JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Statistik II

Prof. Dr. Simone Abendschön

22.5.23

Plan heute und nächste Woche

Fortsetzung Grundlagen der Inferenzstatistik

- Kurze Wiederholung vom letzten Mal
- Standardfehler
- Punktschätzung und Intervallschätzung
- Konfidenzintervall
- t-Verteilung als „bessere“ z-Normalverteilung

Wh. Stichproben und Grundgesamtheit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Stichprobenfehler (Stichprobenschwankung/Sampling Error):
  - Empirische Ergebnisse einer Zufallsstichprobe weichen immer (mehr oder weniger) vom tatsächlichen Wert in Grundgesamtheit ab
  - → Diskrepanz zwischen Stichprobenkennwert $\bar{x}$ und Populationskennwert μ
  - Berechnung eines Standardfehlers

- Da wir den „wahren" Wert in der GG nicht kennen, wissen wir nicht ob unser Stichprobenfehler groß oder klein ist
  - Stichprobenergebnisse variieren – wir können eine „gute" oder „schlechte" Stichprobe erwischen
  - Zufällige Einflüsse: Unterschiedliche Stichproben = unterschiedliche Beobachtungseinheiten
- Aber: Grundannahmen über die Verteilung von Stichprobenkennwerten!

Wh. Zentrales Grenzwerttheorem

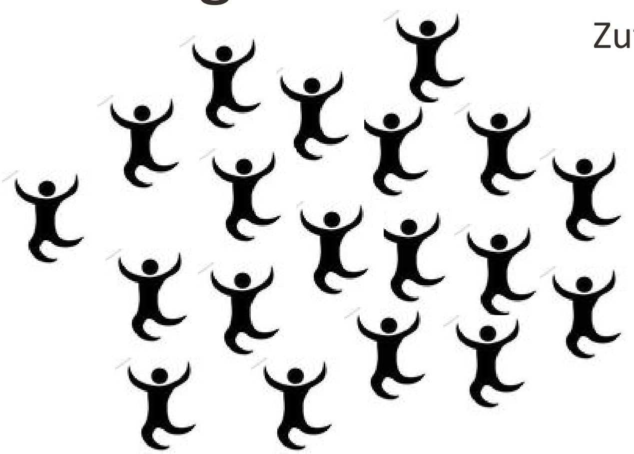
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Zentrale Tendenz der Verteilung von Stichprobenkennwerten (Mittelwerte, aber auch Anteilswerte)
- Unabhängig von der Verteilung eines Merkmals in der Population wird die Verteilung der Stichprobenmittelwerte (und Anteilswerte) normalverteilt um μ sein
  - falls die Stichprobe ausreichend groß ist (*n*>= 30)
  - oder die Werte in der Population normalverteilt sind
- Erwartungswert E der Stichprobenmittelwerte entspricht dem „wahren" Mittelwert : μ: $E(\bar{x}) = \mu$

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

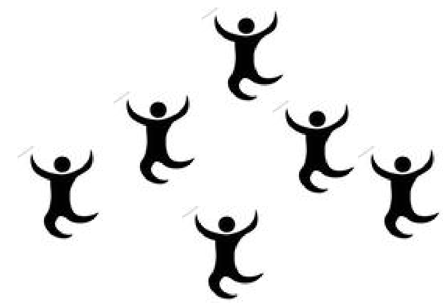
Wh. Inferenzstatistik

Grundgesamtheit



Stichprobe

Zufallsauswahl/Wahrscheinlichkeit



Grundannahmen über die Verteilung von Stichprobenkennwerten

μ

(Erwartungswert – „Durchschnitt der Grundgesamtheit“)

Inferenz

Schätzung

$\bar{x}$ (Arithmetisches Mittel Stichprobe)

Wh. Standardfehler (des Mittels)

- Durchschnittliche Streuung aller Stichprobenmittelwerte
- Maß für die Genauigkeit des Stichprobenmittelwerts
- Je größer der Standardfehler desto unsicherer die Schätzung
- Je größer der Stichprobenumfang umso kleiner der Standardfehler („Gesetz d. großen Zahl“)

- Formal: $\boldsymbol{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Wh. Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Beispiel

- Arithmetisches Mittel des Alters der Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit einen Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 32$ Jahre zufällig zu ziehen?

Wh. Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

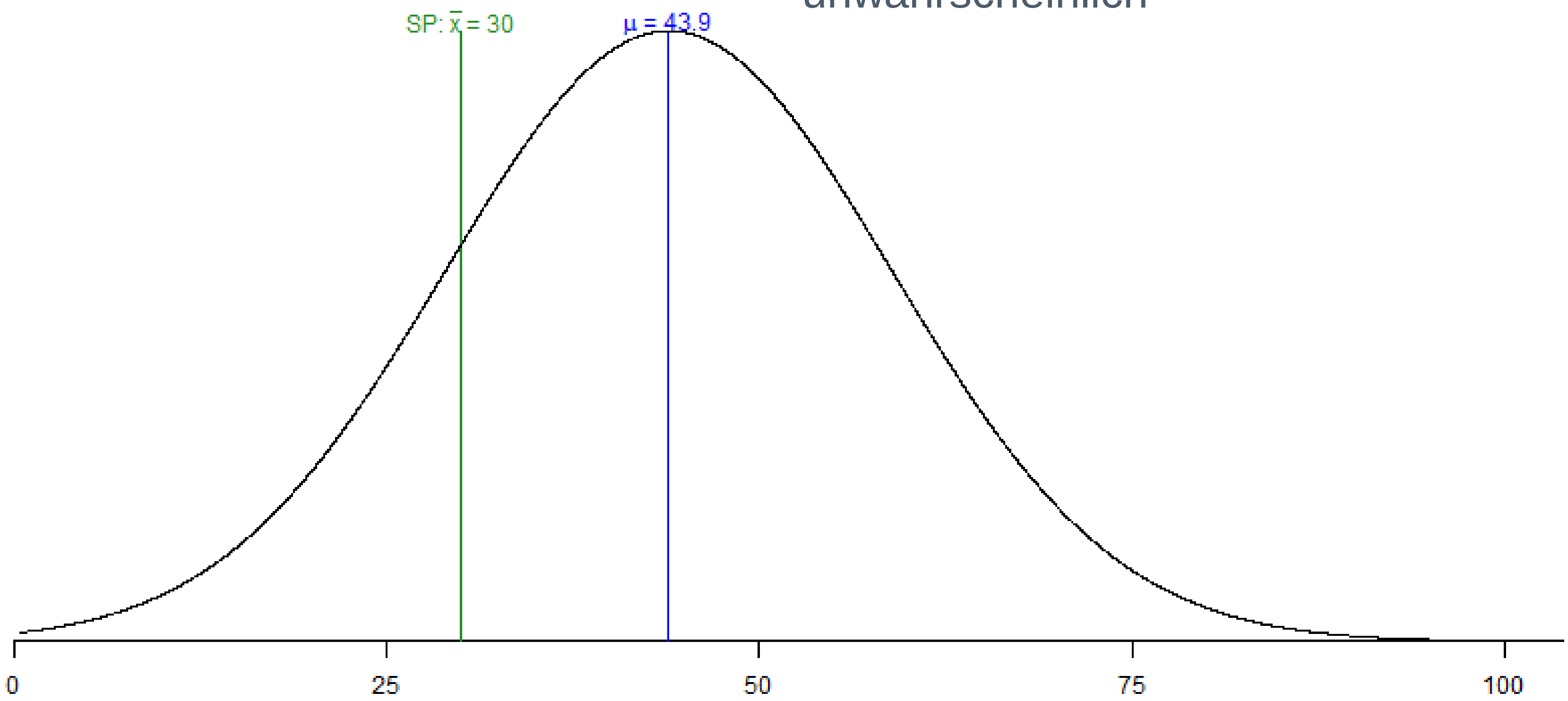
- Hängt vom Standardfehler $\sigma_{\bar{x}}$ ab
- 3 verschiedene Streuungsbeispiele:

