ATIVIDADE 10 - ÁLGEBRA LINEAR

Thiago Henrique Leite da Silva - 139920

1. (3,5 pontos) Encontre os autovalores e os autovetores da transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (4x+z, -2x+y, -2x+z)$$

Solução

Seja C a base canônica de $\mathbb{R}^3$. A matriz de T em relação a base C é dada por:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pois, $T(1,0,0) = (4,-2,-2)$
$T(0,1,0) = (0,1,0)$
$T(0,0,1) = (1,0,1)$.

Logo,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Dessa forma, encontrar os autovalores e autovetores de T é equivalente a encontrar os autovalores e autovetores da matriz A.

O polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \\ -2 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (4-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - (-2(1-\lambda)\cdot 1) \\ &= (4-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2) - (-2 + 2\lambda) \\ &= 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 2\lambda \end{aligned}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Sabemos que os autovalores de T são as raízes da equação característica $p(\lambda) = 0$. Logo, devemos resolver a equação:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \quad (I)$$

De (I) temos que $-(\lambda - 3)\cdot(\lambda - 2)\cdot(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 3) = 0$

$\lambda = 3$

$\Rightarrow (\lambda - 2) = 0$

$\lambda = 2$

$\Rightarrow (\lambda - 1) = 0$

$\lambda = 1$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$.

Antes de encontrarmos os autovetores associados a cada um dos autovalores de T, devemos encontrar, primeiramente, os autovetores da matriz A, que são as soluções não-triviais do sistema linear homogêneo $(A - \lambda_i I) X_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$.

Denotamos $X_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Para $\lambda_1 = 1$, temos que

$$(A - 1I) X_1 = 0 \quad (\text{II})$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 4-1 & 0 & 1 \\ -2 & 1-1 & 0 \\ -2 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, de (II) temos que

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ -2x = 0 \\ -2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$y = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

/ /

Como X_1 é um autovetor da matriz A, X_1 tem de ser não-nulo, de modo que devemos ter $\alpha \neq 0$.

Logo, todo autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é da forma

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0$$

Em particular, podemos tomar

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O autovetor X_1 da matriz A associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ corresponde à matriz de coordenadas do autovetor

$$v_1 = (0, 1, 0)$$

de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, em relação à base canônica C de $\mathbb{R}^3$.

Seja $X_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, para $\lambda_2 = 2$, temos que

$$(A - 2I) X_2 = 0$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)\,X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -2x - y = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -2x \;,\quad y = -2x \quad e \quad x = -\frac{z}{2}$$

$$z = \alpha \Rightarrow y = \alpha \quad e \quad x = -\frac{\alpha}{2}$$

Como X_2 é um autovetor de A, X_2 tem de ser não-nulo, de modo que devemos ter $\alpha \neq 0$. Logo, todo autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ é da forma

$$X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha \neq 0$$

Em particular, podemos tomar

$$X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O autovetor X_2 da matriz A associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ corresponde à matriz de coordenadas do autovetor $v_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$, em relação à base canônica C de $\mathbb{R}^3$.

Tomemos agora $X_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, Para $\lambda_3 = 3$, temos que

$$(A - 3I)X_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -z \\ z = -x \end{matrix}, \quad \begin{matrix} -2x = 2y \\ y = -x \end{matrix}, \quad -x = -z$$

$$\Rightarrow z = \alpha, \quad y = \alpha, \quad x = -\alpha$$

Como X_3 é um autovetor de A, X_3 tem de ser não-nulo, de modo que devemos ter $\alpha \neq 0$. Logo, todo autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda_3 = -5$ é da forma.

$$X_3 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0$$

Em particular, podemos tomar

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O autovetor X_3 da matriz A associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ corresponde à matriz de coordenadas do autovetor $V_3 = (-1, 1, 1)$ de T associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ em relação à base canônica C de $\mathbb{R}^3$.

/ /

2. (3,5 pontos) Considere a transformação linear:

$$T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad T(a+bx+cx^2) = (2b-2c)+(2a+2c)x+2cx^2$$

Obtenha os autovalores e os autovetores de T e, para cada autovalor, determine suas respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

Solução

Seja $C = \{1, x, x^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.
Para descobrir a matriz de T em relação à base C temos:

$$T(1) = 0 + (2+0)x + 0\cdot x^2 = 2x$$
$$T(x) = (2-0) + 0x + 0x^2 = 2$$
$$T(x^2) = (0-2) + (0+2)x + 2x^2 = -2+2x+2x^2$$

Encontramos

$$A = [T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos então o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - ((2-\lambda)\cdot 2\cdot 2)$$
$$p(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda) - ((2-\lambda)\cdot 4)$$

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda^3 - (8 - 4\lambda)$$
$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda^3 - 8 + 4\lambda$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4)$$

Descobrindo as raízes de $p(\lambda)$ para encontrar os autovalores, temos:

$$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4) = 0$$

① $\lambda - 2 = 0$
$\lambda = 2$

② $-\lambda^2 + 4 = 0$
$\lambda^2 = 4$
$\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$

Como a raiz $\lambda = 2$ apareceu duas vezes, temos que $ma(2) = 2$.
Como $\lambda = -2$ aparece uma única vez, $ma(-2) = 1$.

Agora, vamos encontrar os autovetores de A.

Denotamos $X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Para $\lambda_1 = 2$, temos que

$$(A - 2I)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

/ /

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b - 2c = 0 \\ 2a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow -a + b - c = 0$$

$a = b - c$, $b = c + a$, $c = b - a$

$c = \beta \qquad b = \alpha \qquad a = \alpha - \beta$

Portanto, temos:

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos concluir que $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $Y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são L.I. formam uma base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$. Portanto, os autovetores Y_1 e Y_2 da matriz A associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, em relação à base canônica C de $\mathbb{R}^3$, correspondem, respectivamente, às matrizes de coordenadas dos autovetores

$$V_1 = (1, 1, 0) \text{ e } V_2 = (-1, 0, 1), \text{ logo, } mg(2) = 2 \quad \#$$

Seja $X_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Para $\lambda_2 = -2$, temos que

$$(A + 2I)\, X_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

/ /

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 2c = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0, \quad a = -b, \quad b = -a$$

$$a = +\alpha, \; b = -\alpha, \; c = 0$$

Portanto, temos

$$X_2 = \begin{bmatrix} +\alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$, em relação à base canônica C de $\mathbb{R}^3$ é

$$v_3 = (+1, -1, 0), \text{ portanto, } mg(-2) = 1. \quad \#$$

3. (3,0 Pontos) Seja uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) (1,5 pontos) Se $A^2 = I$, mostre que os autovalores de A podem ser somente -1 ou 1.

Solução

$$A^2 = I \Rightarrow A = I \text{ ou } A = -I$$

Vamos separar os dois casos.

Para $A = I$, temos que $A - \lambda I = I - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(I - \lambda I) = (1-\lambda)^n = p(\lambda)$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = 0$$
$$\lambda = 1$$

Sabemos que os autovalores de T são as raízes de $p(\lambda) = 0$. Logo, temos que o autovalor de T é $\lambda = 1$. $\checkmark$

Para $A = -I$, temos que $A - \lambda I = -I - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(-I - \lambda I) = (-1-\lambda)^n$$

$$\Rightarrow -1 - \lambda = 0$$
$$\lambda = -1$$

Como a raiz de $p(\lambda) = 0$ é $\lambda = -1$, temos que o autovalor de T é $\lambda = -1$. $\checkmark$

Assim, concluímos que se $A^2 = I$, os autovalores são somente -1 ou 1. #

/ /

(b) (1,5 Ponto) Se (λ, v) e' um autopar de A, mostre que (λ^3, v) e' um autopar de A^3.

Solução

Seja (λ, v) um autopar qualquer de A, então, $Av = \lambda v$

$$Av = \lambda v$$
$$A^3 v = A(A(Av)))$$
$$\begin{aligned} A(A(A(v))) &= \lambda (A(Av)) \\ &= \lambda (A(\lambda v)) \\ &= \lambda^2 (Av) \\ &= \lambda^2 (\lambda v) \\ &= \lambda^3 v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A^3 v = \lambda^3 v$$

Portanto, $A^3 v = \lambda^3 v$ e (λ^3, v) e' um autopar de $A^3 V$.

#