Vorlesung: Statistik I

Prof. Dr. Simone Abendschön

5. Einheit

Plan für heute

- **Abschluss univariate Datenanalyse:**
  - Boxplots
  - Standardisierung (Variationskoeffizient V und z-Transformation)

Lernziele

- Sie kennen die Darstellungsform des Boxplots
- Sie können ein Boxplot erstellen und interpretieren
- Sie kennen die Standardisierungsmöglichkeiten einer empirischen Verteilung mit Variationskoeffizienten und der z-Transformation

Boxplot

(auch Box-Whisker-Plot)

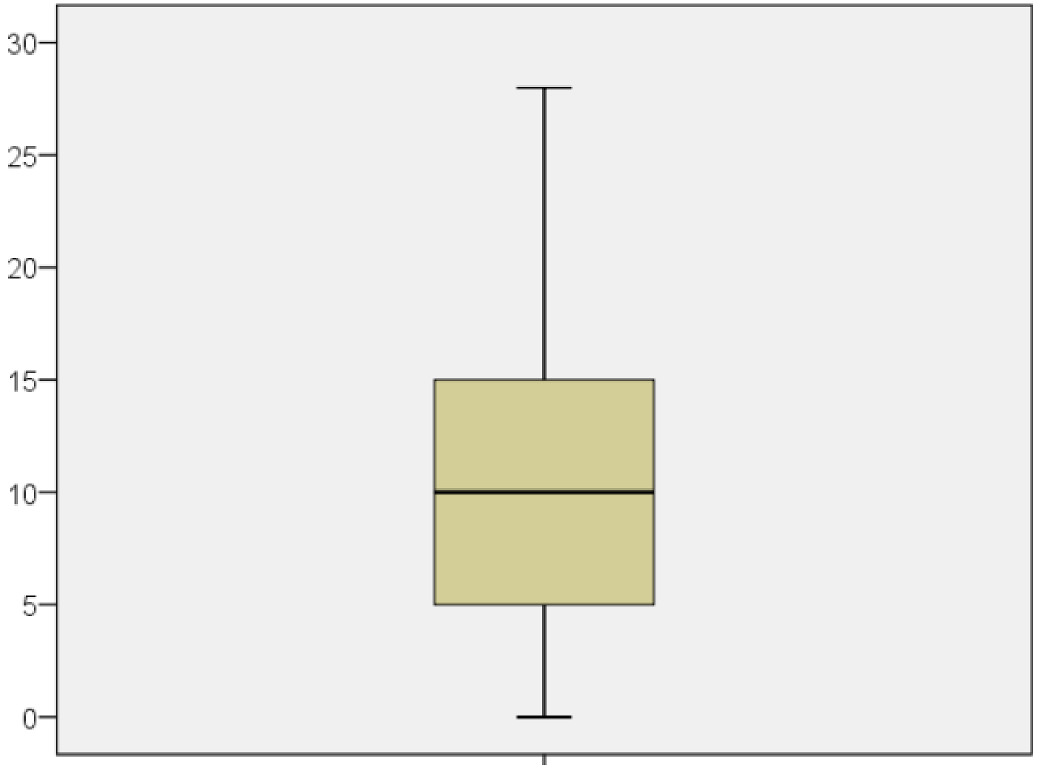
- Kompakte univariate Beschreibung einer Verteilung, Lage-/ Streumaße
- Merkmal sollte (pseudo-)metrisch skaliert sein
- Ausreißer bzw. extreme Abweichungen lassen sich gut erkennen
- Mehrere Kennwerte werden dargestellt:
  - Median
  - Unteres Quartil / Oberes Quartil → IQR
  - Variationsweite
  - Evtl. Extremwerte

Boxplots

- Waagrechte und senkrechte Darstellung möglich
- Statistikprogramme i.d.R. senkrechte Darstellung

