Statistik II, 12.6.23

Prof. Dr. Simone Abendschön

Logik des statistischen Testens, Hypothesentests

Plan

- Infos restliches Semester und E-Klausur
- Kurze Wdh. Übung Konfidenzintervall
- Statistisches Testen (Hypothesentests, „Signifikanztests“)
    - Allgemeine Logik und erstes Beispiel mit z-Test
    - T-Tests
- Lineare Regression
- Wdh. – „Was war wichtig?“

E-Klausur, neue PO

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Inhalte Statistik I und II
- Ca. **20 Fragen** in „Ilias-Format"
  - Entweder Single-Choice
  - Eingabe 1-2 berechnete Zahlen
- Teilweise sehr schnell zu beantworten, Bsp:
  - Welches Skalenniveau hat das Merkmal „Ranking Kinofilme"? (Nominal, Ordinal, Ratio, Intervall)
- Teilweise etwas längere Bearbeitungszeit, Bsp:
  - Bestimmung Konfidenzintervall (siehe Übung letztes Mal)
- Bitte Fragen in Ruhe und genau lesen!
- Inhaltliche Fragen weiterhin im Rahmen der Vl
- Konkretes Format in Ilias: letzte Vl-Woche

E-Klausur, alte PO

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Inhalte Statistik II
- Ca. **20 Fragen** in „Ilias-Format“
    - Entweder Single-Choice
    - Eingabe 1-2 berechnete Zahlen
- Bitte Fragen in Ruhe und genau lesen!
- Inhaltliche Fragen weiterhin im Rahmen der Vl
- Konkretes Format in Ilias: letzte Vl-Woche

E-Klausur - Hilfsmittel

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Bitte mitbringen:

- Taschenrechner
- Ausgedruckte Formelsammlung

Sonst keine Hilfsmittel möglich

Übungen Konfidenzintervall

1) Berechnen Sie das 90% Konfidenzintervall für das Alter-Beispiel aus der letzten Vorlesungseinheit.

2) (fiktive) Links-Rechts- Selbsteinschätzung einer Bevölkerung:

$\bar{x} = 5{,}822; s = 2{,}393; n = 1891, gesucht: 95\%$ - Konfidenzintervall: in welchem Intervall liegt mit 95% Sicherheit μ?

1) Übung 1, Konfidenzintervall $\alpha = 0,1$

- Wir hatten 2064 Befragte (n) mit einem Durchschnittsalter von 42,7 Jahren ($\bar{x}$) und einer Standardabweichung von 11,2 Jahren
- Geschätzte Standardabweichung ist:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{s^2 \cdot \frac{n}{n-1}} = \sqrt{11{,}2^2 \cdot \frac{2064}{2064-1}} \approx 11{,}2$$

- Geschätzter Standardfehler ist:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{11{,}2}{\sqrt{2064}} \approx 0{,}25$$

- t=1,645 und somit das 90%-Konfidenzintervall für $\alpha = 0.1$:

$$\bar{x} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$42{,}7 \pm 1{,}645 \cdot 0{,}25$$

$$42{,}7 \pm 0{,}41 = [42{,}29; 43{,}11]$$

t-Tabelle: Übung 1

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

df	Fläche (1-α) 0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
70	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
80	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
90	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
100	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
150	0,386	0,526	0,676	0,844	1,040	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609
200	0,386	0,525	0,676	0,843	1,039	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	0,386	0,525	0,675	0,842	1,038	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
1000	0,385	0,525	0,675	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581
z-Wert	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

- Beispiel hat df=n-1=2064-1=2063 Freiheitsgrade, also klar über 1000 Befragte -> Normalverteilung als Approximation für t-Verteilung, t-Wert entspricht dem z-Wert von 1.645!

Übungen Konfidenzintervall

1) Berechnen Sie das 90% Konfidenzintervall für das Alter-Beispiel aus der letzten Vorlesungseinheit.

2) (fiktive) Links-Rechts- Selbsteinschätzung einer Bevölkerung:

$\bar{x} = 5{,}822; s = 2{,}393; n = 1891, gesucht: 95\%$ - Konfidenzintervall: in welchem Intervall liegt mit 95% Sicherheit μ?

Konfidenzintervall, Übung 2

- Berechnung Konfidenzintervall:

$$\bar{x} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \boxed{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \longrightarrow \text{Standardfehler } \sigma_{\bar{x}}$$

- Bsp: 1891 Befragte (n) mit einem Mittelwert von 5,822 ($\bar{x}$) und einer Standardabweichung von 2,393
- Standardfehler schätzen: $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}393}{\sqrt{1891}} = 0{,}055$
- „Kritischen Wert" suchen
  - N $> 1000 \rightarrow$ Normalverteilung als Approximation für t-Verteilung
  - In t/z-Tabelle Wert finden, der links und rechts 2,5% der Fläche abtrennt: 1,96

Konfidenzintervall

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- 90%-Konfidenzintervall:
$$42{,}7 \pm 0{,}41 = [42{,}29; 43{,}11]$$
- 95%-Konfidenzintervall:
$$42{,}7 \pm 0{,}49 = [42{,}21; 43{,}19]$$

