

**Obs1.:** Em todos os casos utilize integração numérica com  $n + 1$  pontos, onde  $n$  é a ordem do polinômio empregado na aproximação por elementos finitos.

**Obs2.:** Apresente gráficos separados para cada caso estudado, menos para o item (e).

**Obs3.:** declare as variáveis utilizando a máxima precisão possível.

1. Seja o problema de difusão-reação:

$$-\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + u = 1, \quad x \in \Omega = [0, 1] \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

A solução exata para o problema (1)-(2) é

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \quad (3)$$

$$\text{onde } c_1 = -1 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}}.$$

A partir de uma aproximação do problema (1)-(2) pelo método de elementos finitos, faça:

a) Compare a solução exata e a aproximado para:

\*  $\varepsilon = 10^{-3}$  com 4 e 8 elementos;

\*  $\varepsilon = 10^{-4}$  com 16 e 32 elementos;

utilizando polinômios de primeira ordem ( $n = 1$ ).

b) Realizando uma análise da discretização gerada pelo método de elementos finitos do item (a) obtém-se a seguinte relação de estabilidade  $h < \sqrt{6\varepsilon}$ . Valide graficamente esta relação para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

c) Repita o item (a) utilizando polinômios de ordem  $n = 2, 3, 4, 5$ .

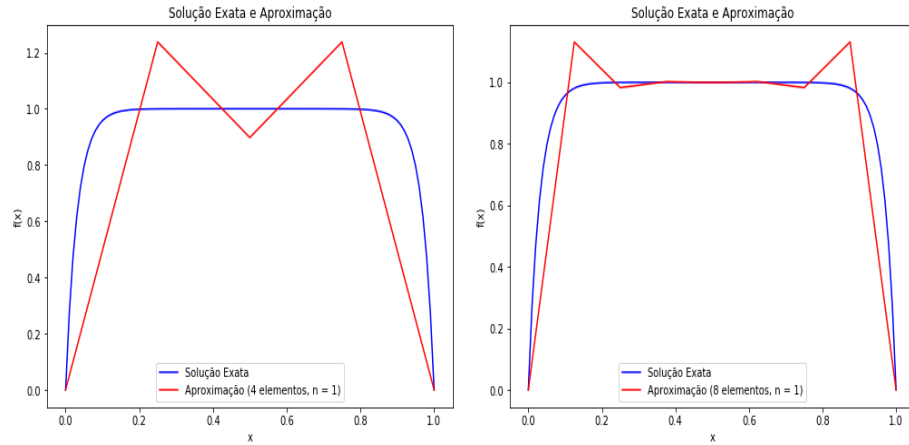
d) Compare os resultados dos itens (a) e (c) com a aproximação obtida pelo método de diferenças finitas (Questão 2 da Lista 1) e a solução exata.

e) apresente um gráfico da taxa de convergência comparando o erro entre a solução exata e a aproximada tomando  $\varepsilon = 10^{-3}$  para malhas formadas por  $4^i$  elementos, com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , utilizando a norma do máximo ou L2 para aproximações por elementos finitos de ordem  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  e diferenças finitas (apresente todos os resultados no mesmo gráfico).

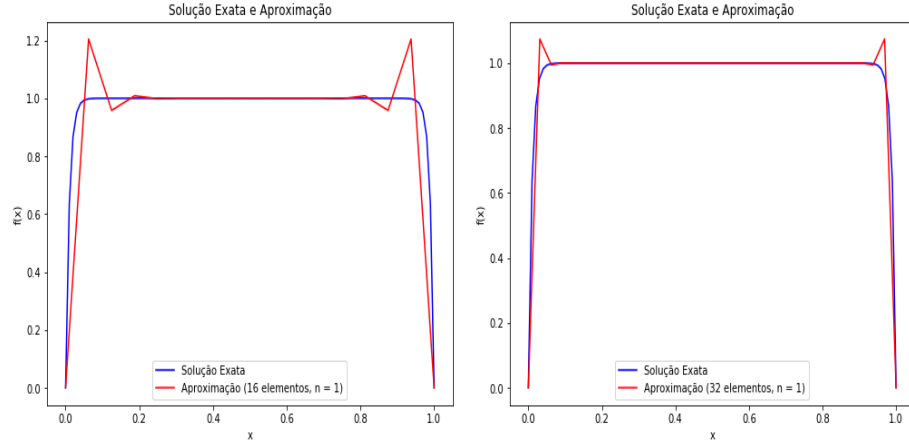
Para resolução da Lista 7 foram utilizados os métodos implementados em listas anteriores de forma a elaborar uma função resolução de elementos finitos. Todos os gráficos e métodos foram gerados com máxima precisão possível, float128.

