Statistik I

Prof. Dr. Simone Abendschön

11. Einheit

Plan heute

Grundlagen der Inferenzstatistik

- Zentrales Grenzwerttheorem
- Standardfehler

Lernziele heute

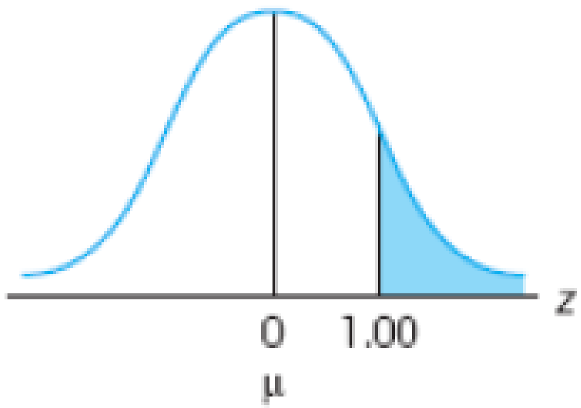
- Kennen und Verstehen des Zentralen Grenzwerttheorems
- Kennen und Bestimmen des Standardfehlers

Einführung

- Bislang haben wir die Konzepte der Wahrscheinlichkeit, z-Wert-Transformation und Normalverteilung nur für Stichproben mit der Größe $n = 1$ angewendet, d.h.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit per Zufallsauswahl bei gegebenem Mittelwert und Standardabweichung einen Fall in einem bestimmten Werteintervall auszuwählen ?

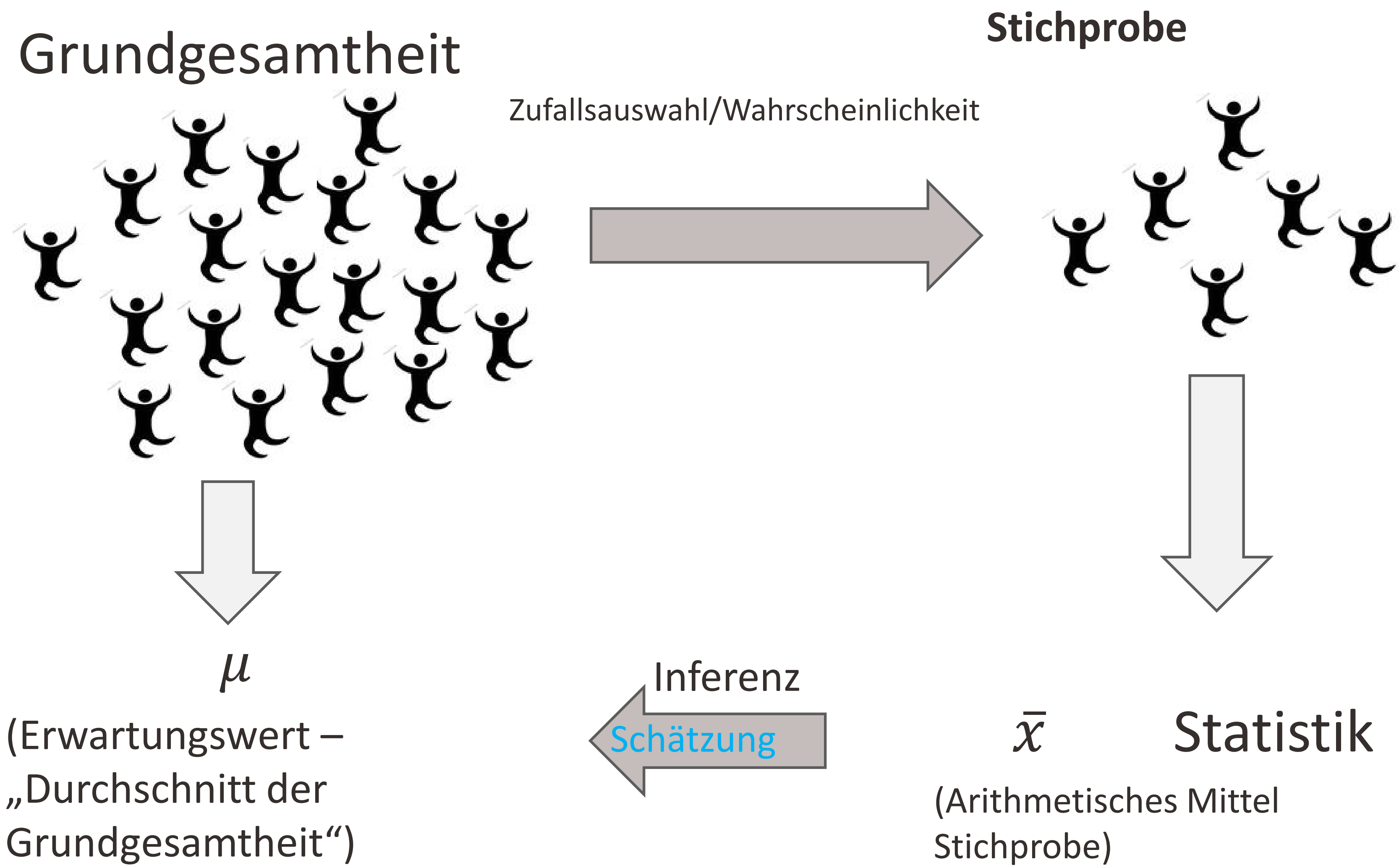
Wdh.



Welcher Flächenanteil der Normalverteilung entspricht z-Werten >1?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, für normalverteilte Werte einen z-Wert > 1.0 zu erhalten?

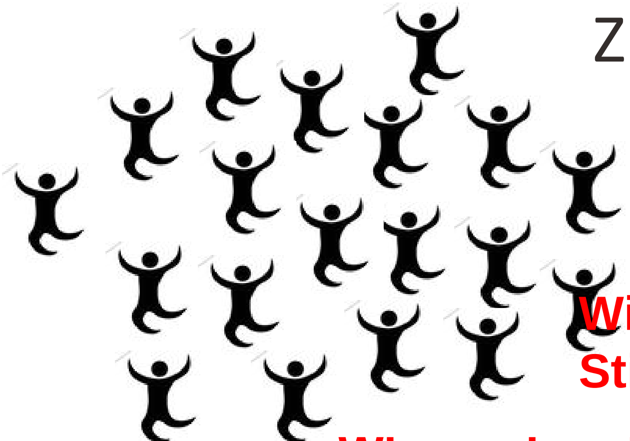
Inferenzstatistik

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN



Inferenzstatistik

Grundgesamtheit



Zufallsauswahl

Stichprobe

Wie unsicher ist die Schätzung auf Basis der Stichprobe?

Wie „wahrscheinlich“ ist das Stichprobenergebnis auch für die Grundgesamtheit gültig?

Stichprobenfehler

μ

(Erwartungswert – „Durchschnitt der Grundgesamtheit“)

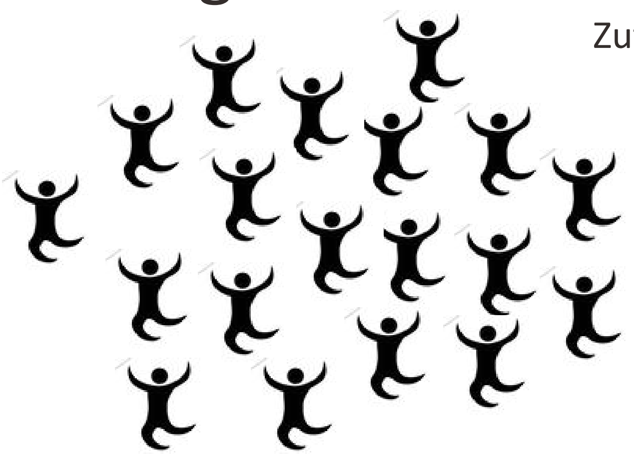
Inferenz

$\bar{x}$ Statistik

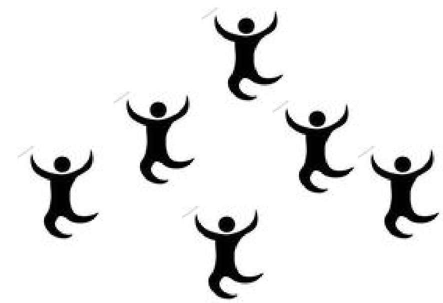
(Arithmetisches Mittel Stichprobe)

Inferenzstatistik

Grundgesamtheit



Stichprobe



Zufallsauswahl/Wahrscheinlichkeit

Grundannahmen über die Verteilung von Stichprobenkennwerten

μ

(Erwartungswert – „Durchschnitt der Grundgesamtheit“)

Inferenz

Schätzung

$\bar{x}$ Statistik

(Arithmetisches Mittel Stichprobe)

Stichproben und Grundgesamtheit

- Aber sozialwissenschaftliche Forschungspraxis: Stichproben sind typischerweise (sehr) viel größer
  - Z.B. ALLBUS: > 3000 Befragte; European Social Survey: ca. 35.000 Befragte
- Schätzungen auf Basis von Stichprobenkennwerten (z.B. Mittelwerte oder Anteilswerte)
- Diese Kennwerte können ebenfalls in z-Werte transformiert und für Wahrscheinlichkeitsaussagen genutzt werden

Stichproben und Grundgesamtheit

- Stichprobenfehler (Stichprobenschwankung/Sampling Error):
  - Empirische Ergebnisse einer Zufallsstichprobe weichen immer (mehr oder weniger) vom tatsächlichen Wert in Grundgesamtheit ab
  - → Diskrepanz zwischen Stichprobenkennwert $\bar{x}$ und Populationskennwert μ
  - Berechnung eines Standardfehlers

- Da wir den „wahren“ Wert in der GG nicht kennen, wissen wir nicht ob unser Stichprobenfehler groß oder klein ist
  - Stichprobenergebnisse variieren – wir können eine „gute“ oder „schlechte“ Stichprobe erwischen
  - Zufällige Einflüsse: Unterschiedliche Stichproben = unterschiedliche Beobachtungseinheiten
- Aber: Grundannahmen über die Verteilung von Stichprobenkennwerten!