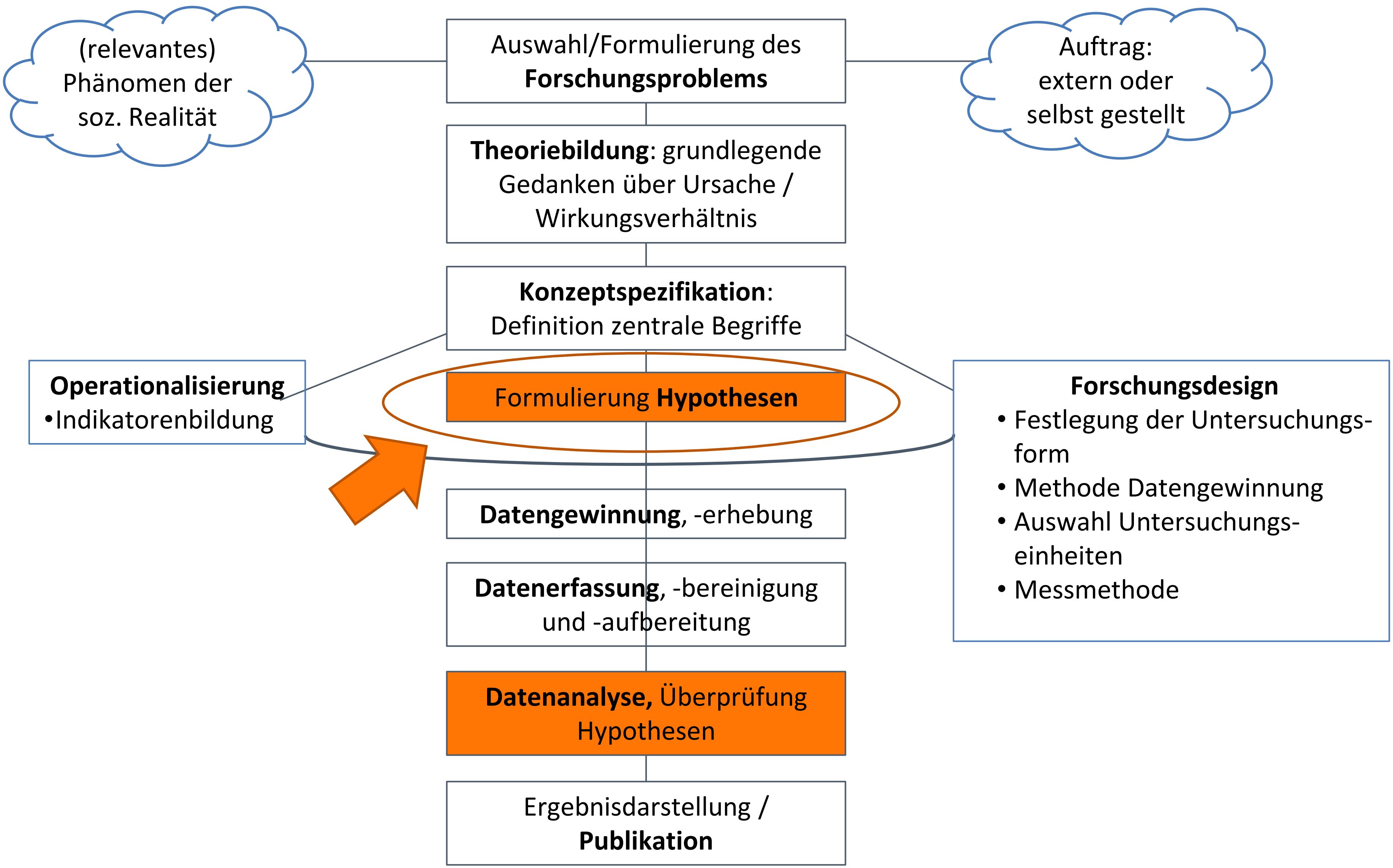
- Kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit verbreitert Vertrauensbereich, keine „höhere“ Genauigkeit
- Größere Irrtumswahrscheinlichkeit: Sicherheit, dass das Intervall den „wahren“ Wert enthält sinkt

→ Genauigkeit geht zu Lasten von Sicherheit bei einem Konfidenzintervall

Thema

- Statistisches Testen (Hypothesentests, „Signifikanztests“)
  - Allgemeine Logik

Hintergrund: Forschungsprozess



Hypothesen

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Überprüfung:

- Typischerweise ist es nicht möglich, alle Individuen in der Grundgesamtheit zu analysieren
- Hypothesen werden auf Basis einer Stichprobe untersucht
- Inwiefern darf verallgemeinert werden? → Inferenzstatistik

Lektüreaufgabe Kuckartz et al. 2013

Kurze Gruppenarbeit

- Was ist eine Hypothese? Formulieren Sie zudem eine Beispielhypothese.
- Welche „Hypothesenarten“ werden unterschieden?

Hypothesen

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Aussagen, in denen über einen Sachverhalt bzw. über den Zusammenhang zwischen **zwei** oder mehr Sachverhalten Vermutungen angestellt werden
- Engerer Ausgangspunkt (quantitativer) empirischer Forschung
  - vorläufig noch nicht bewährte Aussagen über die soziale Realität
  - überprüfbar und falsifizierbar
  - probabilistisch statt deterministisch
- Allgemeingültig, gehen über Einzelfall hinaus
- Häufig Formalstruktur: Wenn/Dann; Je/Desto (aV/uV)
- Beispiel?

