S T Q Q S S D

__/__/__

Lista 07 - Álgebra Linear

1) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,1,1) = (1,0), \quad T(1,1,0) = (2,-1) \text{ e } T(1,0,0) = (4,3)$$

(a) Encontre a expressão de T.

solução.

- Podemos observar que o conjunto $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois são L.I. e geram $\mathbb{R}^3$.

Prova que são L.I.

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Portanto, o sistema tem solução única com $\alpha = \beta = \gamma = 0$, Logo é L.I.

Prova que geram $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = z} \quad (I)$$

$\alpha + \beta = y$

$z + \beta = y \Rightarrow \boxed{\beta = y - z}$

$\alpha + \beta + \gamma = x$

$\cancel{z} + y - \cancel{z} + \gamma = x$

$\boxed{\gamma = x - y}$

Como α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$, então o conjunto gera $\mathbb{R}^3$.

spiral

Sendo assim, vamos encontrar escalares reais α, β, γ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$$

ou seja, $(x,y,z) = (\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta,\ \alpha)$

Como já resolvido em (I), temos:

$\alpha = z$
$\beta = y - z$
$\gamma = x - y$

Logo, temos que:

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

Uma vez que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear e usando o fato que $T(1,1,1) = (1,0)$, $T(1,1,0) = (2,-1)$ e $T(1,0,0) = (4,3)$, temos que:

$$T(x,y,z) = T(z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0))$$

$$= T(z(1,1,1)) + T((y-z)(1,1,0)) + T((x-y)(1,0,0))$$

$$= z\,T(1,1,1) + (y-z)\,T(1,1,0) + (x-y)\,T(1,0,0)$$

$$= z(1,0) + (y-z)(2,-1) + (x-y)(4,3)$$

$$= (z,0) + (2y-2z,\ -y+z) + (4x-4y,\ 3x-3y)$$

$$= (z+2y-2z+4x-4y,\ -y+z+3x-3y)$$

$$T(x,y,z) = (4x-2y-z\ ,\ 3x-4y+z)$$ #

(b) Encontre o núcleo de T.

Um elemento pertence ao núcleo de T se ele é transformado no elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, ou seja:

$$T(x,y,z) = (4x-2y-z\ ,\ 3x-4y+z) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-2y-z = 0 & (A) \\ 3x-4y+z = 0 & (B) \end{cases}$$

Somando as equações temos:

$$7x - 6y = 0$$

$$\boxed{y = \frac{7}{6}x} \quad (I)$$

Substituindo (I) em (A)

$$4x - 2\cdot\frac{7}{6}x = z$$

$$z = 4x - \frac{7}{3}x$$

$$\boxed{z = \frac{5}{3}x}$$

Logo, $N(T) = \{(x, \frac{7}{6}x, \frac{5}{3}x)\}$

ou podemos dizer que $N(T) = \{(6k, 7k, 10k)\}$, $k \in \mathbb{R}$ #

spiral

___/___/___ S T Q Q S S D

(c) A transformação linear T em questão é injetora?

Não é injetora. Pois se fosse injetora, teriamos que $T(x) = T(y)$ se e somente se $x = y$, E acabamos de ver que $Nu(T) = \{(6k, 7k, 10k)\}, k \in \mathbb{R}$, ou seja, temos infinitos vetores que terão Transformação linear igual a zero.

Assim como provado na lista de exercícios resolvidos, T só é injetora se $Nu(T) = \{0\}$, o que não é o caso que estamos lidando.

$T(0,0,0) = (0,0)$
$T(6,7,10) = (0,0)$

$(0,0,0) \neq (6,7,10)$, não é injetora. #

(d) Verifique se (9,23) pertence à imagem de T.

Um elemento do contra-domínio de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a imagem se for da forma.

$$(4x-2y-z, 3x-4y+z) = x(4,3) + y(-2,-4) + z(-1,1)$$

$$Im(T) = [(4,3), (-2,-4), (-1,1)]$$

Temos então, para (9,23)

$$\begin{cases} 4x-2y-z = 9 & (I) \\ 3x-4y+z = 23 & (II) \end{cases}$$

spiral

De (I), temos que:

$z = 4x - 2y - 9$

substituindo em (II) temos

$3x - 4y + 4x - 2y - 9 = 23$

$7x - 6y = 32$

$y = \frac{7x - 32}{6} \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{6}x - \frac{16}{3}}$

Substituindo y em (I)

$4x - 2\left(\frac{7}{6}x - \frac{16}{3}\right) - z = 9$

$4x - \frac{14x}{6} + \frac{32}{3} - z = 9$

$\frac{10x}{6} + \frac{32}{3} - 9 = z$

$\frac{5}{3}x + \frac{32 - 27}{3} = z \Rightarrow \boxed{z = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}}$

Logo, x, y e $z \in \mathbb{R}$, portanto (9,23) faz parte da Imagem de T.

Exemplo: $x = 8$

$y = \frac{7 \cdot 8}{6} - \frac{16}{3} = \frac{56}{6} - \frac{16}{3} = \frac{28}{3} - \frac{16}{3} \Rightarrow y = 4$

$z = \frac{5}{3} \cdot 8 + \frac{5}{3} = \frac{45}{3} \Rightarrow z = 15$

Portanto,

$$T(8,4,15) = (4x - 2y - z,\ 3x - 4y + z)$$

$$= (4\cdot 8 - 2\cdot 4 - 15,\ 3\cdot 8 - 4\cdot 4 + 15)$$

$$= (32 - 8 - 15,\ 24 - 16 + 15)$$

$$= (32 - 23,\ 24 - 1)$$

$$T(8,4,15) = (9, 23)$$

#

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.
$T(X) = (I + A)X + XB$

Encontre o núcleo e a imagem.

$$T(X) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a + 2b & 2a + b \\ -c + 2d & 2c + d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a + c - a + 2b & 2b + d + 2a + b \\ c - c + 2d & 2c + d + d \end{bmatrix}$$

spiral®

$$T(x) = \begin{bmatrix} a+2b+c & 2a+3b+d \\ 2d & 2c+2d \end{bmatrix}$$

Agora que temos $T(x)$, podemos calcular $N_u(T)$.

O núcleo é quando a transformação gera o vetor nulo, neste caso, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, temos o sistema.

$$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ 2a+3b+d=0 \\ 2d=0 \\ 2c+2d=0 \end{cases} \qquad d=0 \Rightarrow c=0$$

$$2a+3b=0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 2a+3b=0$$

$$a+2b=0 \quad (-2) \qquad -2a-4b=0$$

$$-b=0$$

$$b=0 \Rightarrow a=0$$

Logo, o núcleo de T é $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a própria matriz nula. #.

Como $T(x) = \begin{bmatrix} a+2b+c & 2a+3b+d \\ 2d & 3c+2d \end{bmatrix}$

$T(x)$ é dado por:

$$T(x) = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $Im(T)$ é $= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right]$ #

$$Im(T) = \left\{ Y \in M_2(\mathbb{R}) \mid Y = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

#

__/__/__

S T Q Q S S D

3) Seja $T: C([0,1], \mathbb{R})$ definida por $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$.
Mostre que T é uma transformação linear.

Para T ser transformação linear deve satisfazer:

(1) $T(f+g) = T(f) + T(g)$
(2) $T(\alpha f) = \alpha T(f)$

Como já vimos em cálculo 1, a integral da soma é a soma das integrais, e quando temos um escalar na integral, podemos tirá-lo para fora dela. Logo, é trivial que $\int_0^1 f(x)\,dx$ seja uma transformação linear.

$$T(f+g) = \int_0^1 [f+g]\,dx$$

$$= \int_0^1 f\,dx + \int_0^1 g\,dx$$

$$T(f) + T(g) = \int_0^1 f\,dx + \int_0^1 g\,dx.$$

Logo, $T(f+g) = T(f) + T(g)$.

$$T(\alpha f) = \int_0^1 \alpha f\,dx$$

$$= \alpha \int_0^1 f\,dx$$

$$\alpha T(f) = \alpha \int_0^1 f\,dx$$

Logo, $T(\alpha f) = \alpha T(f)$.

Como satisfaz as duas propriedades, T é transformação linear.