1. Seja a função:

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \tag{1}$$

com $c_1 = -1 - c_2$ e $c_2 = \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}}$. Adotando $x \in [0, 1]$ e $\varepsilon = 0.001$, faça:

a) Ajuste a função $u(x)$ por mínimos quadrados utilizandpo diferentes ordens ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) e apresente gráficos comparando com a solução exata (1). Para isso, utilize a quadratura de Gauss para integração numérica utilizando $n + 1$ pontos.

b) Repita o item (a) dividindo o intervalo $[0, 1]$ em 25 subintervalos iguais e utilize ordem $n = 1$ em cada subintervalo.

c) Calcule o erro de todas as curvas ajustadas nos itens (a) e (b) utilizando a norma L2, que pode ser definida como:

$$\|u(x) - u_h(x)\|_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^{K-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x) - u_h(x))^2 \, dx}$$

onde $u_h(x)$ é a curva ajustada por mínimos quadrados e K é o número de partições do domínio (neste caso, $x_0 = 0$ e $x_K = 1$). Aplique a regra 3/8 de simpson para o cálculo da integral. Construa uma tabela com os resultados.