  - $\sigma_{\bar{x}} = 15$ Jahre, $\bar{x} = 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 10$ Jahre, $\bar{x} = 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 5$ Jahre, $\bar{x} = 32$ Jahre

Wh. Stichprobenkennwerteverteilung

- $\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma_{\bar{x}} = 15$

$\bar{x} = 32$ Jahre nicht besonders unwahrscheinlich

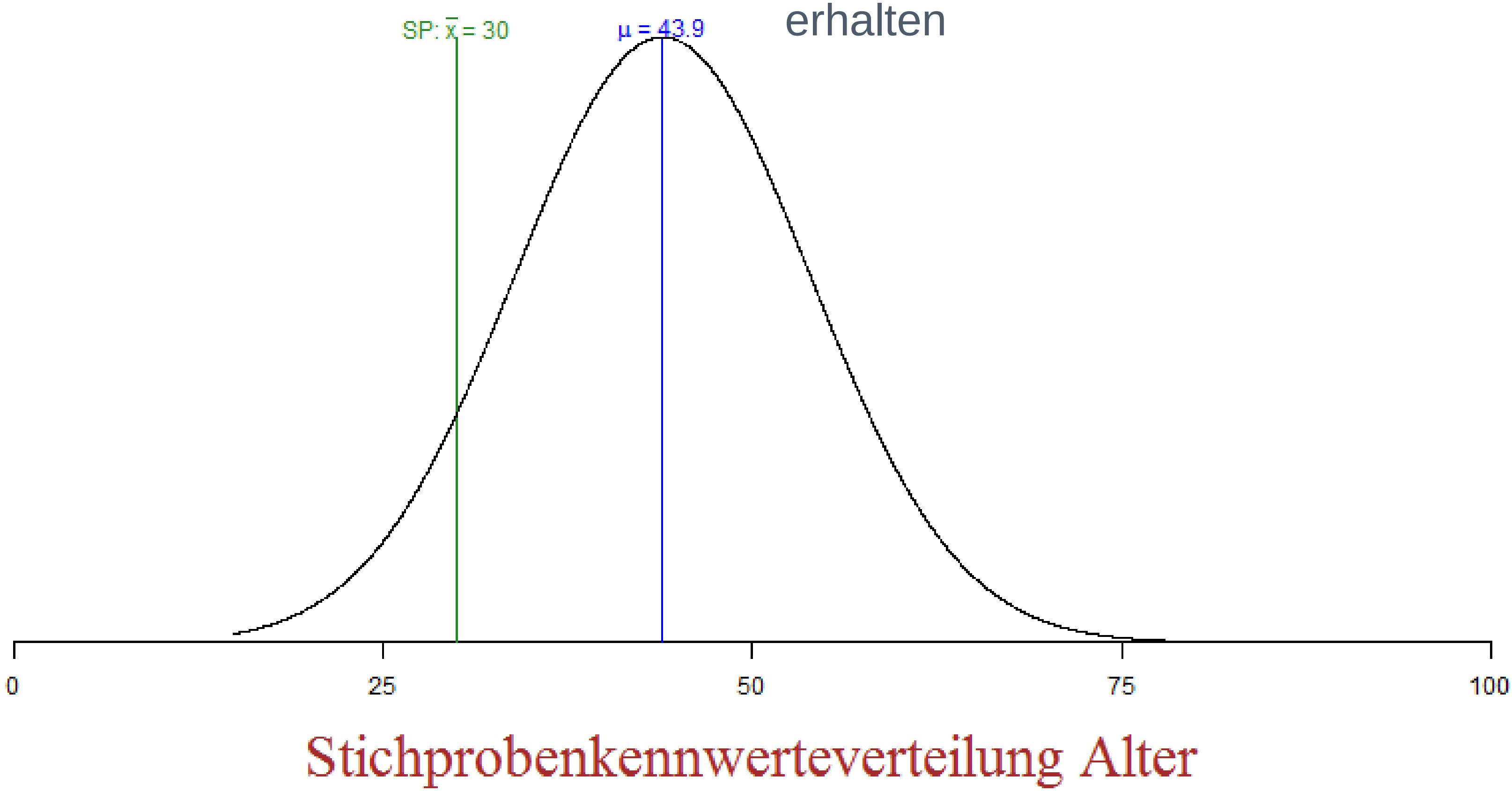


Stichprobenkennwerteverteilung Alter

Wh. Stichprobenkennwerteverteilung

- $\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma_{\bar{x}} = 10$

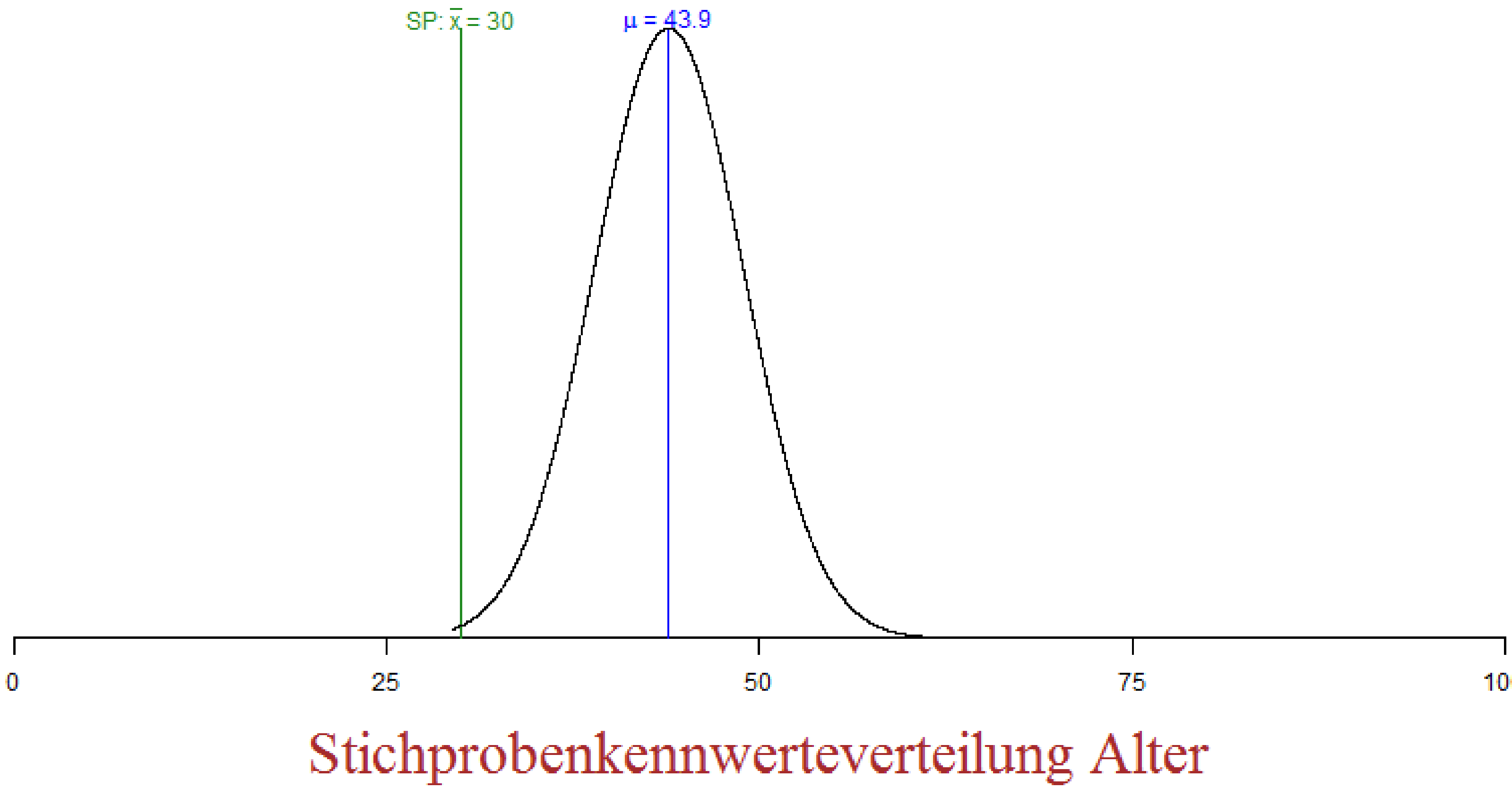
$\bar{x} = 32$ Jahre schon „besonderer“ zu erhalten



Wh. Stichprobenkennwerteverteilung

- $\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma_{\bar{x}} = 5$

$\bar{x} = 32$ Jahre sehr unwahrscheinlich



Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Analog zum bereits bekannten Vorgehen für x-Werte: Transformation Stichprobenmittelwert in z-Wert