Hintergrund

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Basis quantitativer Sozialforschung: Hypothesen, die verallgemeinern
  - Beispiele:
    - „Je geringer der soziale Status im Rentenalter desto schlechter der Gesundheitszustand“
    - „Je fremdenfeindlicher die Einstellung desto eher wird die AfD gewählt“
    - „Wenn eine Person Blutgruppe 0 hat, hat sie eine geringere Wahrscheinlichkeit an Corona zu erkranken“
    - „Frauen ernähren sich eher vegan als Männer“

Hypothesenarten

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- *Unterschiedshypothesen*: es wird ein Unterschied zwischen (mindestens) 2 Gruppen vermutet
  - Rentner*innen mit hohem sozialen Status haben einen besseren Gesundheitszustand als Rentner*innen mit niedrigem sozialen Status
- *Zusammenhangshypothesen*: Zusammenhänge von (mind.) 2 Variablen werden untersucht
  - Beispiel: „Je geringer der soziale Status desto schlechter der Gesundheitszustand im Rentenalter“

Lektüreaufgabe Kuckartz et al. 2013

Kurze Gruppenarbeit

- Was ist eine Hypothese? Formulieren Sie zudem eine Beispielhypothese.
- Welche „Hypothesenarten“ werden unterschieden?

Hypothesenarten

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- *Ungerichtete Hypothesen*: hier wird lediglich ein Unterschied zwischen 2 Variablen vermutet, aber keine Aussage über die *Richtung* des Unterschieds getroffen, z.B.
  - Das Umweltbewusstsein unterscheidet sich nach Geschlecht
- *Gerichtete Hypothesen*: es wird ein Effekt/Unterschied in einer bestimmten Richtung vermutet, z.B.
  - Frauen sind umweltbewusster als Männer
  - Schüler*innen, die mit einer neuen politikdidaktischen Methode unterrichtet wurden, haben mehr gelernt als die, die mit der alten Methode unterrichtet wurden

Forschungsprozess

(relevantes) Phänomen der soz. Realität

Auswahl/Formulierung des **Forschungsproblems**

Auftrag: extern oder selbst gestellt

Theoriebildung: grundlegende Gedanken über Ursache / Wirkungsverhältnis

Konzeptspezifikation: Definition zentrale Begriffe

Operationalisierung
- Indikatorenbildung

Formulierung **Hypothesen**

Forschungsdesign
- Festlegung der Untersuchungs-form
- Methode Datengewinnung
- Auswahl Untersuchungs-einheiten
- Messmethode

Datengewinnung, -erhebung

Datenerfassung, -bereinigung und -aufbereitung

Datenanalyse, Überprüfung Hypothesen

Ergebnisdarstellung / **Publikation**

Statistisches Testen

- Wichtiges Teilgebiet der Inferenzstatistik
- Hintergrund: Zentraler Grenzwertsatz
- Prüft vorab formulierte Hypothesen
- Wie wahrscheinlich ist es, dass ein bestimmter empirischer Sachverhalt der Stichprobe „zufällig“ zustande gekommen ist?

→ Angabe zur „statistischen Signifikanz“

Statistische Signifikanz

- Antwort auf die Frage: Wie lassen sich mit Stichproben Hypothesen über eine (normalerweise unbekannte) Grundgesamtheit überprüfen?
- Wenn Stichprobenergebnisse mit einer bestimmten Sicherheit **nicht durch Zufall** zustande gekommen sind spricht man von statistischer Signifikanz
- Damit lassen sich (mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit) Rückschlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit ziehen.

Statistische Tests und Hypothesenprüfung

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Alle statistischen Hypothesentests prüfen auf „statistische Signifikanz“
- Berechnung statistischer Signifikanz („Signifikanzniveaus“, Signifikanztests)
- Kernlogik: Test „Nullhypothese“ H_0 vs. „Alternativhypothese“ (H_A)

Statistische Tests und Hypothesenprüfung

- (Hypothesen-)Testverfahren u.a.
  - **Mittelwertunterschiede bei bekannter Streuung in GG (z-Test)**
  - Mittelwertunterschiede für unabhängige/abhängige Stichproben (t-Test)
  - (χ^2-Test auf Unabhängigkeit)
- Zahlreiche weitere Testverfahren mit identischer Logik (Regressionskoeffizienten)

Statistische Tests und Hypothesenprüfung

- Z.B. Prüfen von Mittelwertunterschieden (t-test)
  - Unterscheiden sich Rentner*innen von unterschiedlichen sozialen Gruppen bezüglich ihres Gesundheitszustands?
  - Hat eine bestimmte didaktische Maßnahme („Treatment“) zur Steigerung der Mathekompetenz Erfolg gehabt? (experimentelles Setting)
  - Auch bei Medikamententests, etc.

Statistische Tests und Hypothesenprüfung

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Alle statistischen Hypothesentests prüfen auf „statistische Signifikanz“
- Berechnung statistischer Signifikanz („Signifikanzniveaus“, Signifikanztests)
- Kernlogik: Test „Nullhypothese“H_0 vs. „Alternativhypothese“ (H_A)

Was ist eine „Alternativhypothese“?

