sigma}{du} \frac{d^2\sigma}{du^2} + \frac{d\sigma}{du} \frac{d^2\sigma}{du^2})_{u=u_0}$. 如果逼近失效, 使用牛顿迭代法或二分法找到 $u_0 + \Delta u$.

根据以上分析我们给出计算下一个插补点的算法.

算法 4.7. NEXT_U($C(u)$, u_0 , ΔL)

输入: B样条曲线 $C(u)$ $u \in [0, 1]$, 当前参数为 u_0 , 下一个步长 ΔL .

输出: 下一个插补点参数值 u_m .

1. 用(4.33)式计算 Δu 的二阶近似值。
2. 如果 $\Delta u > 0$, 令 $u_n = u_0 + \Delta u$ 并且返回 u_n 。
3. 如果 $\Delta u < 0$, 则用牛顿迭代法找到下一个参数值。

(a) 构造如下关于 u 的目标函数

$$f(u) = (x(u) - x(u_0))^2 + (y(u) - y(u_0))^2 + (z(u) - z(u_0))^2 - \Delta L^2.$$

- (b) 以一阶近似值 $u = u_0 + \frac{\Delta L}{\sigma(u_0)}$ 作为初值, 采用牛顿迭代法找到下一个插补点的参数值:

$$u^* = u - \frac{f(u)}{f'(u)}.$$

- (c) 如果 $f(u^*) > \varepsilon$ (这里 ε 是一个给定很小的量), $u^* < u_0$, 或者 $u^* \gg u_0$, 那么说明此方法失效; 否则令 $u_n = u^*$ 并且返回 u_n 值。

4. 如果牛顿迭代法失效, 则使用二分法计算方程 $f(u) = 0$ 在 $(u_0, u_0 + \frac{\Delta L}{\sigma(u_0)})$ 区间内的根 u_n , 返回 u_n 值。

大多数情况下, 公式(4.33)能提供一个很不错的插补近似值, 这时迭代法就不需要用了。

注 4.2. 在CNC控制器中, 本章提到的插补算法可以按如下步骤使用。首先, 用速度规划算法VP_CJ离线计算速度函数。然后把速度函数作为CNC控制器的输入部分做实时插补。当然CNC控制器接收的必须是一个新的G代码。很多既有工作像文献[6, 24, 25]用到过这种方法。特别地, 文献[24]在较简单情况下, 用到了这种方式实现了实时数控加工。

本算法的想法是使用预处理的方式把速度函数加到G代码中去, 然后使用新的G代码去加工。

4.2.4 一个说明性的例子

我们计算一个例子来检验一下提到的算法。如图 4.5(a)所示的曲线是一条平面二次B样条参数曲线 $(x(u), y(u))$, $u \in [0, 1]$, 这条曲线具有 C^1 的连续

度,由6段二次曲线段构成。我们用如下参数计算此曲线的速度并做插补:
 $V_m = 50\text{mm/s}$, $A_m = 1500\text{mm/s}^2$, $J_m = 2 \times 10^5\text{mm/s}^3$, $S_m = 2 \times 10^8\text{mm/s}^4$,
 $T = 1\text{ms}$, $\delta = 0.2\mu\text{m}$ 。

首先,用算法CR_PTS计算B样条曲线的关键点。关键点对应的参数值 u_i 如表1中的第一列所示。关键点的 y 和 z 坐标值分别列在表1的第二列和第三列。限制速度 $v_i = v_{lim}(u_i)$ 在表1的第四列。在 $u = 0$ 处速度设为 0.1mm/s 以确保机床开始时能启动。第三步,用算法REACH检查每个关键点处的限制速度 $v_{lim}(u_i)$ 的可达性。调节后的速度值列在表1中的第五列。

注意, $u = 0.7208, 0.8354, 0.9069, 0.9438$ 的速度是通过算法REACH中的回溯步骤得到的。

图4.5(b)是计算得到的速度函数。加速度、加加速度、Jounce分别如4.5(c), 4.5(d), 4.5(e)所示。

从图4.5(b-e)不难发现在除开 $I_1 = [0, 0.1407]$ 的其他位置处, Jounce、加加速度、加速度和速度中至少有一个量达到边界值。根据第三节证明的结果,这表明速度在这些地方是时间最优的。对于参数区间 I_1 , 根据算法VP_CJ的步骤6(d)采用7段式加速模式把速度从0加速到 $u = 0.1407$ 处的限制速度,得到最小加速距离 d_m ,但是实际的刀具路径长度 L (即区间 I_1 段的曲线长度)比 d_m 要长。因此在 I_1 的速度函数不是时间最优的。图4.5(f)给出了在规划的速度和插补周期 T 时的理论弓高误差值,可以发现任意位置处的弓高误差值均不超过误差界 δ 。

通过算法REACH得到的关键点处的速度是可以改进的。在做可达性检验之前,可以根据某些点的速度是否被其他点限制来删掉一些没用的关键点。具体来说,如果参数 u_i 处的速度为 $v(u_i)$,则从该点通过给定距离 l 速度被限制住。因此使用最强加速模式(即令加加速度模式中定义的区间段 t_3 为 $[0, \infty)$)从起始点 $(u_i, v(u_i))$,以 $j(u_i) = a(u_i) = 0$ 为初始状态,形成一个向前的速度函数 $v^+(t)$ 或 $v^+(u)$,那么检查 $v^+(u_{i+1}) < v(u_{i+1})$ 是否成立。如果 $v^+(u_{i+1}) < v(u_{i+1})$ 且 $v^+(u_{i+1}) < V_m$,则关键点 $(u_{i+1}, v(u_{i+1}))$ 可以删除因为 u_{i+1} 处的最终速度不会超过 $v(u_{i+1})$ 。同样在从起始点 $(u_i, v(u_i))$,以 $j(u_i) = a(u_i) = 0$ 为初始状态,用最强加速模式形成一个向后的速度函数,用类似的方法删除关键点。