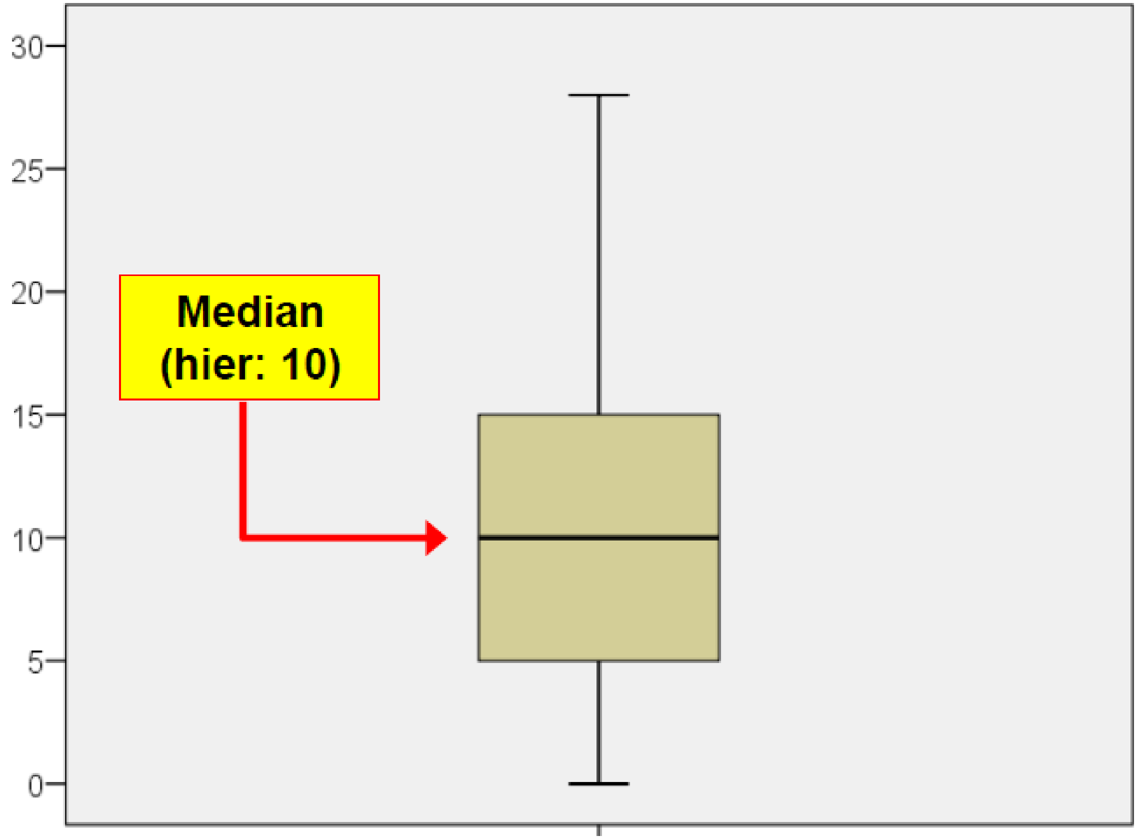
Boxplot

- Beispiel ohne Ausreißer, erstellt in SPSS

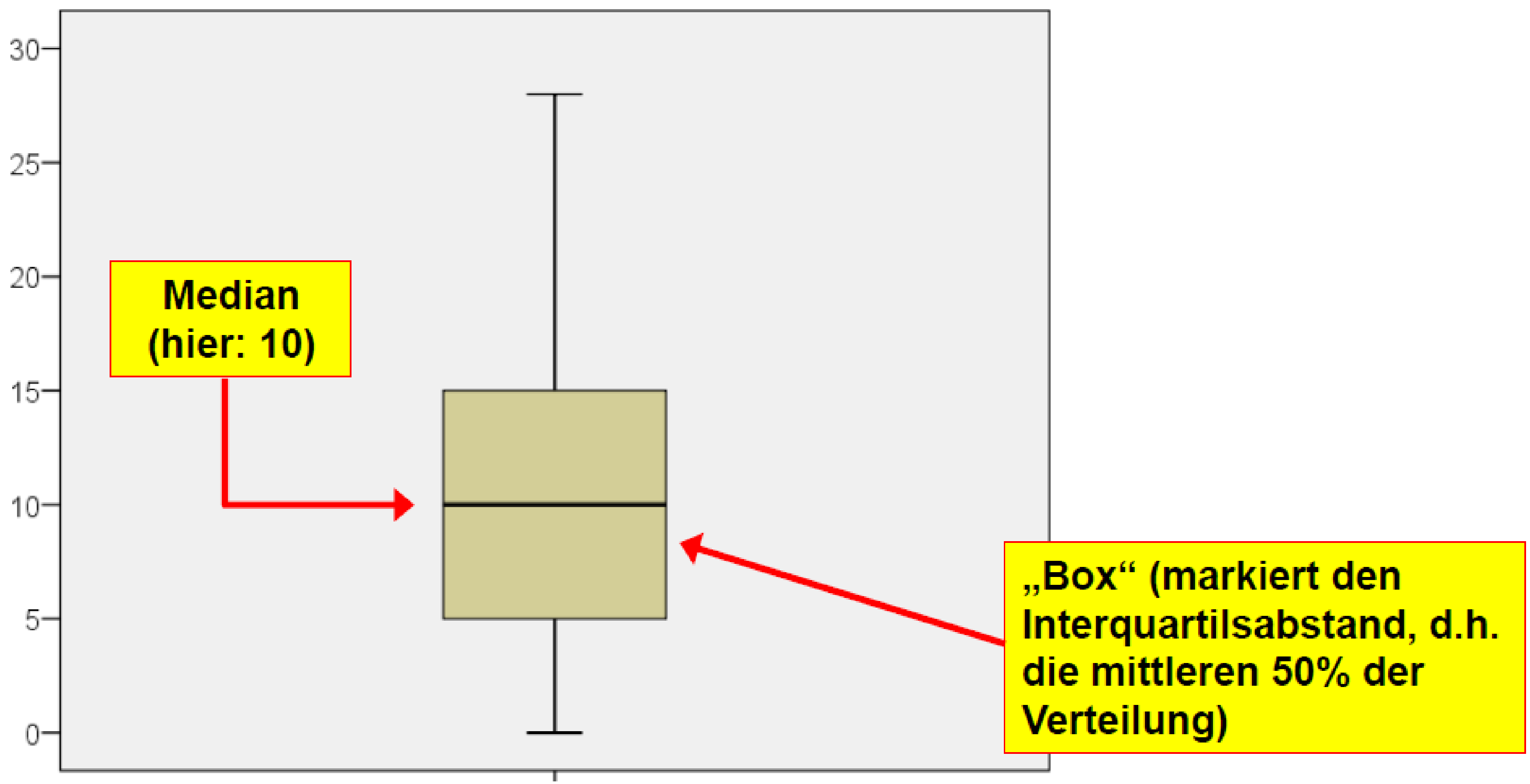