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Forschungshypothese (idealerweise inhaltlich interessante, theoretisch begründete Hypothese über Zusammenhänge in GG!)
- Beispiele
  - „Es besteht ein Zusammenhang zwischen fremdenfeindlichen Einstellungen und Wahl der AfD“ (Je fremdenfeindlicher ein/e Wähler/in desto wahrscheinlicher wählt die Person AfD)
  - „Rentner*innen mit niedrigem sozialen Status haben einen schlechteren Gesundheitszustand als Rentner*innen mit höherem sozialen Status“

- Alternativhypothese wird mit H_A oder H_1 bezeichnet

Was ist eine „Nullhypothese"?

- H_0 als „Gegenspielerin" zur H_A, negiert diese
  - „Zwischen fremdenfeindlichen Einstellungen und der Wahl der AfD besteht kein Zusammenhang"
  - „Rentner*innen mit niedrigem soz. Status haben keinen schlechteren Gesundheitszustand als die mit höherem soz. Status"
- H_0 als (inferenzstatistisch) konservative Grundannahme, „Status Quo"
- H_0 und H_A schließen sich gegenseitig aus und beschreiben Möglichkeitsraum vollständig, d.h.: es gilt entweder H_0 oder H_A

Analogie Gerichtsverfahren

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

„Gerichtsverfahren“

1. Unschuldsvermutung des Angeklagten bis zum Nachweis des Gegenteils
2. Ermittlungen zum Nachweis, dass der Beschuldigte tatsächlich die Tat begangen hat.
3. Bei entsprechender Evidenz: Zurückweisung der Unschuldsvermutung und Urteil.
4. Bei nicht ausreichender Evidenz Schlussfolgerung, dass der Beschuldigte nicht schuldig gesprochen werden kann („Freispruch aus Mangel an Beweisen“)

Analogie Gerichtsverfahren

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

„Hypothesentest“

1. Formulierung einer Nullhypothese, der zufolge kein Unterschied/keine Wirkung vorliegt.
2. Datenerhebung zum Nachweis, dass tatsächlich ein Unterschied/eine Wirkung vorliegt.
3. Bei entsprechender Evidenz: Zurückweisung der Nullhypothese und Schlussfolgerung, dass tatsächlich ein Unterschied/eine Wirkung vorliegt.
4. Bei nicht ausreichender Evidenz Schlussfolgerung, dass die Nullhypothese „vorläufig nicht zurückgewiesen werden kann“ .

„Gerichtsverfahren“

1. Unschuldsvermutung des Angeklagten bis zum Nachweis des Gegenteils
2. Ermittlungen zum Nachweis, dass der Beschuldigte tatsächlich die Tat begangen hat.
3. Bei entsprechender Evidenz: Zurückweisung der Unschuldsvermutung und Urteil.
4. Bei nicht ausreichender Evidenz Schlussfolgerung, dass der Beschuldigte nicht schuldig gesprochen werden kann („Freispruch aus Mangel an Beweisen“)

Was ist ein „Signifikanztest"?

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Alle Hypothesentests prüfen **statistische Signifikanz**
- Signifikanztest gibt an, wie wahrscheinlich der Stichprobenbefund wäre, wenn in der Grundgesamtheit *kein* Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen besteht bzw. sich zwei Gruppen *nicht* unterscheiden
- Berechnung Prüfgröße (Teststatistik) auf Basis der Stichprobe
- Prüfgrößen als
  - Realisierung einer Zufallsvariablen
  - Mit bekannter Verteilung → Berechnung Wahrscheinlichkeiten
- Identifikation „kritischer Schwellenwerte" → Signifikanzniveau

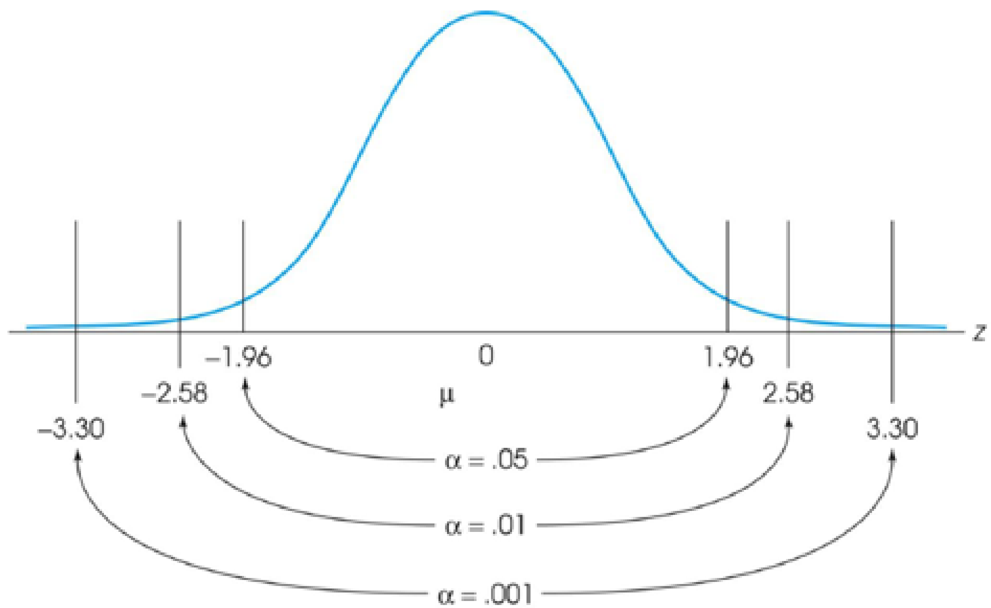
p-Werte

Der *p*-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei Gültigkeit der Nullhypothese den Wert der Prüfgröße oder einen mit der Nullhypothese noch weniger zu vereinbarenden Wert in der Stichprobe zu erhalten.