- Formale Darstellung $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

→ Mit z-Werte-Tabelle Wahrscheinlichkeit für einen interessierenden Stichprobenmittelwert bestimmen

Beispiel

- Links-Rechts-Selbsteinschätzung (klass. Konzept der empirischen Sozialforschung, Frageitem Umfrage)

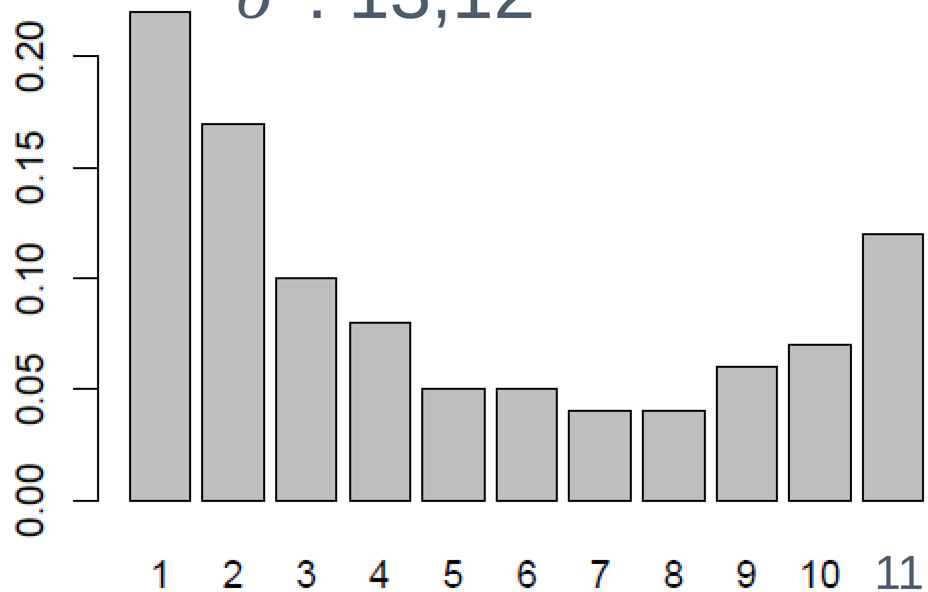
[Messinstrument Fragebogen: ‚Viele Leute verwenden die Begriffe „links“ und „rechts“, wenn es darum geht, unterschiedliche politische Einstellungen zu kennzeichnen. Wir haben hier einen Maßstab, der von links (1) nach rechts (11) verläuft. Wenn Sie an Ihre eigenen politischen Ansichten denken, wo würden Sie diese Ansichten auf dieser Skala einstufen?‘]

Verteilung in Population

Verteilung linkssteil

μ : 4,88

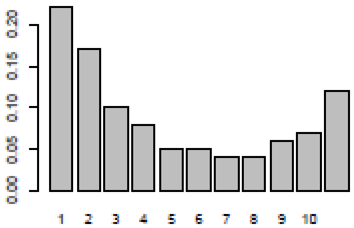
σ^2: 13,12

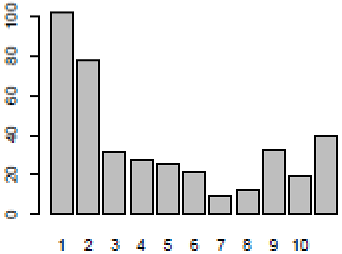


3 Stichproben (n=400)

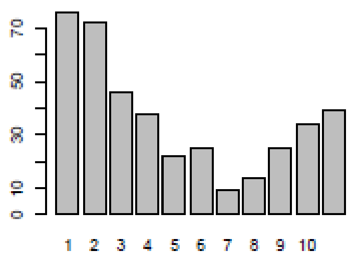
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

