Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Nome: Thiago de Almeida
Nome: Renan Nunes

3^a Lista
DCC008 - Cálculo Numérico
Entrega: 14 de Outubro de 2018

Obs1.: antes de resolver os exercícios abaixo, teste cada um dos métodos implementados resolvendo sistemas lineares simples de dimensão 3×3 (use um exemplo dos Slides).
Obs2.: utilize precisão dupla.

1. Resolva o sistema gerado pela questão 2 da 1^a Lista utilizando métodos diretos (Thomas, Gauss, LU e Cholesky) e métodos iterativos (Jacobi e Gauss-Seidel). Para este estudo, considere:

- Sistemas lineares de diferentes dimensões (ex. 1000, 5000, 10000) a partir do problema resolvido na 1^a Lista variando o número de elementos;
- A aplicação do critério das linhas para determinar se os métodos iterativos convergem neste caso;
- O tempo de processamento de cada método, direto ou iterativo, para a resolução do sistema e monte uma tabela;
- Apresente o critério de parada e a tolerância utilizada para os métodos iterativos;
- Comente os resultados obtidos.

O critério de Parada Utilizado nas implementações dos métodos iterativos está no código abaixo.
Na geração da matriz, foi usado o erro $0,01$.
E a tolerância dos métodos iterativos usada foi de $0,0001$.

Python

```python
    def normaMaximo(self, x):
        size = len(x)
        maximo = abs(x[0])

        for i in range(size):
            temp = abs(x[i])
            if(temp > maximo):
                maximo = temp

        return maximo

    def distanciaMaximo(self, x1, x2):
        if(len(x1) != len(x2)):
            print("O tamanho dos vetores x1 e x2 precisa ser o mesmo")
            return 0

        size = len(x1)
        dist = abs(x1[0] - x2[0])

        for i in range(size):
            temp = abs(x1[i] - x2[i])
            if(temp > dist):
                dist = temp

        return dist

    def calculaErro(self, x_prox, x_atual):
        return self.distanciaMaximo(x_prox, x_atual) / self.normaMaximo(x_prox)
```

Antes da execução dos métodos iterativos foi feita a verificação do critério das linhas com a implementação abaixo

Python

```python
def checarCriterioDasLinhas(self, M):

        ordem = len(M)

        for i in range(ordem):
            valores = []
            div = M[i][i]

            #se algum elemento da diagonal principal for zero
            #a matriz nao satisfaz o criterio das linhas
            if(div == 0):
                return False

            for j in range(ordem):
                if(i != j):
                    valores.append(M[i][j] / div)

            #um elemento dividido pelo valor da diagonal principal deu maior ou igual que 1
            #a matriz nao satisfaz o criterio das linhas
            if(max(valores) >= 1):
                return False

        return True
```

O método que calcula o erro residual da questão 2 também está mostrado abaixo.

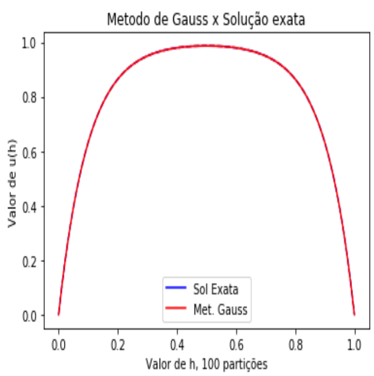
Python

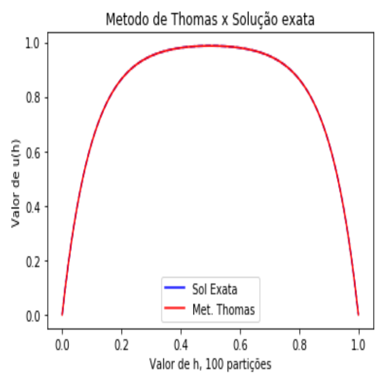
```python
    def erroResidual(self, M, X, B):
        size = len(M[0])
        erroRet = []
        for i in range(size):
            valor = 0
            for j in range(size):
                valor += M[i][j] * X[j]

            erroRet.append(abs(valor - B[i]))

        return [erroRet, max(erroRet)]
```

