__/__/__

Atividade 4 - ÁLGEBRA LINEAR

1. (a) Encontre uma base de U e uma base de V

$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 2z \}$

Precisamos isolar uma das variáveis na equasão $x+y = 2z$.

$x = 2z - y \quad (I)$

Agora substituimos no vetor (x,y,z,t) no componente correspondente que isolamos.

$(x,y,z,t) = (2z - y, y, z, t) \quad (II)$

Devemos decompor o vetor (II) em uma combinasão linear de 3 vetores (pois temos três variáveis livres, y, z e t).

$$(x,y,z,t) = (2z - y, y, z, t)$$
$$= y(-1,1,0,0) + z(2,0,1,0) + t(0,0,0,1) \quad (III)$$

Portanto, de (III) concluimos que

$$S = \{ (-1,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1) \}$$

é um conjunto gerador do espaço vetorial U.

Para ser uma Base, o conjunto de vetores tem que ser L.I., e gerar, nesse caso, $\mathbb{R}^4 \mid x+y=2z$.

Já garantimos que gera, agora vamos verificar se é L.I.

Para ser L.I.,

$$\alpha(-1,1,0,0) + \beta(2,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

Se e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Logo, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Precisamos verificar agora

$$\alpha(-1,1,0,0) + \beta(2,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1) = (x,y,z,t)$$

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = x \\ \alpha = y \\ \beta = z \\ \gamma = t \end{cases}$$

$-\alpha + 2\beta = x$

$-y + 2z = x$

$x + y = 2z$ (✓)

Portanto, $S = \{(-1,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ gera $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = 2z\}$ e é L.I.

Logo, é uma Base de U.

\#

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x - 3y = t}_{(I)}\}$$

Substituindo (I) na cordenada correspondente, temos

S T Q Q S S D

$(x, y, z, t) = (x, y, z, x - 3y)$

$= x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -3) + z(0, 0, 1, 0)$

Portanto, $S = \{(1,0,0,1), (0,1,0,-3), (0,0,1,0)\}$ gera V.

Precisamos verificar se S é L.I.

$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,-3) + \gamma(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$ $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Sistema com solução única e com $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,-3) + \gamma(0,0,1,0) = (x, y, z, t)$

$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ \gamma = z \\ \alpha - 3\beta = t \quad (\text{II}) \end{cases}$

De (II) temos:

$\alpha - 3\beta = t$

$x - 3y = t$ (✓)

Portanto, $S = \{(1,0,0,1), (0,1,0,-3), (0,0,1,0)\}$ gera V e é L.I.

Logo, S é uma base de V. #

__/__/__ S T Q Q S S D

(b) Determine $\dim(U \cap V)$ e $\dim(U+V)$

$\dim(U \cap V)$

(I) Sabemos que $S_1 = \{(-1,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ gera U e é L.I., Logo, $\dim(U) = 3$.

(II) Sabemos também que $S_2 = \{(1,0,0,1), (0,1,0,-3), (0,0,1,0)\}$ gera V e é L.I., Logo, $\dim(V) = 3$.

Para sabermos a dimensão de $U \cap V$ precisamos encontrar uma base de $U \cap V$.

$(x,y,z,t) \in U \Rightarrow x+y = 2z$

$(x,y,z,t) \in V \Rightarrow x-3y = t$

As duas equações devem ser satisfeitas simultaneamente, portanto temos:

$$\begin{cases} x+y = 2z \\ x-3y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z = 0 & (A) \\ x-3y-t = 0 & (B) \end{cases}$$

De (A) temos que:

(III) $x = 2z - y$, substituindo em (B) temos

$2z - y - 3y - t = 0$

$4y = 2z - t$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}t}$$

spiral

Substituindo y em (III)

$$x = 2z - y$$

$$x = 2z - \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}t\right) = 2z - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}t$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}z + \frac{1}{4}t}$$