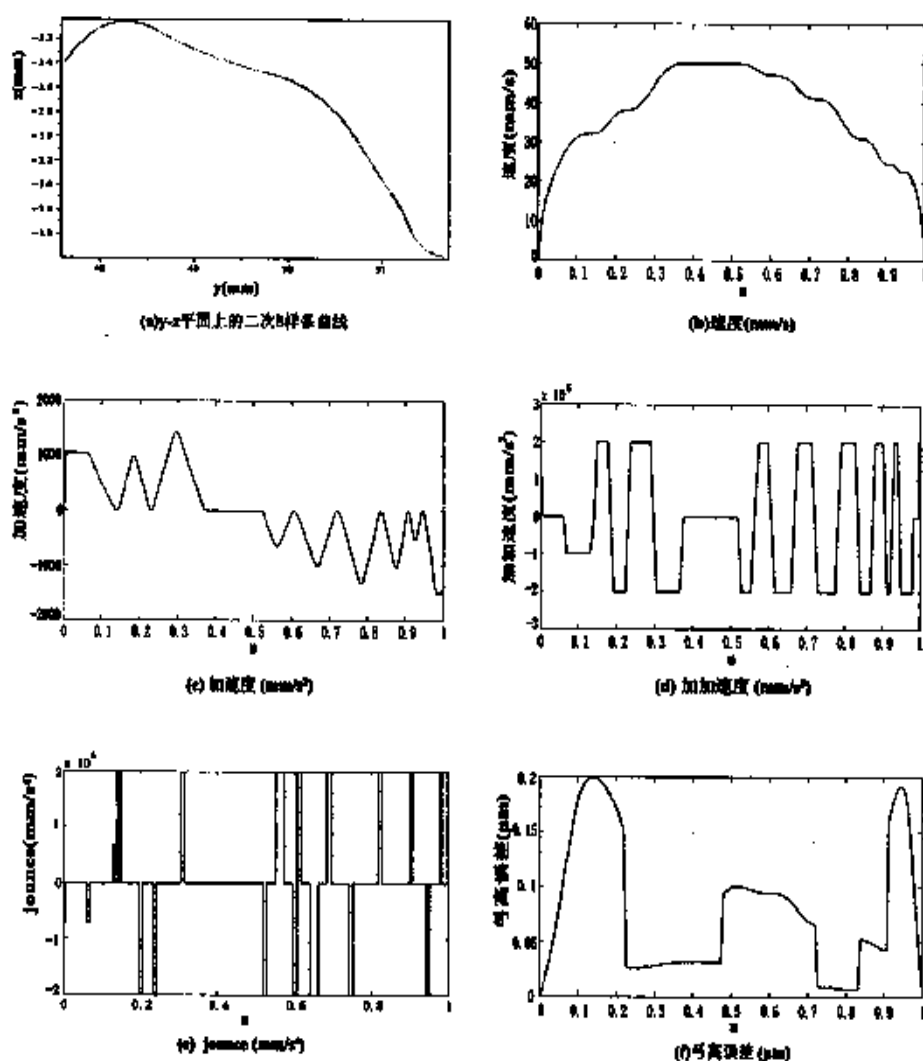


图 4.5: 二次样条曲线的速度、加速度、加加速度、Jounce和弓高误差函数。
(b)-(f)中的水平轴表示刀具路径参数 u

表1 关键点信息(速度单位: mm/s)

u_i	$y(u_i)$ (mm)	$z(u_i)$ (mm)	v_i	调节后 的 v_i
0	47.62	-2.39	49.654	0.1
0.1407	48.2112	-2.06188	32.3387	32.3387
0.2303	48.6154	-2.13848	93.2816	38.124
0.4017	49.4231	-2.40066	91.7538	50
0.4724	49.7656	-2.47271	92.0354	50
0.6071	50.3573	-2.69218	47.2607	47.2607
0.7208	50.7513	-3.04704	140.729	41.2157
0.8354	51.1049	-3.46825	48.4228	31.1962
0.9069	51.3000	-3.75227	51.5066	24.8385
0.9438	51.4077	-3.88634	23.9501	22.9357
1.0000	51.66	-3.98	31.4245	0.1

最后, 使用更新的关键点做速度规划。对上面的二次B-样条路径用这种改进算法, 表2给出了被选中的关键点和这些点处的新速度。根据改进规则, $u = 0.2303$, $u = 0.8354$ 和 $u = 0.9069$ 处的关键点被删除。

图4.6给出了改进算法和算法4.6的速度函数, 红色的曲线表示算法4.6得到的速度函数, 蓝色的曲线表示改进方法得到的速度函数, 不难发现改进算法的速度函数比原算法的速度函数要优一些。

