1 angewandte Statistik ≠ mathematische Statistik
↳ Überprüfung Hypothesen

Gesetz d. großen Zahl

Je größer der Stichprobenumfang, desto ~~[illegible]~~ kleiner der Standardfehler

Inferenzstatistik:
1. Stichprobe → GG
2. Bedingungen: Wann gilt 1. (nicht)
3. Tests, Unterschiede, Zsmhang, Konfidenzintervall

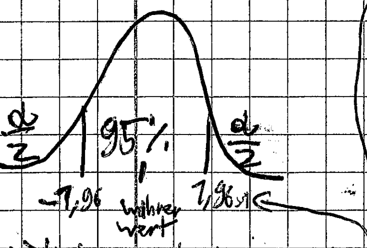
Konfidenzintervall: – Bereich, in dem der wahre Wert vermutet wird
– In dem Bereich liegt μ sehr wahrscheinlich

→ Konvention: 95%
↳ in 95% der Fälle ist $\bar{x}$ nicht mehr als 1,96 Standardfehler von μ entfernt
↳ 2,5% der Fläche liegen oberhalb/unterhalb von $z = 1,96$

Konfidenzintervall $= 1 - \alpha$

– über sehr viele Stichproben → Normalverteilung um wahren Wert

1,96 Standardfehler vom wahren Wert weg



α → Irrtumswahrscheinlichkeit, dass μ nicht im KI liegt

Obere Grenze: $\bar{x} + 1,96 \cdot \sigma_{\bar{x}}$
Untere Grenze: $\bar{x} - 1,96 \cdot \sigma_{\bar{x}}$

Bsp.: Alter der Bevölkerung: $\mu = 43,9$ Jahre, $\sigma = 15$
$\bar{x} = 43,5$, $n = 1600$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{40} = 0,375$

$43,5 \pm 1,96 \cdot 0,375 = 44,235$
$= 42,765$

Zu 95% liegt das mittlere Alter zwischen 44,235 & 42,765

Bei kleinen Stichproben: Schätzung des wahren Standardfehlers auf Basis der Standardabweichung der Stichprobe
↳ Stichprobenvarianz (s^2) unterschätzt wahre Varianz (σ^2) um $\frac{n-1}{n}$
↳ es muss mit $\frac{n}{n-1}$ multipliziert werden

$\hat{\sigma}_x = \sqrt{s^2 \cdot \frac{n}{n-1}}$

t statt z
z-Wert: – für große Stichproben
t-Verteilung: – genauere z-Normalverteilung
– kleine Stichproben

t-Verteilung hängt von $df = n-1$ ab

Freiheitsgrade → Dimensionen, die frei variieren können

t-Verteilung Konfidenzintervall
$\bar{x} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};\, n-1)} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

ab $df = 1000$ → z-Tabelle

Konfidenzintervall
t-Wert

In Realität liegt μ nicht zu 95% sondern 100% oder 0% im Konfidenzintervall

Bsp.: 2064 Befragte
– Ø Alter 42,7 Jahre
– Standardabweichung 11,2 Jahre
In welchem Bereich liegt μ?

1. → $n, \bar{x}, s$

$\hat{\sigma}_x = \sqrt{s^2 \cdot \frac{n}{n-1}} = \sqrt{11,2^2 \cdot \frac{2064}{2064-1}} = 11,2$

$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{11,2}{\sqrt{2064}} = 0,25$

2. t-Wert:
df | 0,975
z-Wert 1,96
über 1000

3. $\bar{x} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};\, n-1)} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$

$42,7 \pm 1,96 \cdot 0,25$

$= [42,21 ; 43,19]$

Zu 95% / In 95% aller Stichproben
↳ liegt arithmet. Mittel μ zwischen [42,21, 43,19]

② Statistische Tests

2 seitiger Test
1 seitiger Test

Ungerichtete Hypothese → keine Richtung → „Das Umweltbewusstsein unterscheidet sich nach Geschlecht"

gerichtete Hypothese → Richtung → „Frauen sind selbstbewusster als Männer"

Statistische Tests prüfen Hypothesen
↳ Wie wahrscheinl. ist es, dass der Zusammenhang zufällig in Stichprobe ist?
↳ Statistische Signifikanz

Statistische Signifikanz
↳ Zusammenhang kein Zufall
↳ verallgemeinerbar

Nullhypothese H_0
Alternativhypothese H_A/H_1

H_0 → Status Quo
H_1 → Forschungshypothese

alle Hypothesentests prüfen Statistische Signifikanz

~~prüfen den Mittelwert unterschieden~~

Mittelwertunterschiede bei bekannter Streuung in GG
↳ (z-test)