μ : 4,88
σ^2 : 13,12

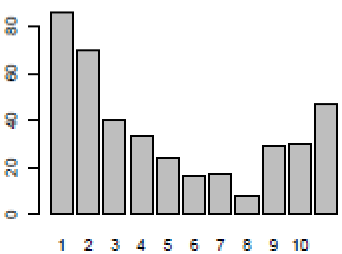




$\bar{x} = 4.52$



$\bar{x} = 4.85$



$\bar{x} = 4.89$

Beispiel

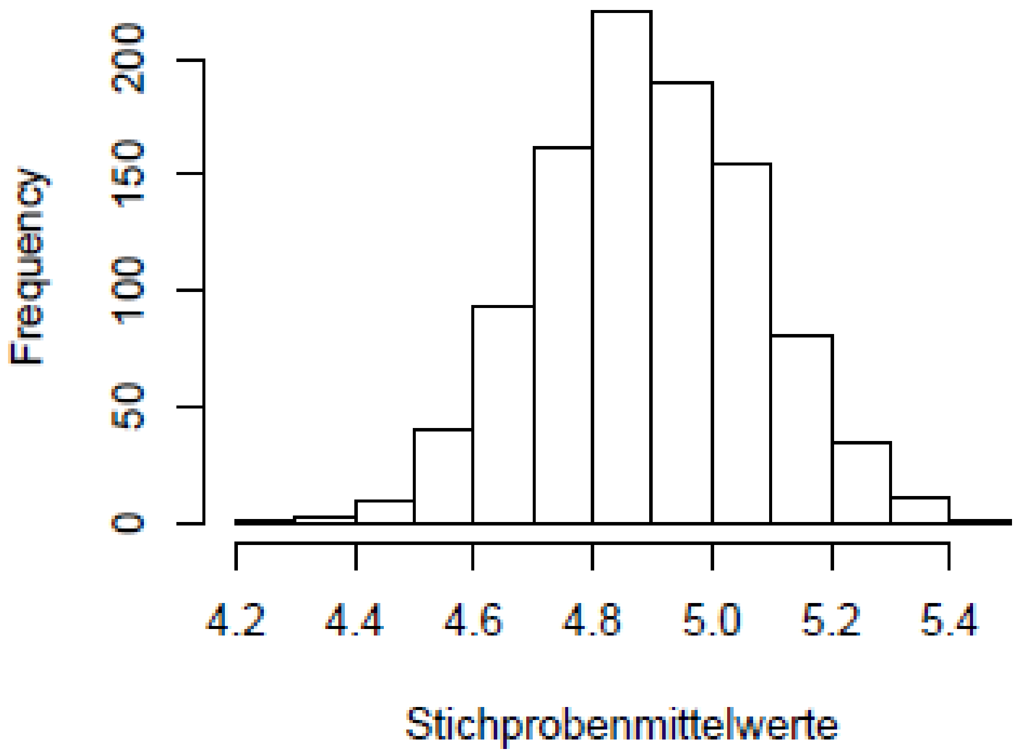
- Was erwarten wir für die Verteilung der Mittelwerte aus vielen (z.B. 1000) Stichproben?
- Normalverteilung um μ von 4,88

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Mit einem Standardfehler von $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{13,12}{400}} =$ 0,181

Verteilung Stichprobenmittelwerte

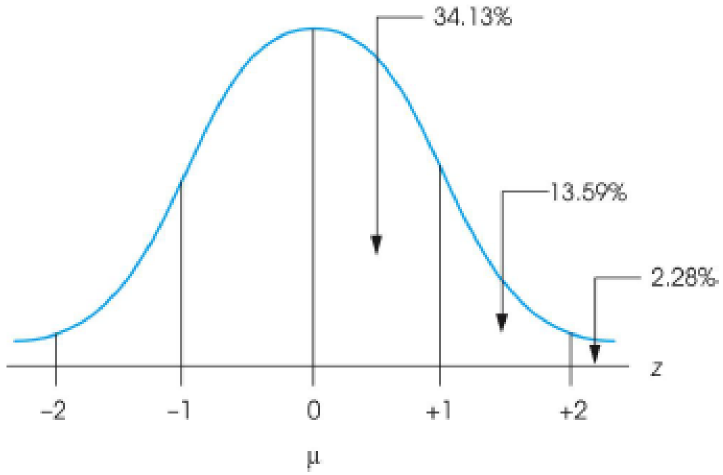
- Mittelwert der Stichprobenmittelwerte: 4,88
- Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte: 0,181



Wh. Grenzwerttheorem

- Was bedeutet Normalverteilung der Stichprobenmittelwerte um μ ?
- (Standard-)Normalverteilung als „Hilfe“ für Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und Intervallen

Wh.: Standardnormalverteilung



Intervall	Flächenanteil
$[\mu - 1 \cdot \sigma; \mu + 1 \cdot \sigma]$	68.3%
$[\mu - 1.96 \cdot \sigma; \mu + 1.96 \cdot \sigma]$	95%
$[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma]$	95.4%
$[\mu - 2.58 \cdot \sigma; \mu + 2.58 \cdot \sigma]$	99.0%
$[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma]$	99.7%

Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Beispiel 2:

Gegeben sei eine Population normalverteilter Werte für einen Leistungstest mit $\mu = 500$ und $\sigma = 100$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit $n = 25$ größer als 540 ist?

1.Von Wahrscheinlichkeiten zu Anteilen: „Wie groß ist der Anteil von allen theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerten, der größer ist als 540?"

2.Anwendung des zentralen Grenzwerttheorems:

Stichprobe ist annahmegemäß normalverteilt, weil Werte in der Population normalverteilt sind

Erwartungswert ist 500, weil der Populationsmittelwert 500 ist

- Für $n = 25$ beträgt der Standardfehler: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{25}} = \frac{100}{5} = 20$ $\quad z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

3. 540 entspricht 40 Punkten über dem Mittelwert; dies entspricht z = 2

4. Der Anteil für z > 2 ist 0.0228 (Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 2.28%)

Übung 1

Gegeben sei eine Population mit $\mu = 60$ und $\sigma = 12$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit $n = 36$ größer als 64 ist?

$P(\bar{x} > 64) = ?$

1. „Wie groß ist der Anteil aller theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerte, der größer ist als 64?"
2. Für $n = 36$ beträgt der Standardfehler:

3. z-Wert berechnen:

Übung 1

Gegeben sei eine Population mit μ = 60 und σ= 12. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit *n*= 36 größer als 64 ist?

$P(\bar{x} > 64) = ?$

1. „Wie groß ist der Anteil aller theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerte, der größer ist als 64?“
2. Für n = 36 beträgt der Standardfehler:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

3. z-Wert berechnen:

Stichprobenmittelwerte, Standardfehler und Wahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Beispiel 3:

Gegeben sei eine Population mit μ = 60 und σ= 12. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das der Mittelwert für eine Zufallsstichprobe mit *n*= 36 größer als 64 ist?

$P(\bar{x} > 64) = ?$

1. „Wie groß ist der Anteil von allen theoretisch möglichen Stichprobenmittelwerten, der größer ist als 64?“
2. Für n = 36 beträgt der Standardfehler:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

3. z-Wert berechnen:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{64 - 60}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$P(\bar{x} > 64) = P(z > 2) = 0.0228 = 2.28\%$$

Übung 2

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Gegeben sei eine Population mit **μ= 60 und σ= 8.**

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine *rechtsschiefe* Stichprobe mit *n*= 4 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine Stichprobe mit *n*= 64 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

Übung 2a)

Gegeben sei eine Population mit **μ= 60 und σ= 8.**

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine *rechtsschiefe* Stichprobe mit *n*= 4 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

Nicht beantwortbar, weil weder normalverteilt noch n >=30

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine Stichprobe mit *n*= 64 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

Übung 2b)

Gegeben sei eine Population mit **μ= 60 und σ= 8.**

- Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, für eine Stichprobe mit *n*= 64 einen Mittelwert größer als 62 zu erhalten?

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1;$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{62 - 60}{1} = 2 = 0.0228\ (2.28\%)$$

Übung 3: Hausaufgabe/Tutorium

- Wie hoch ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für die bereits besprochenen 3 Beispiele von oben?
- Arithmetische Mittel des Alters der Bevölkerung (μ) ist 43,9 Jahre

  - $\sigma_{\bar{x}} = 15$ Jahre, $\bar{x} < 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 10$ Jahre, $\bar{x} < 32$ Jahre
  - $\sigma_{\bar{x}} = 5$ Jahre, $\bar{x} < 32$ Jahre

Schätzung des Standardfehlers

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Aber: in Wirklichkeit kennen wir ja „wahre" Werte **μ** und **σ** gar nicht und daher auch nicht „wahren" $\sigma_{\bar{x}}$

→ Schätzung des Standardfehlers auf Basis der Standardabweichung der Stichprobe

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- „Wahre" Streuung σ wird aus (empirischer) Streuung s in Stichprobe geschätzt

Plan heute und nächste Woche

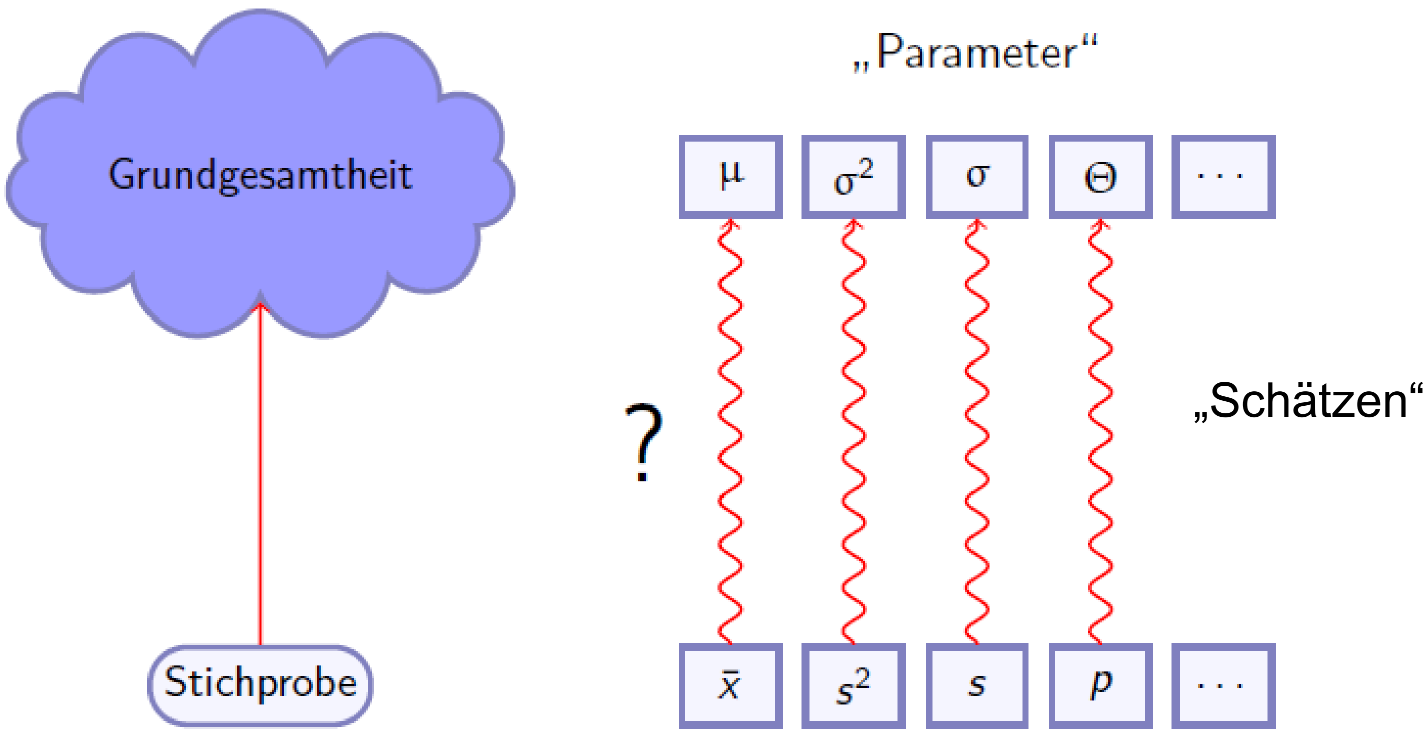
Fortsetzung Grundlagen der Inferenzstatistik

- Kurze Wiederholung vom letzten Mal
- Standardfehler
- Punktschätzung und Intervallschätzung
- Konfidenzintervall
- t-Verteilung als „bessere“ Z-Normalverteilung

Punktschätzungen

- Stichprobenkennwerte als Schätzung für Parameter in der Grundgesamtheit
- Welche Kennwerte relevant?
  - Mittelwert, Anteilswert, Varianz
- Kriterien einer „guten“ Punktschätzung
  - „erwartungstreu“, effizient, konsistent
  - Werden i.d.R. bei Zufallsstichprobe erfüllt

Grundgesamtheit/Stichprobe



Punktschätzungen

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Erwartungstreu:
  - Unverzerrt
  - Bei „unendlich“ vielen Stichproben entspricht der Mittel-/Anteilswert der Stichprobenkennwerte dem „wahren“ Wert
- Effizient: wie präzise ist die Schätzung?
  - Je geringer der Standardfehler desto effizienter
- Konsistent:
  - Bei steigender Stichprobengröße sollte die Differenz zwischen dem geschätzten Wert und dem wahren Wert geringer werden

Punktschätzungen

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Stichprobenmittelwert: gute Schätzung für Mittelwert in der Grundgesamtheit

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- Anteilswert in Stichprobe: gute Schätzung für Anteilwert in Grundgesamtheit

$$\hat{\theta} = p$$

- **Aber: Varianz in Stichprobe <u>unter</u>schätzt Varianz in Grundgesamtheit**

Varianz

- Varianz s^2 in (kleiner) Stichprobe unterschätzt Varianz σ^2 um Faktor $\frac{n-1}{n}$
- Mit $\frac{n-1}{n}$ multiplizieren
- Berechnung von Stichprobenvarianz als Schätzung für Grundgesamtheit lässt sich vereinfachen:
- $\hat{\sigma}^2 = s^2 \times \frac{n}{n-1} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} \times \frac{n}{n-1} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$
- (geschätzte) Standardabweichung in der Population ist:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{s^2 \cdot \frac{n}{n-1}}$$

- Irrelevant in großen Stichproben

Warum reichen Punktschätzungen nicht?

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Schätzungen basieren auf Zufallsstichproben
- Gaukelt falsche Sicherheit vor
- (Kennwerte in Stichprobe sind Zufallsvariablen – kontinuierliche Verteilung um wahren Wert)
- Wahrscheinlichkeit wahren Wert exakt zu treffen nahe 0
- Stattdessen: Wahrscheinlichkeit, Stichprobenwert aus einem bestimmten Intervall zu erhalten

→Intervallschätzung

Intervallschätzung

- Ergänzung zur Punktschätzung
- Berechnung und Angabe eines Intervall, das mit großer Wahrscheinlichkeit μ einschließt

→ Vertrauens- bzw. **Konfidenzintervall**: Bereich, in dem mit einer gewissen (vorab bestimmten) Wahrscheinlichkeit der wahre Wert vermutet wird

- Diesen Bereich können wir auf Basis unserer Vorkenntnisse berechnen!

Plan heute und nächste Woche

Fortsetzung Grundlagen der Inferenzstatistik

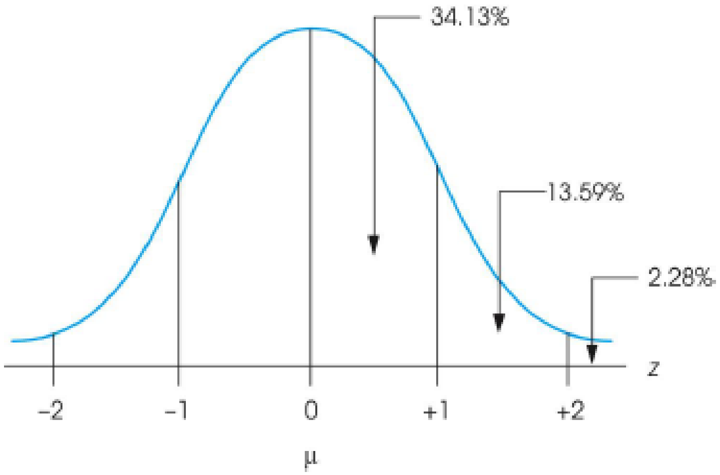
- Kurze Wiederholung vom letzten Mal
- Standardfehler
- Punktschätzung und Intervallschätzung
- Konfidenzintervall
- t-Verteilung als „bessere“ z-Normalverteilung

Vom Grenzwerttheorem zum Konfidenzintervall

- Normalverteilung der Stichprobenmittelwerte um μ
- Bekannte Eigenschaften der (Standard-) Normalverteilung
  - Symmetrisch
  - 95% der Fläche (=Wahrscheinlichkeit) $\pm 1{,}96$ Standardabweichungen vom Mittelwert
  - 99% der Fläche (=Wahrscheinlichkeit) $\pm 2{,}58$ Standardabweichungen vom Mittelwert
  - Weitere Integrale aus z-Tabelle ablesbar

Wh.: Standardnormalverteilung

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN



Intervall	Flächenanteil
$[\mu - 1 \cdot \sigma; \mu + 1 \cdot \sigma]$	68.3%
$[\mu - 1.96 \cdot \sigma; \mu + 1.96 \cdot \sigma]$	95%
$[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma]$	95.4%
$[\mu - 2.58 \cdot \sigma; \mu + 2.58 \cdot \sigma]$	99.0%
$[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma]$	99.7%

Konfidenzintervall

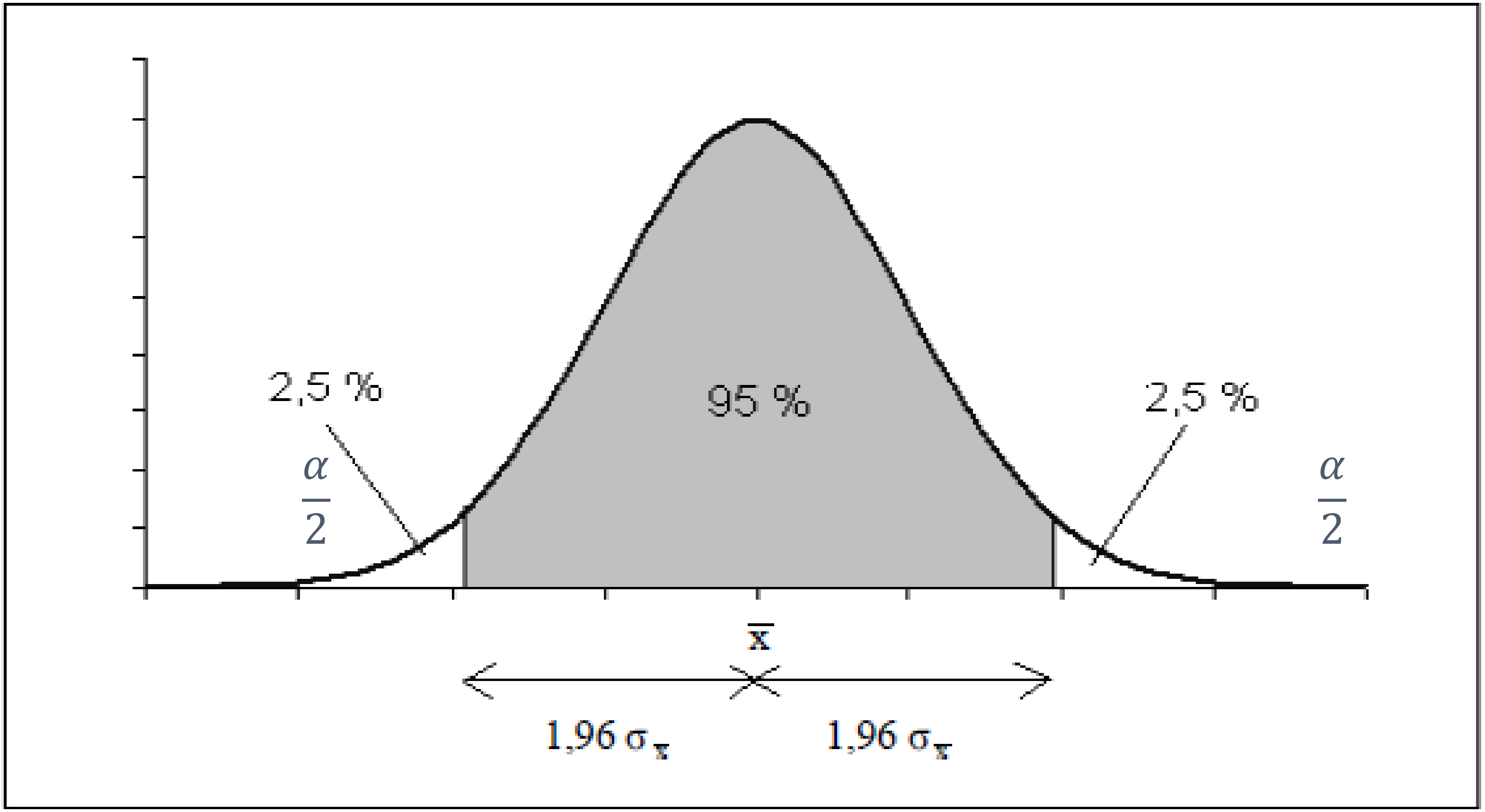
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Angabe eines Bereichs (Intervall), in dem μ sehr wahrscheinlich liegt bzw. vermutet wird
- **95%-Konfidenzintervall (Konvention)**
  - In 95 % aller Stichproben ist $\bar{x}$ nicht mehr als 1,96 Standardfehler von μ entfernt
  - D.h.: Ein Intervall von 1,96 Standardfehlern um $\bar{x}$ schließt μ mit einer Sicherheit von 95 % ein
  - Warum? Nur 2,5 % der Fläche der Standardnormalverteilung liegt oberhalb von z=1,96 und 2,5 % unterhalb von z=-1,96

→ **Verbleibende 5% : „Irrtumswahrscheinlichkeit“ α**

95%-Konfidenzintervall

Abbildung 21.7: 95 %-Konfidenzintervall um den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$



In Anlehnung an
Behnke/Behnke (2006)

Lernziele

- Sie können ein Konfidenzintervall berechnen
- Sie kennen die t-Verteilung als „Alternative“ zur Normalverteilung

α-Wert als Irrtumswahrscheinlichkeit

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Wahrscheinlichkeit, dass Konfidenzintervall μ **nicht** einschließt: Irrtumswahrscheinlichkeit α
- Konfidenzintervall: $1 - \alpha$
- Konvention Forschungspraxis meistens 95% (also α =0,05) oder 99% (α =0,01), zweiseitig
- Symmetrisches Intervall (zweiseitig) begrenzt durch sog. „kritische Werte“

Konfidenzintervall

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Zur Bestimmung der unteren und der oberen Grenze des Konfidenzintervalls benötigen wir $\bar{x}$ und den (geschätzten) Standardfehler

Konfidenzintervall

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

95%-Konfidenzintervall

- Obere Grenze des 95%-Konfidenzintervalls:

$\bar{x}$ +1,96 $\cdot$ $\sigma_{\bar{X}}$

- Untere Grenze des 95%-Konfidenzintervalls

$\bar{x}$ -1,96 $\cdot$ $\sigma_{\bar{X}}$

Beispiel

- Alter der Bevölkerung

($\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma = 15$)

$\bar{x}$=43,5; n=1600

Zwischen welchen Werten erstreckt sich das 95%-Konfidenzintervall um $\bar{x}$?

Beispiel: Alter der Bevölkerung

Beispiel:

($\mu = 43{,}9$ Jahre und $\sigma = 15$)

$\bar{x}$=43,5; n=1600 → Standardfehler: 15/40=0,375

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Obere Grenze des 95%-Konfidenzintervalls:

43,5+1,96 · 0,375=44,235

- Untere Grenze des 95%-Konfidenzintervalls

43,5 -1,96 · 0,375=42,765

→ Mit einer Sicherheit von 95% liegt das mittlere Alter der Population zwischen 44,24 und 42,78 Jahren

→ Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% liegt das …

Schätzung des Standardfehlers

- Aber: in Wirklichkeit kennen wir ja „wahre“ Werte **μ** und **σ** gar nicht und daher auch nicht „wahren“ $\sigma_{\bar{x}}$

→ Schätzung des Standardfehlers auf Basis der Standardabweichung der Stichprobe

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- „Wahre“ Streuung σ wird aus (empirischer) Streuung s in Stichprobe geschätzt

Konfidenzintervalle in der Praxis

- Wahrer Standardfehler nicht bekannt, Streuung in Population muss aus Streuung in Stichprobe geschätzt werden
- t-Verteilung (größere Wahrscheinlichkeit für extreme Werte, Freiheitsgrade)
- Geht bei großen Fallzahlen in Normalverteilung über

t statt z

- z-Werte basieren auf mehr Annahmen, als in den meisten Forschungssituationen erhältlich
  - Relativ unproblematisch für große Stichproben; für kleinere Stichproben empfiehlt sich aber die sogenannte t-Verteilung
  - Außerdem: Wenn Populationsvarianz nicht bekannt, Schätzung auf Basis der t-Verteilung
- t-Verteilung als „genauere“ z- (Normal-)Verteilung

t-Verteilung statt z-Verteilung

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Ebenfalls „glockenförmig“, aber flacher als Normalverteilung
- Wird genutzt für Stichproben < 30 (und wenn wir σ nicht kennen)
- Geht bei großen Fallzahlen in Normalverteilung über
- William S. Gosset „Student“ (1908): t-Verteilung

t-Verteilung

- Form hängt von der sog. Anzahl der Freiheitsgrade (df= degrees of freedom) ab
- Df abhängig von Stichprobengröße: df= n–1

Exkurs: Was sind Freiheitsgrade?

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Freiheitsgrade: Anzahl der Werte, die in einem statistischen Ausdruck frei variieren dürfen
- Beispiel Berechnung Mittelwert 5 Kinder: Dilek, Maria, Fabio, Ben und Lina (n=5) haben durchschnittliches Taschengeld von 8 Euro → df=4

Dilek: 7 Euro, Maria: 8, Fabio: 9, Ben: 7

Wieviel *muss* Lina dann bekommen?

Exkurs: Was sind Freiheitsgrade?

- Freiheitsgrade: Anzahl der Werte, die in einem statistischen Ausdruck frei variieren dürfen
- Beispiel Berechnung Mittelwert: 5 Kinder (n=5) haben durchschnittliches Taschengeld von 8 Euro
  → df=4

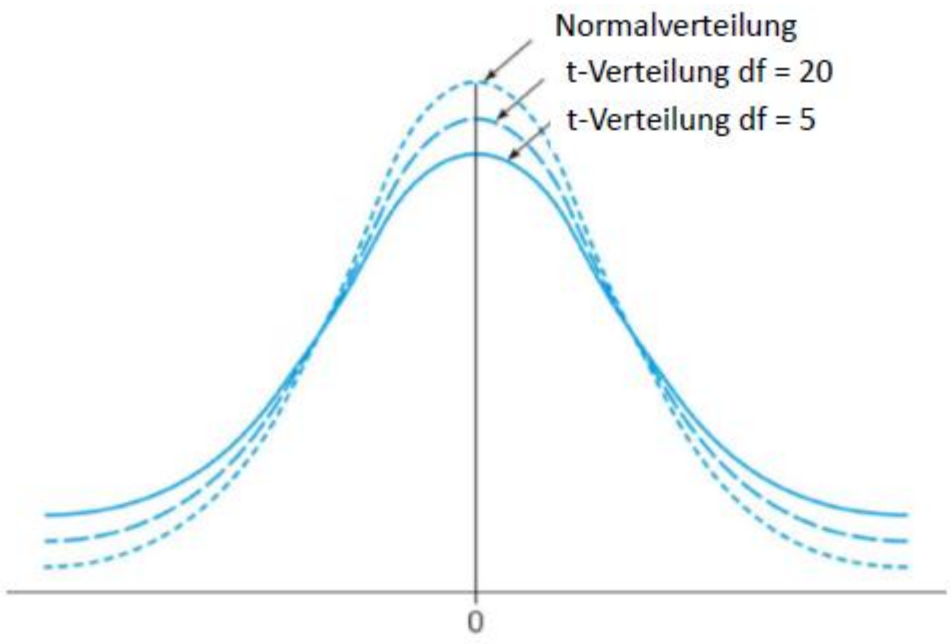
Dilek: 7 Euro, Maria: 8, Fabio: 9, Ben: 7