Zentrales Grenzwerttheorem

Auch: zentraler Grenzwertsatz

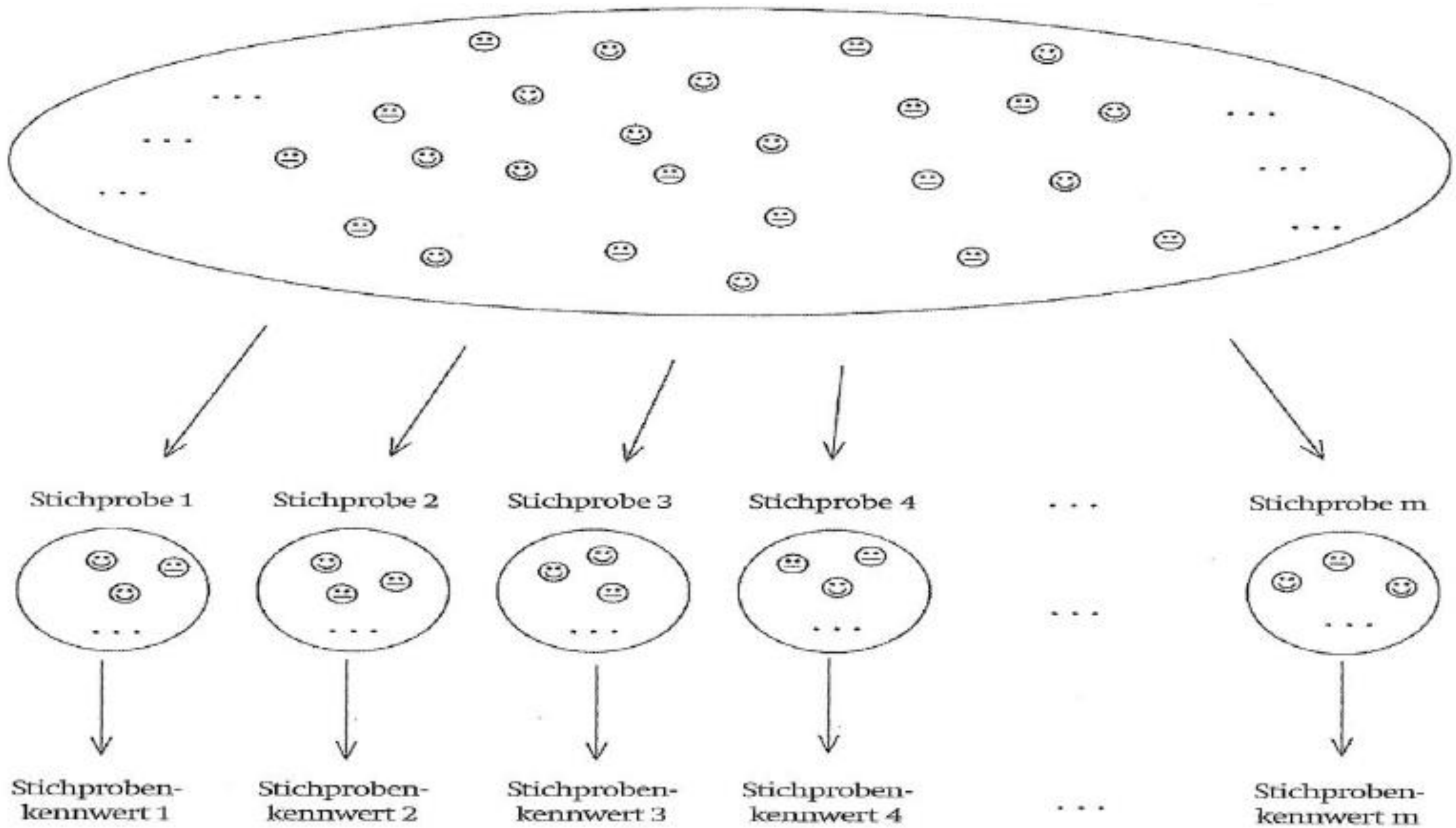
Definition:

- Eine Stichprobenkennwerteverteilung für unendlich viele Stichproben von Mittelwerten nähert sich der Normalverteilung an, falls die Stichprobe ausreichend groß ist (n>= 30) oder die Werte in der GG normalverteilt sind
- Der Erwartungswert E der Stichprobenmittelwerte entspricht dem „wahren" Mittelwert der GG
- μ: $E(\bar{x}) = \mu$

Stichprobenkennwerteverteilung

- Es werden theoretisch unendlich viele Stichproben vom jeweils gleichen Umfang *n* aus derselben Grundgesamtheit gezogen.
- Für jede einzelne Stichprobe wird der interessierende Kennwert (hier arithmetisches Mittel) berechnet
- → **Stichprobenmittelwerteverteilung** (Stichprobenkennwerteverteilung), „theoretische“ Verteilung

Simulationsbeispiel



Simulationsbeispiel

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Es werden theoretisch unendlich viele Stichproben vom jeweils gleichen Umfang *n* aus derselben Population gezogen (Simulationsbeispiel n=100.000)
- Für jede einzelne Stichprobe wird der interessierende Kennwert (hier arithmetisches Mittel, funktioniert aber auch mit Anteilswert) berechnet

Simulationsbeispiel

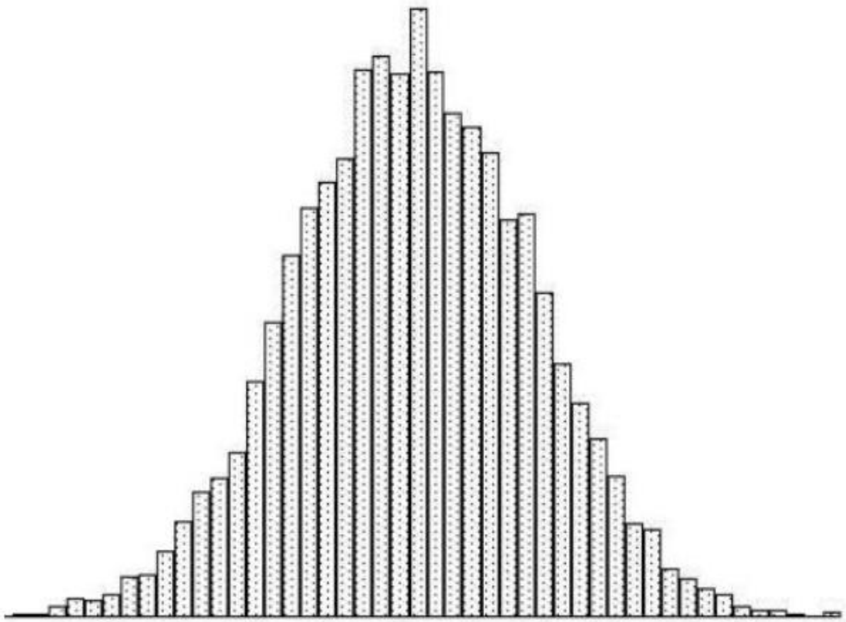
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Simulierte Daten, Modellpopulation N= 100.000,
- Unterschiedliche Verteilungsformen
- Für jede Verteilungsform: jeweils 1.000 Zufallsstichproben vom Umfang *n*= 500; Berechnung $\bar{x}$ für jede einzelne Stichprobe
- Berechnung des arithmetischen Mittels aus diesen 1000 Mittelwerten
- Wie sieht die Verteilung der Mittelwerte aus? Was passiert? (Siehe auch Abbildung 22 im Lehrbrief)

Simulationsbeispiel

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

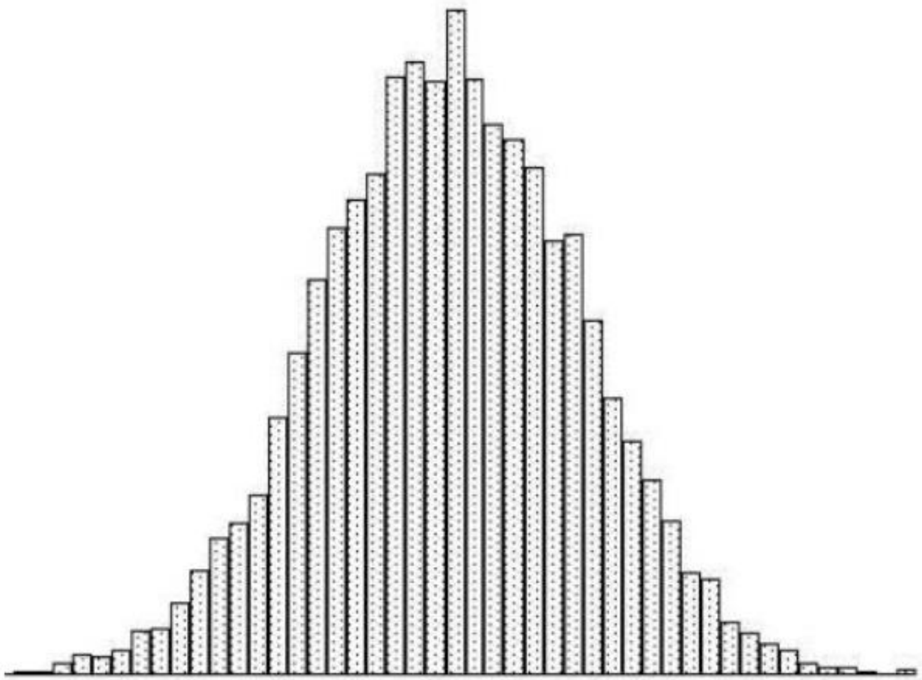
Population:	Verteilung der Stichprobenmittelwerte:



Normalverteilung

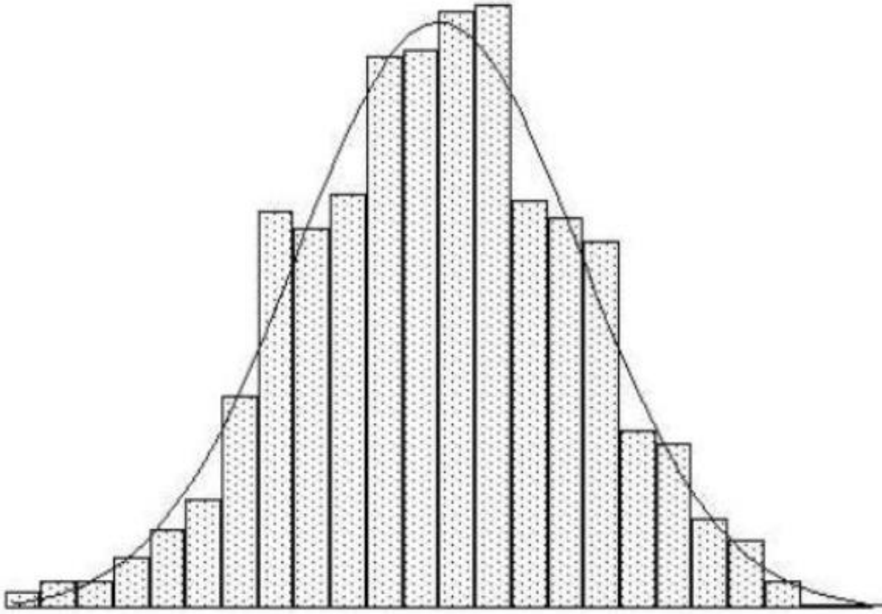
Simulationsbeispiel

Population:



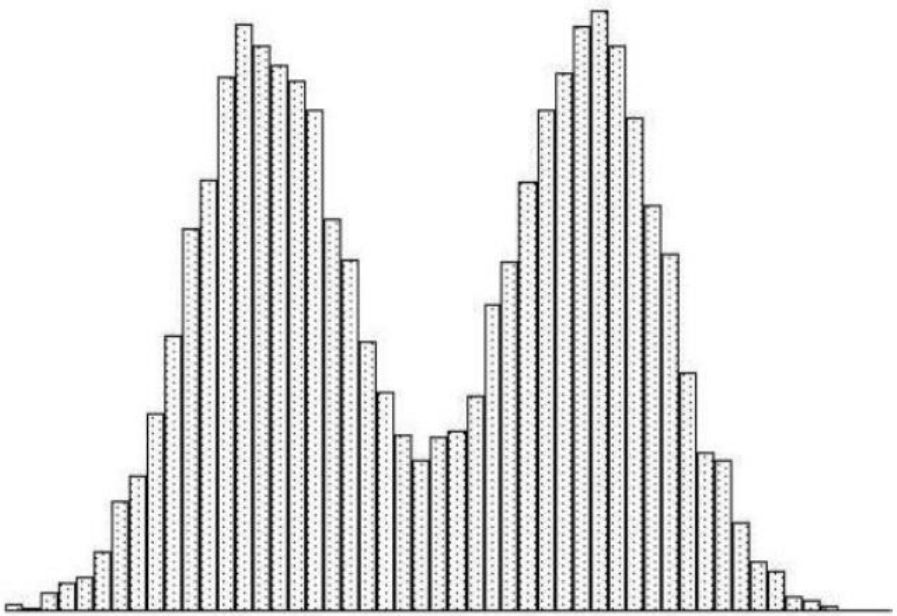
Normalverteilung

Verteilung der Stichprobenmittelwerte:



