UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

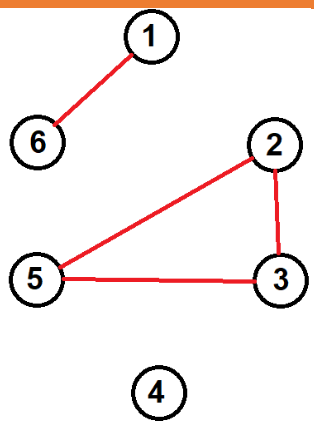
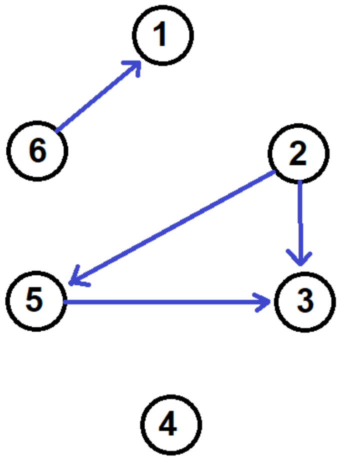
ESTRUTURA DE DADOS II

DOCENTE: CAROLINA YUKARI VELUDO WATANABE

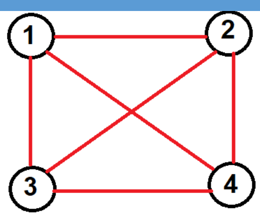
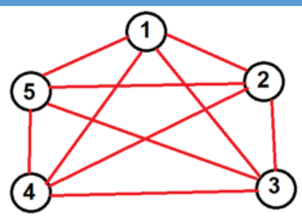
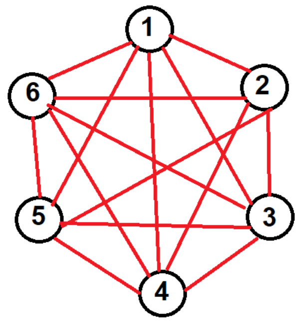
DISCENTE: THIAGO FERNANDES COUCELLO DA FONSECA
DISCENTE: ANA CRISTINA DA FONSECA MOURA

Porto Velho, RO
2019

1 – Desenhe as versões não orientadas e orientadas do grafo G= (V,E), onde V={1,2,3,4,5,6} e E={(2,5),(6,1),(5,3),(2,3)} .

Não Orientado:	Orientado:
	

2 – Desenhe os grafos não orientados completos com 4 vértices (K_4), 5 vértices (K_5) e 6 vértices (K_6).

K_4	K_5	K_6
		

3 – Sabendo que cada vértice tem pelo menos grau 3, qual o maior número possível de vértices em um grafo com 35 arestas? Lembre-se que a soma dos graus dos vértices é igual a duas vezes o número de arestas. Se cada aresta liga dois vértices teríamos 70 vértices de grau 1. Se cada vértice tem pelo menos grau 3, então...

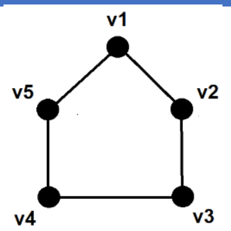
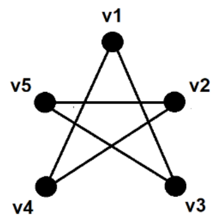
- $\sum_i^n \boldsymbol{grau(i) = 2 * n^\circ\ de\ arestas}$, onde n é o número de vértices.
- O maior número de vértices é obtido com o menor grau possível
- Portanto parte-se do pressuposto que todos os vértices tem grau 3
- Logo $\sum_i^n \boldsymbol{grau(i) = 3 * n}$

- Temos que, $\mathbf{3 * n = 2 * 35}$
- $\boldsymbol{n = 70/3}$
- $\boldsymbol{n = 23,33333}$ ...
- Como todos os vértices tem pelo menos grau 3, temos 22 vértices de grau 3 e 1 vértice de grau 4
- Assim sendo 23 vértices.

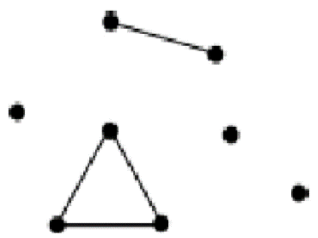
4 – Quantas arestas possui um grafo completo com n vértices? E um grafo orientado completo com n vértices?

R: O número de arestas de um grafo completo é $\frac{n*(n-1)}{2}$ onde n, é o número de vértices. O número de arestas não muda de grafo não orientado para grafo orientado, já que o conceito de adjacência permanece.

5 – Encontre o complemento do seguinte grafo.

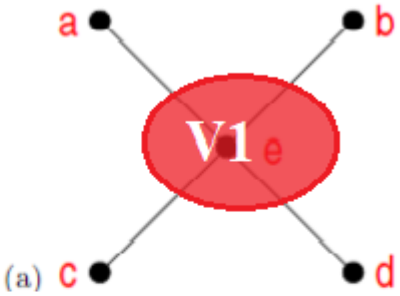
Grafo	Complemento
	

6 – Quantas componentes conexas tem o seguinte grafo?

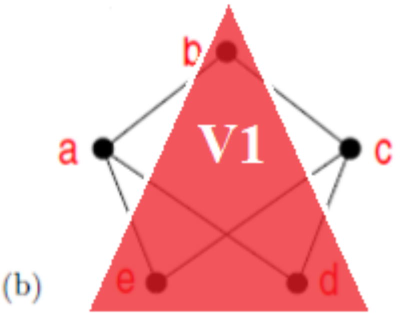


R: O grafo acima tem cinco componentes conexas

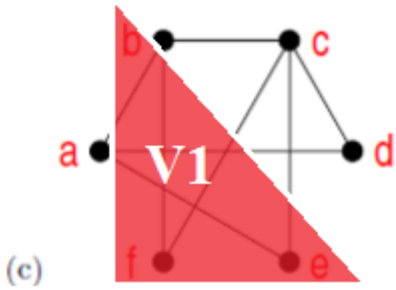
7. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido. Justifique.



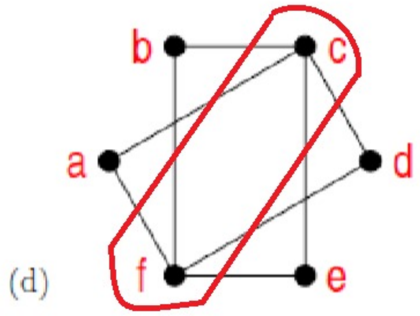
A) É bipartido porque os vértices subconjunto V1 = {e} tem arcos que os conecta ao outro subconjunto V2 = { a, b, c, d}.



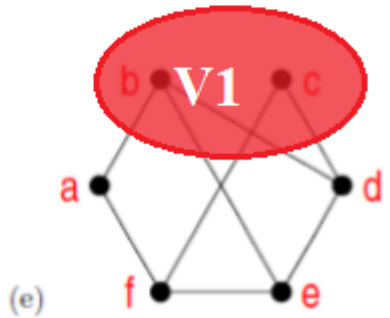
B) É bipartido porque os vértices do subconjunto V1 = {b, e, d } } tem arcos que os conecta aos vértices do outro subconjunto V2 = { a, c}.