- Die Nullhypothese wird verworfen, wenn *p*-Wert kleiner als das gewählte Signifikanzniveau α
- Die Nullhypothese wird beibehalten, wenn *p*-Wert > α

Signifikanzniveaus und p-Werte

- Konvention: 5%-, 1%-, 0,1%-Signifikanzniveaus (bei kleinen Stichproben auch 10%), 0,05, 0,01 und 0,001
- P-Wert ("*p*-Value"): für eine Prüfgröße berechnete Irrtumswahrscheinlichkeit, Analyseergebnisse werden in Forschungspraxis häufig mit p-Wert und/oder „Sternchen" angegeben; ***p<0,001; ** p<0,01; * p<0,05



Signifikanzniveau

- Kritischer Schwellenwert bzw. maximal akzeptierte Irrtumswahrscheinlichkeit, unterhalb der man bereit ist die Nullhypothese abzulehnen
- Signifikanzniveau von 0,05: Ein Stichprobenergebnis wird als statistisch signifikant akzeptiert, wenn es „rein zufällig“ nur in 5 Prozent aller Stichprobenziehungen auftreten würde

→ Es kann mit einer 95% Sicherheit davon ausgegangen werden, dass ein Rückschluss auf Population gezogen werden kann

Hypothesentest 4 Schritte

1. Formulierung der Hypothesen und Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)
2. Bestimmung des Ablehnungsbereiches für H_0
3. Bestimmung der Prüfgröße
4. Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen

Anwendung mit z-Test

- Einfacher Test zur Veranschaulichung der 4 Schritte
- Frage
  - „Kann eine Stichprobe mit einem gewissen Mittelwert tatsächlich aus einer bekannten Grundgesamtheit mit bekanntem Mittelwert und bekannter Streuung stammen?“
- Vorannahme: μ und σ bekannt
- Nächste Woche wird diese Annahme verändert (t-test)

Beispiel 1, Anwendung z-Test

- Studierendenwerk Uni Gießen möchte eine Übersicht über laufende Ausgaben, die Studis haben, machen, hier: Bücherkosten
- Laut älterer Datenerhebung (in GG) **geben die JLU-Studierenden im Durchschnitt 80€ pro Jahr (σ = 18€) für den Erwerb von Studienbüchern** aus. Allerdings gibt es unterschiedliche Meinungen, ob das noch aktuell ist:
- Einige sind der Meinung, die Ausgaben seien im letzten Jahr deutlich zurückgegangen (ebooks etc), während ein anderer Teil der Abteilung davon ausgeht, dass die Ausgaben ganz erheblich gestiegen sind (andere denken, es ist gleich geblieben). Man beschließt eine Befragung anhand einer Zufallsstichprobe von Studierenden, um dem auf den Grund zu gehen
- An der Untersuchung nehmen *n*= 36 Studierende teil und es ergibt sich ein Durchschnittsbetrag von 92€ → Ist dieses Ergebnis „überzufällig“?

Hypothesentest 4 Schritte

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

1. Formulierung der Hypothesen und Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)
2. Bestimmung des Ablehnungsbereiches für H_0
3. Bestimmung der Prüfgröße
4. Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen

Schritt 1

Formulierung der (Test-)Hypothesen und Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)

- **Nullhypothese H_0** (Welches arithmetische Mittel wird für die Grundgesamtheit angenommen?)

$H_0 : \mu=80$

- **Alternativhypothese H_A** (Welche alternative Annahme liegt für das arithmetische Mittel in GG vor?)

$H_A: \mu \neq 80$

- **5%-Signifikanzniveau**

Hypothesentest 4 Schritte

1. Formulierung der Hypothesen und Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)
2. Bestimmung des Ablehnungsbereiches für H_0
3. Bestimmung der Prüfgröße
4. Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen

Schritt 2

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Bestimmung des Ablehnungsbereiches

- Welche Stichprobenmittelwerte sind vereinbar mit der Annahme, dass kein Unterschied zur Grundgesamtheit besteht?

→ Alle Stichprobenmittelwerte, die „ca." den Wert 80 erreichen (H_0: μ=80)

- Welche Stichprobenmittelwerte sind nicht vereinbar mit der Annahme, dass kein Unterschied zur Grundgesamtheit besteht?

→ Alle Stichprobenmittelwerte, die sich deutlich vom Wert 80 unterscheiden (H_A :$\mu \neq 80$)

Schritt 2

- Verteilung der Stichprobenmittelwerte für $n = 36$ ermöglicht hinreichend genaue Antwort auf die Frage, welche Werte vereinbar bzw. nicht vereinbar mit der Nullhypothese $\mu = 80$ sind

Schritt 2

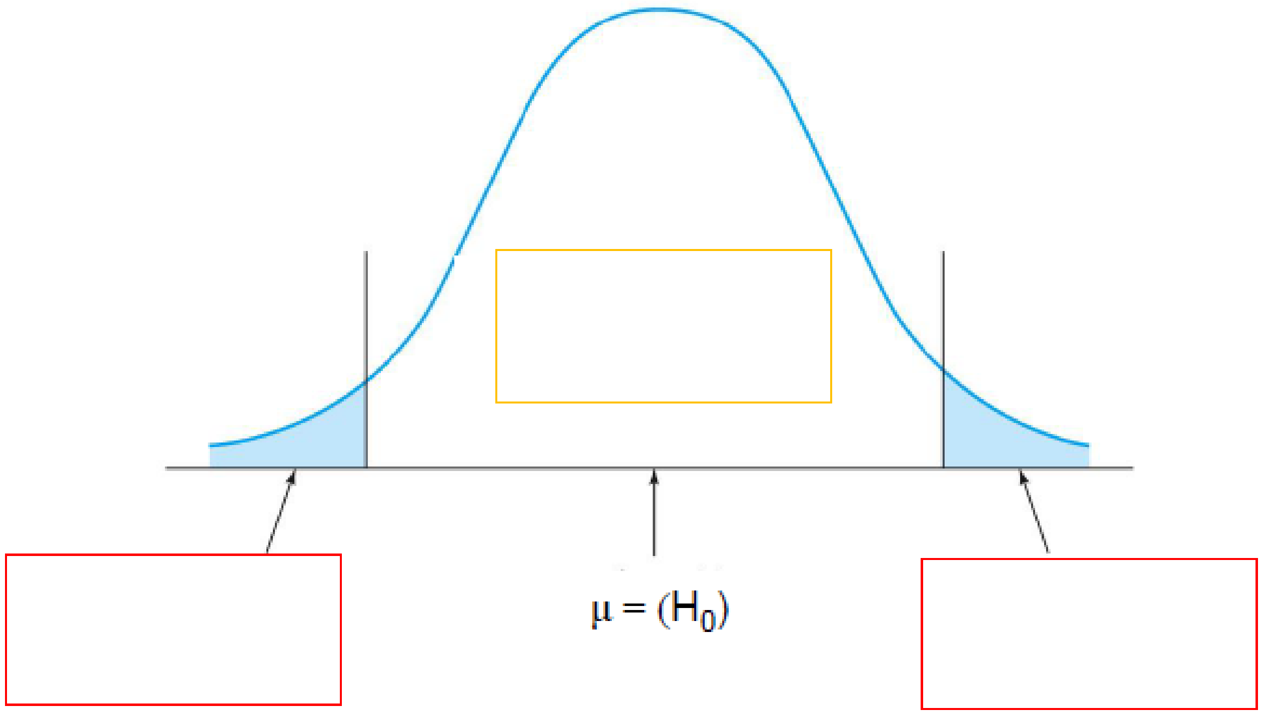
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

- Verteilung aller möglichen Stichprobenmittelwerte wird unterteilt in zwei Bereiche:

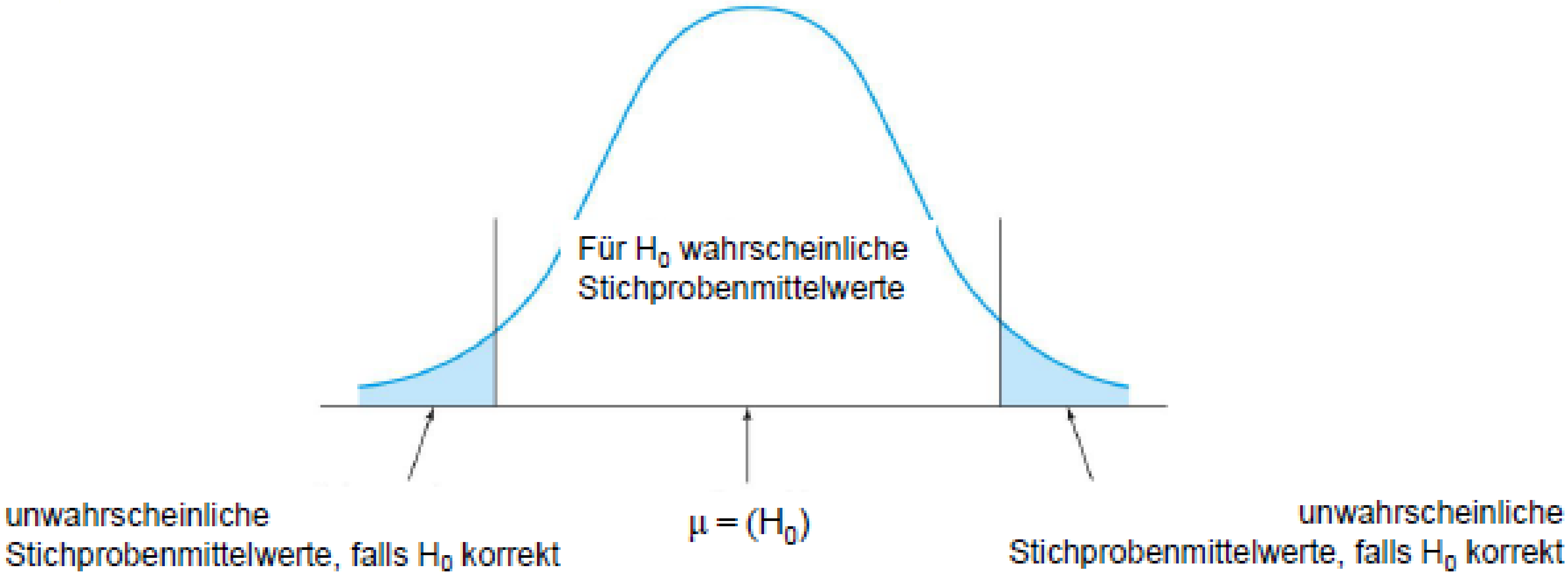
  1) Solche Mittelwerte, deren Auftreten als relativ wahrscheinlich gelten kann (wenn Nullhypothese zutrifft)

  2) Solche Mittelwerte, deren Auftreten als relativ unwahrscheinlich gelten kann, wenn die Nullhypothese zutrifft

Schritt 2



Schritt 2



Für H_0 wahrscheinliche Stichprobenmittelwerte
unwahrscheinliche Stichprobenmittelwerte, falls H_0 korrekt
$\mu = (H_0)$
unwahrscheinliche Stichprobenmittelwerte, falls H_0 korrekt

Schritt 2

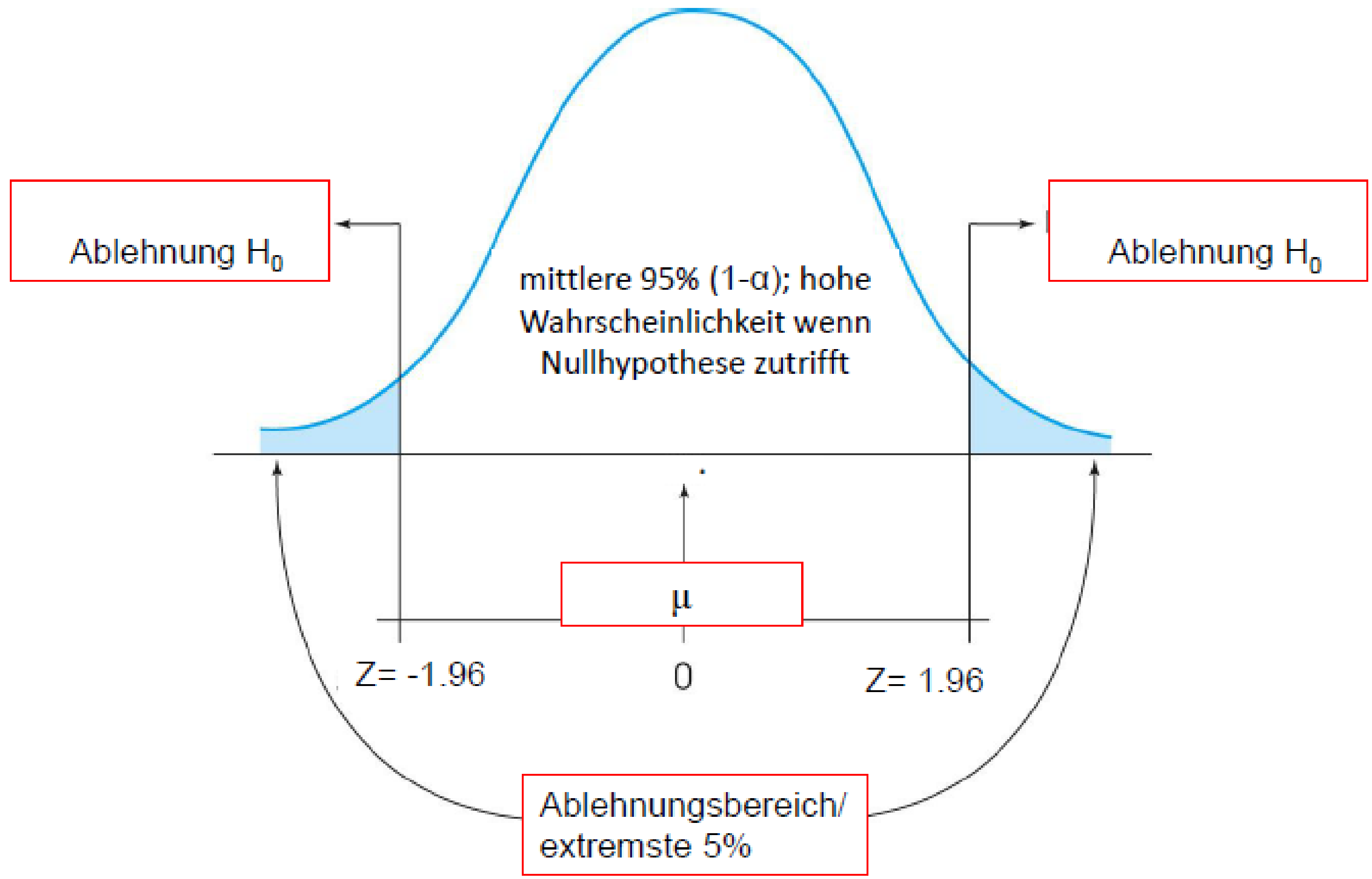
- Der Ablehnungsbereich wird durch diejenigen Werte bestimmt, deren Auftreten als extrem unwahrscheinlich gilt, *wenn H_0 gültig ist*
- D.h.: Sobald Stichprobenmittelwert in den Ablehnungsbereich fällt, weisen wir die Nullhypothese zurück
- Der Ablehnungsbereich für Stichprobenmittelwerte bei gültiger Nullhypothese wird durch das α-Niveau („Signifikanzniveau“) definiert

Schritt 2

- α-Niveau (und z-Wert-Tabelle) legen die Grenzen des Ablehnungsbereichs fest
- Beispiele: α= .05 (die „extremsten“ 5% werden von den mittleren 95% separiert; werden aufgeteilt - in jeweils 2,5% (oder 0,025)

→ Nachschauen z-Werte Tabelle: ein Anteilswert von 0.025 entspricht einem z-Wert von +/-1,96.