Boxplot

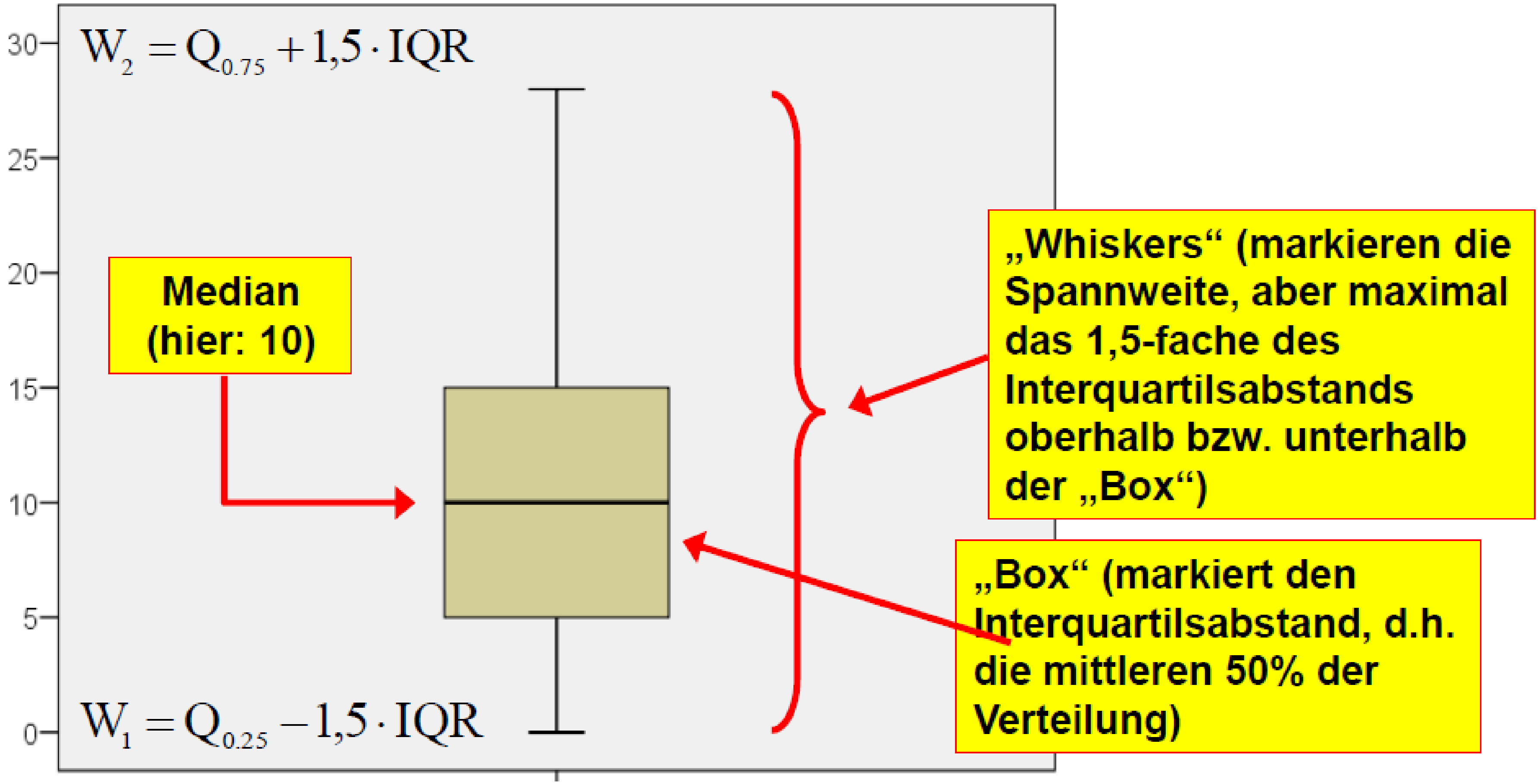
Beispiel ohne Ausreißer, erstellt in SPSS