C) Não é bipartido porque pela definição não pode ter arcos que ligam a dois vértices no mesmo subconjunto. Matematicamente: $\forall$ ***e*** = (***u***, ***v***) $\in$ ***e*** $\Rightarrow$ ***u*** $\in$ V_1 e ***v*** $\in$ V_2. A aresta (c, d) une um vértice do subconjunto (V2) com outro vértice do mesmo subconjunto (V2). V1 = {b, f, e}. V2 = {a, c, d}.

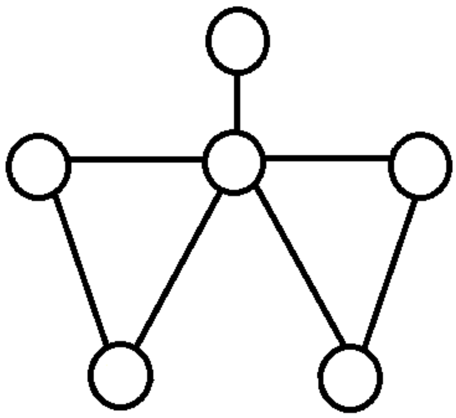


D) É bipartido porque os vértices do subconjunto V1= {c, f} tem arcos que os conecta aos vértices do outro subconjunto V2 = {a, b, e, d}.



E) Não é bipartido porque pela definição não pode ter arcos que ligam a dois vértices no mesmo subconjunto. Matematicamente: $\forall$ ***e*** = (***u***, ***v***) $\in$ ***e*** $\Rightarrow$ ***u*** $\in$ V_1 e ***v*** $\in$ V_2. Exemplo: a aresta (f, e) une um vértice do subconjunto (V2) com outro vértice do mesmo subconjunto (V2). V1 = {b, c}. V2 = {a, d, e, f}.

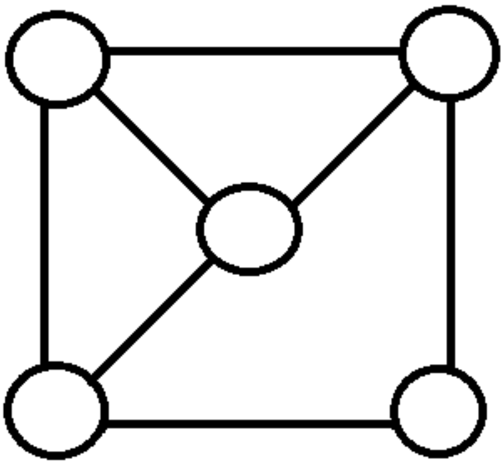
8. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5; 2; 2; 2; 2; 1? Desenhe um possível grafo.



R: 7 Arestas

9. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.

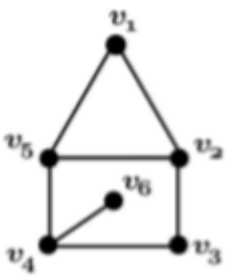
a) 3,3,3,3,2.



b) 1,2,3,4,5.

R: não é possível ter um grafo simples com estes graus de vértices, pois para ser um grafo simples não pode ter arcos múltiplos, e com 5 vértices total não tem como ter um deles ter 5 arcos saindo ou entrando dele para outros vértices, pois sobra só 4.

10. Represente o grafo abaixo usando matriz de adjacências e lista de adjacências.



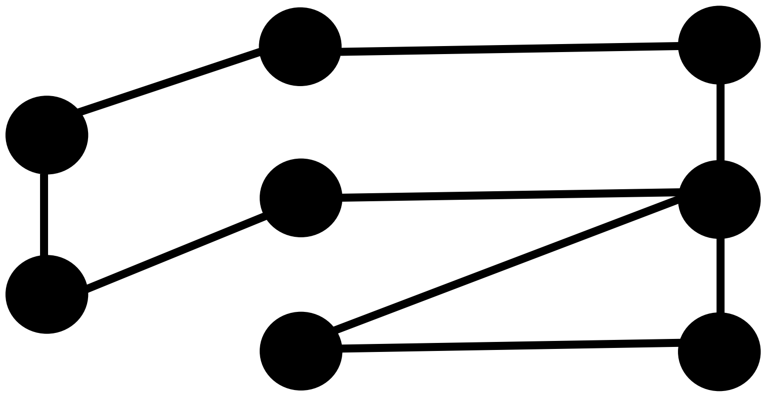
Matriz	*V1*	*V2*	*V3*	*V4*	*V5*	*V6*
V1	0	1	0	0	1	0
V2	1	0	1	0	1	0
V3	0	1	0	1	0	0
V4	0	0	1	0	1	1
V5	1	1	0	1	0	0
V6	0	0	0	1	0	0

Lista

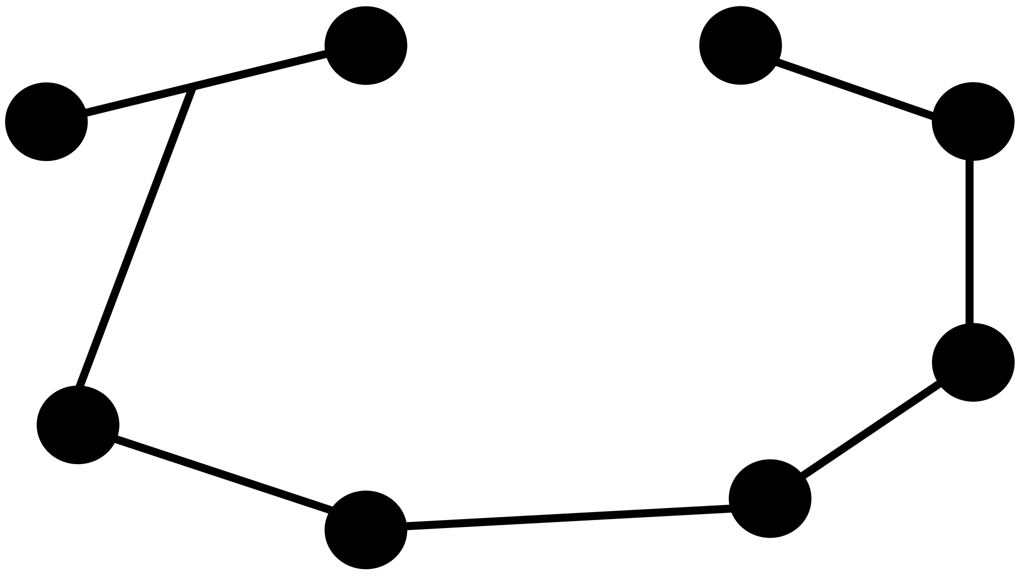
V1	→V2	→V5	
V2	→V1	→V3	→V5
V3	→V2	→V4	
V4	→V3	→V5	→V6
V5	→V1	→V2	→V4
V6	→V4		

11. Desenhe um grafo de 8 vértices:

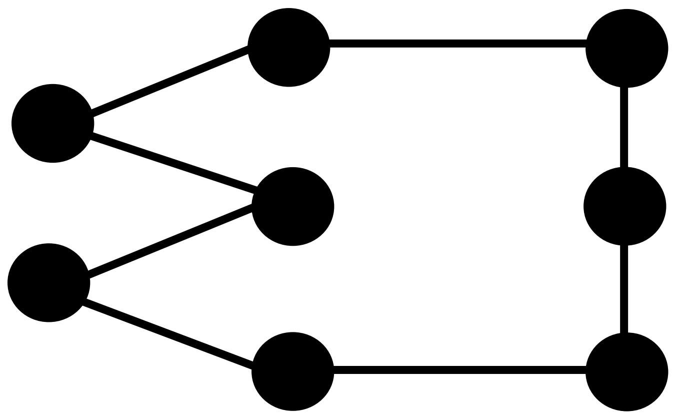
(a) que contém um circuito euleriano, mas não contém nenhum ciclo hamiltoniano.



