

Obs1.: Em todos os casos utilize integração numérica com $n + 1$ pontos, onde n é a ordem do polinômio empregado na aproximação por elementos finitos.

Obs2.: Apresente gráficos separados para cada caso estudado, menos para o item (e).

Obs3.: declare as variáveis utilizando a máxima precisão possível.

1. Seja o problema de difusão-reação:

$$-\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + u = 1, \quad x \in \Omega = [0, 1] \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

A solução exata para o problema (1)-(2) é

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \quad (3)$$

$$\text{onde } c_1 = -1 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}}.$$

A partir de uma aproximação do problema (1)-(2) pelo método de elementos finitos, faça:

a) Compare a solução exata e a aproximado para:

* $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;

* $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;

utilizando polinômios de primeira ordem ($n = 1$).

b) Realizando uma análise da discretização gerada pelo método de elementos finitos do item (a) obtém-se a seguinte relação de estabilidade $h < \sqrt{6\varepsilon}$. Valide graficamente esta relação para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-4}$.

c) Repita o item (a) utilizando polinômios de ordem $n = 2, 3, 4, 5$.

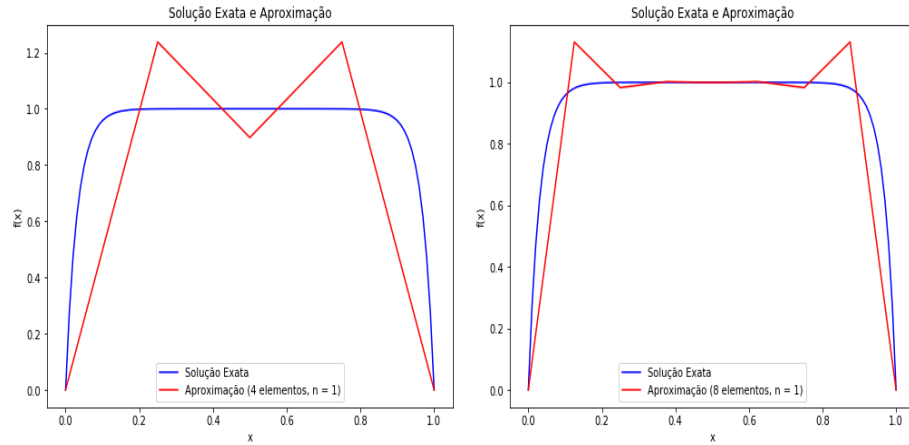
d) Compare os resultados dos itens (a) e (c) com a aproximação obtida pelo método de diferenças finitas (Questão 2 da Lista 1) e a solução exata.

e) apresente um gráfico da taxa de convergência comparando o erro entre a solução exata e a aproximada tomando $\varepsilon = 10^{-3}$ para malhas formadas por 4^i elementos, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$, utilizando a norma do máximo ou L2 para aproximações por elementos finitos de ordem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e diferenças finitas (apresente todos os resultados no mesmo gráfico).

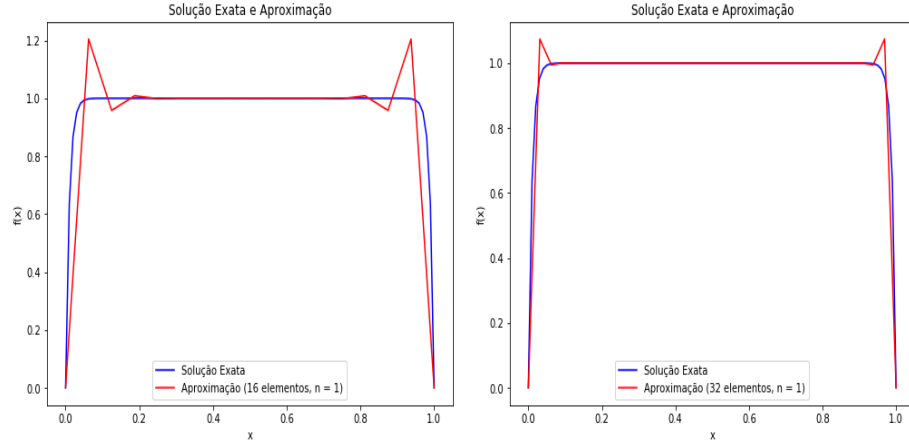
Para resolução da Lista 7 foram utilizados os métodos implementados em listas anteriores de forma a elaborar uma função resolução de elementos finitos. Todos os gráficos e métodos foram gerados com máxima precisão possível, float128.