Boxplot

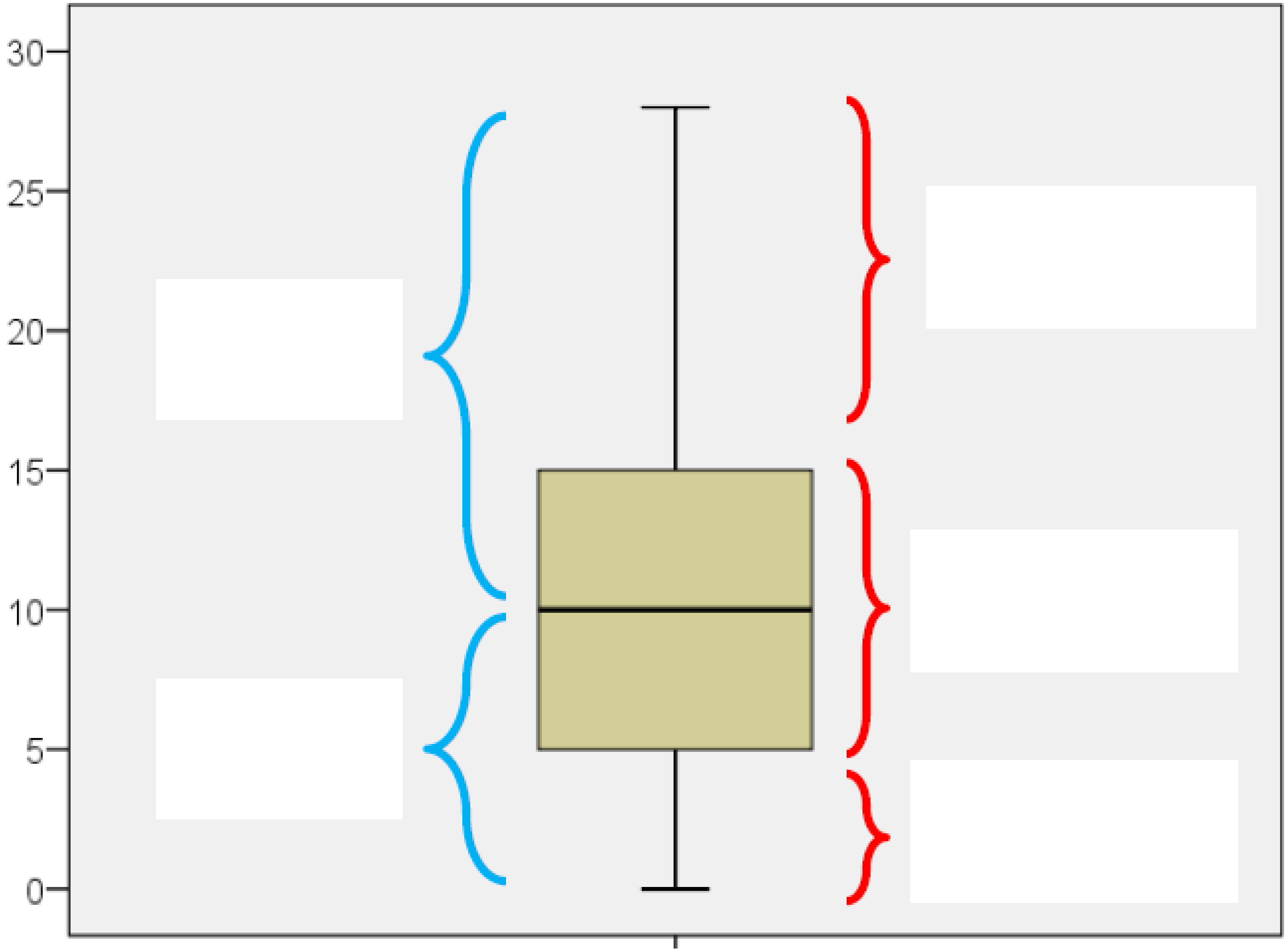

30
25
20
15
10
5
0
Median
(hier: 10)
„Box“ (markiert den Interquartilsabstand, d.h. die mittleren 50% der Verteilung)

Boxplot

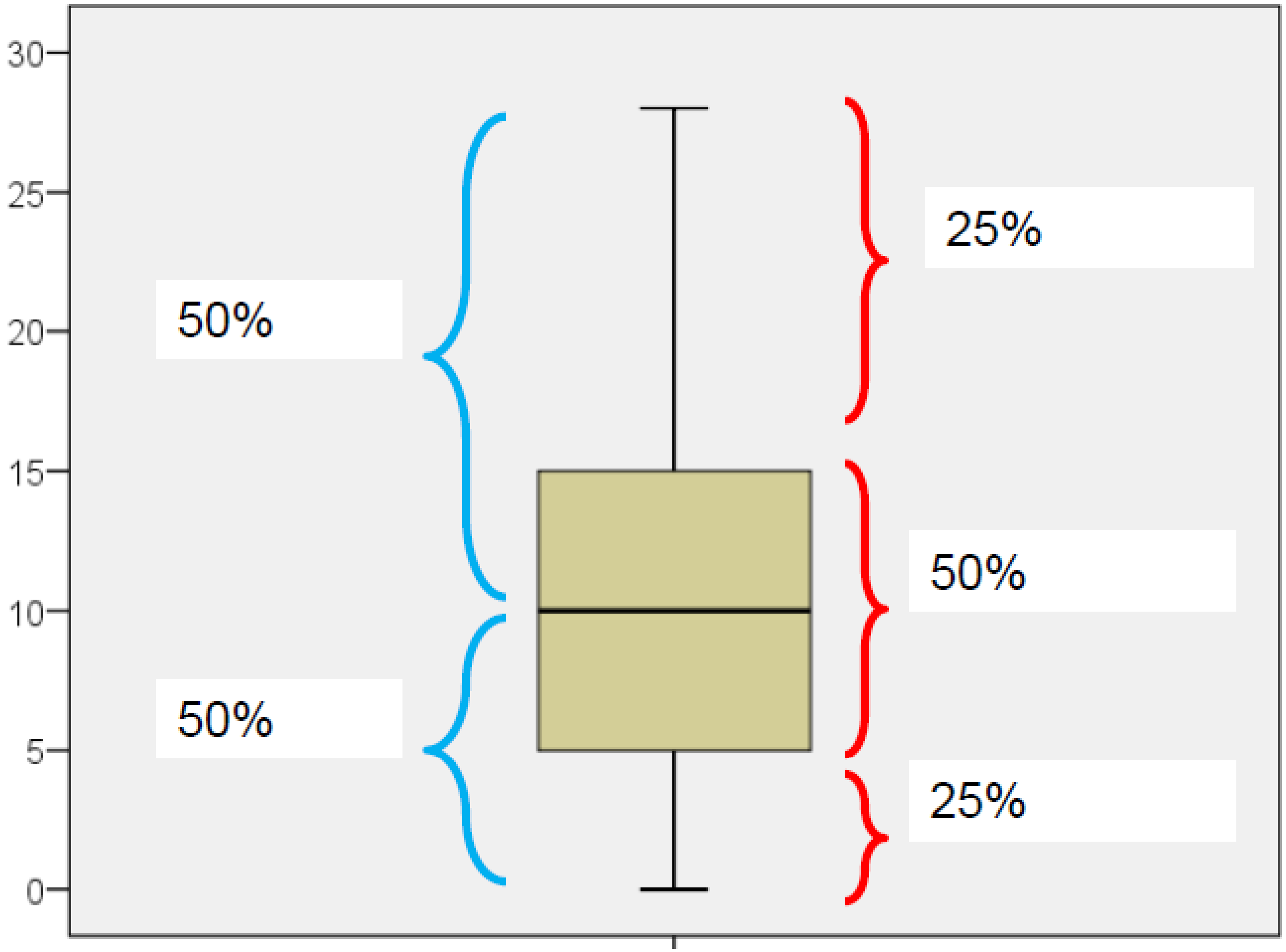


30
25
20
15
10
5
0
$W_2 = Q_{0.75} + 1{,}5 \cdot IQR$
$W_1 = Q_{0.25} - 1{,}5 \cdot IQR$
Median (hier: 10)
„Whiskers“ (markieren die Spannweite, aber maximal das 1,5-fache des Interquartilsabstands oberhalb bzw. unterhalb der „Box“)
„Box“ (markiert den Interquartilsabstand, d.h. die mittleren 50% der Verteilung)