4.3 实验结果

本节将给出实验结果。第一个实验将证实Jounce约束确实能用于减少刀具振动。第二个实验将通过两个数控加工模型证仿真显示本插补算法的可行性。

4.3.1 振动测试

本节我们对比三种加/减速模式(即加速度约束、加加速度约束、Jounce约束)证明Jounce约束的插补相比另外两种加/减速模式能减小振动。

表 2 改进算法的关键点信息(速度单位: mm/s)

u_i	$y(u_i)$ (mm)	$z(u_i)$ (mm)	u_i	选择/删除 关键点	调整后的 u_i
0	47.62	-2.39	49.654	选择	0.1
0.1407	48.2112	-2.06188	32.3387	选择	32.3387
0.2303	48.6154	-2.13848	93.2816	删除	—
0.4017	49.4231	-2.40066	91.7538	选择	50
0.4724	49.7656	-2.47271	92.0354	选择	50
0.6071	50.3573	-2.69218	47.2607	选择	47.2607
0.7208	50.7513	-3.04704	140.729	选择	50
0.8354	51.1049	-3.46825	48.4228	删除	—
0.9069	51.3000	-3.75227	51.5066	删除	—
0.9438	51.4077	-3.88634	23.9501	选择	22.9357
1.0000	51.66	-3.98	31.4245	选择	0.1

用于振动测试的设备是LMS SCADAS3, 这是一种快速信号获取与分析系统, 包括硬件和软件部分。硬件部分包括传感器、激励器、数据获取器和笔记本电脑。软件部分可以用于实时信号获取、计算、分析、显示、记录和输出。图4.7为附着于数控机床上的LMS SCADAS3 传感器。

在振动测试里, 刀具路径是一条100mm的直线段, 刀具将沿直线段来回移动。使用三种加减速模式生成速度曲线: (a)加速度约束下的线性加减速模式, (b)加加速度约束下的S形加减速模式, (c)本章提到的Jounce约束下的加减速模式。表3给出了最大速度 V_m 、最大加速度 A_m 、最大加加速度 J_m 、最大Jounce值 S_m 和加工时间 t 。在图4.8的右方为三种加减速模式的速度函数。

LMS SCADAS3的采样周期是1秒, 采样频率为4096Hz。因为加工时间大约是2秒左右, 我们仅记录了加工直线段前半段的信号。三种测试的振动频谱图如图4.8左方所示, 这里的纵轴表示振动强度, 单位是g/Hz, g 是重力加速度, 横轴单位是Hz。频谱图给出了在不同频率下的振动强度分布。例如, 从图4.8(a)可知最大的振动强度0.016g/Hz 在刀具振动频率980Hz时达到。

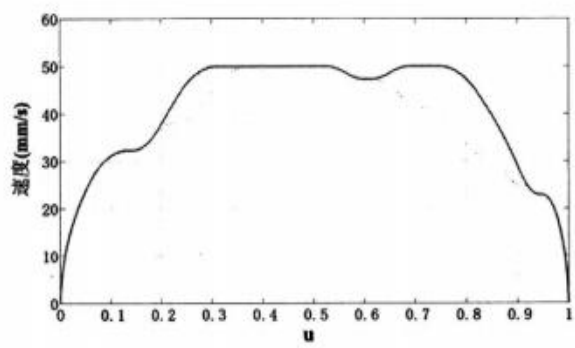


图 4.6: 红色曲线: 算法4.6得到的速度曲线。蓝色曲线:改进算法得到的速度曲线

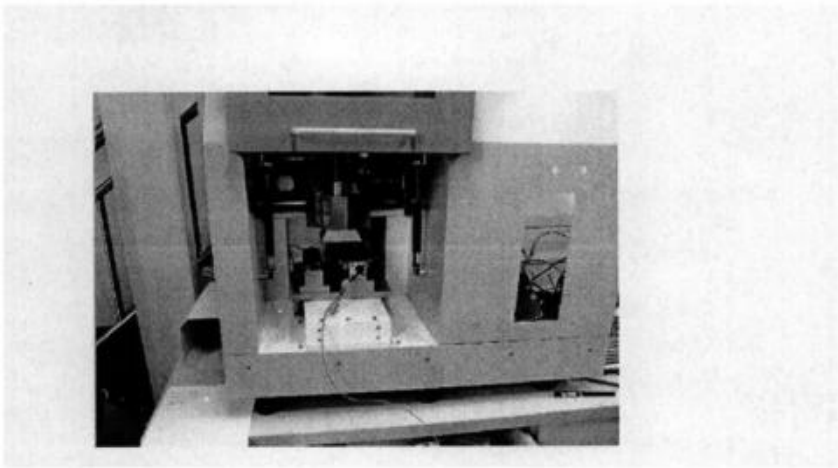


图 4.7: 数控机床与附着于机床上的传感器

表3 三种加减速模式测试(a),(b),(c)的参数与插补时间

测试模式	$S_m(mm/s^4)$	$J_m(mm/s^3)$	$A_m(mm/s^2)$	$V_m(mm/s)$	$d(mm)$	$t(s)$
(a)	—	—	1000	50	100	2.051
(b)	—	20000	1000	50	100	2.101
(c)	200000	20000	1000	50	100	2.201