a) Comparação da solução exata com a solução aproximada, com polinômios $n = 1$:

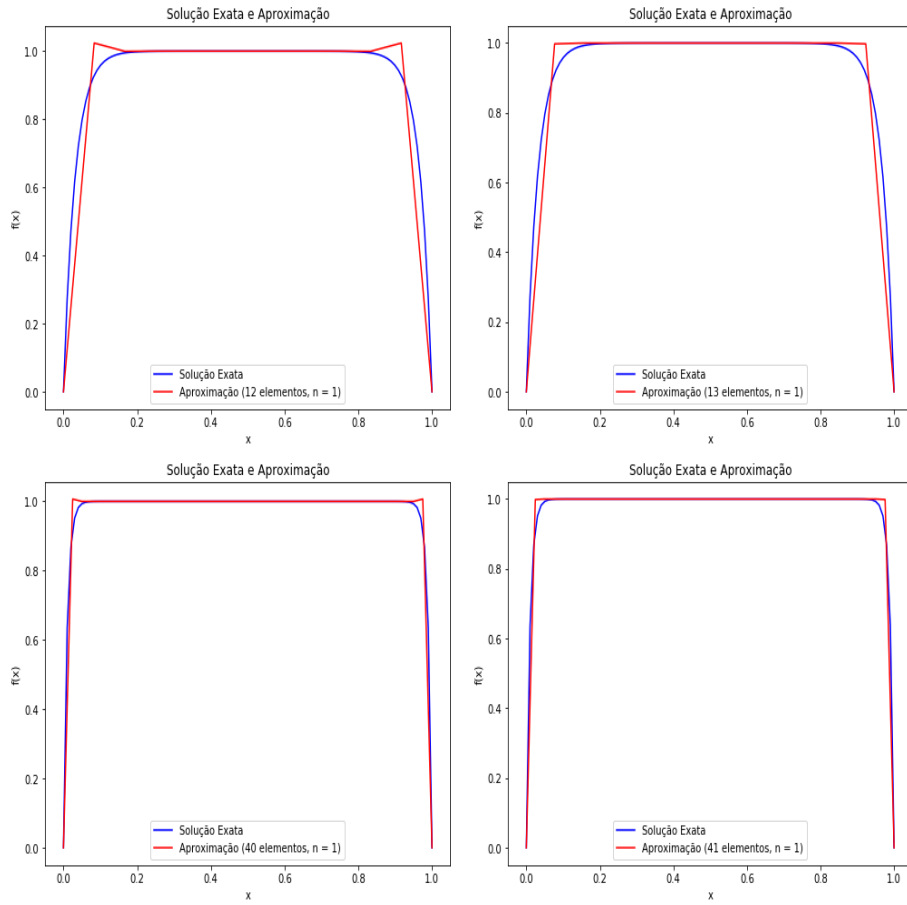
– $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



– $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;



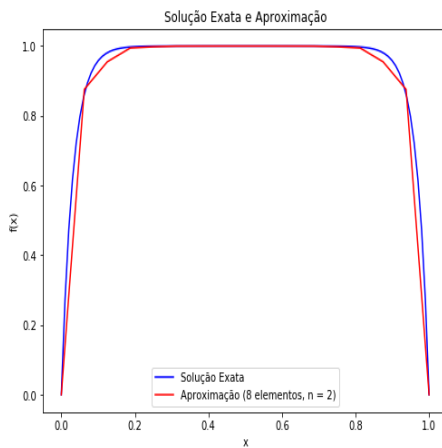
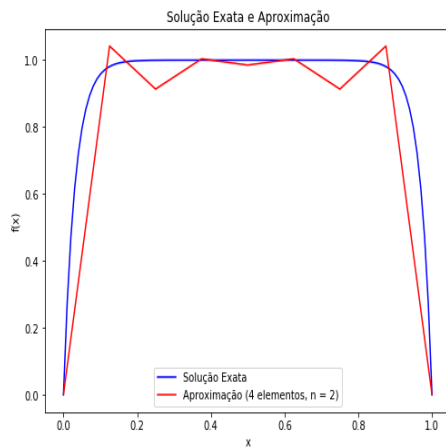
b) Utilizando a discretização do item a, obtem-se a seguinte relação graficamente:



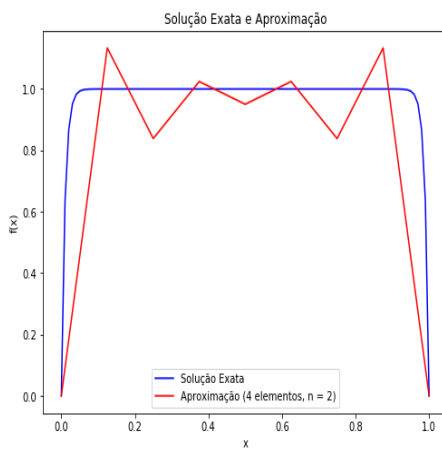
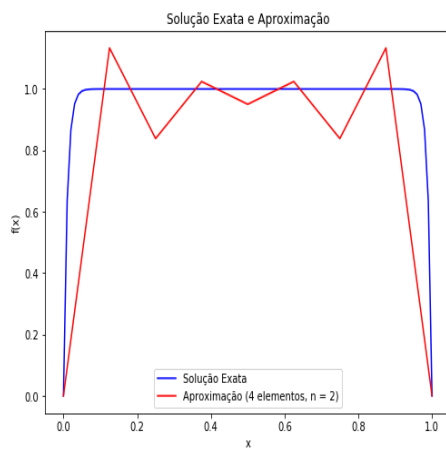
Assim, conclui-se que o metodo se torna estável em $nel \geq 13$, para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $nel \geq 41$ para $\varepsilon = 10^{-4}$ evidenciado pela ausência do picos verticais nas extremidades superiores.

c) Comparação da solução exata com a solução aproximada, com polinômios agora $n = 2, 3, 4$ e 5 :

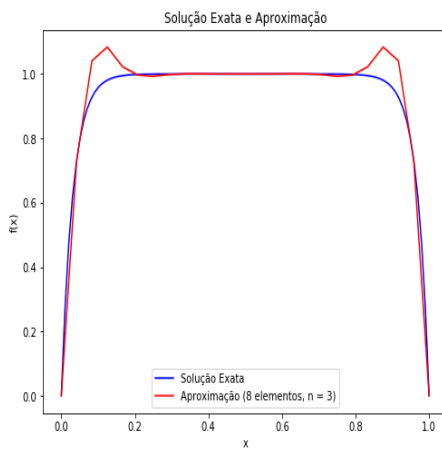
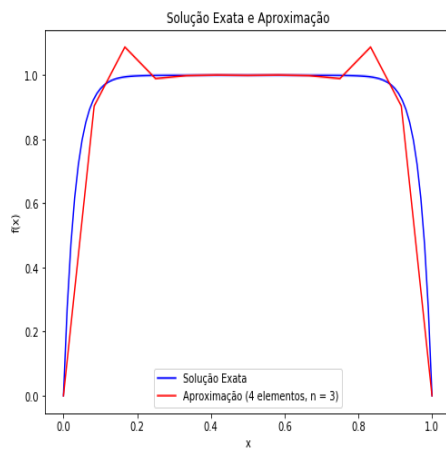
- Para $n = 2$.
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