Boxplot



Boxplot



Übung: Boxplot

Sie haben für eine Verteilung folgende Kennwerte ermittelt:

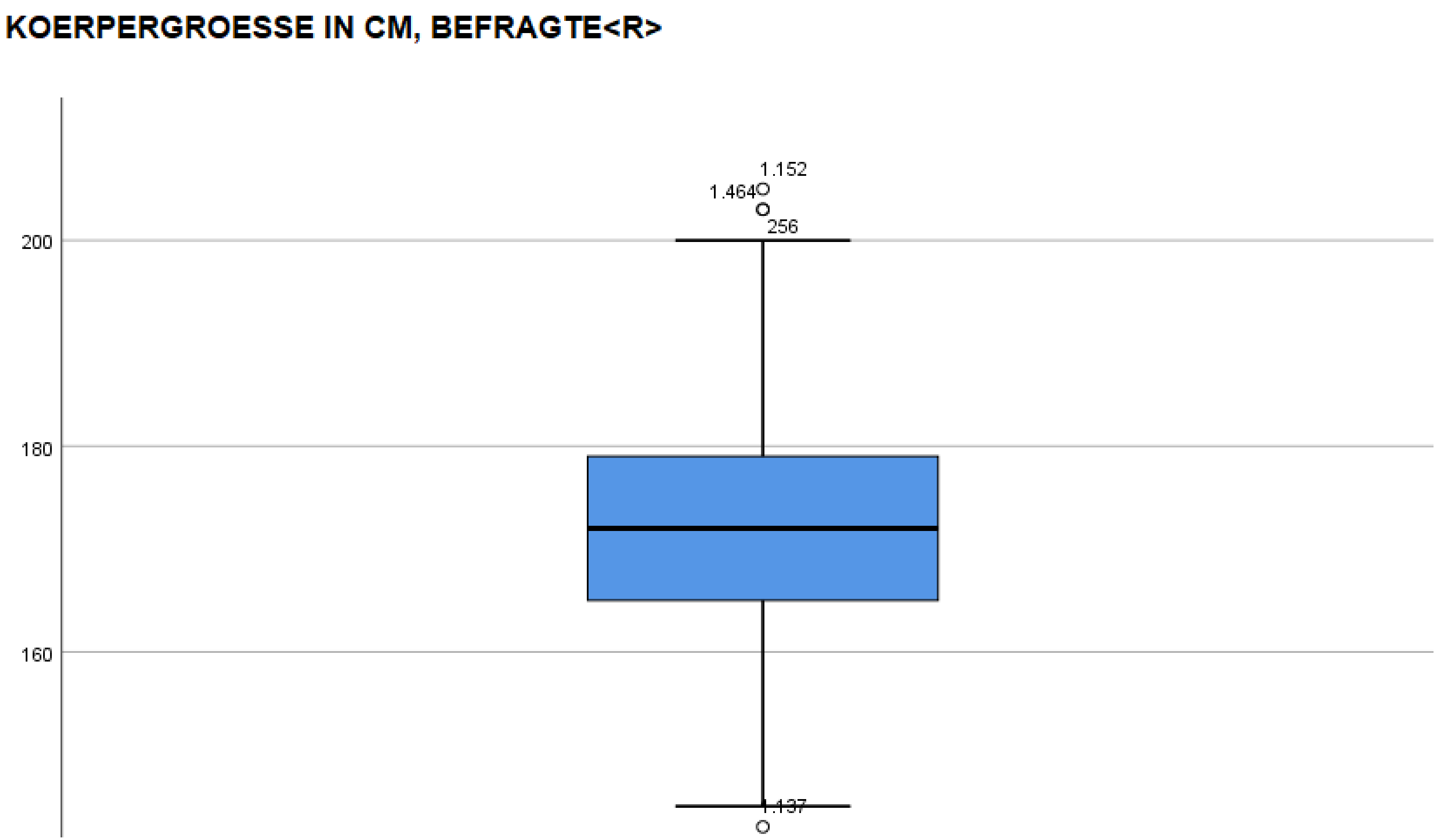
	Wert
Minimum	=8
1. Quartil	=11
Median	=12
3. Quartil	=14
Maximum	= 16

Bitte skizzieren Sie auf dieser Basis ein einfaches Boxplot (senkrecht oder waagrecht)