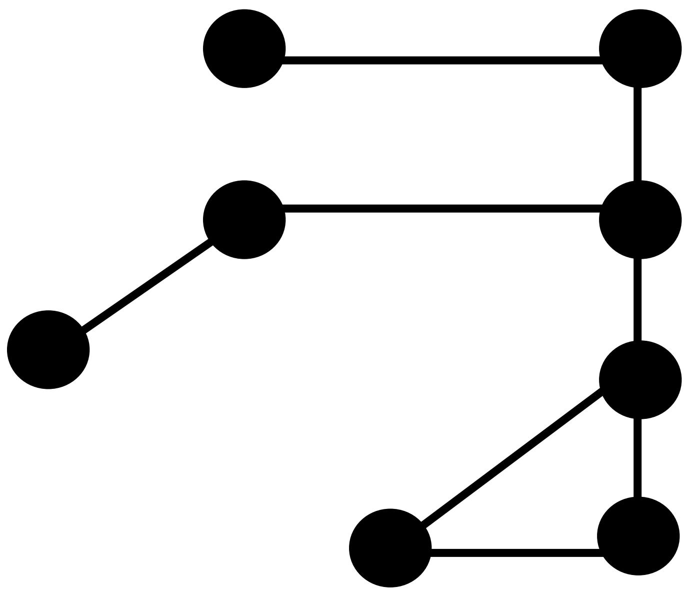
(b) que contém um caminho hamiltoniano, mas não contém nenhum caminho euleriano.



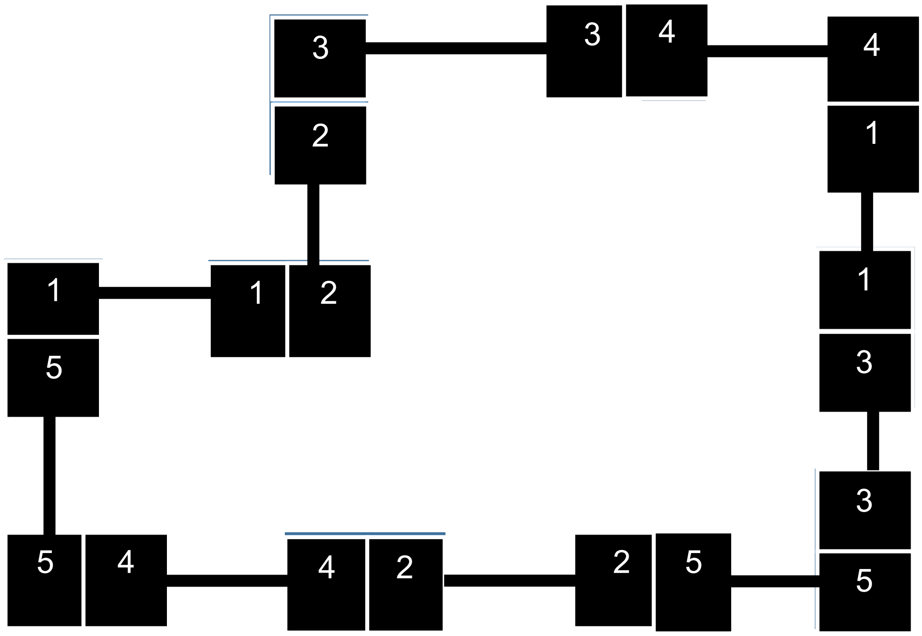
(c) que contém um caminho hamiltoniano e um caminho euleriano.



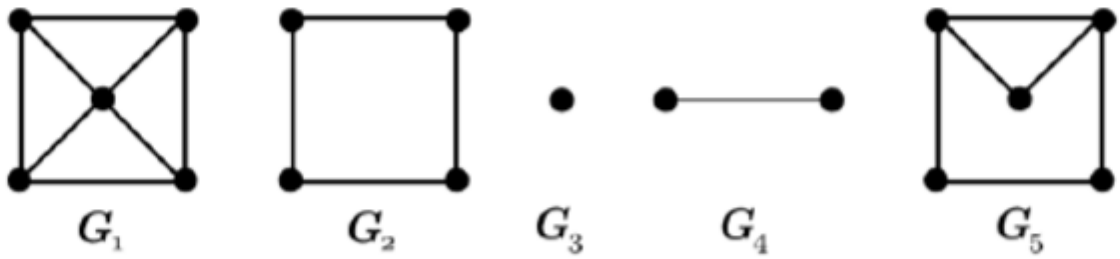
(d) que não contém um caminho hamiltoniano nem um caminho euleriano.



12. Considere um jogo de dominós que contém 10 peças com as seguintes configurações: (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5); (4,5). É possível colocar as peças de maneira que o número de uma peça é igual ao número da peça adjacente? (Dica: represente o problema com um grafo e veja se ele é Euleriano).



13. Dados os seguintes grafos, indique todos os pares e tais que:



(a) Gx é subgrafo de Gy;

R: G2, G4, G5 são subgrafos de G1

(b) Gx é subgrafo gerador de Gy;

R: G5 é subgrafo de G1

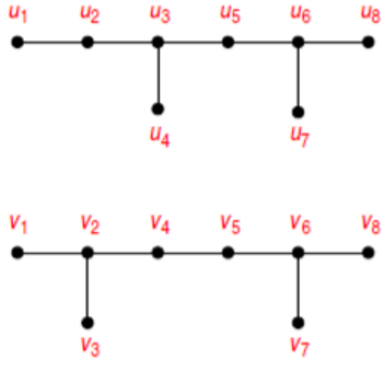
(c) Gx é subgrafo induzido de Gy;

R: G4 é subgrafo de G1

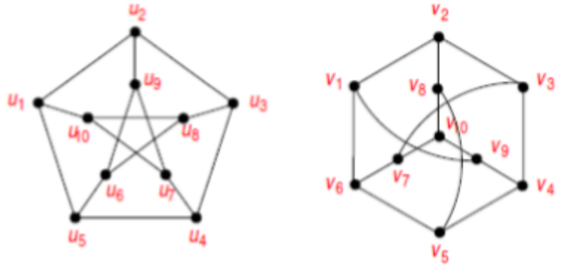
(d) Gx não é subgrafo de Gy.