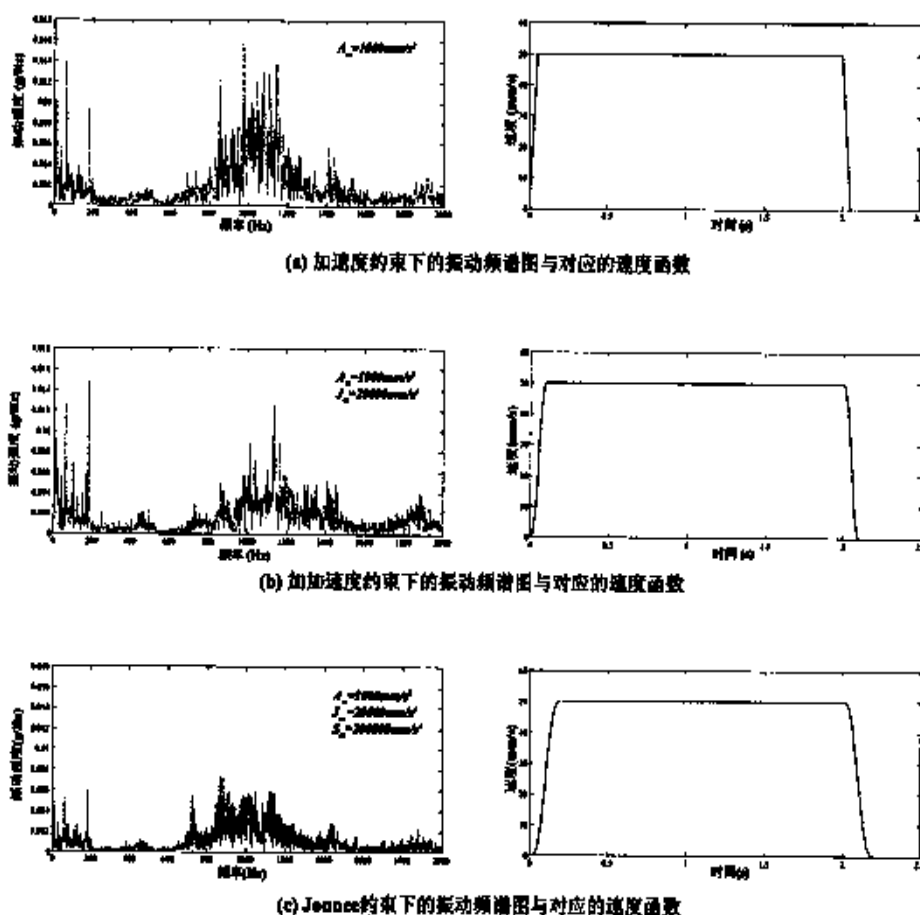


图 4.8: 振动频谱图与对应的速度函数。a. 加速度约束下的振动频谱图与对应的速度函数, b. 加加速度约束下的振动频谱图与对应的速度函数, c. Jounce 约束下的振动频谱图与对应的速度函数。

从图4.8可以看出,对于加速度约束下的加减速模式,最大振动强度为0.016g/Hz,在频率区间[0,200]和[820,1450]内,机床振动比较强(> 0.004g/Hz)。

对于加加速度约束下的加减速模式,最大振动强度为0.0145g/Hz,在频率区间[0,180]和[850,1430]内,机床振动比较强(> 0.004g/Hz)。很清楚加加速度约束下机床振动明显比加速度约束下要小,而Jounce约束下机床振动明显比加加速度约束下要小很多。

从表3可知,加速度、加加速度、Jounce约束下的加工时间分别为2.051秒、2.101秒、2.201秒。与加速度和加加速度约束相比,Jounce约束下算法加工时间分别只多了7.3%和4.8%。

综上,与加速度和加加速度约束模式相比,使用Jounce约束模式,以牺牲不多的加工时间为代价,我们可以明显的减少机床的振动。

我们知道加工质量受很多因素影响,机床的振动是其中一个重要因素。我们选择测试振动代替直接加工有以下原因。通过运行刀具走直线,采用的加减速模式对振动的影响会更突出,从而我们可以更清楚的看出三种加速模式的区别。

4.3.2 两个数控加工模型的仿真结果

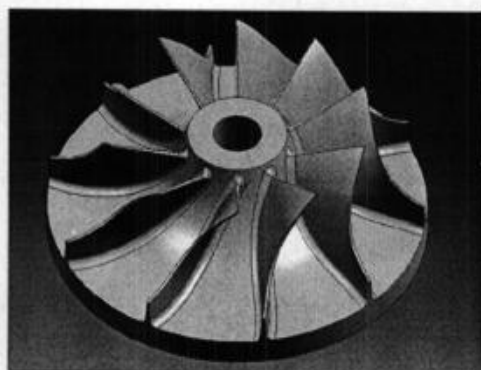
本节将给出两个数控加工模型的仿真结果以显示插补算法的可行性。所有的计算都是在配置为操作系统Windows XP, CPU主频2.13GHz, 内存1.98GB的计算机上执行,使用的代码为C语言。

第一个模型是“花瓶”,如图4.9(a)所示。花瓶是一个由超过116000行G01代码构成的数控模型,总长度为46.67m。他的B样条表达式由超过42000个二次曲线段[24]构成。G01代码和该模型的样条表达式可以在网站<http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/cnc/vase.html>中找到。花瓶模型的刀具路径抖动很厉害,使得速度优化非常困难。图4.5中的样条曲线即来自这个模型。

第二个模型是叶轮中的一片叶子,如图4.9(b)所示,这是一个由394个具有 C^2 连续度的三次B样条曲线组成的模型,叶片的整个的刀具路径长度



(a) “花瓶”模型



(b) “叶轮”模型

图 4.9: 两个数控加工模型: (a) “花瓶”模型, (b) “叶轮”模型

为 $3.167m$ 。它的G01代码和样条表达式可以在<http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/cnc/blade.html>中找到。注意到这是一个5轴模型: $(x(u), y(u), z(u), A(u), C(u))$, $u \in [0, 1]$ 。为简单起见, 刀具路径 (x, y, z) 的速度用本章所提方法规划, 然后用得到的插补点参数值 u_i 计算转动轴插补点位置 $(A(u_i), C(u_i))$ 。

在以上两个实验中, 用到以下参数: $V_m = 200mm/s$, $T = 1ms$, $\delta = 0.2\mu m$ 。 S_m , J_m 和 A_m 取不同的值作比较, 如表4所示。

注意, 在我们的方法当中, 在两个样条曲线的连接点处速度会降到0, 这可以用文献[7]中的方法得到进一步改进。

表4和表5给出了在不同加速度、加加速度、Jounce约束下, “花瓶”模型和“叶片”模型加工时间。

表6和表7分别给出了获得“花瓶”模型和“叶片”模型的速度函数与插补点的计算时间。在表6和表7中, 列名“VP”和“INT”分别表示计算速度函数和插补点所需要的时间。

从表6和表7可以看出计算时间(包括速度函数计算时间和插补点计算时

表4 不同 A_m 、 $J_m(\text{mm/s}^3)$ 、 $S_m(\text{mm/s}^4)$ 下“花瓶”模型的加工时间(分钟)

A_m (mm/s^3)	$J_m = 5 \times 10^5$		$J_m = 2 \times 10^5$	
	$S_m = 2 \times 10^8$	$S_m = 1 \times 10^8$	$S_m = 2 \times 10^8$	$S_m = 1 \times 10^8$
1000	25.1167	26.3298	26.4793	27.2322
2000	22.3648	23.5293	24.0420	24.8345
3000	21.4223	23.1568	23.4963	24.2998
6000	20.7693	22.5608	23.2368	24.0440

表5 不同 A_m 、 $J_m(\text{mm/s}^3)$ 、 $S_m(\text{mm/s}^4)$ 下“叶片”模型的加工时间(分钟)

A_m (mm/s^3)	$J_m = 5 \times 10^5$		$J_m = 2 \times 10^5$	
	$S_m = 2 \times 10^8$	$S_m = 1 \times 10^8$	$S_m = 2 \times 10^8$	$S_m = 1 \times 10^8$
1000	0.5757	0.5816	0.5830	0.5856
2000	0.4583	0.4647	0.4704	0.4759
3000	0.3982	0.4153	0.4259	0.4297
6000	0.3549	0.3650	0.3997	0.4037

间)比加工时间要少。事实上,每个样条的计算耗时都少于插补时间。在实际加工当中,我们只需要提供少许预处理第一段样条的时间就可以开始加工了。

4.4 小结

本章研究了Jounce、加加速度、加速度和速度综合约束下的加/减速模式和它的性质。特别地,证明了在给定约束下速度变化过程中本章提到的模式是时间最优的。

基于Jounce约束下的加/减速模型给出了参数刀具路径的插补算法。算法思想是计算刀具路径上关键点处(曲率半径达到极值的位置)的最大速度,然后使用Jounce约束下的加减速模式把每两个相邻关键点的速度连接起来。最后的速度函数具有 C^2 的连续度。我们也给出了振动测试证实了与加加速度约束和加加速度约束相比,Jounce约束下的运动模式能更有效的减小机床的振动。

在大多数关于插补的既有工作中,摩擦力和切削力(1.1)被假定和速度是独立的。假定摩擦力和速度存在某种关系的前提下规划速度是一个有趣的问

表6 不同 A_m 、 $J_m(mm/s^3)$ 、 $S_m(mm/s^4)$ 下计算“花瓶”模型的速度函数与插补点所需时间(秒)

A_m (mm/s^2)	$J_m = 5 \times 10^5$				$J_m = 2 \times 10^5$			
	$S_m = 2 \times 10^8$		$S_m = 1 \times 10^8$		$S_m = 2 \times 10^8$		$S_m = 1 \times 10^8$	
	VP	INT	VP	INT	VP	INT	VP	INT
1000	117.06	205.42	119.03	207.40	120.59	210.21	120.37	211.36
2000	131.98	207.93	135.73	208.08	136.08	209.04	141.16	217.21
3000	139.59	204.47	143.06	209.28	142.20	210.98	143.45	210.13
6000	143.34	204.05	147.91	208.89	142.57	206.69	147.32	211.80

表7 不同 A_m 、 $J_m(mm/s^3)$ 、 $S_m(mm/s^4)$ 下计算“叶片”模型的速度函数与插补点所需时间(秒)

A_m (mm/s^2)	$J_m = 5 \times 10^5$				$J_m = 2 \times 10^5$			
	$S_m = 2 \times 10^8$		$S_m = 1 \times 10^8$		$S_m = 2 \times 10^8$		$S_m = 1 \times 10^8$	
	VP	INT	VP	INT	VP	INT	VP	INT
1000	0.594	1.844	0.609	1.813	0.690	1.716	0.638	1.800
2000	0.702	1.735	0.595	1.827	0.598	1.855	0.530	1.907
3000	0.658	1.779	0.671	1.767	0.629	1.855	0.592	1.876
6000	0.577	1.798	0.595	1.795	0.549	1.888	0.591	1.877

题。另外一个问题是在弓高误差和Jounce约束下, 对分轴做速度规划, 在文献[15, 19, 25]中已经提出了加加速度、加速度约束下分轴规划速度的方法。

鸣谢 在此感谢清华大学的叶佩青教授研究组提供了本章4.3节里用于振动测试的设备, 并协助进行了实验。

第五章 总结和展望

5.1 本文的总结

提出了弓高误差与加速度约束下参数曲线时间最优插补算法, 仿真和上机实验说明了算法的可行性和有效性。

提出了五轴参数路径加速度和弓高误差约束下时间最优算法, 给定五轴参数路径下, 加速度和弓高误差限制, 通过区间离散化, 建立了线性模型, 把时间最优问题转化为一个线性规划问题, 并且证明该线性规划问题的解具有唯一性, 保证了该离散问题的解点点速度最大。

提出了五轴参数路径加加速度和弓高误差约束下近似时间最优插补算法, 把非线性的加加速度约束问题近似为线性问题, 采用使速度和作为优化目标求解, 并证明该问题的解满足加加速度限制。