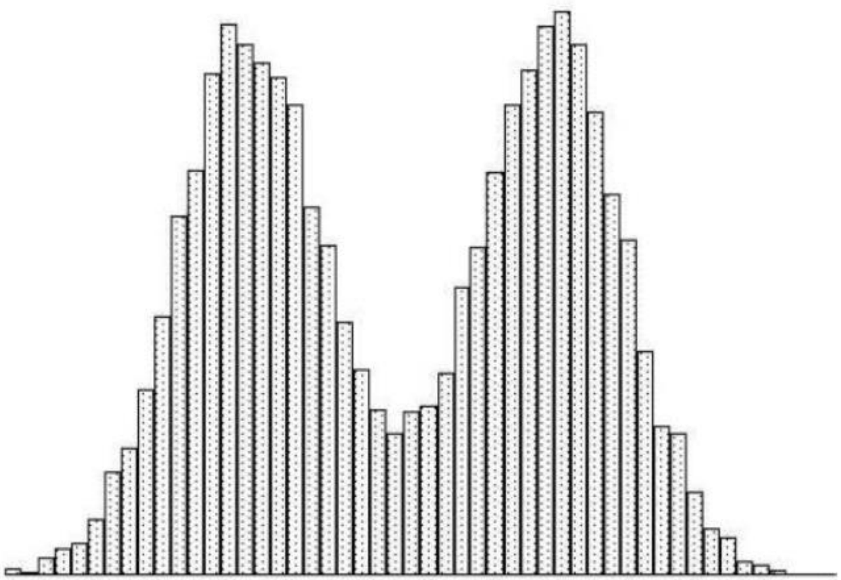
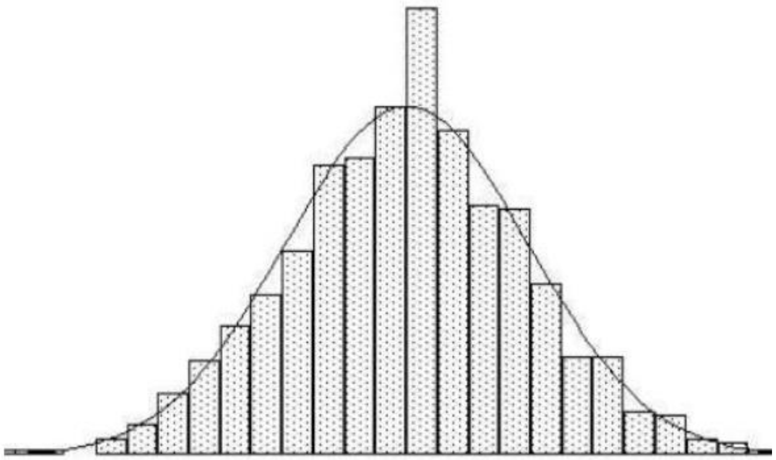
Simulationsbeispiel

Population:	Verteilung der Stichprobenmittelwerte:



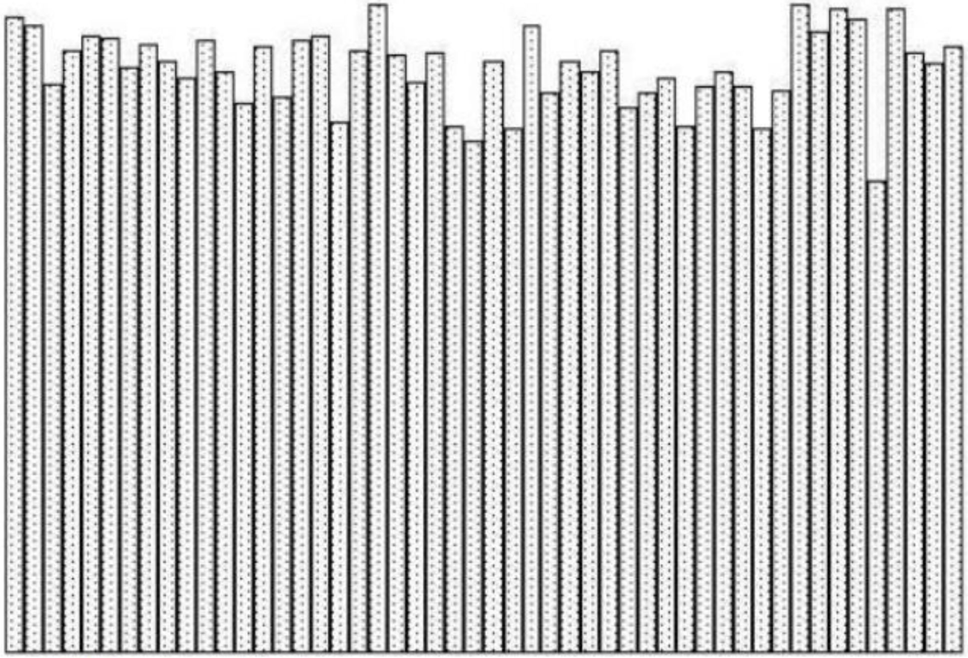
Bimodale Verteilung

Simulationsbeispiel

Population:	Verteilung der Stichprobenmittelwerte:
	
Bimodale Verteilung	

Simulationsbeispiel

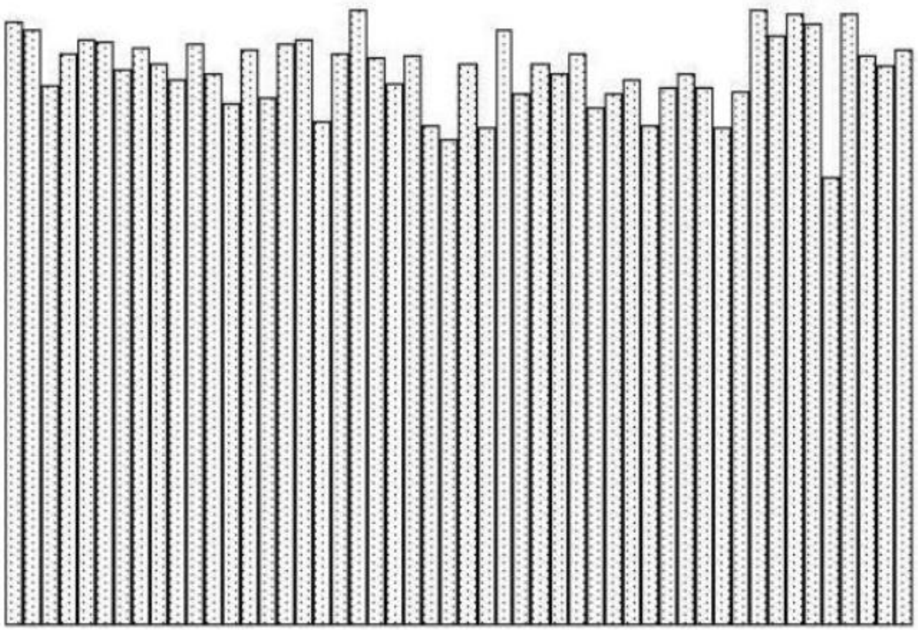
Population:	Verteilung der Stichprobenmittelwerte:



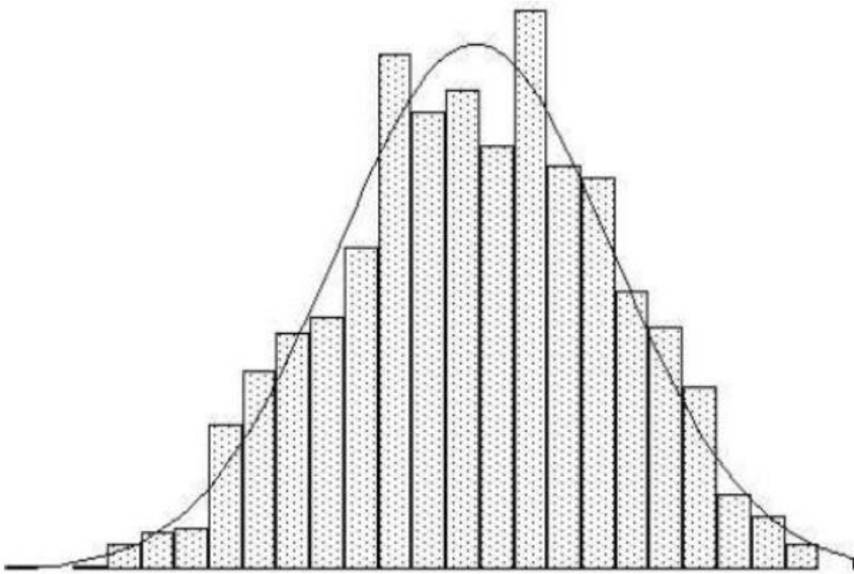
Gleichverteilung

Simulationsbeispiel

Population:	Verteilung der Stichprobenmittelwerte:



Gleichverteilung



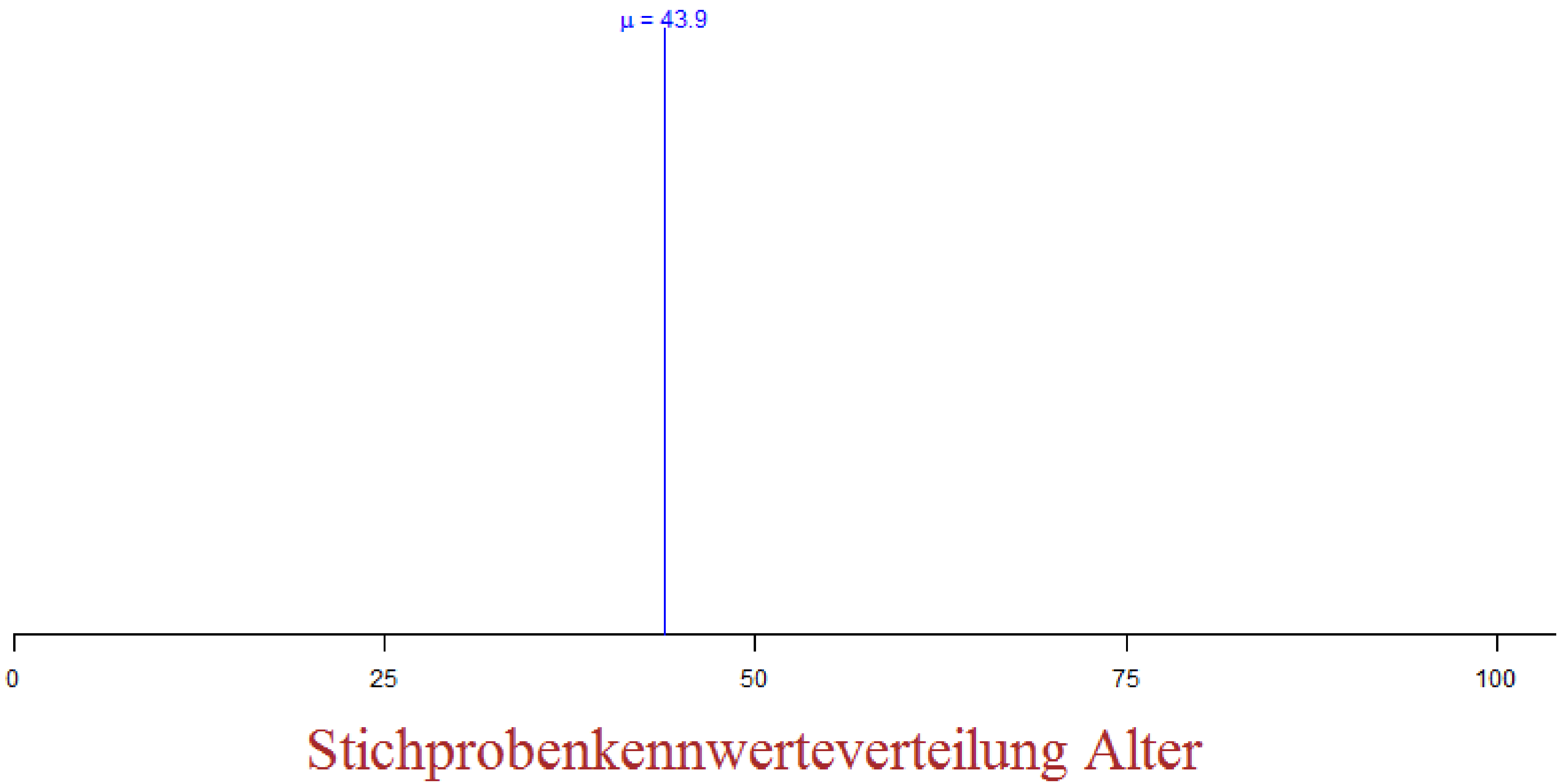
Zentrales Grenzwerttheorem

- Zentrale Tendenz der Verteilung von Stichprobenkennwerten (Mittelwerte, aber auch Anteilswerte)
- Unabhängig von der Verteilung eines interessierenden Merkmals in der Population wird die Verteilung der Stichprobenmittelwerte (und Anteilswerte) normalverteilt um μ sein
  - falls die Stichprobe ausreichend groß ist (n>= 30)
  - oder die Werte in der Population normalverteilt sind

Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

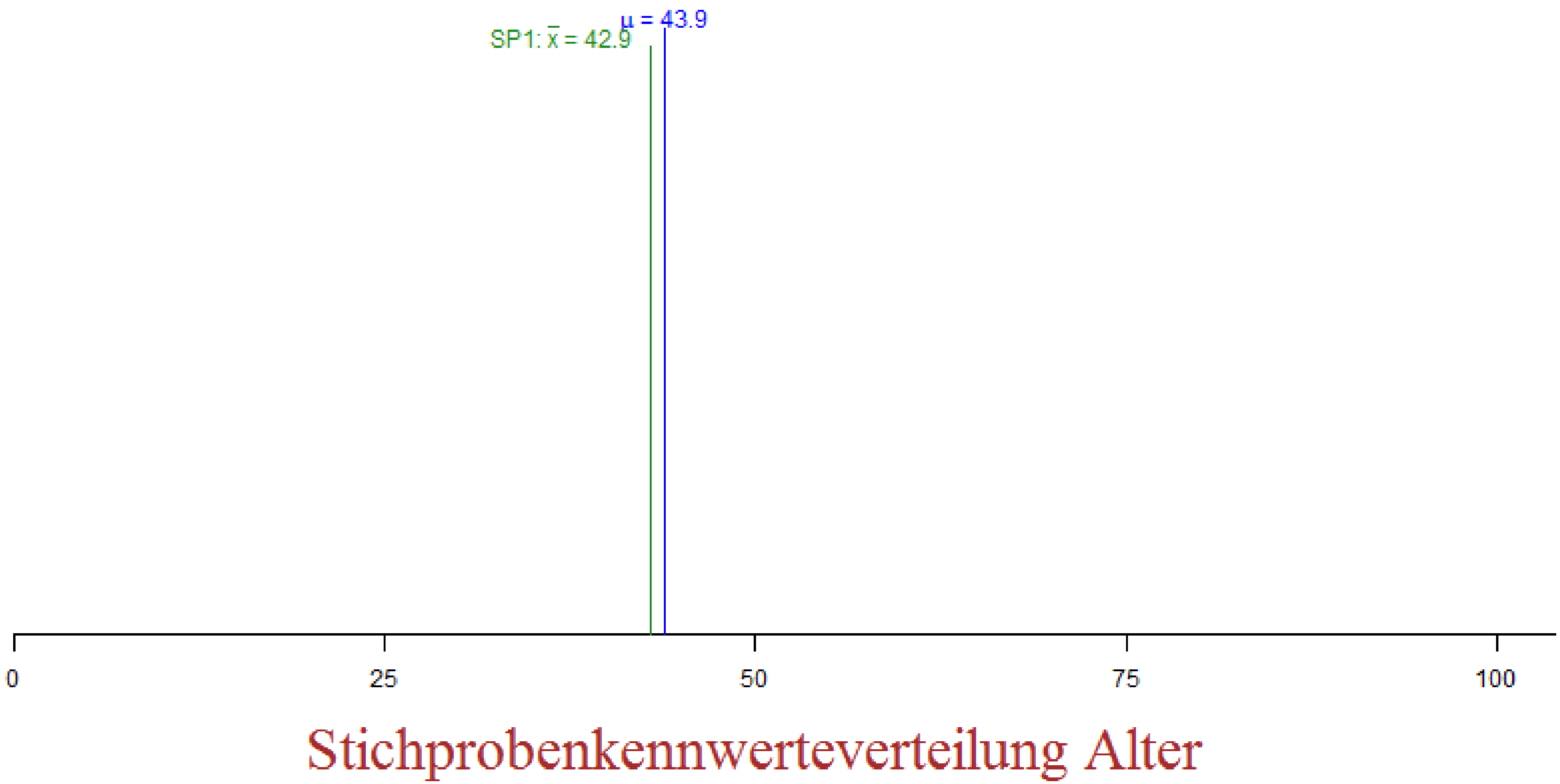
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)



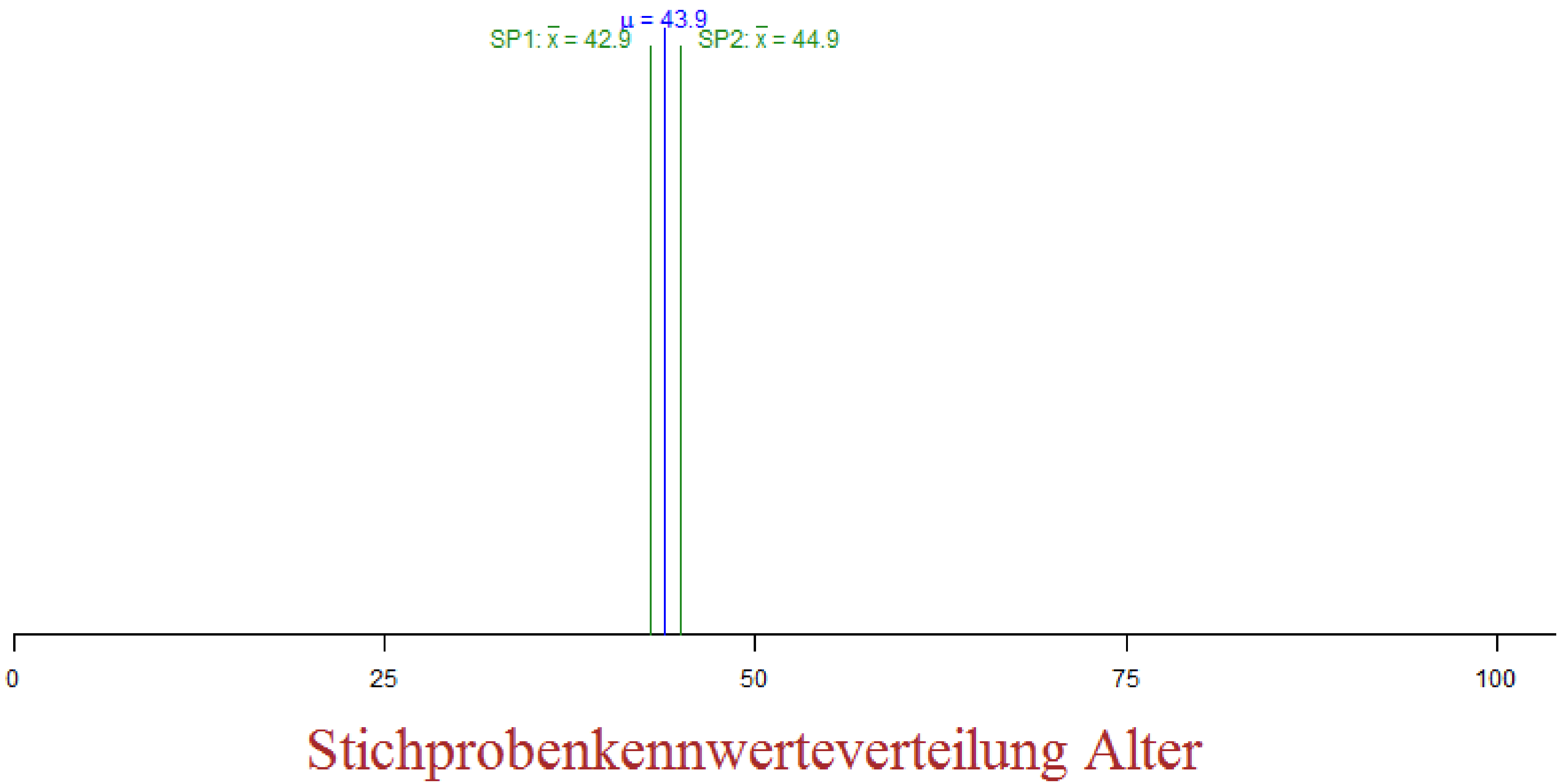
Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)



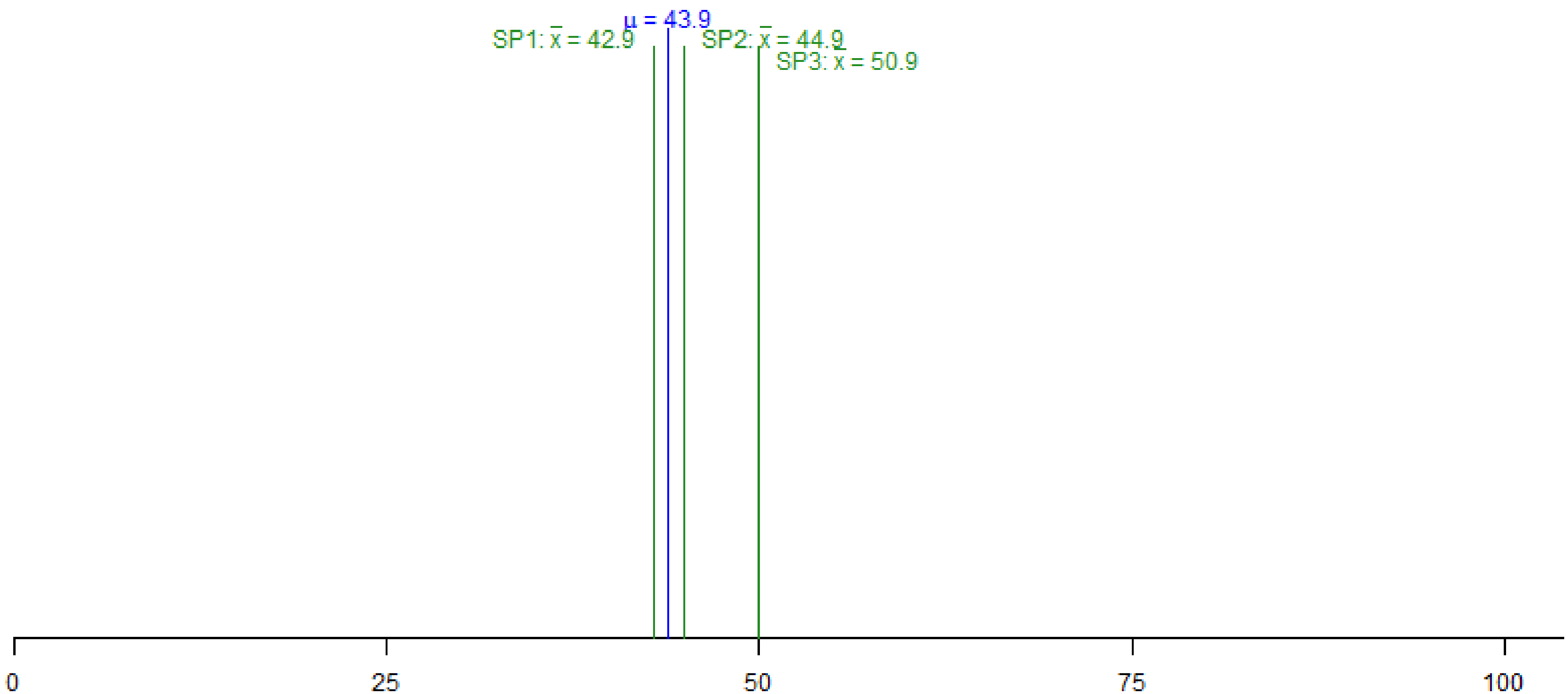
Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)



Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

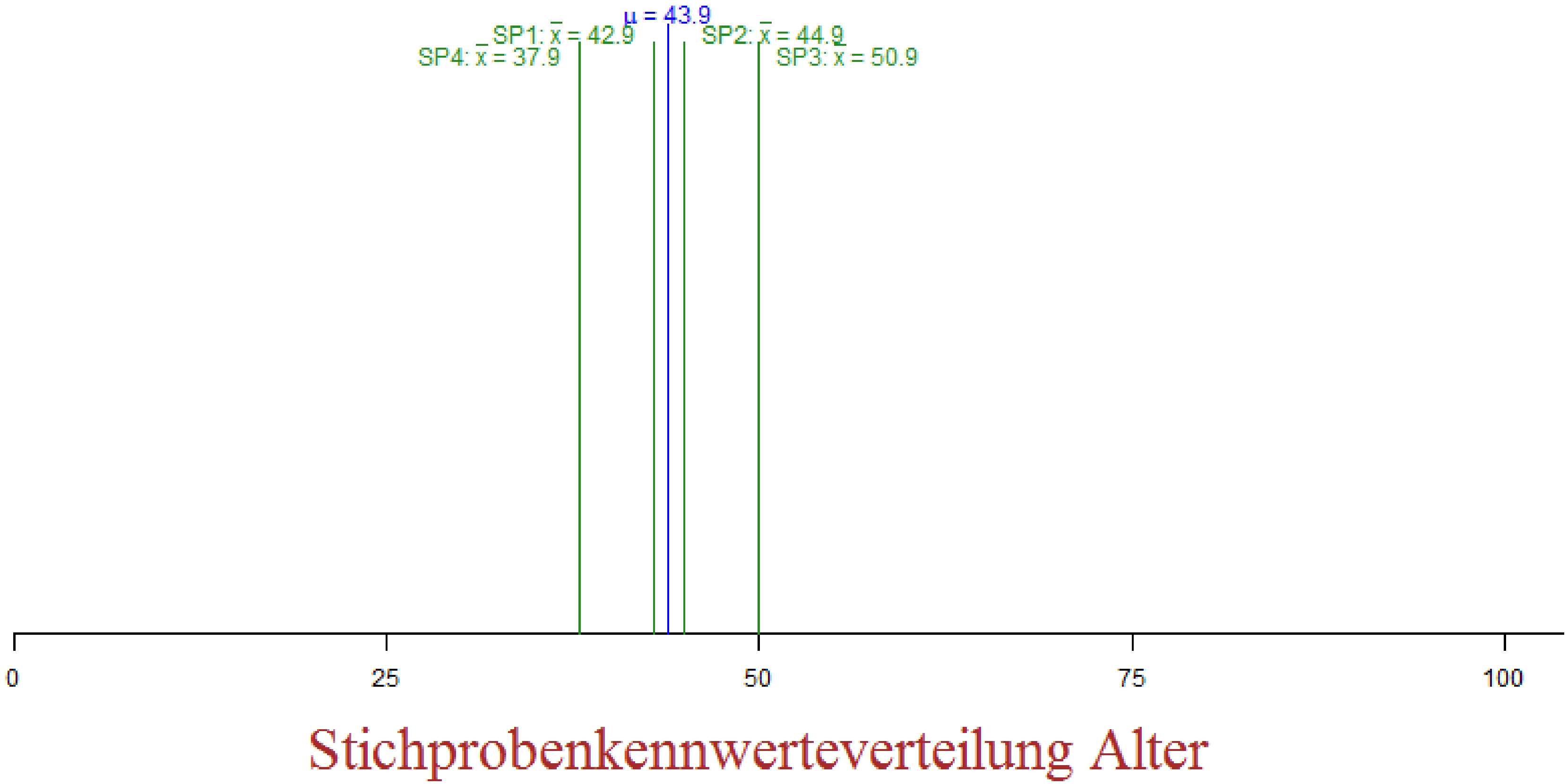
Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/ AltersstrukturZensus.html)



Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

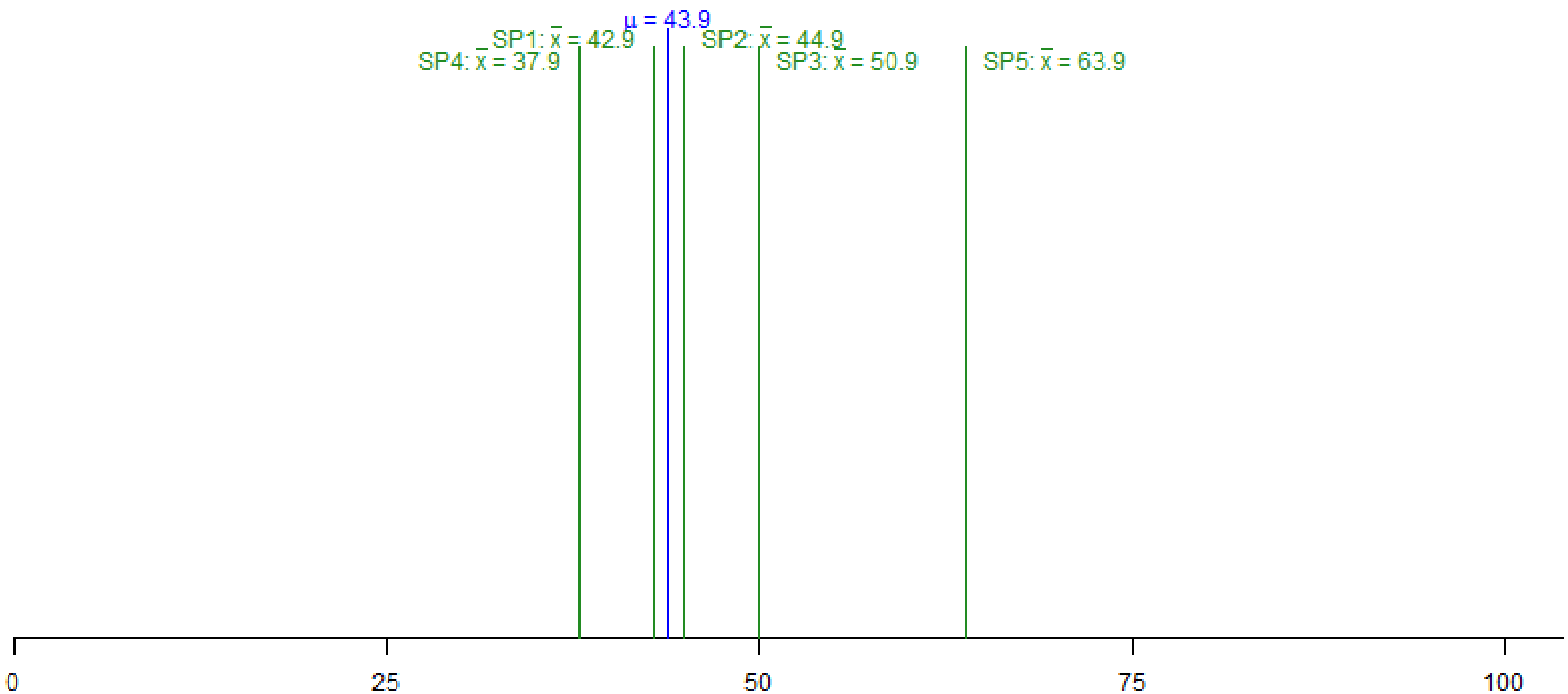
Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/ AltersstrukturZensus.html)



Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

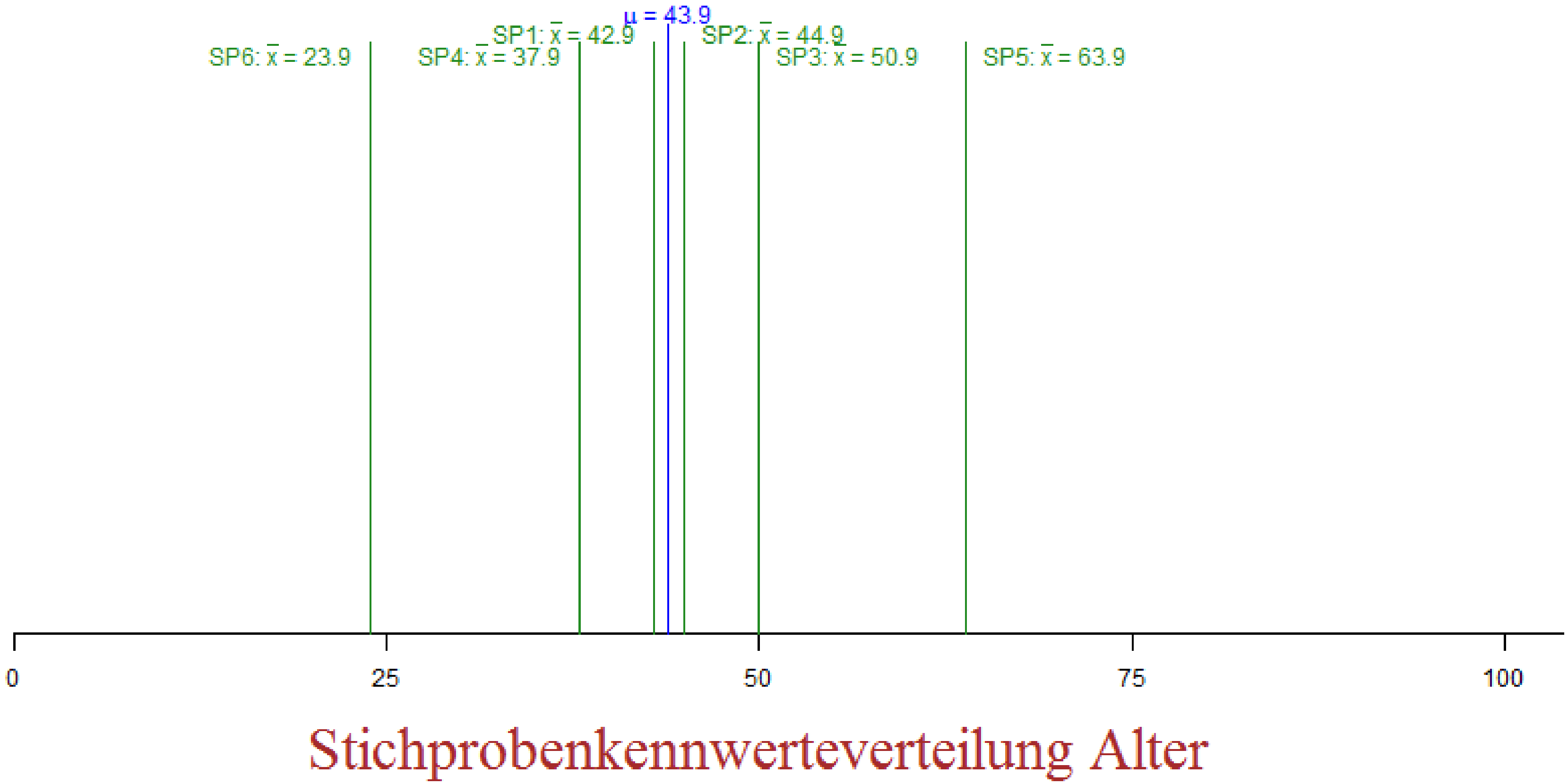
Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/ AltersstrukturZensus.html)



Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

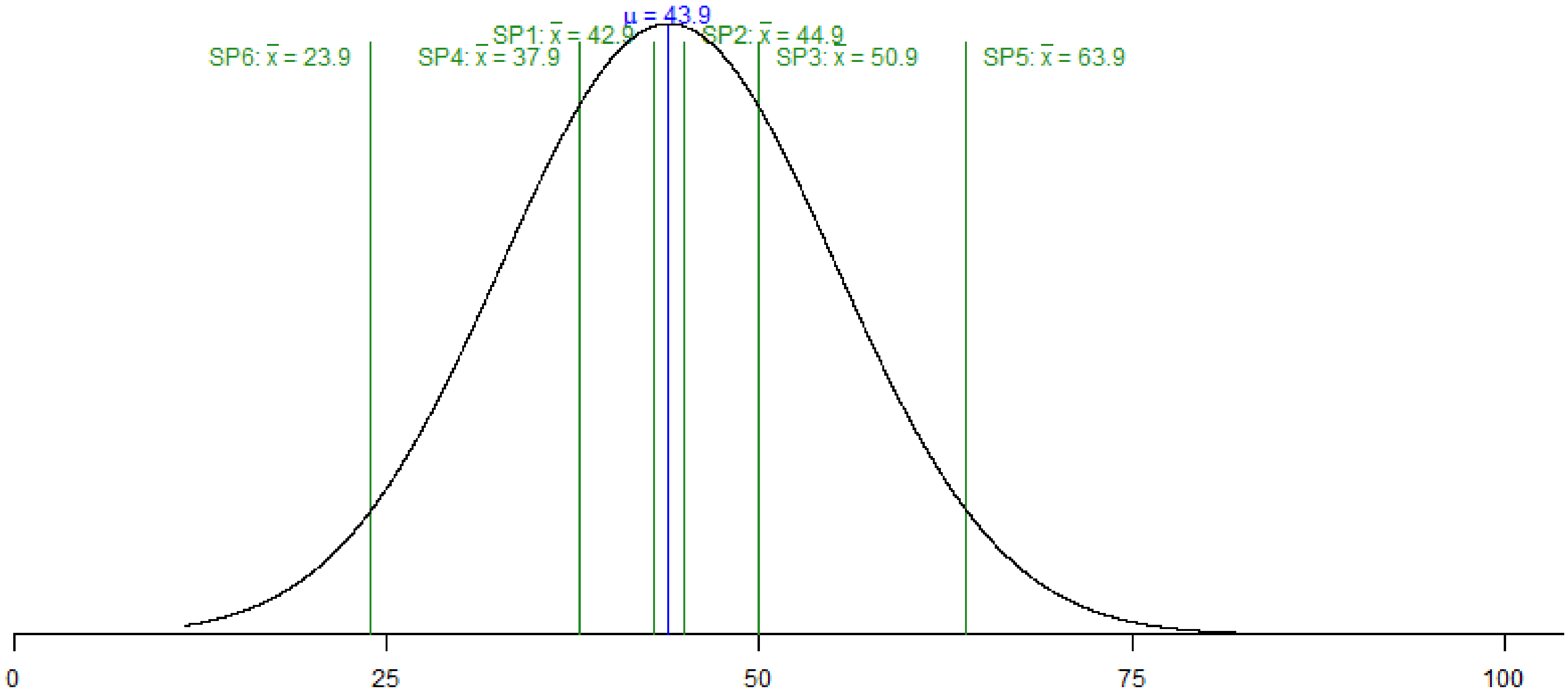
Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/ AltersstrukturZensus.html)



Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)

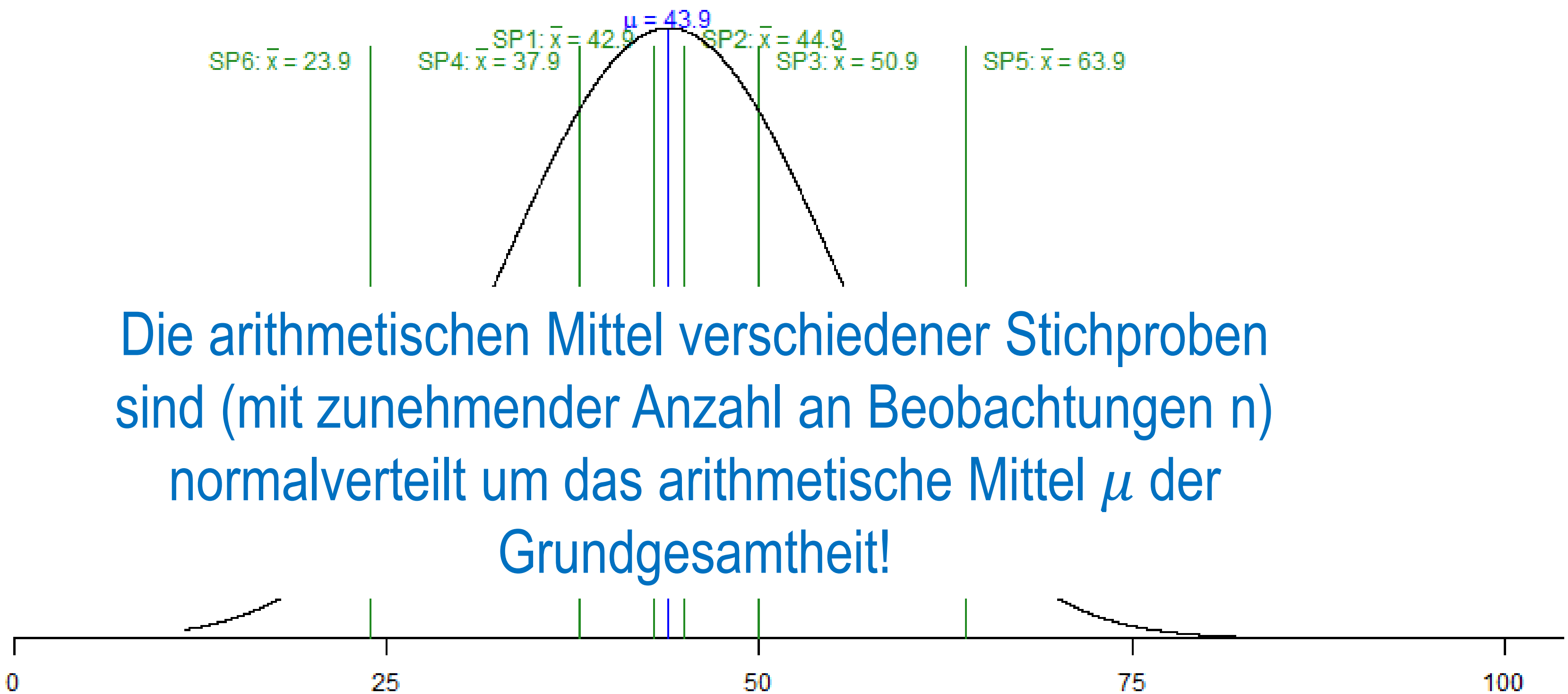


Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)

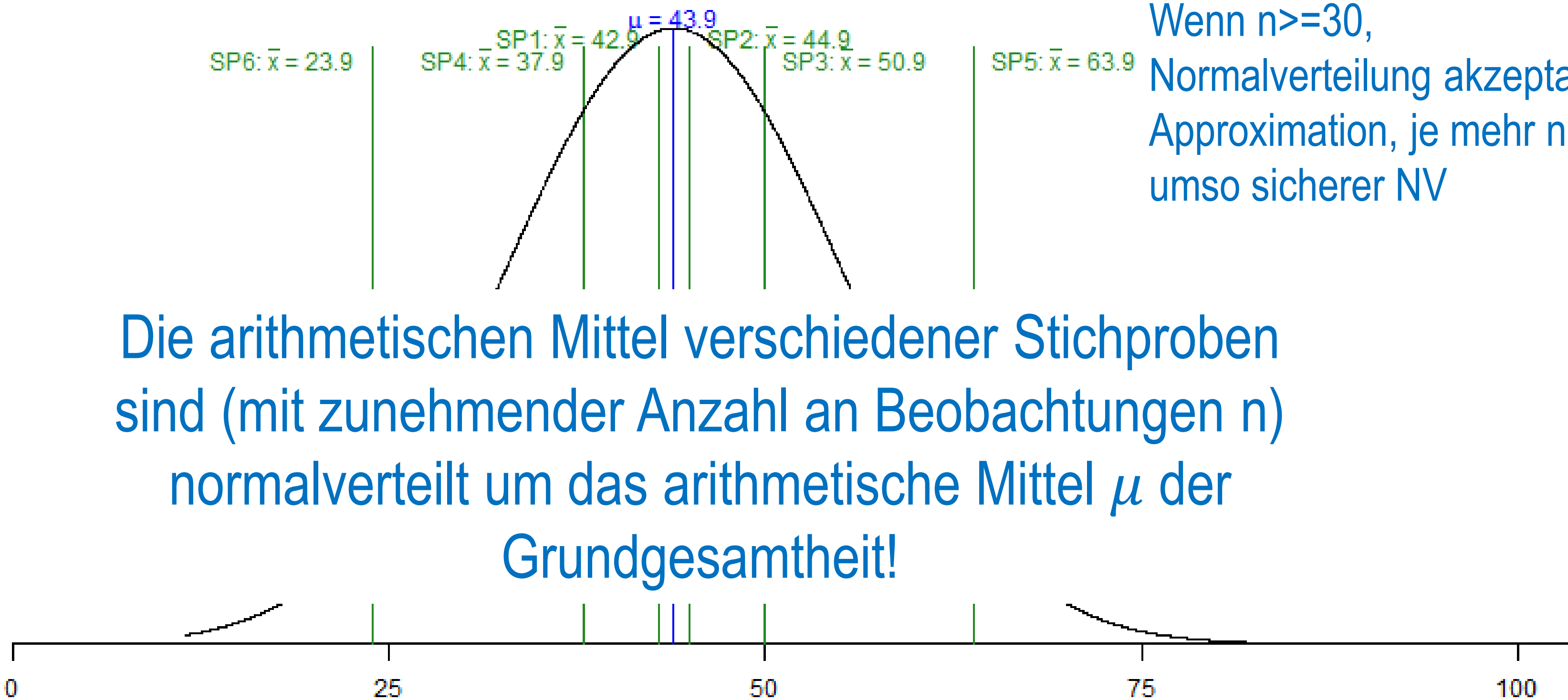


Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)



Wenn n>=30, Normalverteilung akzeptable Approximation, je mehr n umso sicherer NV

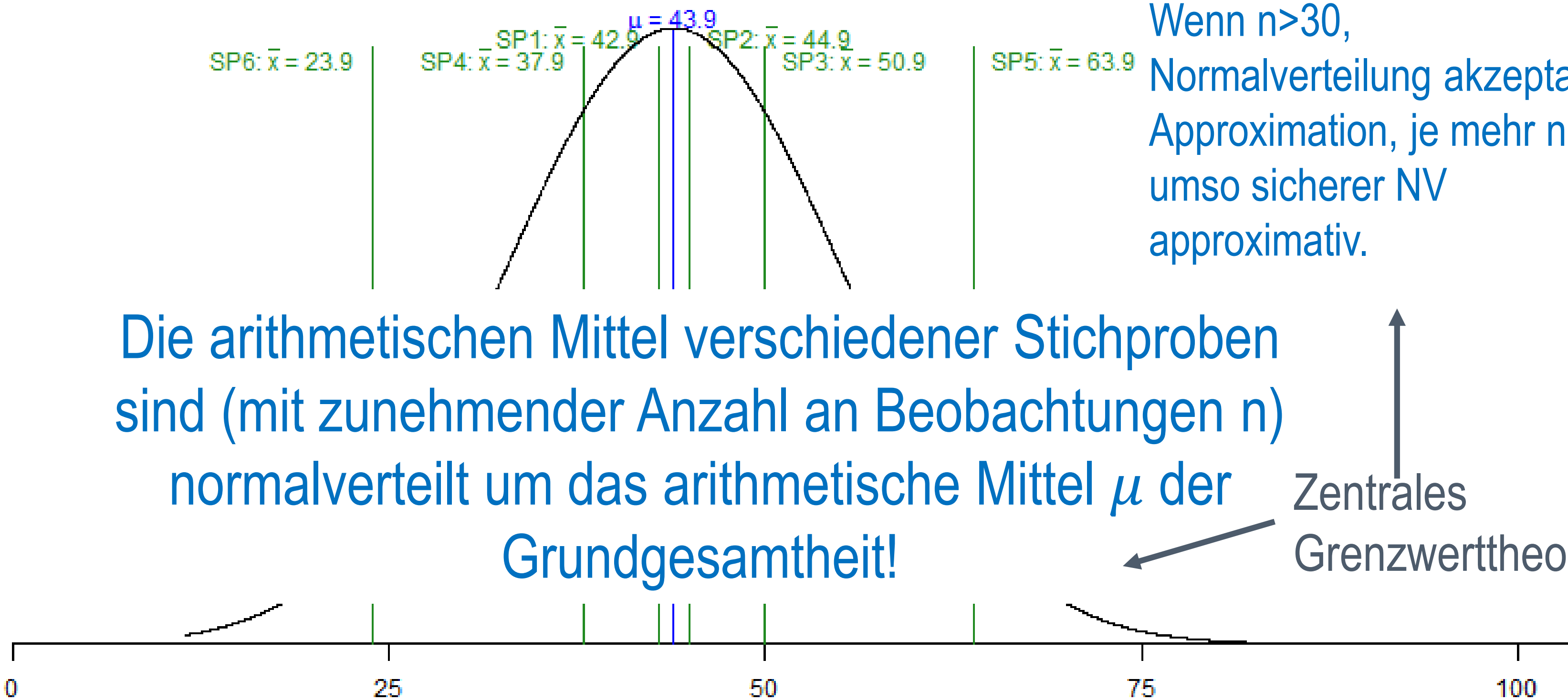
Die arithmetischen Mittel verschiedener Stichproben sind (mit zunehmender Anzahl an Beobachtungen n) normalverteilt um das arithmetische Mittel μ der Grundgesamtheit!

Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Beispiel: Zentrales Grenzwerttheorem

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Arithmetisches Mittel des Alters der dt. Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre (vgl. (Destatis Zensus 2011: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/ImFokus/Bevoelkerung/AltersstrukturZensus.html)



Wenn n>30, Normalverteilung akzeptable Approximation, je mehr n umso sicherer NV approximativ.

Die arithmetischen Mittel verschiedener Stichproben sind (mit zunehmender Anzahl an Beobachtungen n) normalverteilt um das arithmetische Mittel μ der Grundgesamtheit!

Zentrales Grenzwerttheorem!

Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Standardfehler des Mittels

- Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte als **Standardfehler der Stichprobenmittelwerte** oder Standardfehler des Mittels (kurz: **Standardfehler, $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}}$**)
- Durchschnittliche Streuung der arithmetischen Mittel
- informiert darüber, wie präzise ein Stichprobenmittelwert den Populationsmittelwert schätzt
- Informiert über die Größe der Diskrepanz zwischen einem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und dem Populationsmittelwert μ
- Englische Bezeichnung: Standard Error (S.E.)

Standardfehler des Mittels

- Ein relativ kleiner Standardfehler bedeutet, dass die Stichprobenmittelwerte alle relativ ähnlich sind, d.h. grafisch wenig streuen
- Ein relativ großer Standardfehler bedeutet, dass die Stichprobenmittelwerte alle relativ unähnlich sind, d.h. stärker streuen
- Je größer der Standardfehler desto unsicherer die Schätzung
- Formal: $\boldsymbol{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Beispiel: Standardfehler

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Gegeben sei für ein interessierendes Merkmal eine Population mit der Standardabweichung σ= 10.
- Wie groß ist die durchschnittliche Abweichung zwischen dem Mittelwert einer Stichprobe für n= 4 zufällig aus dieser Population ausgewählten Beobachtungseinheiten und dem Populationsmittelwert?

Beispiel: Standardfehler

- Gegeben sei für ein interessierendes Merkmal eine Population mit der Standardabweichung σ= 10.
- Wie groß ist die durchschnittliche Abweichung zwischen dem Mittelwert einer Stichprobe für n= 4 zufällig aus dieser Population ausgewählten Beobachtungseinheiten und dem Populationsmittelwert?

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Beispiel: Standardfehler

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Gegeben sei für ein interessierendes Merkmal eine Population mit der Standardabweichung σ= 10.
- Wie groß ist die durchschnittliche Abweichung zwischen dem Mittelwert einer Stichprobe für n= 4 zufällig aus dieser Population ausgewählten Beobachtungseinheiten und dem Populationsmittelwert? → S.E. =5

Übung: Standardfehler

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Gegeben sei für ein interessierendes Merkmal eine Population mit der Standardabweichung σ= 10.
- Wie groß ist die durchschnittliche Abweichung zwischen dem Mittelwert einer Stichprobe für *n*= 25 zufällig aus dieser Population ausgewählten Beobachtungseinheiten und dem Populationsmittelwert?

Standardfehler

- Durch welche Faktoren wird der Standardfehler beeinflusst?

1. Varianz des Merkmals in der Grundgesamtheit

  - Je größer die Varianz des Merkmales in der Population, desto größer ist der Standardfehler der Stichprobenmittelwerte.

Standardfehler

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Durch welche Faktoren wird der Standardfehler noch beeinflusst?

Stichprobengröße (n)	Standardfehler	
1	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{1}}$	= 10
9	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{9}}$	= 3.33
25	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{25}}$	= 2
100	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{100}}$	= 1

Standardfehler

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Durch welche Faktoren wird der Standardfehler beeinflusst?

2. Stichprobenumfang

- **„Gesetz der großen Zahl“:** Je größer der Stichprobenumfang, desto kleiner ist der Standardfehler, denn:
  – mit steigendem Stichprobenumfang wird die Informationsunsicherheit über die Grundgesamtheit reduziert

Standardfehler

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Zusammenhang ist negativ: Je größer die Stichprobe, desto kleiner der Standardfehler
- Zusammenhang ist monoton, aber nicht-linear

Stichprobengröße (*n*)	Standardfehler	
1	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{1}}$	= 10
9	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{9}}$	= 3.33
25	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{25}}$	= 2
100	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{100}}$	= 1

Standardfehler

- Durchschnittliche Streuung aller Stichprobenmittelwerte
- Maß für die Genauigkeit des Stichprobenmittelwerts
- Interpretation?
  - Je kleiner desto besser (da präziser)
  - (Standard-)Normalverteilung als „Hilfe“ für Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Übungen

Gegeben sei eine Grundgesamtheit mit **μ= 50 und σ= 12.**

a) Wie lautet der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von n= 4?

b) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei n = 4 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten?

c) Wie lautet der Mittelwert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von n= 36?

d) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei n = 36 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten?

Übungen

Gegeben sei eine Population mit **μ= 50 und σ= 12.**

a) Wie lautet der Erwartungswert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von *n*= 4?

$\mu = 50; \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6$

b) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei *n* = 4 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten? Keine Normalverteilung.

c) Wie lautet der Mittelwert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von *n*= 36?

d) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei *n* = 36 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten?

Übungen

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Gegeben sei eine Population mit **μ= 50 und σ= 12.**

a) Wie lautet der Erwartungswert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von *n*= 4?

$$\mu = 50; \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6$$

b) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei *n* = 4 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten? Keine Normalverteilung.

c) Wie lautet der (erwartete) Mittelwert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von *n*= 36?

$$\mu = 50; \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

d) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei *n* = 36 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten?

Übungen

Gegeben sei eine Population mit **μ= 50 und σ= 12.**

a) Wie lautet der Erwartungswert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von *n*= 4?

$$\mu = 50; \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6$$

b) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei *n* = 4 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten? Keine Normalverteilung.

c) Wie lautet der Mittelwert und der Standardfehler für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Stichprobengröße von *n*= 36?

$$\mu = 50; \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

d) Angenommen die Verteilung in der Population sei nicht normalverteilt; welche Form wäre dann bei *n* = 36 für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte zu erwarten? Normalverteilung

Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

Beispiel

- Arithmetisches Mittel des Alters der Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit einen Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 32$ Jahre zufällig zu ziehen?

Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

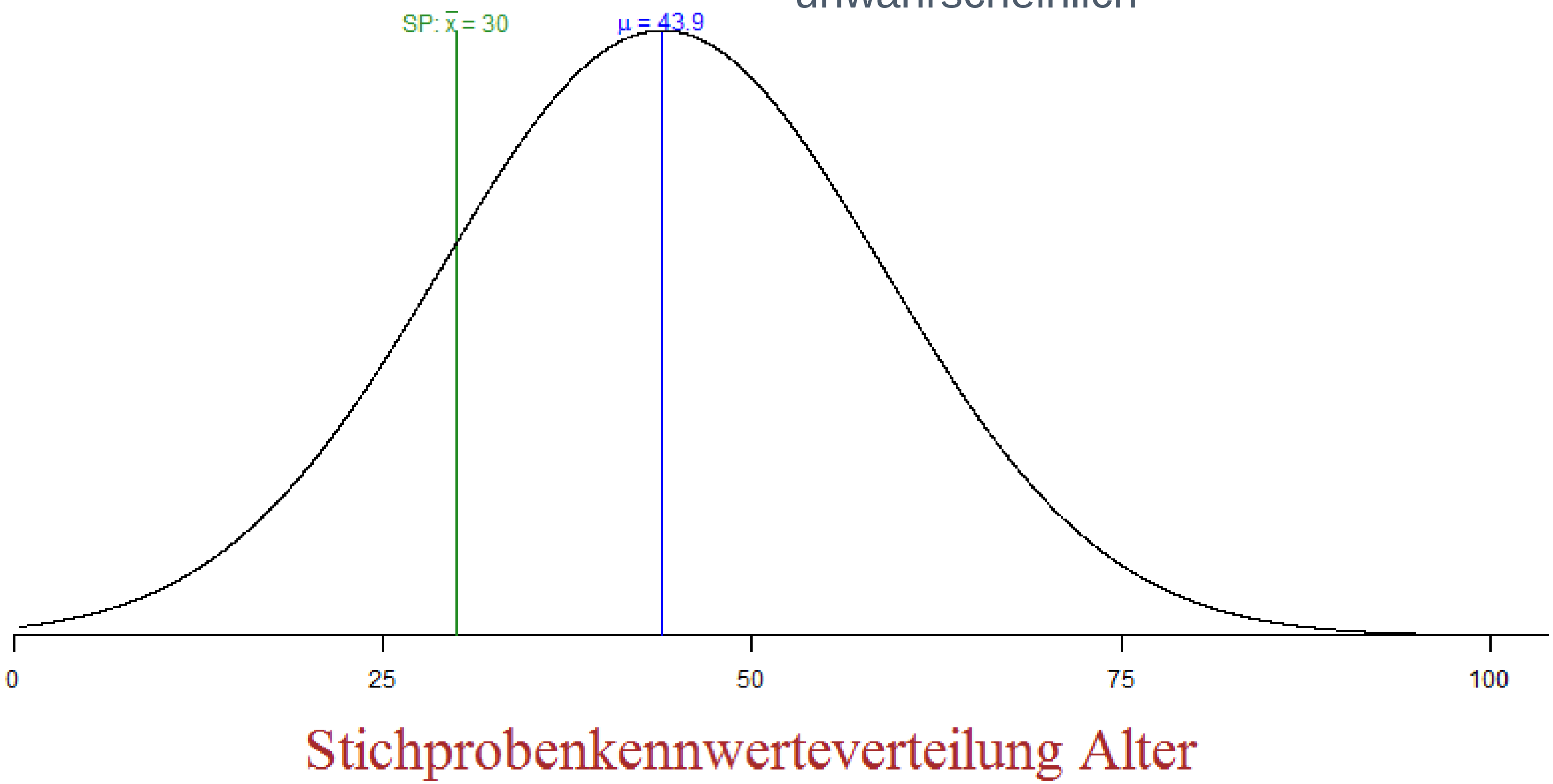
- Hängt vom Standardfehler $\sigma_{\bar{x}}$ ab
- Arithmetische Mittel des Alters der Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit einen Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 32$ Jahre zufällig zu ziehen?
- 3 verschiedene Streuungsbeispiele:
  - $\sigma_{\bar{x}} = 15$ Jahre, $\bar{x} = 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 10$ Jahre, $\bar{x} = 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 5$ Jahre, $\bar{x} = 32$ Jahre