R: G3 não é subgrafo de G1

14. Diga se os pares de grafos abaixo são isomorfos e porquê.



(a)



(b)

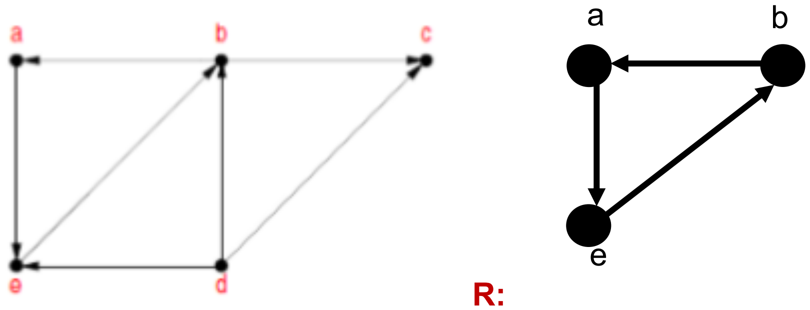
R: (a) Não é isomorfo, porque para ser isomorfo tem que ser duas representações diferentes do mesmo conjunto de vértices e arestas com suas respectivas incidências, e no segundo grafo (de baixo) ele alterou o par de vértices do arco (U3, U4) para (V2, V3), e isso alterou a incidência do vértice U3 para U4.

R: (b) É isomorfo, porque respeita o grau dos vértices, e suas respectivas incidências.

15. Qual é a quantidade mínima de arestas para um grafo ser conexo?

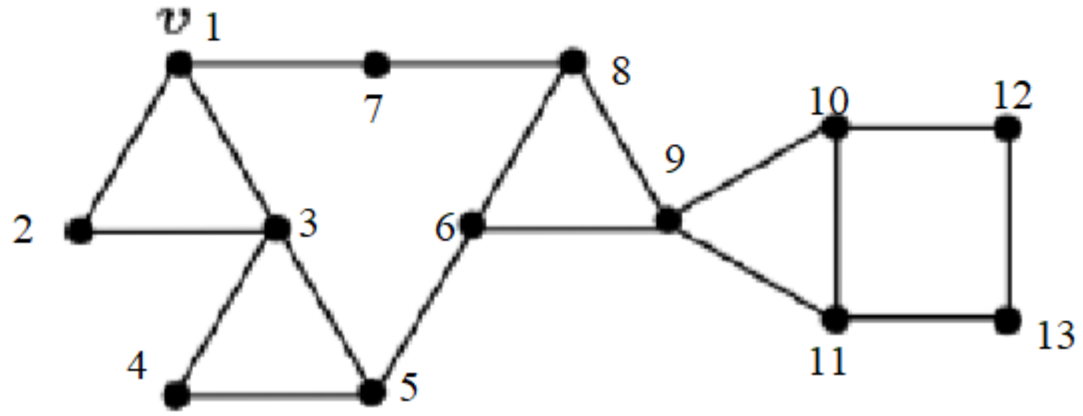
R: 1

16. Determine os componentes fortemente conexos do grafo abaixo.



R:

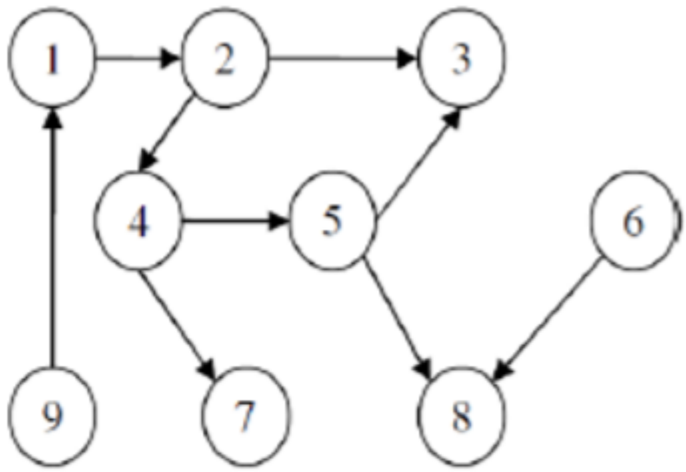
17. Mostre para o grafo abaixo a ordem em que os vértices são numerados por uma (a) busca em profundidade e (b) busca em largura a partir de v.



(a). V = {1,2,3,4,5,6,8,7,9,10,11,13,12} (profundidade)

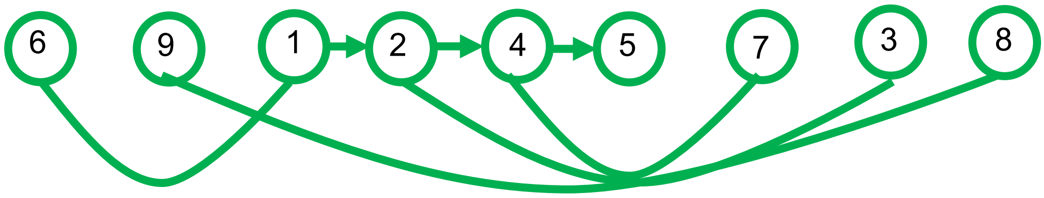
(b). V = {1,2,3,7,4,5,8,6,9,10,11,12,13} (largura)

18. Defina o que é Ordenação Topológica e mostre uma ordem dos vértices produzida pela ordenação topológica do seguinte grafo:



1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	1	1	0	1	2	0
1	1	2	1	1		1	1	0
0	1	2	1	1		1	1	
	0	2	1	1		1	1	
		1	0	1		1	1	
		1		0		0	1	
		0				0	0	

R: Ordem T. = {6, 9, 1, 2, 4, 5, 7, 3, 8}



R: Todo dígrafo acíclico D(V,A) induz um conjunto parcialmente ordenado (V, <) – reflexivo, antissimétrico e transitivo, onde < é definido como:

$V_i < V_j \leftrightarrow v_i$ alcança v_j no dígrafo D (há um caminho de v_i a v_j)

Baseando-se nessa ordem parcial, é possível ordenar os vértices de D de modo a obter a sequência $S \equiv v_1, v_2, ..., v_n \mid v_i < v_j \leftrightarrow i<j, 1 \leq i, j \leq n$

19. Explique o que é a SPT (shortest path tree - Árvore do caminho mais curto) e como funciona o algoritmo de Dijkstra utilizado para gerá-la. Utilize desenhos para ilustrar o processo.

R:

20. Explique o algoritmo de Prim e Kruskal para criar uma árvore geradora mínima.

R: o algoritmo de Prim serve para descobrir uma árvore geradora com pesos em seus arcos de um grafo. Nada mais é que descobrir um caminho entre todos os vértices sem ter ciclos e ter a aresta com menor peso, e quando soma seus pesos terá o custo deste caminho.

1º Tem-se uma lista de arestas ordenada pelos seus respectivos pesos, dita "lista de prioridade"

2º Escolho um vértice para iniciar a árvore, mas este tem que ser a aresta com menor peso e que tenha extremo entre a árvore e algum vértice fora da árvore.

4º Insiro a aresta e seu vértice na árvore.

3º Enquanto tiver vértices que não estão conectadas a árvore, seleciono a aresta com menor peso e que esteja com um dos seus extremos conectados a árvore.

4º Insiro a aresta e seu vértice na árvore.