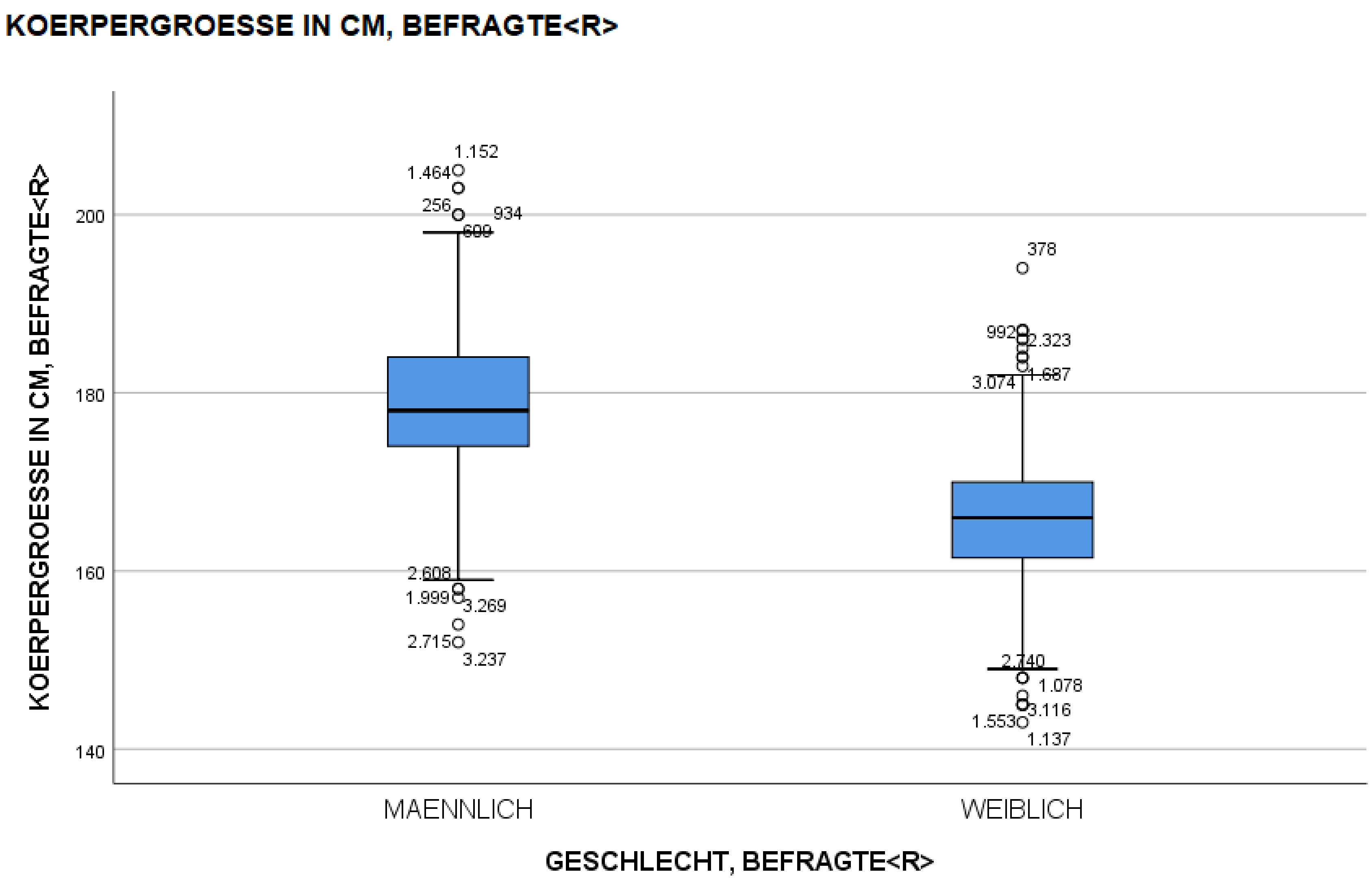
Boxplot: Ausreißer und Extremwerte

- Ausreißer bzw. Extremwerte einer empirischen Verteilung befinden sich außerhalb der „Whisker“ des Boxplot.
- Teilweise (SPSS) Unterscheidung zwischen Ausreißern und Extremwerten.
- Ausreißer: Werte, die um mehr als das 1.5-fache des IQR oberhalb des 3. Quartils bzw. unterhalb des 1. Quartils liegen (in SPSS durch kleine Kreise dargestellt)
- Extremwerte: Werte, die um mehr als das 3-fache des IQR oberhalb des 3. Quartils (bzw. unterhalb des 1. Quartils) liegen (in SPSS durch kleine Sternchen gekennzeichnet)

Boxplot, Beispiel ALLBUS 2016



Boxplots - Vergleich zweier Gruppen



Standardisierungsverfahren

Standardisierungsverfahren helfen, verschiedene Verteilungen miteinander zu vergleichen

1) **Variationskoeffizient V vergleicht Streuungen zwischen Gruppen**

2) Z-Transformation erlaubt Vergleich von Werten unterschiedlicher Verteilungen

Variationskoeffizient V

Erhält man, wenn man die Standardabweichung durch den Mittelwert teilt:

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

Voraussetzung x ungleich 0

V > 1, wenn s>x

Übung: Variationskoeffizient V

Berechnen Sie V für die folgenden beiden (Mini-)Gruppen. In welcher Gruppe streut das Einkommen stärker?

Einkommen von Studierenden:

x_1= 500, x_2= 550, x_3= 600

Mittleres Einkommen von Studierenden: 550€

Standardabweichung: 40.82

Einkommen von Millionären:

x_1= 500.000, x_2= 500050,

x_3 = 500.100

Mittleres Einkommen von Millionären:

500 050 €

Standardabweichung: 40.82

Standardisierungsverfahren

Standardisierungsverfahren helfen, verschiedene Verteilungen miteinander zu vergleichen.

1) Variationskoeffizient V vergleicht Streuungen zwischen Gruppen
2) **Z-Transformation standardisiert Rohwerte, erlaubt Vergleich von Werten unterschiedlicher Verteilungen**

Z-Transformation

- **Die sog. „Z-Transformation“ wandelt Rohwerte in sog. „z-Werte“ um**
- **Hauptanwendungen für z-Werte:**

(1) Standardisierung von Rohwerten - Präzise Information über die *relative* Position der Rohwerte innerhalb der Verteilung

(2) Standardisierung von Verteilungen (ermöglicht Vergleich über verschiedene Verteilungen hinweg)

Z-Transformation

„76 Punkte in der Klausur“

Frage: Relativ gut? Relativ schlecht?