Mittelwertunterschiede für unabhängige/abhängige Stichproben
↳ (t-Test)

χ^2-Test auf Unabhängigkeit

Signifikanzniveau
↳ 0,05 → ~~...~~
↳ Schwellenwert unterhalb der Bereich ist H_0 abzulehnen

*** $p < 0{,}001$
** $p < 0{,}01$
* $p < 0{,}05$

~~H_0 verworfen, wenn p-Wert <~~

p-Wert < Signifikanzniveau α
⇒ H_1 gilt, H_0 wird verworfen

p-Wert > α
⇒ H_0 gilt, H_1 wird verworfen

Hypothesentest 4 Schritte:

1. Formulierung Hypothese
   Signifikanzniveau festlegen
2. Bestimmung Ablehnungsbereich für H_0
3. Bestimmung Prüfgröße
4. Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothese

③ Z-test

- „Kann eine Stichprobe mit einem gewissen Mittelwert tatsächlich aus einer bekannten GG mit bekannten Mittelwert und bekannter streng

BSP: – alte Datenerhebung: Durchschnittlich gibt Student 80€ für Bücher pro Jahr aus ($\sigma = 18€$)

neue Untersuchung: $n = 36$ → Durchschnittsausgaben 92€
→ überzufälliges Ergebnis?

1. H_0: $\mu = 80$
   H_A: $\mu \neq 80$

5% Signifikanzniveau

2. $\alpha = 0{,}05$ $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow$ Z-Wert $= \boxed{+-1{,}96}$

$\rightarrow 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \rightarrow$

	,06 ...
1,9	0,975

3. $$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{92 - 80}{3} = \frac{12}{3} = 4$$
(92€, 80€)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = 3$$

4. mit 95% Sicherheit schließen wir, dass die mittleren Bücherausgaben inzwischen von 80€ abweichen

---

Ungerichtete Hypothese – Unterschied – 2seitiger test – $\frac{\alpha}{2}$

gerichtete Hypothese – Richtung – Einseitiger test – α

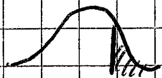
Einseitiger Test: 9. Klasse Mathearbeit: $\mu = 40$ Punkte
$\sigma = 8$ Punkte

neuer Lehrplan: $n = 100$ Schüler
$\bar{x} = 42$ Punkte → Zufall?

1. H_0: Neuer Lehrplan ~~...~~ / genauso gut oder schlechter
$\mu = 40$

H_1: Neuer Lehrplan besser
$\mu > 40$

$\alpha = 5\%$

2. Einseitig → „besser“?  $1-0{,}05=0{,}95$

…4   …5

↑   ↑

$1{,}6 \leftarrow \boxed{0{,}9495} \mid 0{,}9505$

$\Rightarrow z = 1{,}64$

3. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{42-40}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{2}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{2}{0{,}8} = 2{,}5$

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{8}{\sqrt{100}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

4. $2{,}5 > 1{,}64$

↓

„signifikant auf 5% Niveau“

↓

H_0 verwerfen

H_A annehmen

↓

neuer Lehrplan ist besser / führt zu besseren Mathekenntnissen

⇒ Irrtumswahrscheinlichkeit

→ standardnormalverteilt

2,5 in z-Werttabelle → $\alpha = 0{,}006$ → 0,6% Irrtum

Hohe Stichprobe erhöht z-Wert

④ t-Test

Mittelwertunterschiede von $\boxed{2 \text{ Gruppen}}$

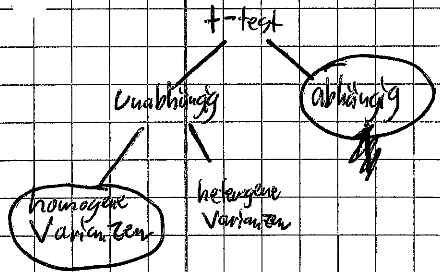
„Wie wahrscheinlich ist die eine (in Stichprobe) beobachtete Differenz zwischen den Mittelwerten 2er Gruppen für GG?"

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2$

Stichprobe GG

Berechnung t-Wert
Vergleich mit kritischem t-Wert
↳ $t >$ krit. t
↳ H_0 verwerfen

Unterscheidung 1. unabhängige Stichproben → Frauen/Männer – Ost/West
2. abhängige Stichproben → Vorher/Nachher – Ehepaare



1. Hypothese & Signifikanz

H_0: Es gibt keine Mittelwertdifferenz
H_1: Es gibt eine Mittelwertdifferenz zwischen 2 Gruppen in Population

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad \mu_1 \neq \mu_2$

Ungerichtet ⟶ $\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$ (5%)

2. Ablehnungsbereich

Freiheitsgrade t-Test $Df = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$
$= n_1 + n_2 - 2$
$= 2060$
→ t-Tabelle
→ t-krit: $\pm 1{,}96$

3. Prüfgröße berechnen

$$t_{2060} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} = 4{,}02$$

$$\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$= 1{,}99$

4. Interpretation

$t_{2060} = 4{,}02 > 1{,}96 \Rightarrow H_0$ verwerfen, H_1 akzeptieren
→ statistisch signifikanter Unterschied

5 t-Test – abhängige Stichproben

→ 2 Ergebnisse pro Person
→ Messungen korrelieren → Verzerrungen bei Prüfgröße

1. H_0 → Zufälliger Unterschied $\mu_1 = \mu_2$
H_1 → Es gibt einen Unterschied $\mu_1 \neq \mu_2$
5% ungerichtet ⇒ $\frac{\alpha}{2}$

2. $df = 5$; $0{,}975$ ⇒ $t_{krit} = 2{,}571$

3. $t = \frac{\bar{x}_d - \mu_d}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_d}} = \frac{\bar{x}_d - 0}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_d}} = \frac{\bar{x}_d}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_d}}$

$\hat{\sigma}_{\bar{x}_d} = \frac{\hat{\sigma}_d}{\sqrt{n}}$

Differenz   Mittelwert der Differenzen

$\hat{\sigma}_d = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i - \bar{x}_d)^2}{n-1}}$

$= 6{,}67$

4. $t_{emp} = 6{,}67 > t_{krit} = 2{,}571$ ⇒ H_0 verwerfen, H_1 annehmen
⇒ Differenz nicht zufällig entstanden

Voraussetzung: – Zufallsstichprobe
– (pseudo)metrisch (für nominal χ^2-Test)
– Merkmal in GG normalverteilt
– 2 Gruppen
↳ für mehr Gruppen F-Test mit Varianzanalyse

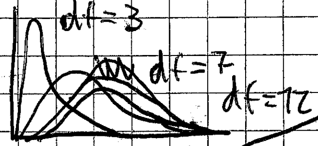
		In GG gilt	
		H_0	H_1
Entscheidung aufgrund von Stichprobe	H_0	✓	β-Fehler
	H_1	α-Fehler	✓

α-Fehler / Typ 1
↳ H_0 fälschlicherweise ablehnen

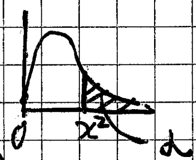
⑥ χ^2-Test

	Nominal	ordinal	Intervall
Unabh.	χ^2-test	MWU-Test Kruskall-Wallis	T-test F-test Varianzanalyse
abh.	Mc Nemar-Test	Wilcoxon-Test	T-test

χ^2-Verteilung



df abhängig von Größe der Kreuztabelle



Abweichung $\leq \alpha$ → H_1 annehmen

χ^2 Test – eine Variable – Anpassungstest
↳ Bsp.: In welcher Jahreszeit erkranken Depressive erstmalig?

χ^2 Test – zwei Variablen – Test auf Unabhängigkeit
↳ Bsp.: Können TN Methodenseminar eher Aufgabe lösen als Nicht-TN?

Anpassungstest – 1. Variable

Auftreten Depression zu Jahreszeit
H_0: Es gibt in GG keine Häufigkeitsunterschiede
sind Kandidaten zufällig ungleich verteilt?

$n = 200$

	Frühling	Sommer	Herbst	Winter
gemessen	42	38	55	65
erwartet	50	50	50	50

$\frac{n}{k} = \frac{200}{4} = 50$

k: Kategorien

$$\chi^2 = \sum_i^k \frac{(f_{bj} - f_{ej})^2}{f_{ej}}$$

k = Anzahl Kategorie
f_{bj} = beobachtete Häufigkeit
f_{ej} = Erwartete Häufigkeit

$$= \chi^2 = \frac{(42-50)^2}{50} + \frac{(38-50)^2}{50} + \dots$$

$$\chi^2 = 9{,}16$$

$\alpha = 0{,}05$

$df = k - 1 = 3$

→ Tabelle ⇒ $\chi^2_{krit} = 7{,}81$

$\chi^2 = 9{,}16 > \chi^2_{krit} = 7{,}81$ ⇒ signifikant

H_0 verwerfen

Depressionen setzen auch in GG nicht zu allen Jahreszeiten mit gleicher Häufigkeit ein.

Unabhängigkeitstest – 2 Variablen

H_0: Anteil Studierender die Aufgabe lösen ist unter TN so groß wie unter Nicht TN