Schritt 2


Ablehnung H_0
Ablehnung H_0
mittlere 95% (1-α); hohe Wahrscheinlichkeit wenn Nullhypothese zutrifft
μ
Z= -1.96
0
Z= 1.96
Ablehnungsbereich/ extremste 5%

17

Schritt 2

- **α= .01** („extremsten“ 1% von den mittleren 99% separieren; jeweils 0.005%)
- z-Werte Tabelle: Anteilswert von 0.005 entspricht einem z-Wert von +/-2.58

Hypothesentest 4 Schritte

1. Formulierung der Hypothesen und Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)
2. Bestimmung des Ablehnungsbereiches für H_0
3. Bestimmung der Prüfgröße
4. Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen

Schritt 3

- Berechnung z-Statistik:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{Stichprobenmittelwert - theoretisch\ erwarteten\ Wert}{Standardfehler\ der\ Stichprobenmittelwerte}$$

- $\bar{x}$ errechnet sich aus den Stichprobendaten, µ ist in der Nullhypothese vorgegeben
- Zähler: „Wie groß ist der Unterschied zwischen Stichprobendaten und Nullhypothese?“
- Nenner: „Wie groß ist die standardmäßig zu erwartende Distanz zwischen Stichproben- und Populationsmittelwert“

Schritt 3

- Berechnung Standardfehler und z-Wert für Beispiel

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = 3$$

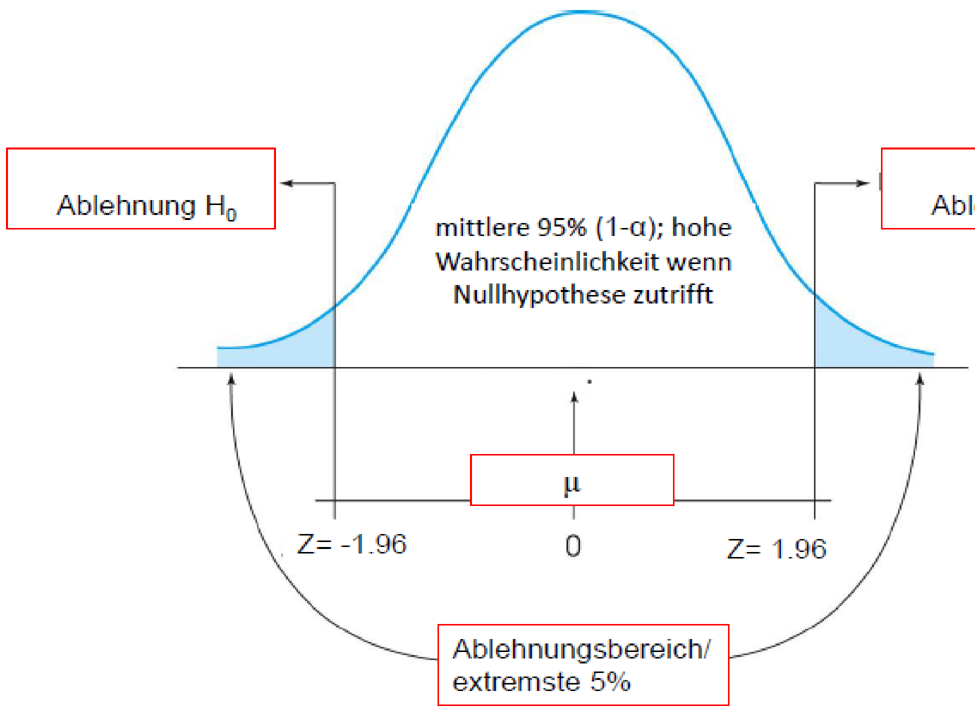
$$z = \frac{12}{3} = 4$$

Hypothesentest 4 Schritte

1. Formulierung der Hypothesen und Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)
2. Bestimmung des Ablehnungsbereiches für H_0
3. Bestimmung der Prüfgröße
4. Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen

Schritt 4

Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen



17

Schritt 4

Schlussfolgerung in Bezug auf Hypothesen

- Für α =.05 wird H_0 zurückgewiesen, Annahme H_A
- Interpretation: mit einer 95% Sicherheit (mit einer statistischen Signifikanz p<= 0,05) schließen wir, dass die mittleren Bücherausgaben inzwischen von Studierenden von 80 Euro abweichen.

- *Aber gestiegen oder gesunken? → Gerichtete vs. Ungerichtete Hypothesen, einseitiges vs. Zweiseitiges Testen (nächste Sitzung)*