a) Comparação da solução exata com a solução aproximada, com polinômios  $n = 1$ :

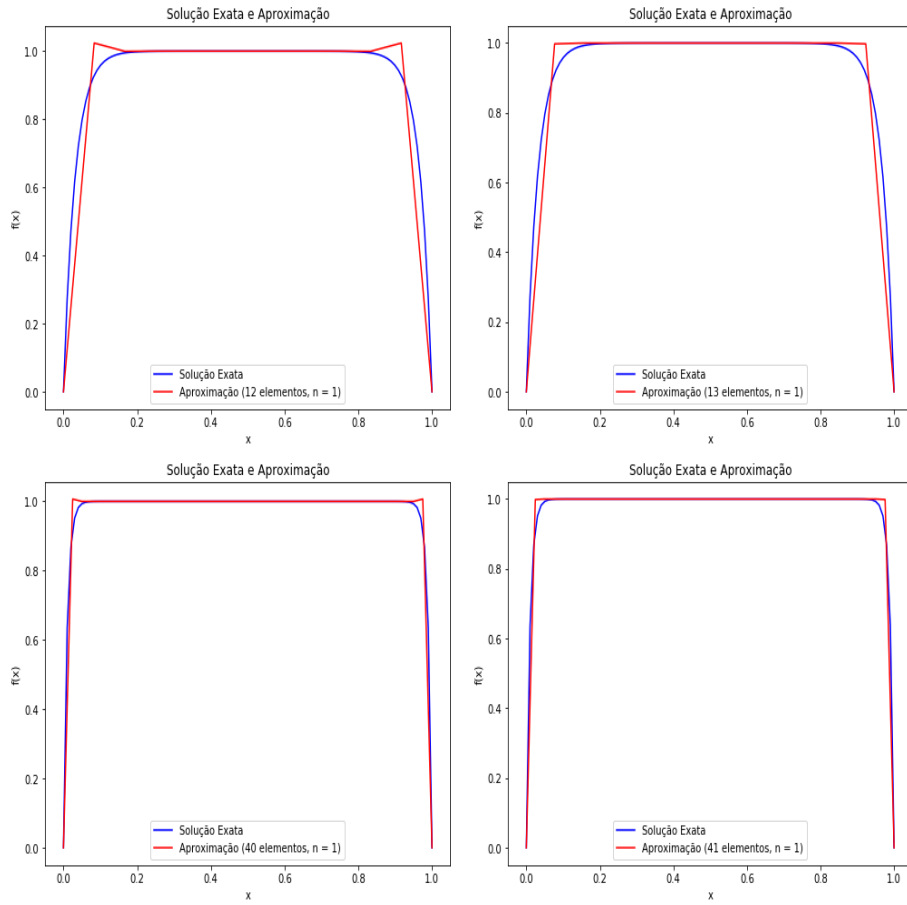
–  $\varepsilon = 10^{-3}$  com 4 e 8 elementos;



–  $\varepsilon = 10^{-4}$  com 16 e 32 elementos;



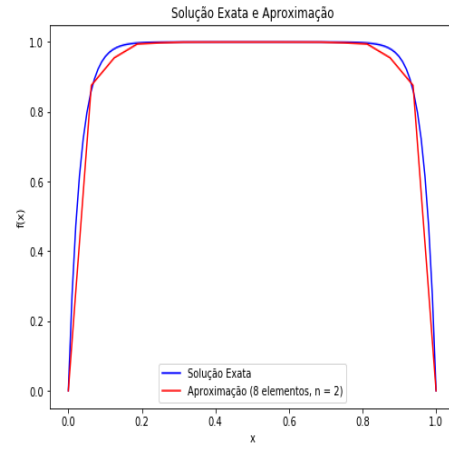
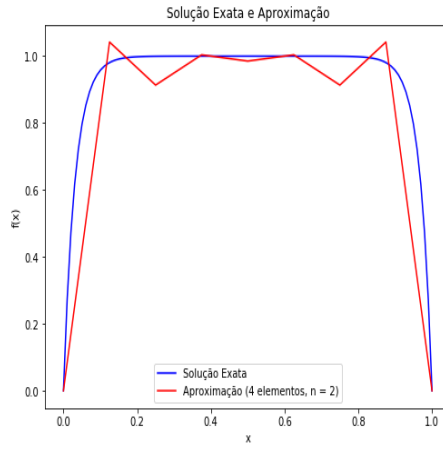
b) Utilizando a discretização do item a, obtem-se a seguinte relação graficamente:



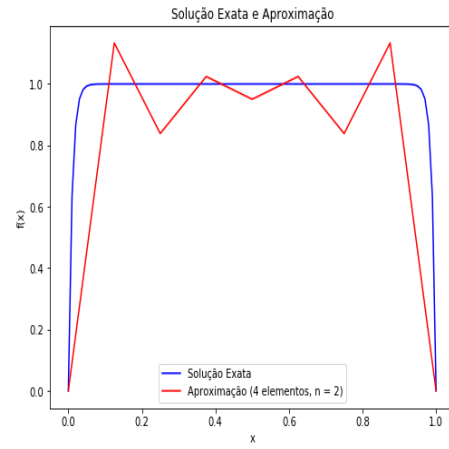
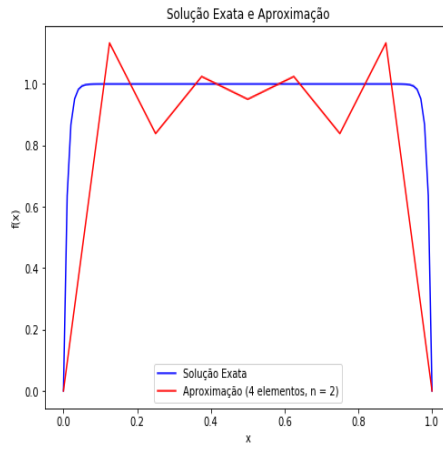
Assim, conclui-se que o metodo se torna estável em  $nel \geq 13$ , para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $nel \geq 41$  para  $\varepsilon = 10^{-4}$  evidenciado pela ausência do picos verticais nas extremidades superiores.

c) Comparação da solução exata com a solução aproximada, com polinômios agora  $n = 2, 3, 4$  e  $5$ :

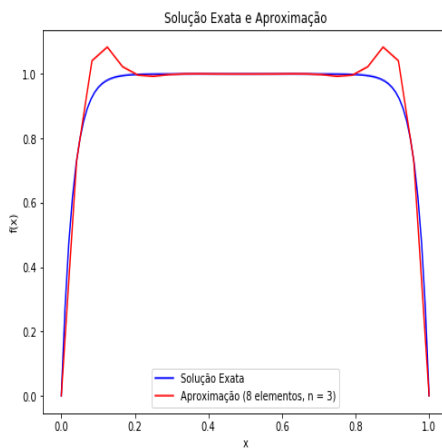
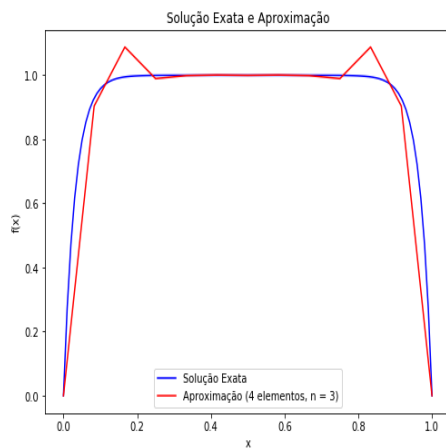
- Para  $n = 2$ .
- $\varepsilon = 10^{-3}$  com 4 e 8 elementos;



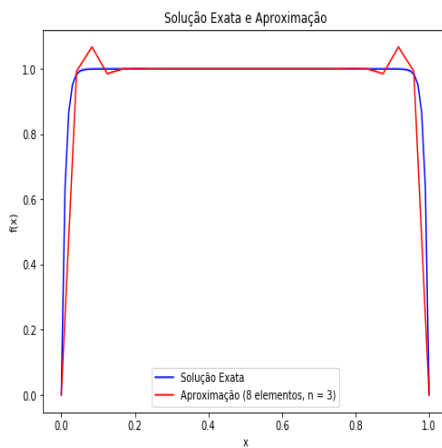
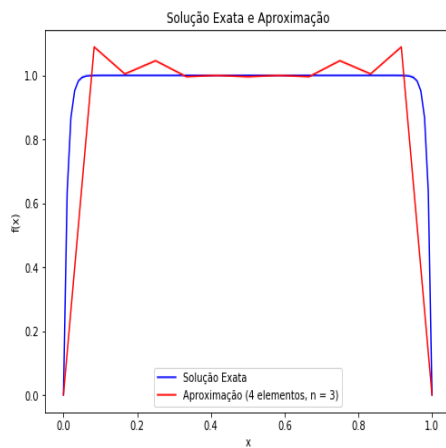
- $\varepsilon = 10^{-4}$  com 4 e 8 elementos;



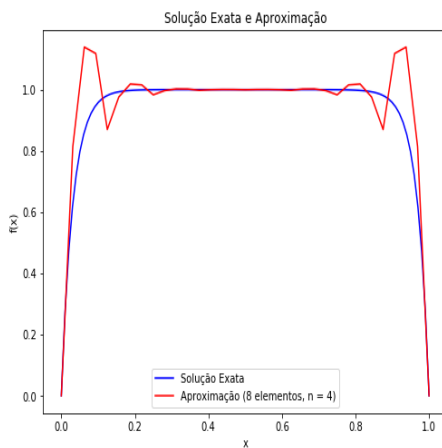
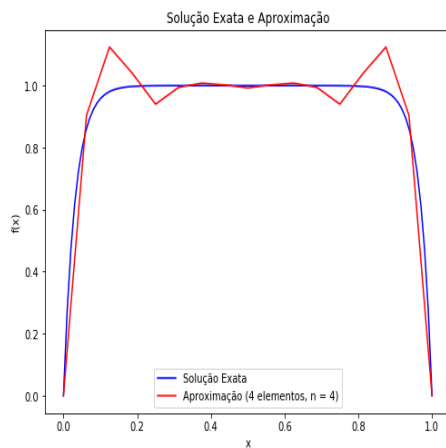
- Para  $n = 3$ .
- $\varepsilon = 10^{-3}$  com 4 e 8 elementos;



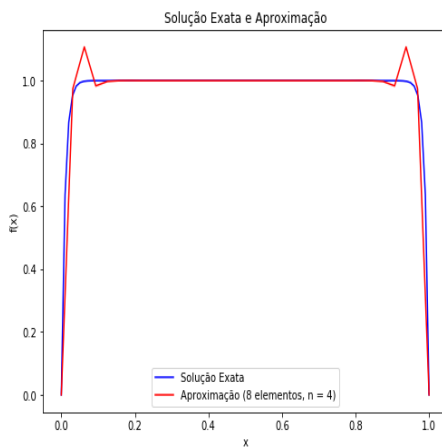
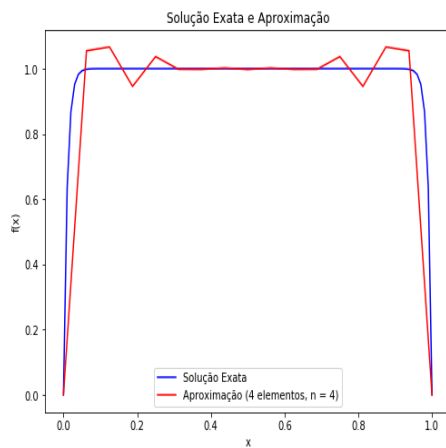
- $\varepsilon = 10^{-4}$  com 16 e 32 elementos;



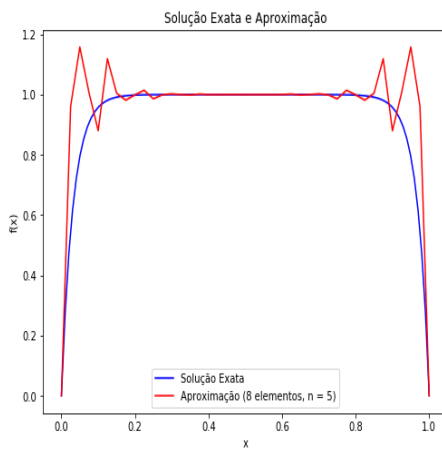
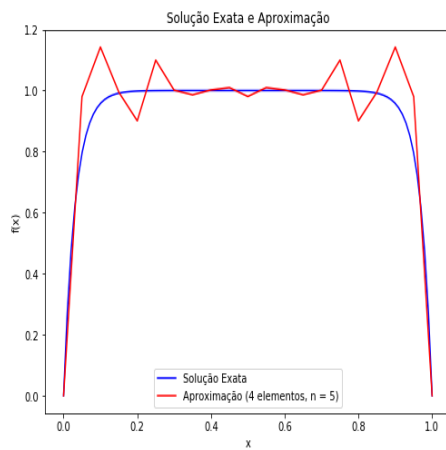
- Para  $n = 4$ .
- $\varepsilon = 10^{-3}$  com 4 e 8 elementos;



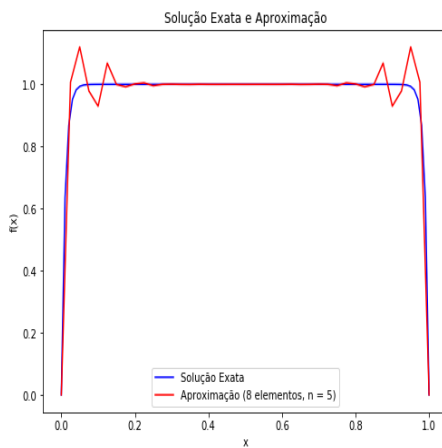
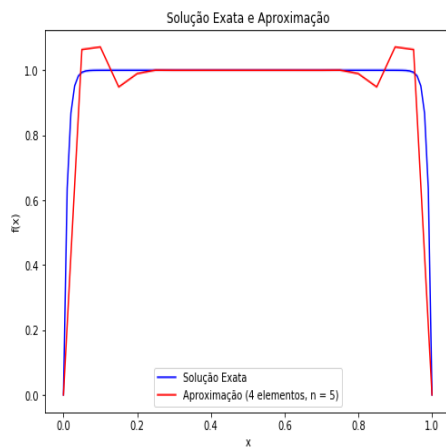
- $\varepsilon = 10^{-4}$  com 16 e 32 elementos;



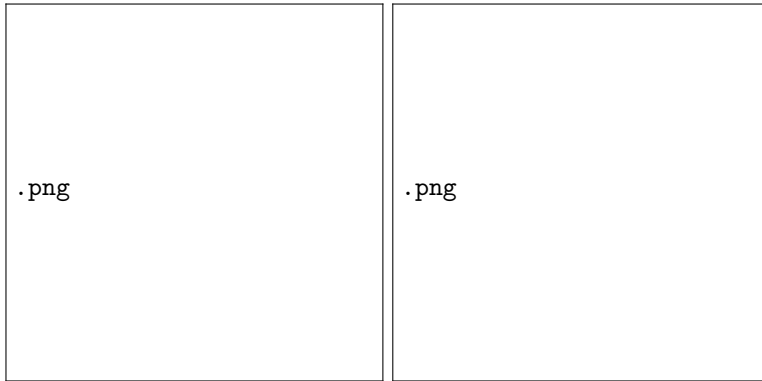
- Para  $n = 5$ .
- $\varepsilon = 10^{-3}$  com 4 e 8 elementos;



- $\varepsilon = 10^{-4}$  com 16 e 32 elementos;

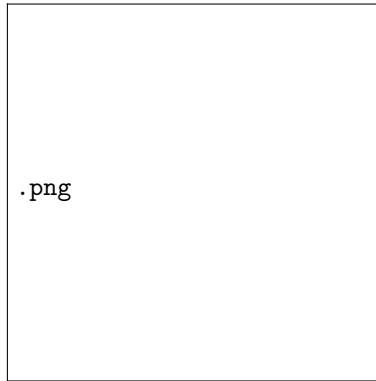


d) Comparando os resultados do item a das listas 1 e 7.





e) A taxa de convergência da solução exata com o erro graficamente.



Conclusão final: