

# Estatística para Ciência de Dados

## Aula 2: Probabilidades

Francisco A. Rodrigues  
ICMC/USP  
francisco@icmc.usp.br



# Aula 2: Probabilidades

- Conceitos fundamentais  
Teorema de Bayes  
Variáveis aleatórias

# Probabilidades

- **Experimento aleatório**
- Cada experimento pode ser executado um número infinito de vezes sob condições inalteradas.





# Probabilidades

- **Espaço amostral ( $\Omega$ ):** Conjunto de saídas do experimento.
- **Evento ( $A$ ):** Um elemento do espaço amostral.
- **Relações entre eventos:**
  - Evento impossível:  $\emptyset$
  - Evento certo:  $\Omega$
  - $A \cup B$ : é o evento que ocorre se  $A$ , ou  $B$  (ou ambos) ocorrem.
  - $A \cap B$ : é o evento que ocorre se, e somente se,  $A$  e  $B$  ocorrem.
  - $\bar{A}$ : é o evento que ocorre se  $A$  não ocorre.
  - Eventos mutualmente exclusivos:  $A \cap B = \emptyset$

# Probabilidades

- **Probabilidades: (Kolmogorov, 1933)**
- Uma função  $P(\cdot)$  é denominada uma medida de probabilidade se satisfaz:
  - $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \Omega$
  - $P(\Omega)=1$
  - Se  $A_1, A_2, A_2, \dots$  forem eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

# Probabilidades

- **Probabilidades: Definição Clássica**
- Se um experimento aleatório tiver  $n(\Omega)$  resultados mutuamente exclusivos e igualmente possíveis, e se um evento  $A$  tiver  $n(A)$  desses resultados, a probabilidade de ocorrer o evento  $A$  é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

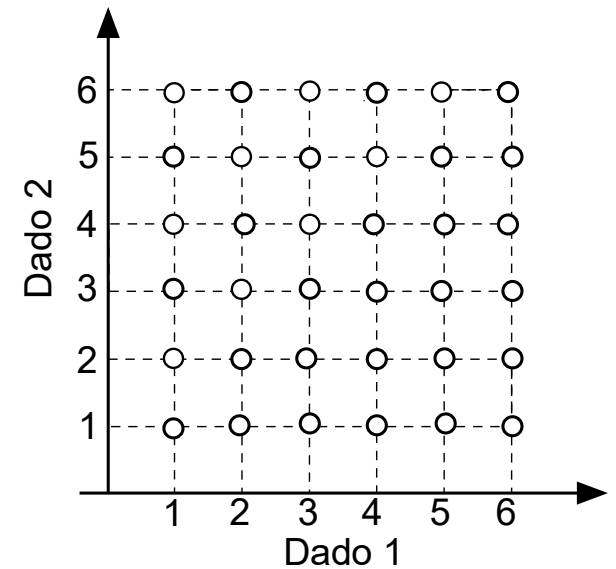
# Probabilidades

- **Exemplo:**

Lançando dois dados equilibrados, qual é a probabilidade de que:

A soma das faces seja igual a 7:

Obter uma soma maior do que 5.



# Probabilidades

- **Definição: (frequentista)**
- A probabilidade de um evento é igual à sua frequência de ocorrência em muitos experimentos.

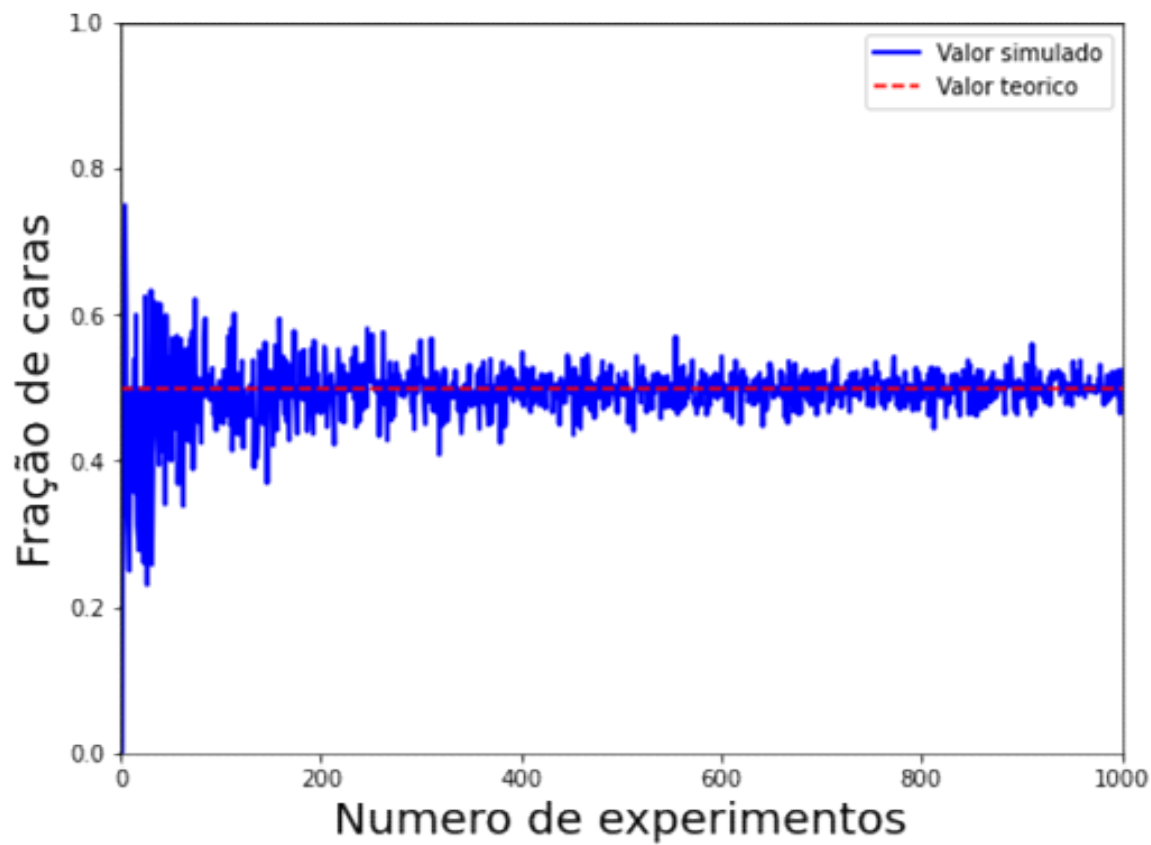
$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$



# Probabilidades

```
1 import random
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 %matplotlib inline
5
6
7 vp = [] # lista que armazena a fração de ocorrências em função do número de simulações
8 vsim = [] # armazena o número de simulações
9 Nmax = 1000 # numero maximo de simulacoes
10 moeda = ['C','R']
11 for nsim in np.arange(1,Nmax):
12     nhead = 0 # numero de caras
13     for i in range(1,nsim):
14         face = random.choice(moeda)
15         if(face == 'C'):
16             nhead = nhead + 1
17     vp.append(nhead/nsim)
18     vsim.append(nsim)
19
20 plt.figure(figsize=(8,6))
21 plt.plot(vsim, vp, linestyle='-', color="blue", linewidth=2, label = 'Valor simulado')
22 plt.axhline(y=1/2, color='r', linestyle='--', label = 'Valor teorico')
23 plt.ylabel("Fração de caras", fontsize=20)
24 plt.xlabel("Numero de experimentos", fontsize=20)
25 plt.xlim([0.0, Nmax])
26 plt.ylim([0.0, 1.0])
27 plt.legend()
28 plt.show(True)
```

# Probabilidades



# Probabilidades

- Probabilidade da união de eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Exemplo:** Qual é a probabilidade de que em um lançamento de um dado saia um número par ou maior do que três?

# Probabilidades

- Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

- **Exemplo:** Calcule  $P(A|B)$ , onde:  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ ,  $A$  é um número par e  $B$  é um número maior do que 5.



# Probabilidades

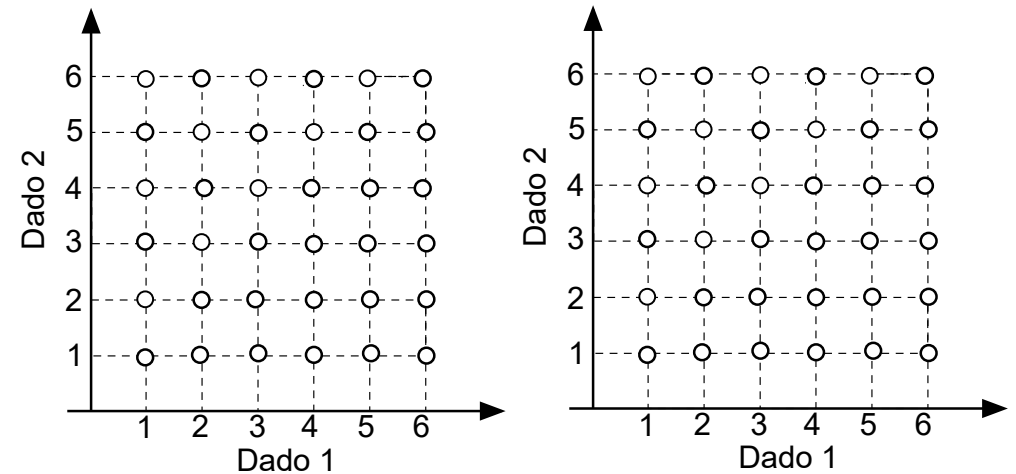
- **Exemplo:**
- Uma caixa usada em um sorteio contém 5 bolas pretas numeradas de 1 a 5, sete bolas brancas numeradas de 1 a 7 e oito bolas vermelhas numeradas de 1 a 8.
  - i) Sorteando-se uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de encontrarmos uma bola preta?
  - ii) Sorteando-se uma bola preta, qual é a probabilidade de tal bola ser par?

# Probabilidades

- **Eventos independentes**
- A e B são eventos independentes se, e somente se,  
$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

# Probabilidades

- **Exemplo:** Dois dados são lançados. Sejam os eventos:
  - A: “a soma dos dados é igual a 6”
  - B: “saiu o valor 4 no primeiro dado”
- A e B são independentes?



# Probabilidades

- Teorema de Bayes

Sejam  $B_1, \dots, B_k$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$ . Então, qualquer evento  $A \in \Omega$  pode ser escrito como:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}$$



# Probabilidades

- **Exemplo:** Um laboratório que faz testes sanguíneos apresenta eficácia de 95% na detecção de uma certa doença quando, de fato, a pessoa está doente (verdadeiro positivo). A taxa de falso positivos, ou seja, quando o teste afirma que o paciente tem a doença, embora seja saudável, é de 2%. Se 0,1% da população realmente tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o teste foi positivo?

# Probabilidades

- **Variáveis aleatórias**
- Uma variável aleatória é uma função que associa um valor real a cada elemento do espaço amostral.

# Probabilidades

- **Exemplo**
- Lançamos duas moedas. Seja  $X$  a variável aleatória que indica o número de caras. Determinar a distribuição de probabilidade de  $X$ .

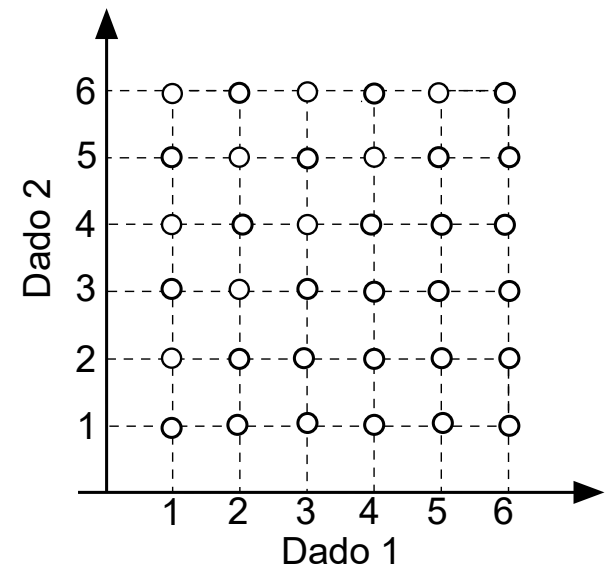
# Probabilidades

- Se  $X$  é uma variável aleatória discreta:
  - $0 \leq P(X = x) \leq 1$
  - $P(X = x) \geq 0,$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$
  - $P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{x=b} P(X = x)$



# Probabilidades

- **Exemplo:**
- Lançamos dois dados e observamos a variável aleatória  $X$  é igual a 1 se a soma for par ou igual a zero, caso contrário. Determine a distribuição de  $X$ .



# Probabilidades

- Se  $X$  é uma variável aleatória contínua, existe uma função  $f(x)$ , denominada função densidade de probabilidade, onde:
  - $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  - $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

# Probabilidades

- **Exemplo:**
- A variável aleatória  $X$  tem função densidade de probabilidade dada por:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{se } -1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Calcule  $P(0 \leq X \leq 1)$ .

# Probabilidades



<https://www.wolframalpha.com/>

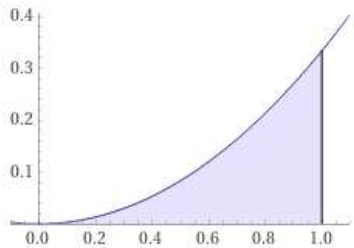
integrate (x^2)/3 from 0 to 1

Extended Keyboard Upload Examples Random

Definite integral: [More digits](#) ☒ [Step-by-step solution](#)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} \approx 0.11111$$

Visual representation of the integral:



Indefinite integral: ☒ [Step-by-step solution](#)

$$\int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} + \text{constant}$$



# Sumário

- **Probabilidades**  
**Teorema de Bayes**  
**Variáveis aleatórias**

# Leitura Complementar

- Morettin e Bussab, **Estatística Básica**, Saraiva, 2017.