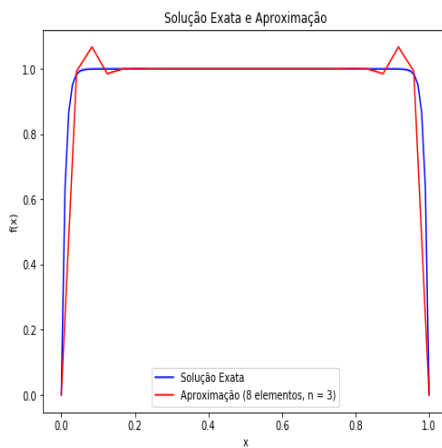
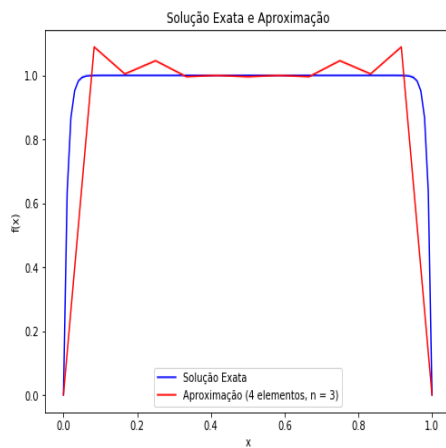
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 4 e 8 elementos;



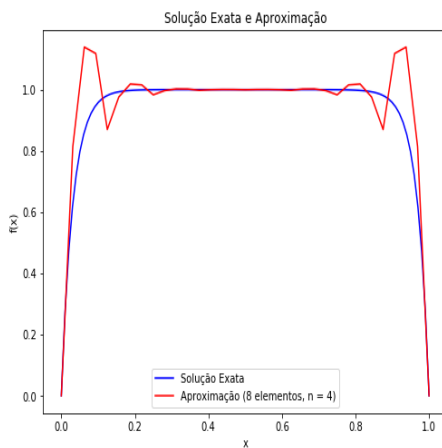
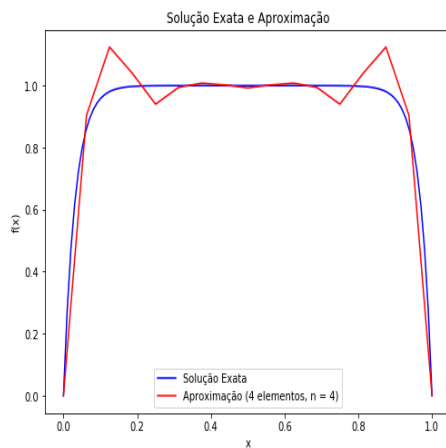
- Para $n = 3$.
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



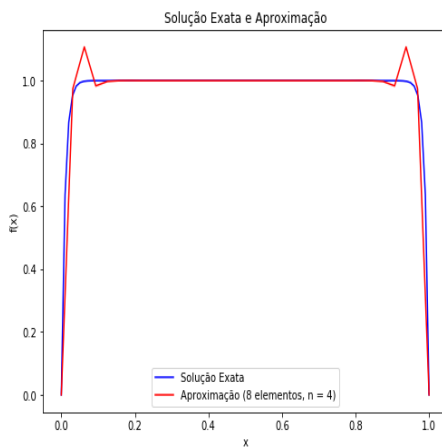
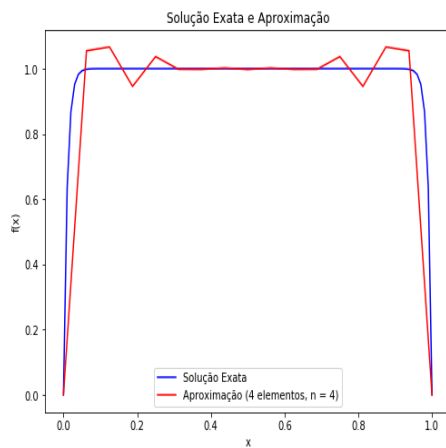
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;



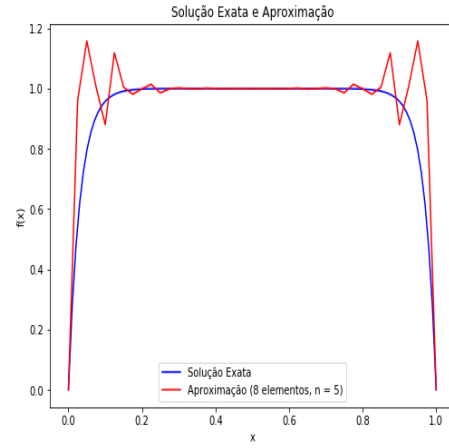
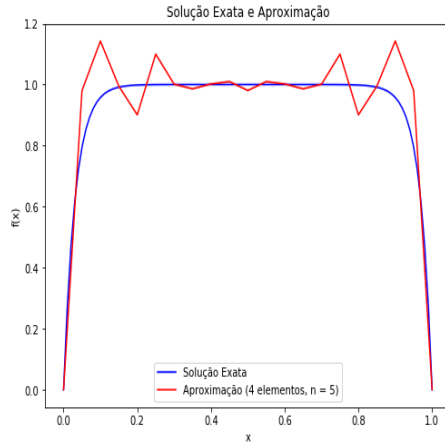
- Para $n = 4$.
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



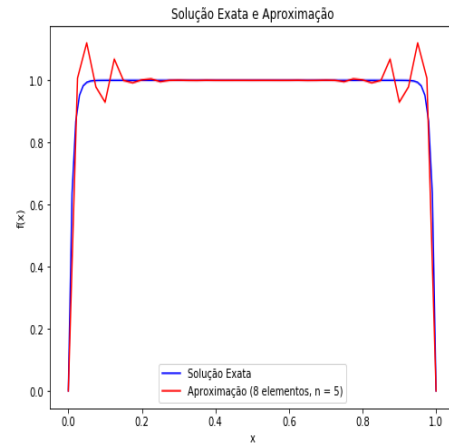
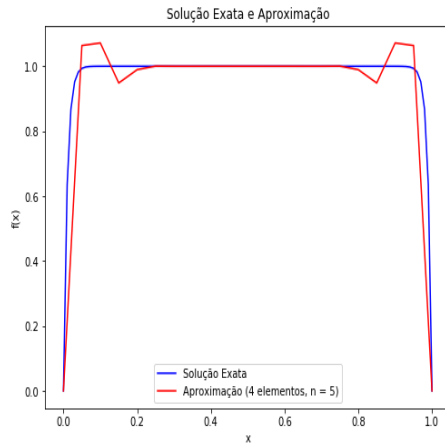
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;



- Para $n = 5$.
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



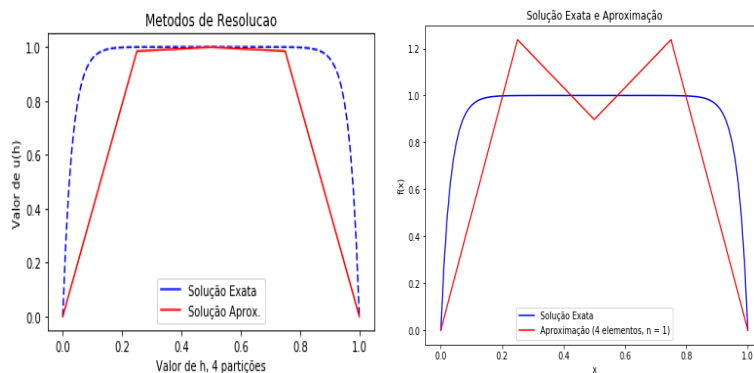
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;



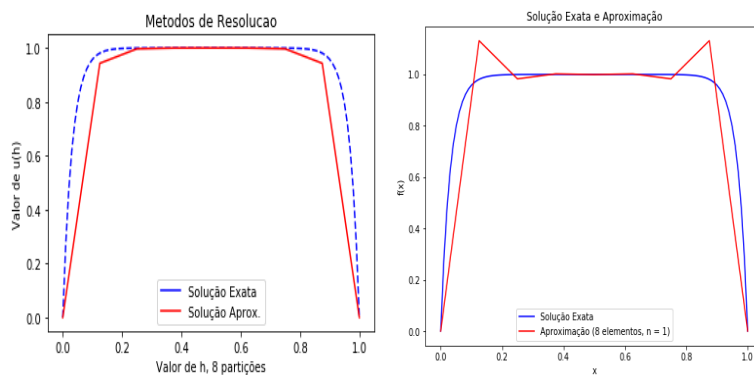
Conclui-se que o aumento da quantidade de elementos melhora a precisão do método de Elementos Finitos. Os picos presentes (instabilidades) também diminuem com o aumento da quantidade de elementos.

d) Comparando os resultados do item a das listas 1 e 7.