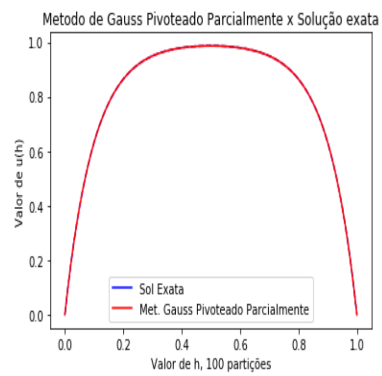
Lembrando que a contagem de passos conta os realizados pelo pivoteamento
Para uma Matriz 100x100:

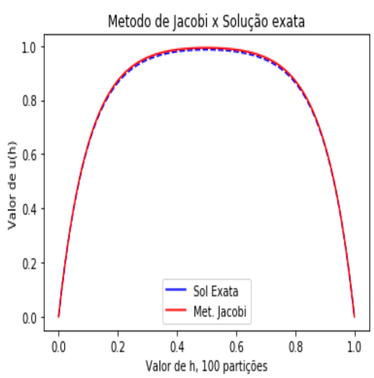
Metodo	*Passos*	*Tempo de* Execução
Thomas (direto)	9997	0:00:00.002952
Gauss (direto)	328251	0:00:00.107486
Gauss com Pivoteamento Parcial	338052	0:00:00.104647
Gauss-Seidel (iterativo)	4361445	0:00:01.201678
LU	333300	0:00:00.324635
Choleski	24354	0:00:00.074590
Jacobi (iterativo)	46629	0:00:00.785732

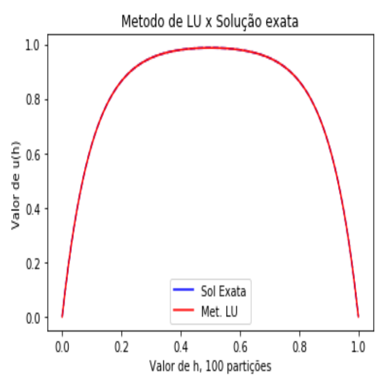
Tabela 1: Matriz 100x100

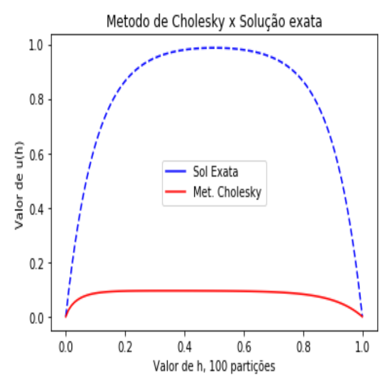


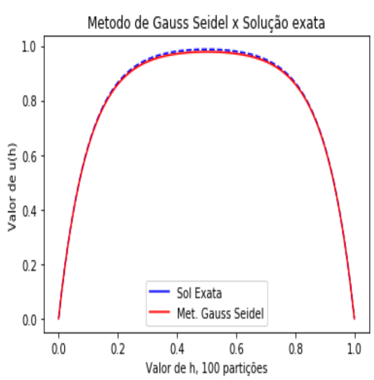








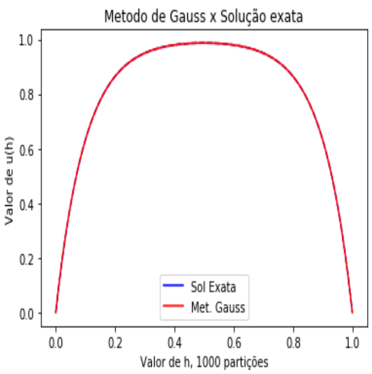


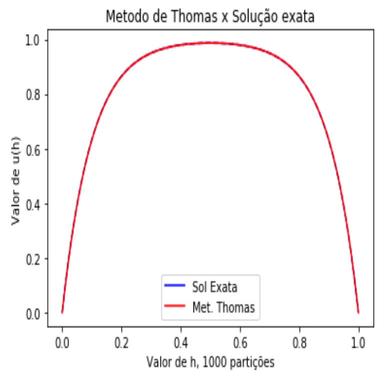


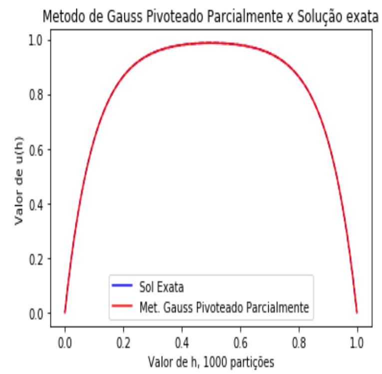
Para uma matriz 1000x1000:

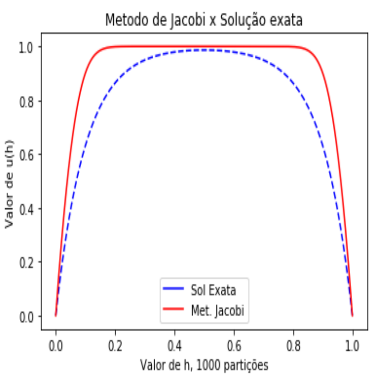
Metodo	*Passos*	*Tempo de* Execução
Thomas (direto)	999997	0:00:00.235122
Gauss (direto)	332832501	0:01:39.306903
Gauss com Pivoteamento Parcial	333830502	0:01:39.587652
Gauss-Seidel (iterativo)	2011970016	0:09:22.138811
LU	333333000	0:05:06.996908
Choleski	2493504	0:00:34.001452
Jacobi (iterativo)	3964032	0:06:03.981231

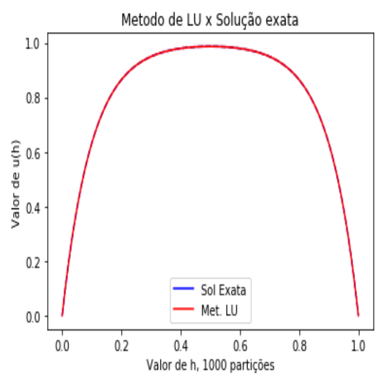
Tabela 2: Matriz 1000x1000

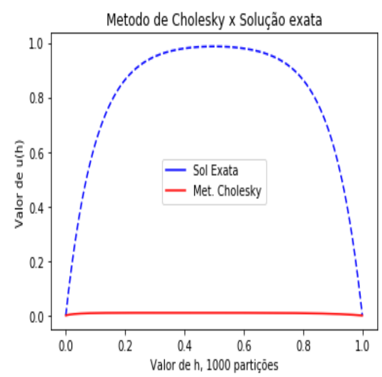


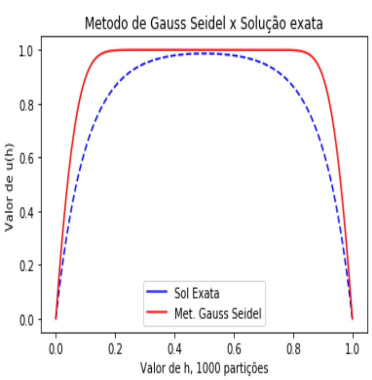








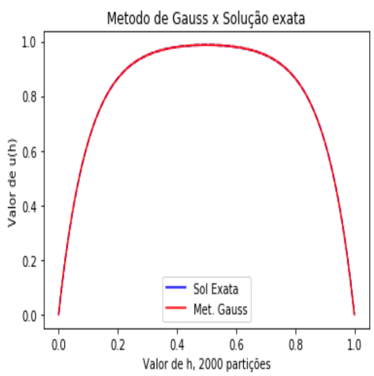


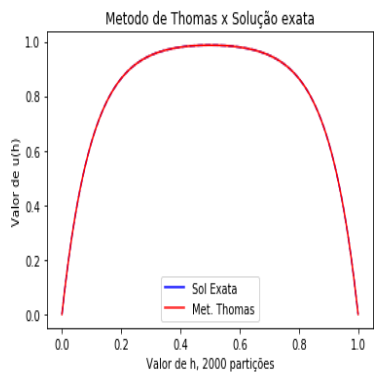


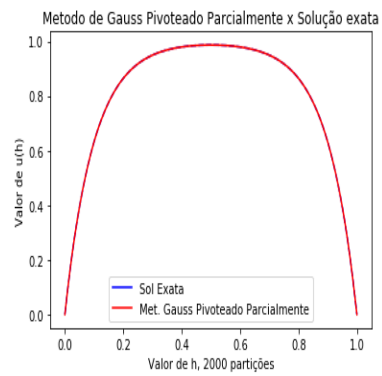
Para uma matriz 2000x2000:

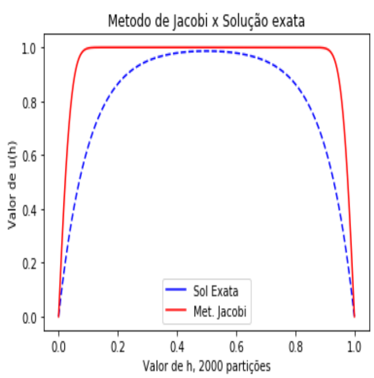
Metodo	Passos	Tempo de Execução
Thomas (direto)	3999997	0:00:01.438566
Gauss (direto)	2664665001	0:12:35.660406
Gauss com Pivoteamento Parcial (direto)	2668661002	0:13:36.051002
Gauss-Seidel (iterativo)	59940015	0:00:15.697584
LU	2666666000	0:44:35.352543
Choleski	9987004	0:04:44.301479
Jacobi (iterativo)	9137429	0:26:51.788595

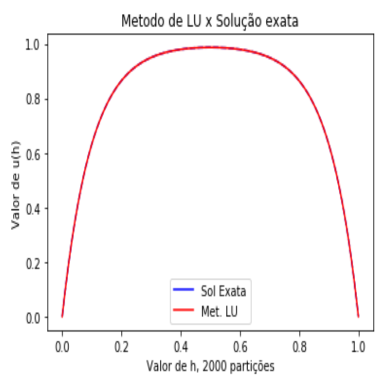
Tabela 3: Matriz 2000x2000

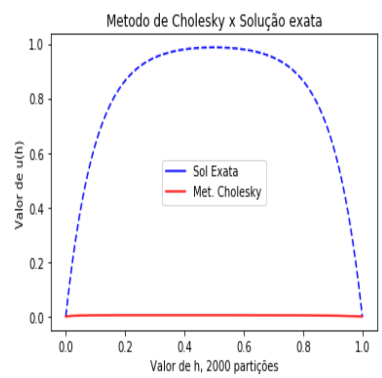


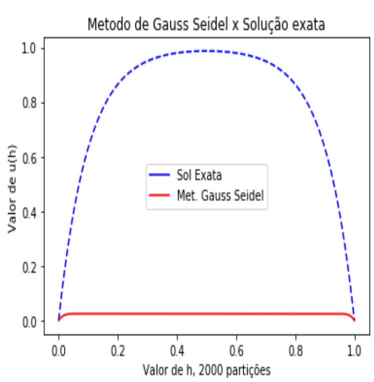












2. Seja o sistema linear:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde,

$$\mathbf{A} = A_{i,j} = \frac{1}{i+j+1} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_i = \frac{1}{i+n+1}.$$

Supondo a matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$, com diferentes dimensões n (ex. $n = 10, 100, 1000$), faça:

- Resolva utilizando o método de eliminação de Gauss **sem** e **com** pivoteamento e a decomposição LU.
- Determine o erro cometido, por cada um dos métodos utilizados, através do resíduo calculado na norma do máximo, dado por:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |A_{i,j}x_i - b_i|, \quad \forall j \in [1, n]$$

onde x_i é o vetor solução. Compare e discuta os resultados.

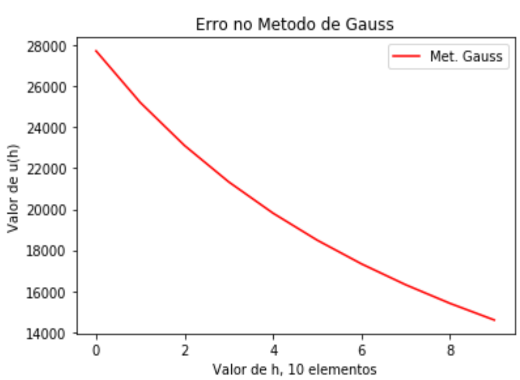
Supondo matrizes de dimensões 10,100 e 1000; Para 10 elementos:

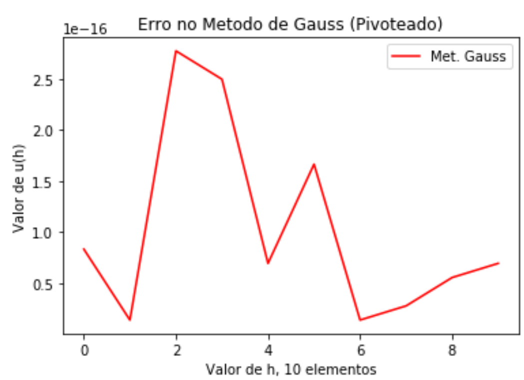
	Gauss	*Gauss com Pivoteamento Parcial*	*LU*
PASSOS	375	475	440
TEMPO DE EXECUÇÃO	0:00:00.000989	0:00:00.000997	0:00:00.000990

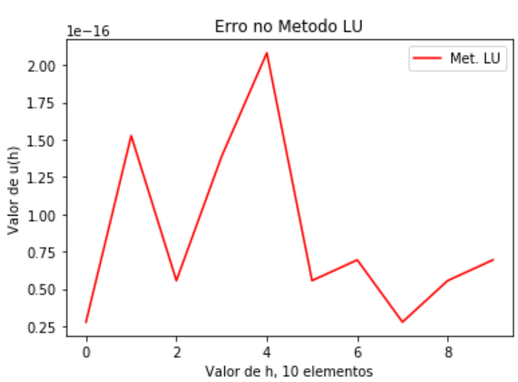
Tabela 4: Comparação de resultados de diferentes dimensões

	Gauss	*Gauss com Pivoteamento Parcial*	*LU*
Erro Max	27717.293488028645	2.7755575615628914e-16	2.0816681711721685e-16

Tabela 5: Comparação de erros







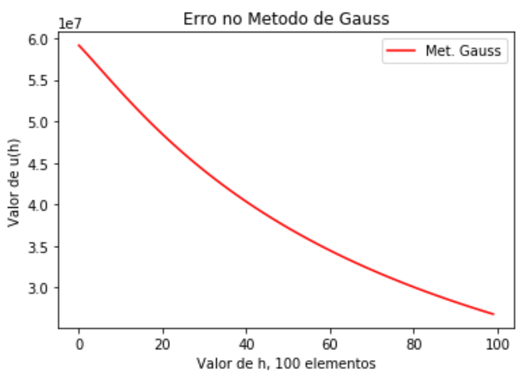
Para 100:

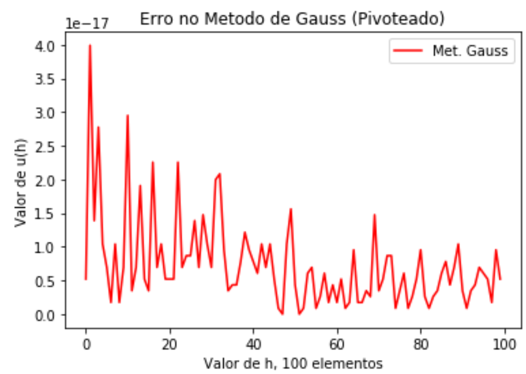
	Gauss	*Gauss com Pivoteamento Parcial*	*LU*
PASSOS	338250	348250	343400
TEMPO DE EXECUÇÃO	0:00:00.156041	0:00:00.100983	0:00:00.085986

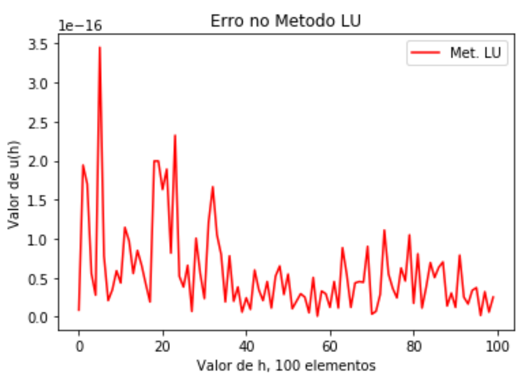
Tabela 6: Comparação de resultados de diferentes dimensões

	Gauss	*Gauss com Pivoteamento Parcial*	*LU*
Erro Max	59153715.99267997	3.9898639947466563e-17	3.452099717193846e-16

Tabela 7: Comparação de erros







Para 1000 elementos:

	Gauss	*Gauss com Pivoteamento Parcial*	*LU*
PASSOS	333832500	334832500	334334000
TEMPO DE EXECUÇÃO	0:01:38.251980	0:01:40.540858	0:05:04.649882

Tabela 8: Comparação de resultados de diferentes dimensões

	Gauss	*Gauss com Pivoteamento Parcial*	*LU*
Erro Max	140669356.34659576	1.9081958235744878e-17	3.3881317890172013563e-20

Tabela 9: Comparação de erros