Wieviel *muss* Lina dann bekommen? → 9 Euro

→ 4 Werte können frei „variieren“, der letzte ist dann gebunden!

t-Verteilung

- Form im Vergleich zur Standardnormalverteilung:



t-Verteilung, kritische t-Werte

- Ähnlich wie für z-Werte liegt für t-Werte eine Tabelle mit assoziierten Anteilen/ Wahrscheinlichkeiten vor (s. Formelsammlung!)
- Symmetrisches Intervall
  - Kritische t-Werte? Abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade bzw. Beobachtungen n
  - „Kritische t-Werte“ bei großen Stichproben (n>1001) wie bei z-Tabelle: $\pm 1{,}96\ (95\%);\ \pm 2{,}58\ (99\%)$
- Ab df>1000→ z-Tabelle

t-Verteilung

- Der Unterschied zur z-Werte Tabelle besteht darin, dass die Freiheitsgrade berücksichtigt werden müssen und nicht alle t-Werte wiedergegeben sind

Berechnung Konfidenzintervall

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- zweiseitig:

$$\bar{x} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} \cdot \boxed{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

Standardfehler $\sigma_{\bar{x}}$

- Formelsammlung:

$$\bar{x} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};v)} * \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};v)} * \sigma_{\bar{x}}$$

Hierbei gilt für die Berechnung des Verteilungsparameters der t-Verteilung:

$$v = n - 1$$

Obergrenze Intervall:

$$x_O = \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2};v)} * \sigma_{\bar{x}}$$

Untergrenze Intervall:

$$x_U = \bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2};v)} * \sigma_{\bar{x}}$$

Beispiel

- 2064 Befragte mit einem Durchschnittsalter von 42,7 Jahren und einer Standardabweichung von 11,2 Jahren – in welchem Bereich liegt (mit 95% Sicherheit) μ ?

→ 1) Bestimmen Sie n, $\bar{x}, s$

Beispiel

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$$

wobei $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

2) Geschätzte Standardabweichung berechnen:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{s^2 \cdot \frac{n}{n-1}} = \sqrt{11{,}2^2 \cdot \frac{2064}{2064-1}} \approx 11{,}2$$

- Geschätzter Standardfehler ist:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{11{,}2}{\sqrt{2064}} \approx 0{,}25$$

3) Ermittlung t-Wert

Konfidenzintervall

- Berechnung Konfidenzintervall:

$$\bar{x} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \boxed{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \longrightarrow \text{Standardfehler } \sigma_{\bar{x}}$$

- Bsp: 2064 Befragte (n) mit einem Durchschnittsalter von 42,7 Jahren ($\bar{x}$) und einer Standardabweichung von 11,2 Jahren
- Geschätzte Standardabweichung für GG ist:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{s^2 \cdot \frac{n}{n-1}} = \sqrt{11{,}2^2 \cdot \frac{2064}{2064-1}} \approx 11{,}2$$

- Geschätzter Standardfehler ist:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{11{,}2}{\sqrt{2064}} \approx 0{,}25$$

- t? alpha?

Beispiel: 3) t-Tabelle

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

	Fläche (1-α)									
df	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
70	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
80	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
90	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
100	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
150	0,386	0,526	0,676	0,844	1,040	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609
200	0,386	0,525	0,676	0,843	1,039	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	0,386	0,525	0,675	0,842	1,038	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
1000	0,385	0,525	0,675	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581
z-Wert	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

- Im Beispiel: t-Wert entspricht dem z-Wert von 1.96!

Beispiel: 4) Bestimmung Konfidenzintervall

- Wir hatten 2064 Befragte (n) mit einem Durchschnittsalter von 42,7 Jahren ($\bar{x}$) und einer Standardabweichung von 11,2 Jahren
- t=1,96 und somit das 95%-Konfidenzintervall für $\alpha = 0{,}05$:

$$\bar{x} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$42{,}7 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}25$$

$$42{,}7 \pm 0{,}49 = [42{,}21; 43{,}19]$$

Beispiel: 5) Interpretation

- (zur Erinnerung: Konfidenzintervall ist der Bereich um einen Kennwert, in dem mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit der „wahre“ Parameter vermutet wird)
- In 95% aller Stichproben ist das arithmetische Mittel des Alters der Bevölkerung zwischen 42,21 und 43,19 Jahren
- *Mit einer Sicherheit von 95% liegt der unbekannte Erwartungswert des arithmetischen Mittels μ zwischen den Intervallsgrenzen 42,21 und 43,19*
- Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ lässt ein Restrisiko von 5 % zu, dass er nicht dort drin liegt

Zusammenfassung

- Das wahre arithmetische Mittel μ zu kennen ist (beinahe nie) möglich
- Zu wissen in welchem Bereich es aber höchstwahrscheinlich liegt, ist auf Basis der Stichprobe über das Konfidenzintervall bestimmbar
- Wie sicher diese Aussage ist, ist abhängig von der gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit α (z.B. 0.05 -> 95%-Konfidenzintervall)
- Konfidenzintervall ist nur Wahrscheinlichkeitsaussage, in der Realität ist μ entweder zu 100 % oder zu 0 % innerhalb der Grenzen
- Je größer die Stichprobe und je geringer die Streuung, umso geringer der Standardfehler und umso „enger“ das Konfidenzintervall

Übungen

- Die folgenden Übungen sind für zuhause und die Tutorien vorgesehen!

t-Werte

Übung mit t-tabelle:

- Wie lautet der kritische t-Wert für df= 6 wenn α= 0,05 (zweiseitig → 0,025 auf beiden Seiten)

Übung: t-Tabelle

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Wie lautet der kritische t-Wert bei einem n von 29 wenn α= 0.05 (zweiseitig)?
- Wie lautet der kritische t-Wert bei einem n von 98 wenn α= 0.05 (zweiseitig)?
- Wie lautet der kritische t-Wert für df= 20 wenn α= 0.01 (zweiseitig)?

Übung Konfidenzintervall

(fiktive) Links-Rechts- Selbsteinschätzung einer Bevölkerung:

$\bar{x} = 5{,}822; s = 2{,}393; n = 1891, gesucht: 95\%$ - Konfidenzintervall: in welchem Intervall liegt mit 95% Sicherheit μ?