Stichprobenkennwerteverteilung

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- $\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma_{\bar{x}} = 15$

$\bar{x} = 32$ Jahre nicht besonders unwahrscheinlich

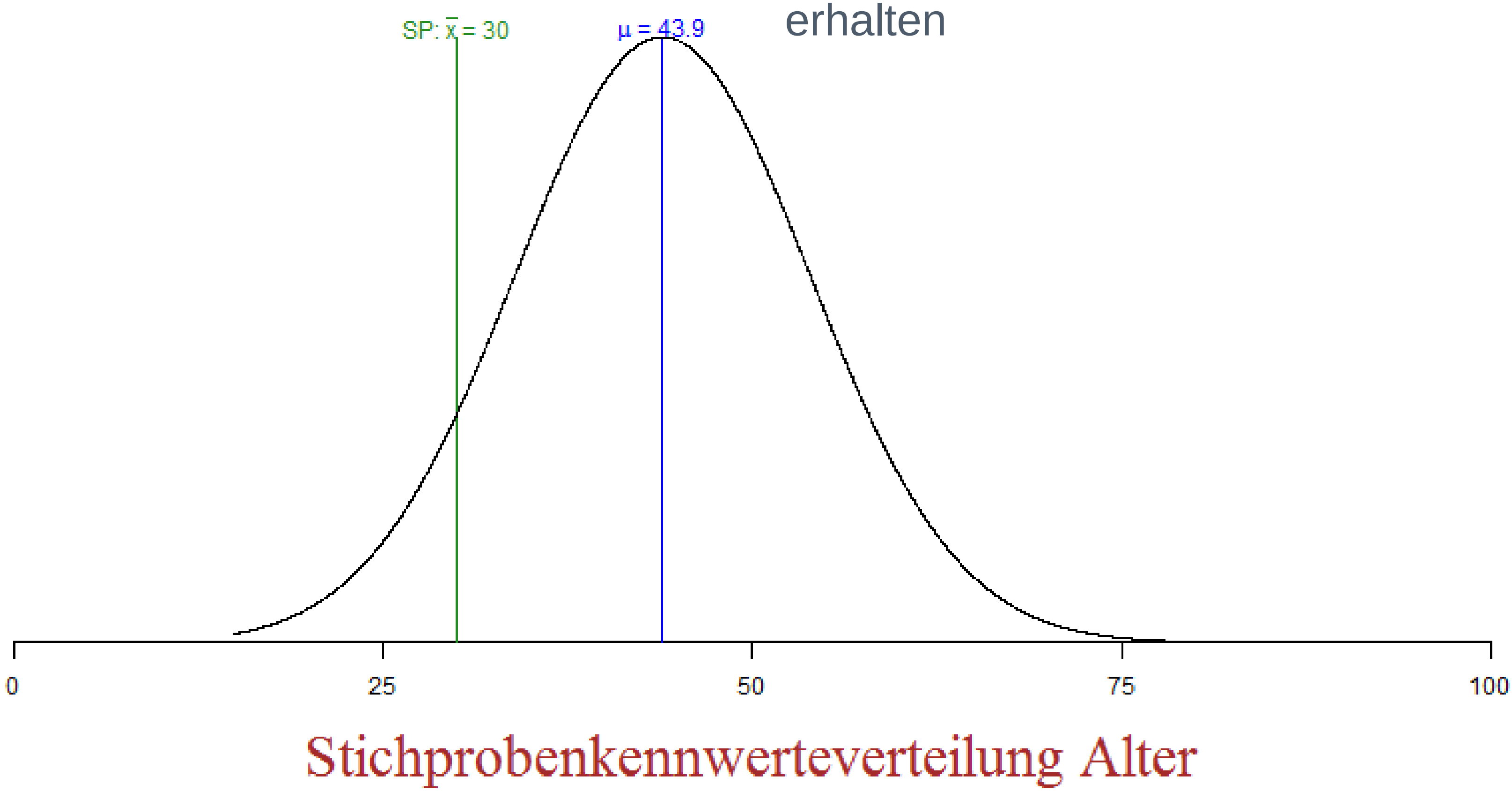


Stichprobenkennwerteverteilung

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- $\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma_{\bar{x}} = 10$

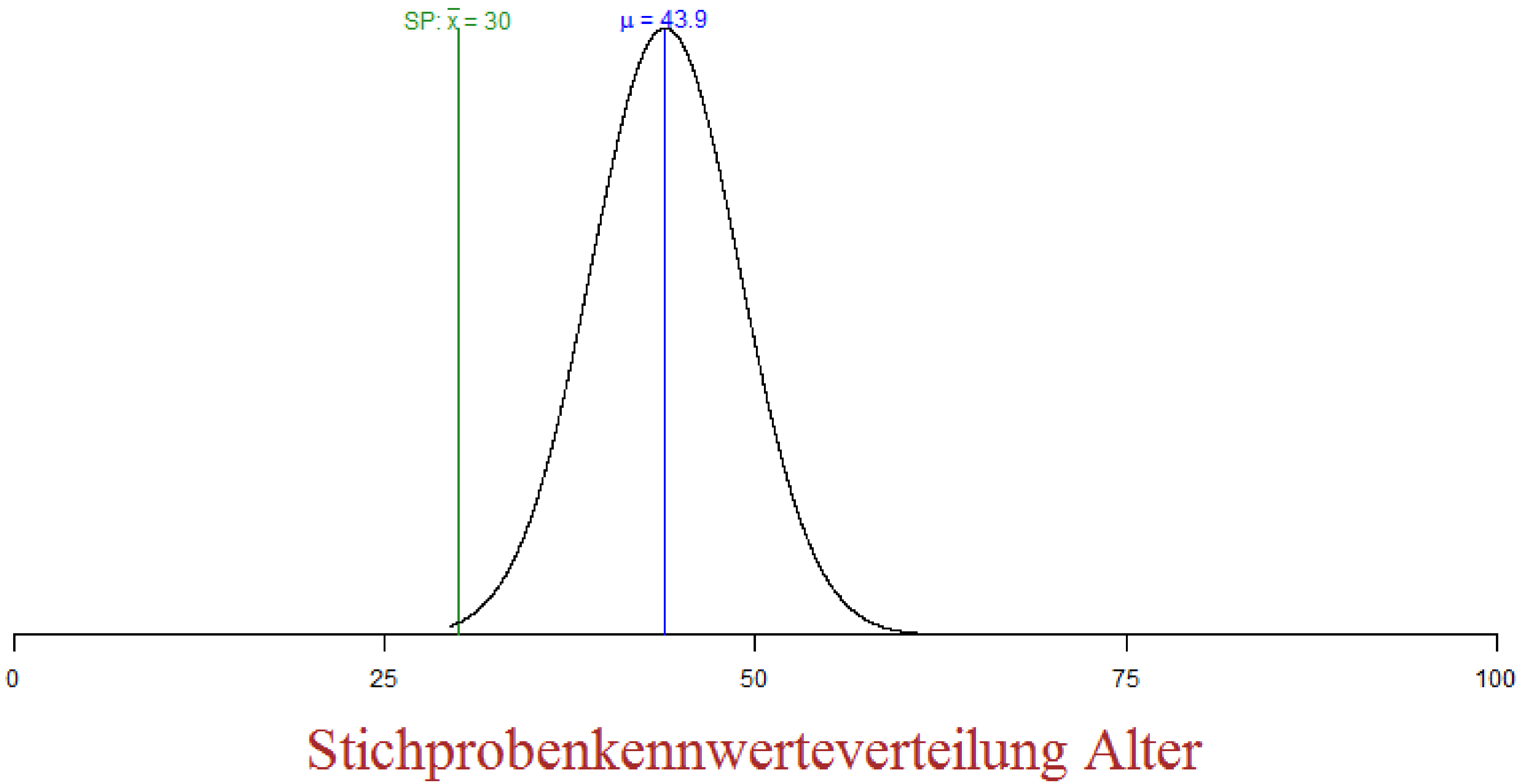
$\bar{x} = 32$ Jahre schon „besonderer“ zu erhalten



Stichprobenkennwerteverteilung

- $\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma_{\bar{x}} = 5$

$\bar{x} = 32$ Jahre sehr unwahrscheinlich



Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Analog zum bereits bekannten Vorgehen für X-werte können wir auch jeden beliebigen Stichprobenmittelwert in einen z-Wert transformieren

- Formale Darstellung: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$
- Anhand der z-Werte Tabelle kann dann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, einen interessierenden Stichprobenmittelwert zu erhalten

Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Beispiel 1:

Gegeben sei eine Population normalverteilten Werten für einen Leistungstest mit μ = 500 und σ= 100. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit *n*= 25 größer als 540 ist?

1.Von Wahrscheinlichkeiten zu Anteilen: „Wie groß ist der Anteil von allen theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerten, der größer ist als 540?“

2.Anwendung des zentralen Grenzwerttheorems:

Stichprobe ist annahmegemäß normalverteilt, weil Werte in der Population normalverteilt sind

Erwartungswert ist 500, weil der Populationsmittelwert 500 ist

- Für *n*= 25 beträgt der Standardfehler: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{25}} = \frac{100}{5} = 20$ $\quad z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

3. 540 entspricht 40 Punkten über dem Mittelwert; dies entspricht z = 2

4. Der Anteil für z > 2 ist 0.0228 (Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 2.28%)

Übung 1

Gegeben sei eine Population mit $\mu = 60$ und $\sigma = 12$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit $n = 36$ größer als 64 ist?

$P(\bar{x} > 64) = ?$

1. „Wie groß ist der Anteil aller theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerte, der größer ist als 64?“
2. Für n = 36 beträgt der Standardfehler:

3. z-Wert berechnen:

Übung 1

Gegeben sei eine Population mit μ = 60 und σ= 12. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit *n*= 36 größer als 64 ist?

P($\bar{x}$> 64) = ?

1.„Wie groß ist der Anteil aller theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerte, der größer ist als 64?“

2.Für n = 36 beträgt der Standardfehler:

3.z-Wert b

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

Übung 2

Gegeben sei eine Population mit **μ= 60 und σ= 8.**

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine *rechtsschiefe* Stichprobe mit *n*= 4 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine Stichprobe mit *n*= 64 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

Übung 2

Gegeben sei eine Population mit **μ= 60 und σ= 8.**

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine *rechtsschiefe* Stichprobe mit *n*= 4 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

Nicht beantwortbar, weil weder normalverteilt noch n >=30

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine Stichprobe mit *n*= 64 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

Übungen

Gegeben sei eine Population mit **μ= 60 und σ= 8.**

- Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine Stichprobe mit *n*= 64 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1;$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{62 - 60}{1} = 2 = 0.0228\ (2.28\%)$$

Übung 3

- Wie hoch ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für die bereits besprochenen 3 Beispiele von oben?
- Arithmetische Mittel des Alters der Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre

  - $\sigma_{\bar{x}} = 15$ Jahre, $\bar{x} < 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 10$ Jahre, $\bar{x} < 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 5$ Jahre, $\bar{x} < 32$ Jahre

Schätzung des Standardfehlers

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Aber: in Wirklichkeit kennen wir ja den wahren Mittelwert und die wahre Standardabweichung gar nicht und daher auch nicht den „wahren“ Standardfehler eines Stichprobenmittelwerts
- Schätzung des Standardfehlers auf Basis der Standardabweichung der Stichprobe

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- „Wahre“ Streuung σ wird aus (empirischer) Streuung s in Stichprobe geschätzt