Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Nome: Thiago de Almeida
Nome: Renan Nunes

Trabalho
DCC008 - Cálculo Numérico
Entrega: 09 de Dezembro de 2018

Obs1.: Em todos os casos utilize integração numérica com $n+1$ pontos, onde n é a ordem do polinômio empregado na aproximação por elementos finitos.
Obs2.: Apresente gráficos separados para cada caso estudado, menos para o item (e).
Obs3.: declare as variáveis utilizando a máxima precisão possível.

1. Seja o problema de difusão-reação:

$$-\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + u = 1, \quad x \in \Omega = [0,1] \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

A solução exata para o problema (1)-(2) é

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \tag{3}$$

onde $c_1 = -1 - c_2$ e $c_2 = \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}}$.

A partir de uma aproximação do problema (1)-(2) pelo método de elementos finitos, faça:

a) Compare a solução exata e a aproximado para:
   - $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;
   - $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;

   utilizando polinômios de primeira ordem ($n = 1$).

b) Realizando uma análise da discretização gerada pelo método de elementos finitos do item (a) obtém-se a seguinte relação de estabilidade $h < \sqrt{6\varepsilon}$. Valide graficamente esta relação para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-4}$.

c) Repita o item (a) utilizando polinômios de ordem $n = 2, 3, 4, 5$.

d) Compare os resultados dos itens (a) e (c) com a aproximação obtida pelo método de diferenças finitas (Questão 2 da Lista 1) e a solução exata.

e) apresente um gráfico da taxa de convergência comparando o erro entre a solução exata e a aproximada tomando $\varepsilon = 10^{-3}$ para malhas formadas por 4^i elementos, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$, utilizando a norma do máximo ou L2 para aproximações por elementos finitos de ordem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e diferenças finitas (apresente todos os resultados no mesmo gráfico).