Z-Transformation

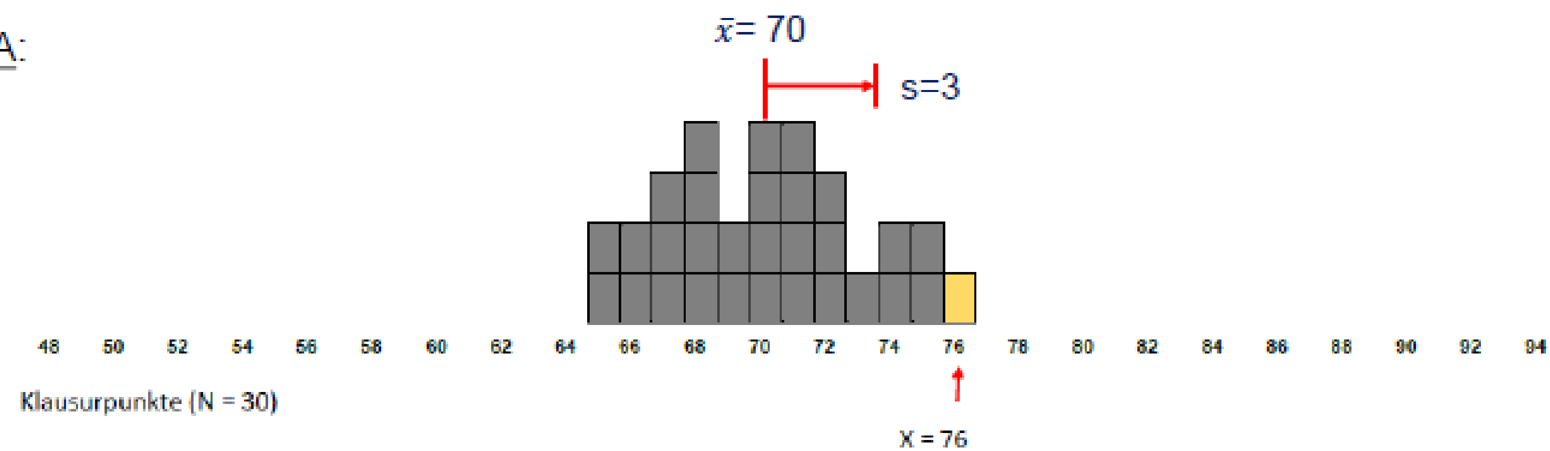
- „76 Punkte in der Klausur“ - Relativ gut? Relativ schlecht?

- Arithmetischer Mittelwert $\bar{x} = 70$
  - 6 Punkte über „dem Durchschnitt“
  - vergleichsweise große oder kleine Distanz zum Mittelwert?

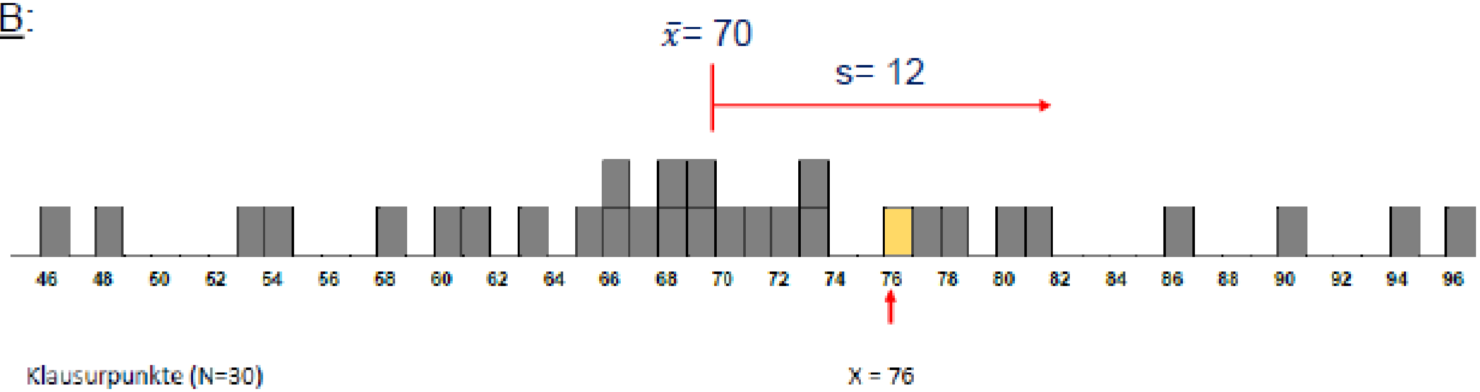
→ Standardabweichung s: Informationen über die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert

Z-Transformation

Beispiel A:



Beispiel B:



Z-Transformation

- Aus Rohwerten kann oft nur eingeschränkt auf ihre *relative* Position innerhalb einer Verteilung geschlossen werden
- Arithmetischer Mittelwert und Standardabweichung vermitteln zusätzliche Informationen
- Z-Transformation wandelt x-Werte in z-Werte um durch Einbezug von $\bar{x}$ und s
- ermöglicht Standardisierung der Rohwerte

Berechnung z-Werte

- Der z-Wert z_i eines Wertes x_i wird formal folgendermaßen berechnet:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

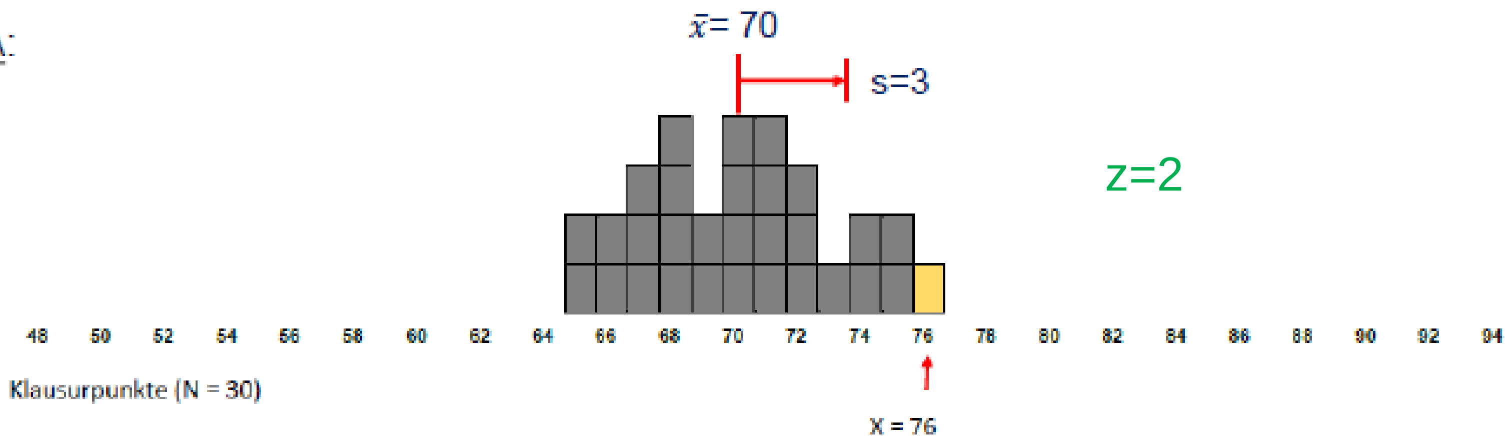
z-Werte

Wodurch zeichnen sich z-Werte aus?

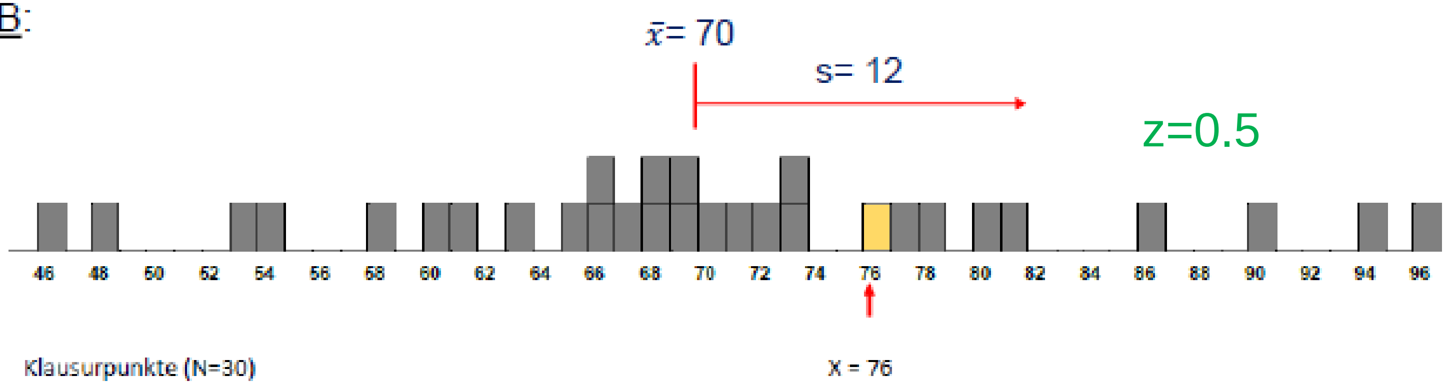
- Vorzeichen gibt an, ob sich der jeweilige Wert oberhalb (+) oder unterhalb (-) des arithmetischen Mittelwertes befindet
- Der numerische Wert informiert über die Distanz zwischen dem Rohwert und dessen Mittelwert in Standardabweichungseinheiten

z-Werte

Beispiel A:



Beispiel B:



Beispiel z-Werte

Beispiel:

- Für eine Verteilung einer Stichprobe von IQ-Werten mit $\bar{x}$ = 100 und s = 15 würde ein Rohwert X = 130 einem z-Wert von z = + 2.00 entsprechen
- Positives Vorzeichen, da oberhalb des Mittelwerts
- 2 Standardabweichungen über dem Mittelwert, da 30 Punkte über dem Mittelwert

Übung z-Werte

Lisa und Bart haben jeweils an einem Leistungstest teilgenommen. Wer hat „besser“ abgeschnitten?

Person	Wert (x_i)	Arithmetisches Mittel ($\bar{x}$)	Standardabweichung (s_x)
Lisa	45	25	10
Bart	60	50	25

Übung z-Werte

1. Wie lautet der jeweilige z-Wert, der den folgenden Positionen innerhalb einer Verteilung entspricht?

- 2 Standardabweichungen unterhalb des Mittelwertes:
- 0.5 Standardabweichungen oberhalb des Mittelwertes:
- 1.5 Standardabweichungen unterhalb des Mittelwertes:

2. Beschreiben Sie die Position der folgenden z-Werte innerhalb der Verteilung:

- z = -1.5:
- z = 0.25:

3. Wie lautet der jeweilige z-Wert für die nachfolgenden X-Werte ($\bar{x} = 30$ und s=8)?

- X = 32:
- X = 26:

Abschluss univariate Datenanalyse

- **Häufigkeiten und Verteilungen eines Merkmals beschreiben, bestimmen und/oder darstellen**
- **Zentrale Kennwerte (Lage, Streumaße) können berechnet werden**
- **Boxplots und Standardisierungsverfahren sind bekannt**