Substituindo x e y em (B) temos

$$x - 3y - t = 0$$

$$t = x - 3y = \frac{3}{2}z + \frac{1}{4}t - 3\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}t\right)$$

$$t = \cancel{\frac{3}{2}z} + \frac{1}{4}t - \cancel{\frac{3}{2}z} + \frac{3}{4}t$$

$$t = \frac{4}{4}t$$

$$\boxed{t = t}$$

Substituindo x e y em (A) temos

$$x + y - 2z = 0$$

$$z = \frac{x+y}{2} = \frac{\frac{3}{2}z + \cancel{\frac{1}{4}t} + \frac{1}{2}z - \cancel{\frac{1}{4}t}}{2} = \frac{2z}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = z}$$

Portanto, temos que

$$(x,y,z,t) = \left(\frac{3}{2}z + \frac{1}{4}t, \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}t, z, t\right)$$

__/__/__ S T Q Q S S D

Decompondo o vetor temos:

$(x,y,z,y) = z\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + t\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1\right)$

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1\right)\right\}$ geram $U \cap V$

Verificando se eles são L.I. temos que

$\alpha\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + \beta\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1\right) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Portanto $\alpha = \beta = 0$ (solução única)

$\alpha\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + \beta\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1\right) = (x,y,z,t)$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta = x \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta = y \\ \alpha = z \\ \beta = t \end{cases}$$

$x = \frac{3}{2}z + \frac{1}{4}t$

$y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}t$

$z = z$ e $t = t$

Logo, $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1\right)\right\}$ é uma Base de $U \cap V$, pois gera $U \cap V$ e é L.I.

Consequentemente, temos que $\dim(U \cap V) = 2$.

#

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

Pelos itens anteriores temos que

$$\dim(U+V) = 3+3-2 = 4$$

#

2. (a) Mostre que S é uma base de $P_3(\mathbb{R})$

$$S = \{1, 1+x, 1-x^2, 1-x-x^2-x^3\} \quad (I)$$

Primeiramente, vamos verificar que S é L.I.

$$\alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1-x^2) + \omega(1-x-x^2-x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha + \beta + \beta x + \gamma - \gamma x^2 + \omega - \omega x - \omega x^2 - \omega x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(-\omega)x^3 + (-\gamma-\omega)x^2 + (\beta-\omega)x + (\alpha+\beta+\gamma+\omega) \cdot 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pelo princípio da identidade dos polinômios dos membros da equação deverão ser iguais, assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} -\omega = 0 \quad \Rightarrow \omega = 0, \text{ Logo } \omega = \beta = \gamma = \alpha = 0 \\ -\gamma - \omega = 0 \\ \beta - \omega = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \omega = 0 \end{cases}$$

sistema com solução única que é $\alpha = \beta = \gamma = \omega = 0$

Logo, $1, 1+x, 1-x^2$ e $1-x-x^2-x^3$ são L.I.

___/___/___ S T Q Q S S D

Agora temos que mostrar que os polinômios em questão geram $P_3(\mathbb{R})$.

Então dado qualquer polinômio $ax^3+bx^2+cx+d = 0 \in P_3(\mathbb{R})$, precisamos verificar se existem escalares reais α, β, μ e w tais que:

$$\alpha(1) + \beta(1+x) + \mu(1-x^2) + w(1-x-x^2-x^3) = ax^3+bx^2+cx+d$$

Rearranjando a equação temos:

$$(-w)x^3 + (-\mu-w)x^2 + (\beta-w)x + (\alpha+\beta+\mu+w)\cdot 1 = ax^3+bx^2+cx+d$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} -w = a & (A) \\ -\mu - w = b & (B) \\ \beta - w = c & (C) \\ \alpha+\beta+\mu+w = d & (D) \end{cases}$$

De (A) temos que $w = -a$

substituindo em (B) temos $-\mu - (-a) = b$

$\mu = a - b_{//}$

substituindo $w = -a_{//}$ em (C) temos $\beta - (-a) = c$

$\beta + a = c$

$\beta = c - a_{//}$

Substituindo w, μ e β em (D) temos

$\alpha + c - \cancel{a} + \cancel{a} - b - a = d$

$\alpha = d - c + a_{//}$

Logo, gera $P_3(\mathbb{R})$

spiral

S T Q Q S S D

__/__/__

Portanto, para qualquer polinômio $ax^3+bx^2+cx+d \in P_3(\mathbb{R})$, podemos escrever

$$ax^3+bx^2+cx+d = (d-c+a)\cdot 1 + (c-a)\cdot(1+x) + (a-b)(1-x^2) - a(1-x-x^2-x^3)$$

Uma vez que o conjunto de polinômios (I) é L.I. e geram $P_3(\mathbb{R})$, concluímos que eles formam uma base para $P_3(\mathbb{R})$. #

(b) Encontre a matriz de coordenadas do polinômio $p(x) = x^3$ em relação à base S.

Do item (a) temos que:

$$(-\omega)x^3 + (-\mu-\omega)x^2 + (\beta-\omega)x + (\alpha+\beta+\mu+\omega)\cdot 1 = 1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} -\omega = 1 & \Rightarrow \omega = -1 \\ -\mu-\omega = 0 & \Rightarrow \mu = 1 \\ \beta - \omega = 0 & \Rightarrow \beta = -1 \\ \alpha+\beta+\mu+\omega = 0 & \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Logo, $\alpha\cdot 1 + \beta(1+x) + \mu(1-x^2) + \omega(1-x-x^2-x^3) = x^3$

$$1\cdot 1 + (-1)(1+x) + 1\cdot(1-x^2) + (-1)(1-x-x^2-x^3) = x^3$$

$$\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{x^2} + x^3 = x^3$$

$$x^3 = x^3$$

Portanto, devemos ter $\alpha = \mu = 1$ e $\omega = \beta = -1$.

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

Outra forma de resolver é

$$[p]_S = \begin{bmatrix} d-c+a \\ c-a \\ a-b \\ -a \end{bmatrix}$$

obs. as equações são os coeficientes da combinação linear.

$$[x^3]_S = \begin{bmatrix} 0-0+1 \\ 0-1 \\ 1-0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de coordenadas de $p(x) = x^3$ na base S é

$$[x^3]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

\#

3. (a) Mostre que o conjunto $C = \{u_1, u_1 - u_2, \ldots, u_1 - u_n\}$ também é uma base de V.

Sabemos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V.

Temos que mostrar que o conjunto C é L.I.

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 (u_1 - u_2) + \ldots + \alpha_n (u_1 - u_n) = 0$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_1 - \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_1 - \alpha_n u_n = 0$$

$$\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_n)}_{\alpha_K} u_1 - \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3 - \cdots - \alpha_n u_n = 0$$

S T Q Q S S D

__/__/__

$\underbrace{\alpha_k}_{-\alpha_B} u_1 - \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3 - \dots - \alpha_n u_n = 0$

Para deixar os coeficientes negativos podem chamar α_k de $-\alpha_B$, seu inverso,

$-\alpha_B u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_n u_n = 0 \quad (I)$

Como, pelo fato de B ser uma Base de V, sabemos que:

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$ se e só se $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Em (I), como apenas invertemos os valores dos α's, temos que

$-\alpha_2 = \dots = -\alpha_n = 0$

Logo $-\alpha_B = 0$.

Portanto, C é L.I.

Sabemos, de (I) que:

$-\alpha_B u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_n u_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Se $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ e gera V,

seu inverso também gera.

Como C é L.I. e gera V, C é uma base de V. #

___/___/___ S T Q Q S S D

(b) Se $u \in V$ e $[u]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, encontre $[u]_C$

como temos do item anterior que

$(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_n) u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_n u_n$

então $[u]_C = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{bmatrix}$

#