R: o algoritmo de Kruskal serve para descobrir uma árvore geradora com pesos em seus arcos de um grafo. Nada mais é que descobrir um caminho entre todos os vértices sem ter ciclos e ter a aresta com menor peso, e quando soma seus pesos terá o custo deste caminho.

1º Tem-se uma lista de arestas ordenada pelos seus respectivos pesos.

2º Constrói a árvore acrescentando arestas que estão ordenadas por pesos, não partindo de um nó especifico.

4º Insiro a aresta e seu vértice na árvore.

3º Enquanto tiver vértices que não estão conectadas a árvore, seleciono a aresta com menor peso e que esteja com um dos seus extremos conectados a árvore.

4º Insiro a aresta e seu vértice na árvore.

21. Discuta sobre a ordem de complexidade dos algoritmos de grafos quando consideramos as representações de lista de adjacências e de matriz de adjacências.

R: **Listas:** tem maior complexidade na representação a menos que tenha muitos vértices e poucas arestas que a torna compacta e simplória. Como fazer uma lista de mercado, por exemplo.

R: **Matriz:** representação útil para grafos muitos grandes e sua representação podem ser personalizada: coluna aponta para linha ou linha para coluna.

22. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

R: Não, pois 15*5 =75/2 = 37,5 arestas.

23. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido.

Obs: referente a questão 24

(a) – Não é bipartido

(b) – Não tem grafo

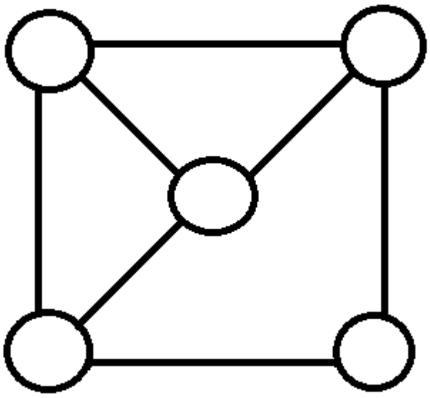
(c) – Não tem grafo

(d) – Não tem grafo

(e) – Não é bipartido

24. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.

(a) 3; 3; 3; 3; 2



(b) 1; 2; 3; 4; 5

R: não é possível ter um grafo simples com estes graus de vértices, pois para ser um grafo simples não pode ter arcos múltiplos, e com 5 vértices total não tem como ter um deles ter 5 arcos saindo ou entrando dele para outros vértices, pois sobra só 4.

(c) 1; 2; 3; 4; 4

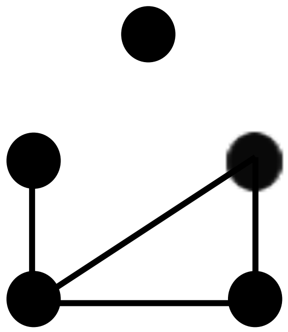
R: não é possível ter um grafo porque tenho 2 vértices de grau 4 e 1 vértice de 1 grau.

(d) 3; 4; 3; 4; 3

R: não é possível ter um grafo porque somando seus graus e dividindo por 2, tenho 8,5, e total de aresta tem que ser inteiro positivo.

(e) 0; 1; 2; 2; 3

R:



(f) 1; 1; 1; 1; 1

R: Não é possível ter um grafo. Seriam apenas 5 vértices sem arcos.

25. Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?

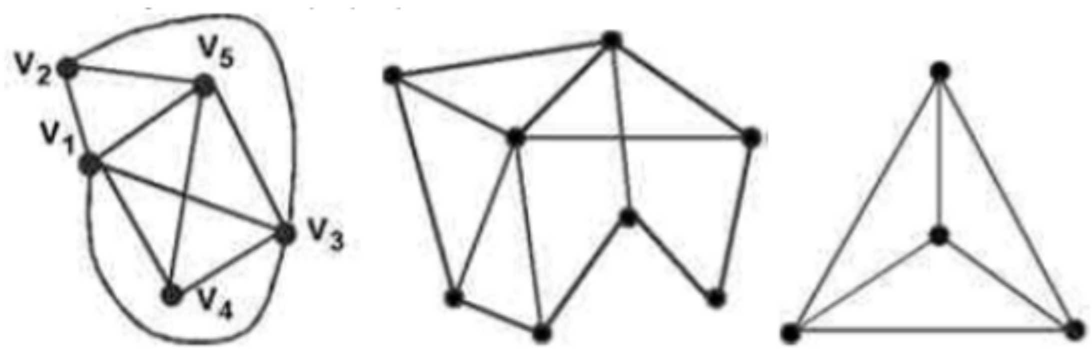
Obs: referindo-se a questão 26

(A) |**V**(A)| = 5 **&** |**A**(A)| = 10

(B) |**V**(B)| = 4 **&** |**A**(B)| = 13

(C) |**V**(C)| = 4 **&** |**A**(C)| = 6

26. Questão:



A B C

a) **Quais dos grafos abaixo são completos?**

   R: C

b) **Quais dos grafos abaixo são simples?**

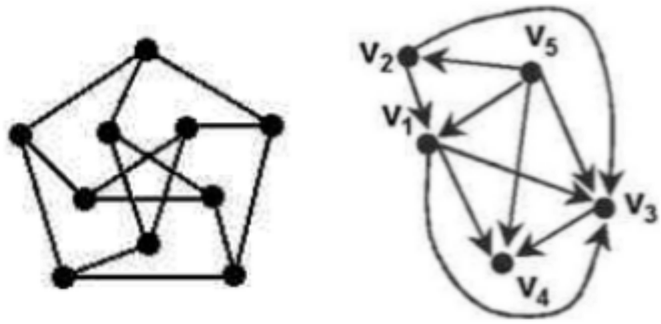
   R: B e C

c) **No grafo (a), quais vértices são adjacentes a v3? E quais arestas são adjacentes a (v3,v5)?**

   R: Adjacentes a **V3** = {V5, V1, V4, V2}

   R: Adjacentes **A(V3, V5)** = {(V5, V2), (V5, V1), (V5, V4), (V3, V4), (V3, V1), (V3, V2), (V3, V1)}

27. O grafo (a) é regular? Por quê? Existe alguma fonte ou sumidouro no grafo (b)?



(a) (b)

R: o grafo (a) é regular porque cada vértice tem o mesmo grau.

R: Sim, tem. Fonte: V5 e sumidouro: V4.

28. Defina caminho Euleriano e caminho Hamiltoniano.

R: Caminho Euleriano é literalmente um caminho na qual começa e termina no mesmo vértice e tem que passar por todas as arestas sem passar duas vezes por uma, entretanto posso passar várias vezes pelo mesmo vértice. Todo grafo Euleriano é conexo e todos os seus vértices têm grau par.

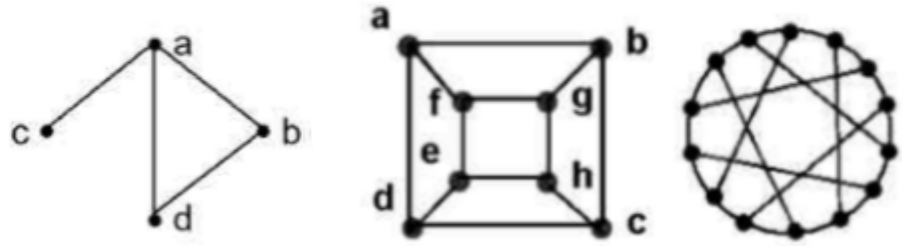
R: Caminho Hamiltoniano é um percurso na qual começa e termina em vértices diferentes justamente porque neste percurso só posso passar por cada vértice uma vez, entretanto posso passar várias vezes pela mesma aresta.

29. Qual dos grafos acima são cíclicos? Indique os grafos que são conexos. Qual(is) dos grafos abaixo são Eulerianos? Quais são Hamiltonianos?

Obs: feito a partir da questão 27

R: Cíclico = (a)

R: Conexo = {(a), (b)}



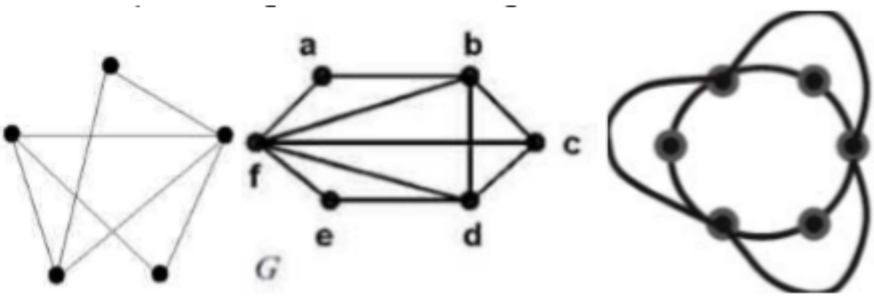
(a) (b) (c)

Obs: feito a partir dos grafos da questão 29.

R: Eulerianos = {}

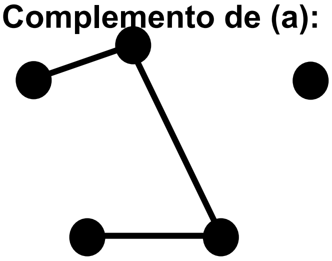
R: Hamiltoniano = {(a), (b), (c)}

30. Quais os complementos dos grafos (a) e (c)? Os grafos (b) e (c) são isomorfos? Represente graficamente um grafo K4,3.

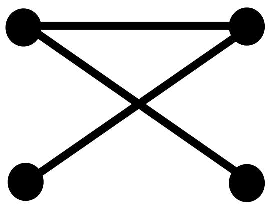


(a) (b) (c)

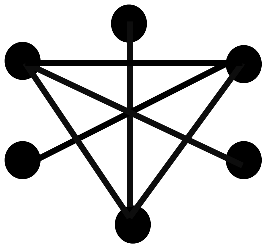
Complemento de (a):



Grafo $K_{4,3}$



Complemento de (C):

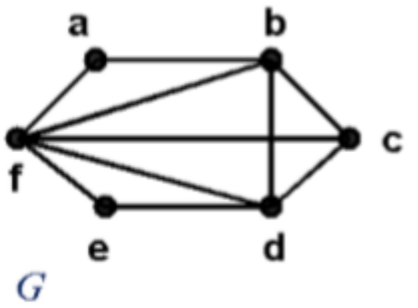


R: Os grafos (b) e (c) não são isomorfos por causa do vértice f que tem grau 5 no grafo (b) e não tem nenhum vértice de grau 5 no grafo (c).

31. Preencha a tabela de comparação entre matriz de adjacências e listas de adjacências, assim como suas respectivas ordens de complexidade.

Comparação	"Vencedor"
Rapidez para saber se (x, y) está no grafo	Matriz
Rapidez para determinar o grau de um vértice	Lista de Adjacência
Menor memória em grafos pequenos	**Listas:** O(|V| + |E|) **Matriz:** O(|V|2)
Menor memória em grafos grandes	Listas
Inserção / Remoção de arestas	**Matriz:** O (1) **Listas:** $O(d_i)$, com d_i sendo o grau do vértice i
Melhor na maioria dos problemas	Listas
Rapidez para percorrer o grafo	**Listas:** $O(d_i)$, com d_i sendo o grau do vértice i **Matriz:** O (1)

32. Represente os grafos abaixo utilizando matrizes de adjacências e listas de adjacências.



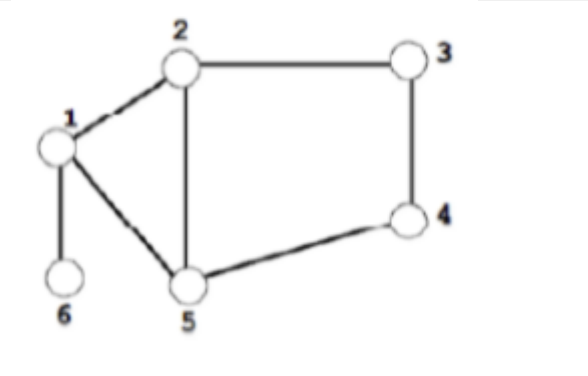
MAT	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	0	1
b	1	0	1	1	0	1
c	0	1	0	1	0	1
d	0	1	1	0	1	1
e	0	0	0	1	0	1
f	1	1	1	1	1	0

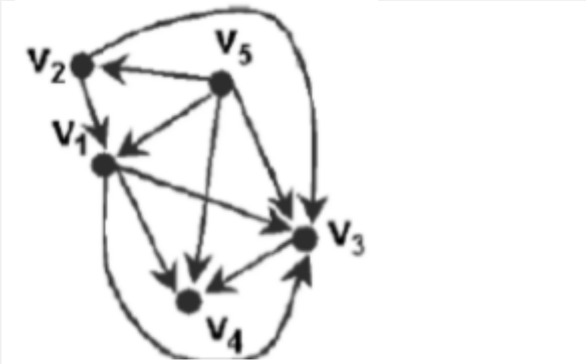
MAT	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

LISTA	
A	→B →F
B	→A →C →D →F
C	→B → D → F
D	→B →C →E →F
E	→F →D
F	→A→B→C→D→E

LISTA	
1	→2 → 3 → 4 → 5
2	
3	→1 → 4 → 5
4	
5	

33. Realize a busca em largura e em profundidade nos grafos abaixo.





BUSCA LARGURA

LISTA

1	→2 → 5 →6
2	→1 →3 →5
3	→2 → 4
4	→3 →5
5	→1 →2 →4
6	→1

Vértice inicial: 1 (raiz)

Q: (1, 2, 5, 6, 3, 4)

Vértices marcados: 1, 2, 5, 6, 3, 4

Arestas visitadas: {(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (5, 4), (3, 4)}

BUSCA LARGURA

LISTA

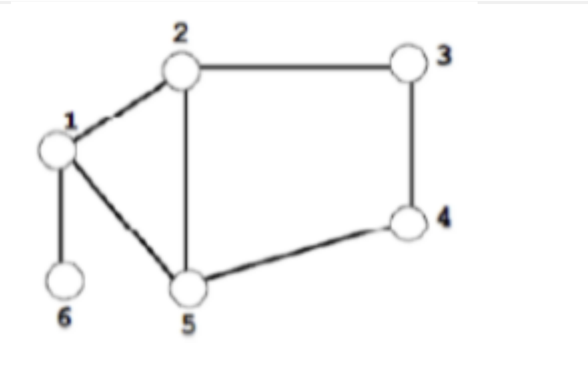
1	→3 → 4 →3
2	→1 →3
3	→ 4
4	
5	→1 →2 →3 →4

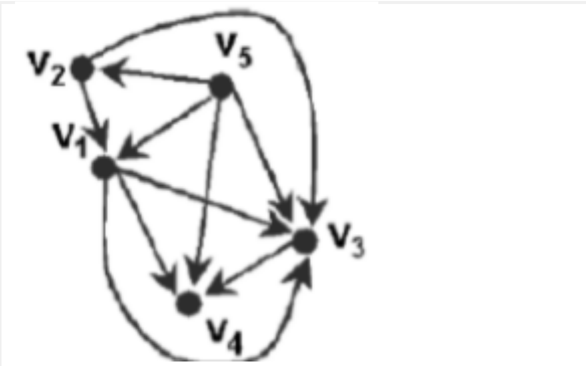
Vértice inicial: 5 (raiz)

Q: (5, 1, 2, 3, 4)

Vértices marcados: 5,1, 2, 3, 4

Arestas visitadas: {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (1, 3), (1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 4)}





BUSCA EM PROFUNDIDADE

LISTA

1	→2 → 5 →6

BUSCA EM PROFUNDIDADE

LISTA

1	→3 → 4 →3

2	→1 →3 →5	***2***	→1 →3
3	→2 → 4	***3***	→ 4
4	→3 →5	***4***	
5	→1 →2 →4	***5***	→1 →2 →3 →4
6	→1		
Vértice inicial: 1		Vértice inicial: 1→1→2→5→5	
Pilha: (1, 2, 3, 4, 5, 6)		Vértice marcados: 1, 3, 4, 2	
Arestas visitados: {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (1, 6)}		Arestas visitadas: {(1, 3), (3, 4), (3, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)}	
Vértice marcados: (1, 2, 3, 4, 5, 6)			

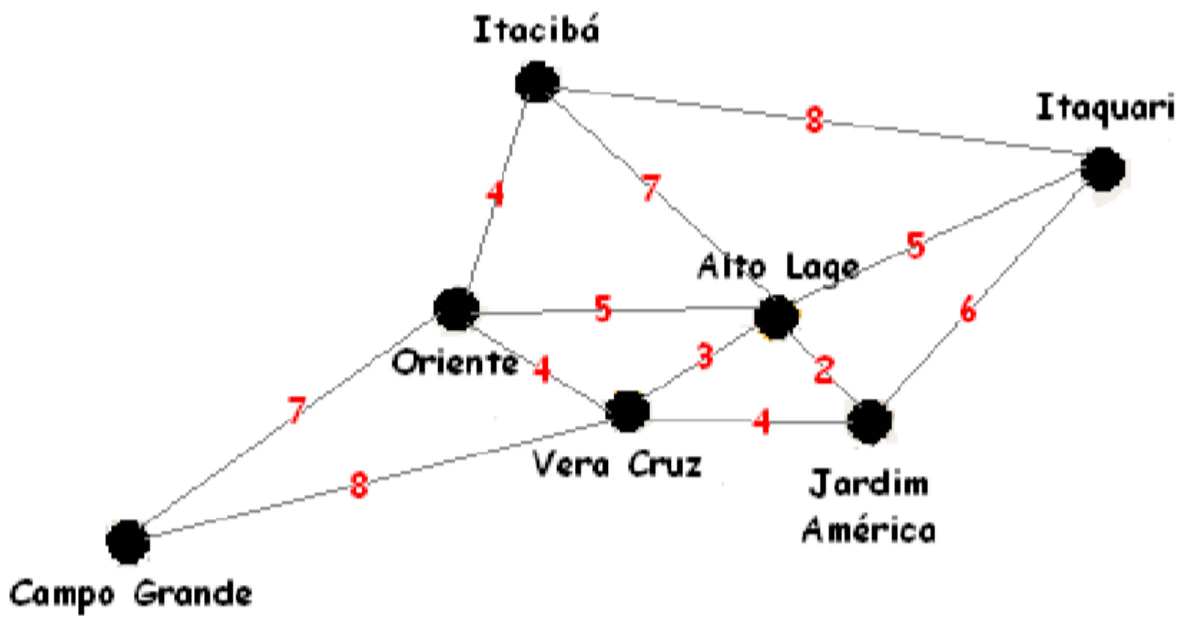
34. Qual é a complexidade da Busca em Largura (BFS - Breadth First Search)? E da Busca em Profundidade (DFS - Depth First Search)?

R: **BFS** → O (|V| + |E|), **DFS** → O (|V| + |E|).

35. Qual é o número cromático do grafo K3,2.

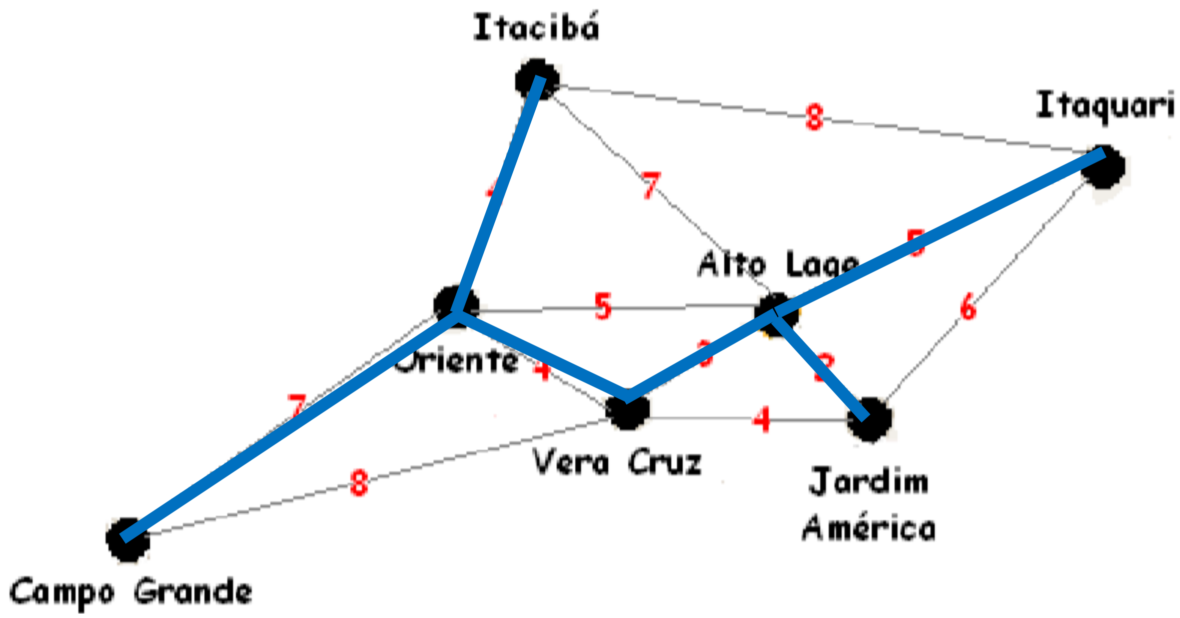
R: 2.

36. Suponhamos que uma empresa que faça instalação de fibra ótica necessite interligar os bairros abaixo representados:

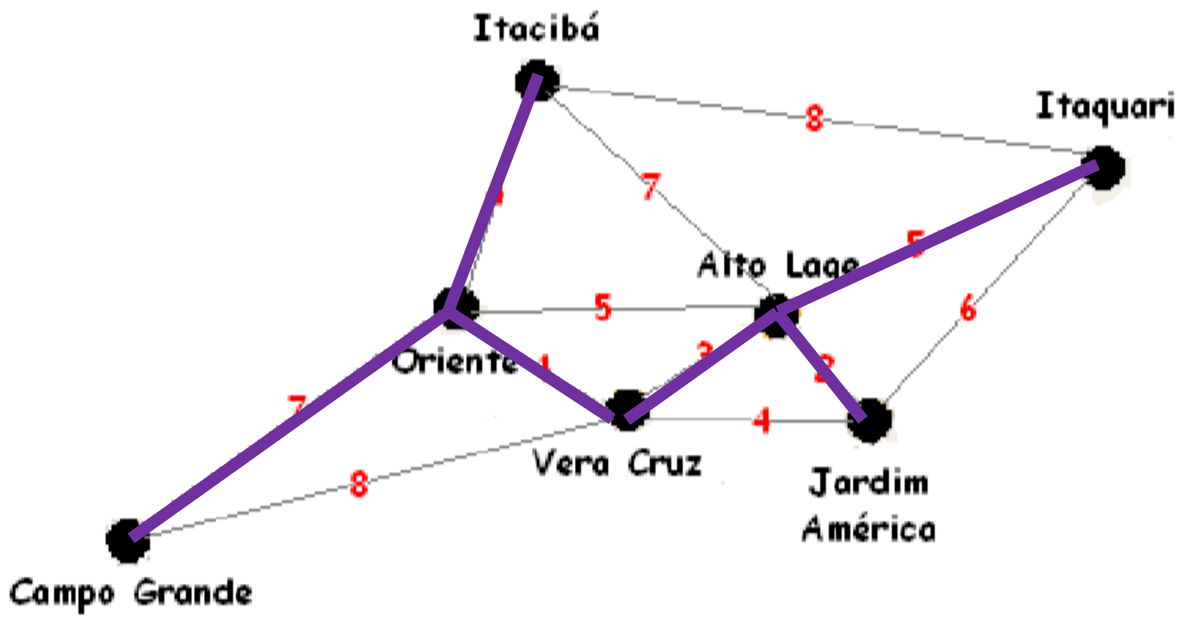


A partir de um estudo meticuloso, os dados relevantes à instalação da fibra ótica, podem ser resumidos ao Grafo mostrado acima. Gere a Árvore Geradora Mínima para este caso, usando a ideia do Algoritmo de Kruskal e de Prim

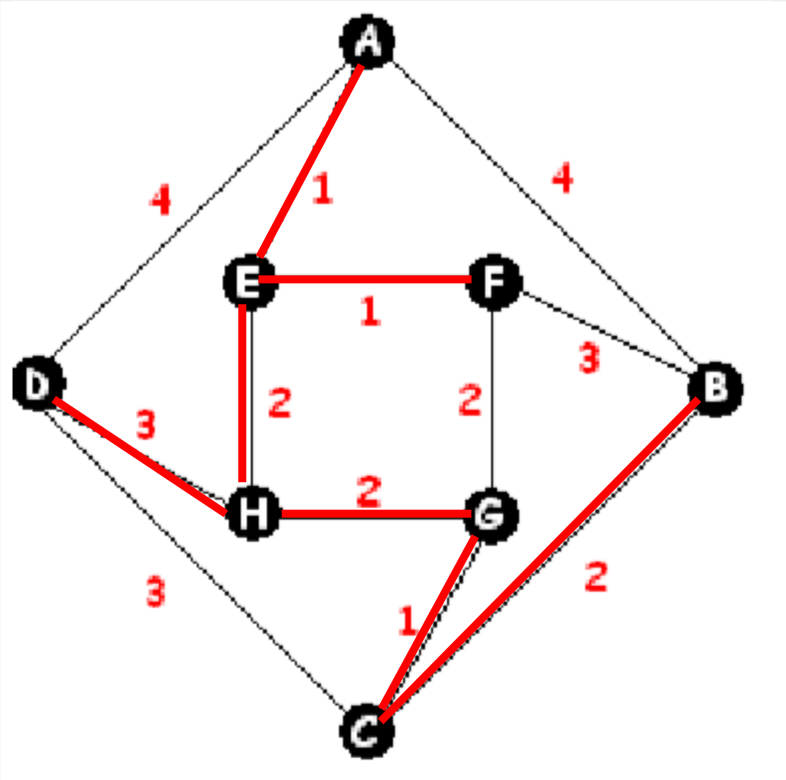
PRIM = 25



Kruskal = 25



37. (Adaptado de Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação Ex. 19, p. 361) Use o Algoritmo de Prim para resolver a Árvore Geradora Mínima para o Grafo indicado. Use também o Algoritmo de Kruskal e compare os resultados.



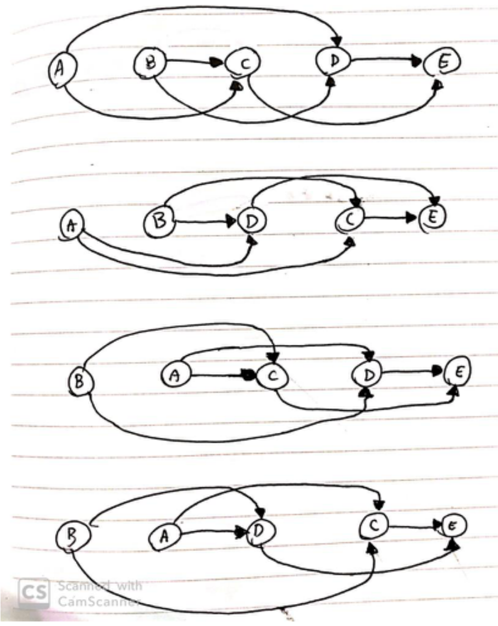
Algoritmo	**de PRIM**
A, E	1
E, F	1
G, C	1
C, B	2
G, H	2
E, H	2
G, F	2
F, B	3
D, H	3
D, C	3
D, A	4
A, B	4

Algoritmo de PRIM	**12**

38. Dada a seguinte matriz de adjacência, gere a árvore geradora mínima usando Prim ou Kruskal.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	6	14	6	2	5	7
B	6	0	10	7	0	10	0
C	14	10	0	7	0	0	0
D	6	7	7	0	5	0	0
E	2	0	0	5	0	6	3
F	5	10	0	0	6	0	4
G	7	0	0	0	3	4	0

39. Dê quatro ordenações topológicas diferentes do digrafo cujos arcos são a-c a-d b-c b-d c-e d-e.



40. Obtenha as ordenações topológicas para o grafo abaixo.