提出了Jounce约束下参数路径插补算法, 在超精密加工中为了减少机床振动, 我们对给定参数路径在Jounce有界下做出速度规划。

5.2 问题的展望

目前, 数控技术正朝着高速化、高精化、系统稳定化、智能化、开放式、网络化的方向发展。加工效率受机床性能参数的限制, 如进给速度、加速度、加加速度, 超精密加工时还需要考虑Jounce的限制。

数控加工中涉及精度的因素众多, 例如机床振动、进给速度等, 对于加工我们今后将对数控的技术问题进行研究, 包括以下五部分:

1. 五轴数控加工刀具路径规划。

刀具路径规划是数控编程的核心技术之一, 规划合理的刀具路径对提高精度与加工效率至关重要。五轴路径规划的主要优势在于[48]:

(1) 改变刀轴方向可以避免零件与刀具的干涉;

(2) 合理的调整刀轴方向可以使刀具几何和工件曲面相匹配, 增加切削带宽;

(3) 控制刀具方向可以改善加工条件, 如在曲率大的地方只能用半径小的刀具, 选择合理的刀轴方向, 可以缩短刀具悬伸量, 还可以控制刀具参与的切削区域, 降低切削力与刀具磨损, 提高加工质量。

在复杂曲面五轴高效加工的刀具路径规划中, 不仅要考虑满足刀具和工件曲面的几何约束外, 一些物理因素也不得不考虑。规划刀具路径时, 需要在保证无干涉前提下, 通过调整刀轴方向来扩大刀具有效切削面积、改善工艺条件。

国内外对五轴刀具路径规划进行了许多的理论研究, 见文献[50]。目前已有通用的CAM知名软件(如UG 和Catia)。国内也开发了如开目、5BDM和DynaCut等软件, 但在理论研究和应用方面尚处于起步阶段。当前的商业软件在刀具路径规划和仿真方面提供了丰富的策略, 但在智能性、工艺性和计算效率等方面还不完善。

在我们今后工作中将把路径规划和高速插补联系起来综合考虑, 保证数控加工的效率和质量。

2. 数控加工避免干涉的算法。

数控加工中的曲面千奇百怪, 某些自由曲面因其形状复杂, 受刀具自身限制, 有些地方会发生严重的刀具干涉现象。生成数控加工无碰撞、无干涉的刀具路径是CAM主要研究问题之一。这是因为刀具点数据量庞大, 刀具路径复杂且C空间的求解非常困难。如果直接求解, 以目前机器的计算能力极难解决问题。通常的做法是做自适应的局部调节, “走一步看一步”遇到无解的情况再重新调节。这种方法的不足之处是时间复杂度大, 很可能前面经过大量计算到最后出现无解而功败垂成的情况。避免刀具干涉与机器人避障一起也是当前的数控研究的热点问题, 譬如文献[48, 49]着力于此。

由于各种刀具的形状不同, 其发生干涉的部位、确定干涉的判据或准则不尽相同, 为此我们今后将研究针对不同刀具, 譬如球刀、环形刀、平底刀的全局高效的干涉检查算法。

3. 考虑刀具切削力影响下的高速插补算法。

刀具切进工件,使被加工材料发生变形并成为切屑所需的力,称为切削力。切削力的构成由三部分组成:克服被加工材料对弹性变形的抗力、克服被加工材料对塑性变形的抗力、克服切屑对前刀面的摩擦力和刀具后刀面对过渡表面与已加工表面之间的摩擦力。

本文的第二章里研究机床动力学部分时提到了切削力 F_c 。由于第二章主要研究加速模式,为简便起见切削力我们认为是常数,但刀具在加工中所受阻力并不是一个恒力,往往跟材料、进给速度、切削深度和切削宽度等因素有关。

在今后的工作里我们将把切削力作为一个变量而非常量进行考虑,讨论在给定的材料,切削深度宽度下如何实现高速加工的算法。

4. 数控机床误差补偿技术。

误差补偿是数控系统设计的重要环节。通过误差补偿措施,可以提高数控机床精度和改善机床性能的。国外的大学和企业在这方面的研究起步较早,而国内数控机床的误差补偿技术的大部分研究还停留在实验室范围内。数控机床的误差主要分为静态误差和动态误差,静态误差主要由机床几何误差、热/负载变形误差等因素组成,该部分误差成因复杂,比较有效的办法是采用仪器实时测量再做调节,譬如刀具加工受热而磨损导致误差,这时要根据实时测量刀具半径,从而调整刀具路径,提高加工精度。

动态误差主要由伺服控制系统的随动误差、机床振动误差等因素组成,譬如常见的刀具位置误差等。

在今后工作中,我们将把机床误差补偿和插补综合考虑,设计一套减少机床误差而又有效率、保证精度的插补算法。

参考文献

- [1] Birkhoff G, Rota G. *Ordinary differential equations*(1969).
- [2] Bobrow J-E, Dubowsky S, Gibson J-S Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths. *Int. J. Robot. Res.*, 4(3)(1985)3-17
- [3] Erkorkmaz K, Altintas Y. High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation. *Int. J. of Mach. Tools and Manu.* 41(2001)1323-1345
- [4] Farouki RT, Tsai YF. Exact Taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolators. *Computer-Aided Design*, 33(2)(2001) 155-165.
- [5] Gai R, Lin H, Zheng L, Huang Y. Research and implementation of algorithm in high speed processing (in Chinese). *Mini-Micro Systems* 30(6)(2009)
- [6] Lai J-Y, Lin K-Y, Tseng S-J, Ueng W-D. On the development of a parametric interpolator with confined chord error, feedrate, acceleration and jerk. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 37(2008)104 - 121
- [7] Lee A-C, Lin M-T, Pana Y-R, Lin W-Y. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools. *Computer-Aided Design* 43(2011)612 - 628
- [8] Li Y-Y, Feng J-C, Wang Y-h, Yang J-G. Variable-period feed interpolation algorithm for high-speed five-axis machining. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 40(2009) 769-775.
- [9] Suh S.H., Kang S.K., Chung D.H., Stroud I. *Theory and Design of CNC Systems*, Springer, London, 2008.

- [10] Lv Q, Zhang H, Yang K, Ye P. Study on methods for improving the transfer speed of orbit segments in NC system (in Chinese). *Manufacturing Technology and Machine Tool* 3(7)(2008)79-83
- [11] Macfarlane S, Croft E-A. Jerk-bounded manipulator trajectory planning: design for real-time applications. *IEEE Trans. on Robot. and Automa.* 19(2003)42-52
- [12] Nam S-H, Yang N-Y. A study on a generalized parametric interpolator with real-time jerk-limited acceleration. *Computer-Aided Design* 36(2004)27-36
- [13] Park J, Nam S-H, Yang M-Y. Development of a real-time trajectory generator for NURBS interpolation based on the two-stage interpolation method. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 26(2005)359-365
- [14] Schellekens P, Rosiellea N, Vermeulena H, Vermeulena M, Wetzelsa S, Prila W. Design for precision: current status and trends. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 47(2)(2008)557-586
- [15] Timar S-D, Farouki R-T. Time-optimal traversal of curved paths by Cartesian CNC machines under both constant and speed-dependent axis acceleration bounds. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 23(5)(2007)563-579.
- [16] Wang J-B, Yau H-T. Real-time NURBS interpolator: application to short linear segments. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 41(2008)1169-1185.
- [17] Xu Z-M, Chen J-C, Feng Z-J. Performance evaluation of a real-time interpolation algorithm for NURBS curves. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 20(2002) 270-276.
- [18] Yong T, Narayanaswami R. A parametric interpolator with confined chord errors, acceleration and deceleration for NC machining. *Computer-Aided Design* 35(2003)1249-1259.

- [19] Yuan C-M, Zhang K, Fan W, Gao X-S. Time-optimal interpolation for CNC machining along curved tool paths with confined chord error. *MM Research Preprints* 30(2011)57-89.
- [20] Zhang L-X, Sun R-Y, Gao X-S, Li H-B. High speed interpolation for micro-line trajectory and adaptive real-time look-ahead in CNC machining. *Science China, Series F* 54(6)(2011):1481-1495.
- [21] Bobrow J.E., Dubowsky S., Gibson J.S., Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths. *Int. J. Robot. Res.*, 4(3)(1985)3-17
- [22] Shiller Z., On singular time-optimal control along specified paths. *IEEE Trans. Robot. Autom.* 10(1994)561-566.
- [23] Farouki R.T., Tsai Y.F., Exact Taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolators. *Computer-Aided Design* 33(2)(2001)155-165.
- [24] Zhang M., Yan W., Yuan C.M., Wang D.K., Gao X.S., Curve fitting and optimal interpolation on CNC machines based on quadratic B-splines. *Science China, Series E* 54(7)(2011)1407-1418.
- [25] Zhang K., Gao X.S., Li H.B., Yuan C.M., A greedy algorithm for feed-rate planning of CNC machines along curved tool paths with confined jerk for each axis. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 28(2012) 472-483.
- [26] Bedi D., Ali I., Quan N., Advanced techniques for CNC machines, *Journal of Engineering for Industry* 115(1993)329-336.
- [27] Yang D.C.H., Kong T., Parametric interpolator versus linear interpolator for precision CNC machining. *Computer-Aided Design* 26(3)(1994)225-234.

- [28] Emami M.M., Arazoo B., A look-ahead command generator with control over trajectory and chord error for NURBS curve with unknown arc length. *Computer-Aided Design* 4(7)(2010)625-632.
- [29] Yeh S.S., Hsu P.L., Adaptive-feedrate interpolation for parametric curves with a confined chord error. *Computer-Aided Design* 34(2002)229-237.
- [30] Zhang K., Yuan C.M., Gao X.S., Efficient Algorithm for Feedrate Planning and Smoothing with Confined Chord Error and Acceleration for Each Axis. *MM-Research Preprints* 30(2011)39-56.
- [31] Tikhon M., Ko T.J., Lee S.H., Kim H.S., NURBS interpolator for constant material removal rate in open NC machine tools. *Int. J. of Mach. Tools and Manu.* 44(2004)237-245
- [32] Yong T., Narayanaswami R., A parametric interpolator with confined chord errors, acceleration and deceleration for NC machining. *Computer-Aided Design* 35(2003)1249-1259.
- [33] Fan W., Gao X.S., Yan W., Yuan C.M., Interpolation of Parametric CNC Machine Tool Path Under Confined Jounce. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* (2011)DOI:10.1007/s00170-011-3842-0
- [34] Lee A.C., Lin M.T., Pana Y.R., Lin W.Y., The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools. *Computer-Aided Design* 43(2011)612-628.
- [35] Tsai M.S., Nien H.W., Yau H.T., Development of an integrated look-ahead dynamics-based NURBS interpolator for high precision machinery. *Computer-Aided Design* 40(2008) 554-566.
- [36] Gasparetto A., Lanzutti A., Vidoni R., Zanotto V., Experimental validation and comparative analysis of optimal time-jerk algorithms for trajectory

- planning *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 28(2012)164-181.
- [37] Sencer B., Altintas Y., Croft E., Feed optimization for five-axis CNC machine tools with drive constraints. *Int. J. of Mach. Tools and Manu.* 48 (2008) 733-745.
- [38] Li S.R., Zhang Q., Gao X.S., Li H., Minimum Time Trajectory Planning for Five-Axis Machining with General Kinematic Constraints. *MM-preprints* 31(2012)1-20.
- [39] Karmarkar N., A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica* 4(4)(1984)373-395.
- [40] Smale S., On the average number of steps of the simplex method of linear programming. *Mathematical Programming* 27(3)(1983)241-262.
- [41] Chou J.J., Yang D.C.H., Command generation for three-axis CNC machining. *Journal of Engineering for Industry* 113 (1991)306-310.
- [42] Shpitalni M., Koren Y., Lo C.C., Realtime curve interpolators. *Computer-Aided Design* 26(1)(1994)832-838.
- [43] Siemens' CNC Controller Manual. Sinumerik 840d/810d/fm-nc programming, advanced. 840d pga, 5-146.
- [44] Cheng C.W., Tsai M.C., Real-time variable feed rate NURBS curve interpolator for CNC machining. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 23(2004)865-873.
- [45] Xu Z.M., Chen J.C., Feng Z.J. Performance Evaluation of a Real-Time Interpolation Algorithm for NURBS Curves. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 20(2002)270-276.

- [46] Hu Jun, Xiao Lingjian, Wang Yuhua, Wu Zuyu, An optimal feedrate model and solution algorithm for a high-speed machine of small line blocks with look-ahead *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 28(2006)930-935.
- [47] Xu Dan, Kang Rui, Liu Qiang, Research on NC Machine Tool Dynamic Characteristic Considering Processing Dynamics. International Conference about Intelligent System Design and Engineering Application (ISDEA), 2010.
- [48] 丁汉, 毕庆贞, 朱利民, 熊有伦. 五轴数控加工的刀具路径规划与动力学仿真. *中国科学* 55(25)(2010)2510-2519.
- [49] 彭芳瑜, 周云飞, 周济. 复杂曲面的无干涉刀位轨迹生成. [J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 30(2)(2002)1-4.
- [50] 杨建中. 复杂多曲面数控加工刀具轨迹生成方法研究. 华中科技大学博士论文, 2009.
- [51] 叶佩青, 赵慎良. 微小直线段的连续插补控制算法研究. *中国机械工程*, 15(2004) 1354-1356.
- [52] 张晓辉, 于东, 胡毅等. 基于滤波技术的NURBS曲线插补算法研究. *中国机械工程*, 20(2009) 1695-1699.

完成和发表文章目录

- [53] Wei Fan, Xiao-Shan Gao, Wei Yan, Chunming Yuan (2011) Interpolation of Parametric CNC Machine Tool Path Under Confined Jounce. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* DOI:10.1007/s00170-011-3842-0
- [54] Chunming Yuan, Ke Zhang, Wei Fan, Xiao-Shan Gao(2011) Time-optimal Interpolation for CNC Machining along Curved tool Paths with Confined Chord Error. *MM Research Preprints* 30:57-89.
- [55] Wei Fan, Xiao-Shan Gao, Ke Zhang(2012) Time-Optimal Interpolation for Five-axis CNC Machining along Parametric Tool Path based on Linear Programming. *MM Research Preprints* 31:21-42, *Int. J. Mach. Tool & Manu.*(under review).

致 谢

时光如箭，在中科院数学与系统科学研究院数学机械化中心已经度过五年时间。非常感谢在这期间得到各位老师的指导和帮助，同学们的关心和鼓励。

特别感谢导师吴文俊院士、王定康研究员和高小山研究员的精心指导，博士论文从选题到最后的写作都是在他们的悉心指导下完成的。他们对科研精益求精，知识广博，眼光敏锐，忘我工作，是我学习的榜样。他们对我在科研工作中的言传身教，让我不仅学会很多知识，还学会了做学问的态度。他们宽以待人的处事态度和亲切随和的性格，都深深感染熏陶着我。所有这些都将使我终生受益。谨此向王老师和高老师在博士期间为我付出的心血致以诚挚的谢意。

感谢在课题研究中提供数控加工实验条件和技术帮助的沈阳计算所的于东研究员，吴文江高级工程师，盖荣丽，黄燕，王品，韩文业，武男，张晓辉，洪海涛等。感谢提供实验设备的清华大学叶佩青教授，和负责技术帮助的方晨曦同学。

感谢机械化中心的刘卓军研究员，李子明研究员，支丽红研究员，阎振亚研究员，袁春明副研究员，冯如勇副研究员，程进三副研究员，黄雷助理研究员，张智勇博士后，闫伟博士后，周代珍老师以及丁建敏老师，在我三年学习期间给我的帮助。

在数学机械化中心三年的学习和生活中，我得到了许多同学的帮助和支持，他们是：孙瑞男博士，张梅博士，张立先博士，张强博士，姚首彬博士，张可博士，李伟博士，马玥博士，戴兆鹏博士，姜冬梅博士，黄冲博士，马晓栋博士，王继斌硕士，周洁硕士，李阔硕士，阎程硕士，刘越硕士等同学们。

感谢在我求学道路上遇到的所有的老师和同学好友们，祝愿老师们事业顺利，桃李满天下。祝同学们学业有成、前程光明。

感谢父母，他们在背后的默默支持是我前进的动力。在此，祝愿他们身体健康，心情愉快！