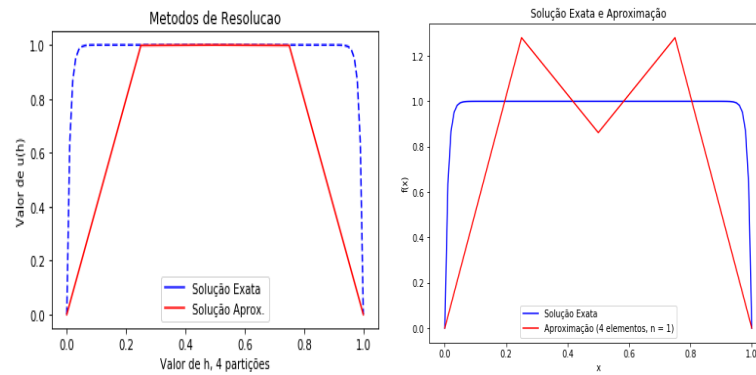
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);



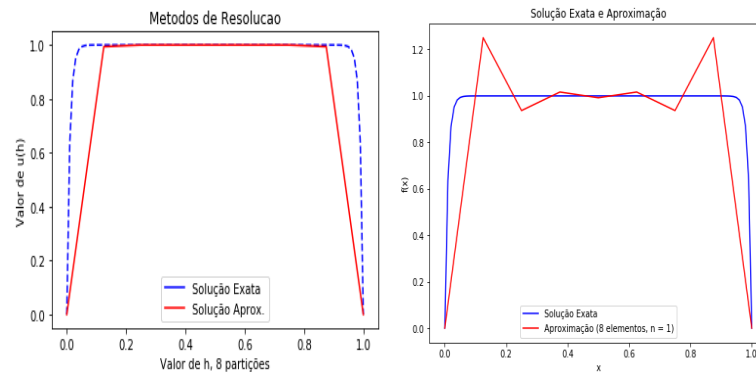
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 8 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);



- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 4 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);

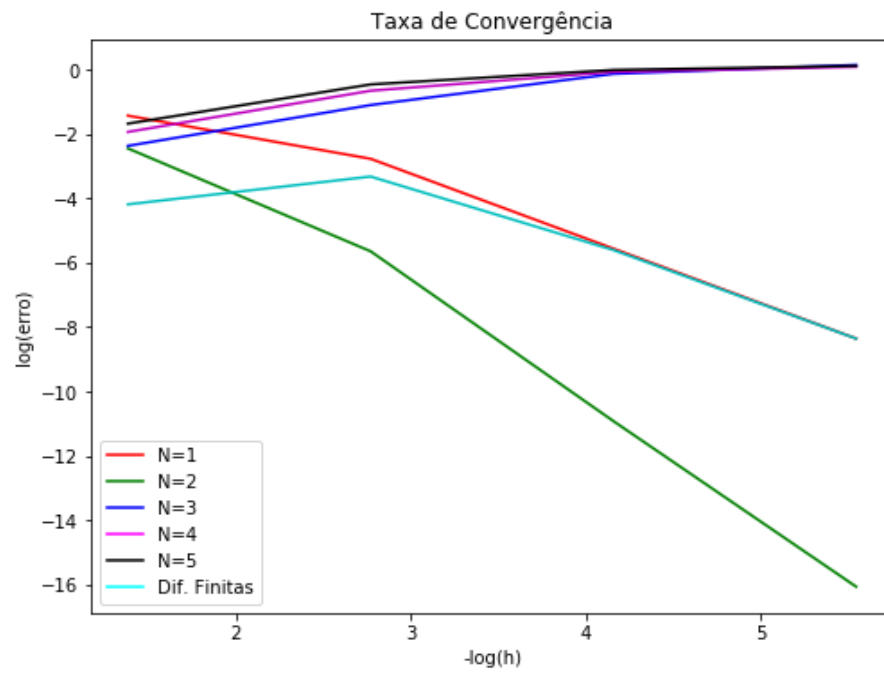


- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 8 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);



Conclusão: Nota-se que o método de Diferenças Finitas se comportou ligeiramente melhor em relação ao método de Elementos Finitos para o problema dado.

e) A taxa de convergência da solução exata com o erro graficamente.



Conclusão final: