Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Nome: Thiago de Almeida
Nome: Renan Nunes

Obs1.: Em todos os casos utilize integração numérica com $n+1$ pontos, onde n é a ordem do polinômio empregado na aproximação por elementos finitos.
Obs2.: Apresente gráficos separados para cada caso estudado, menos para o item (e).
Obs3.: declare as variáveis utilizando a máxima precisão possível.

1. Seja o problema de difusão-reação:

$$-\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + u = 1, \quad x \in \Omega = [0,1] \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

A solução exata para o problema (1)-(2) é

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \tag{3}$$

onde $c_1 = -1 - c_2$ e $c_2 = \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}}$.

A partir de uma aproximação do problema (1)-(2) pelo método de elementos finitos, faça:

a) Compare a solução exata e a aproximado para:
   * $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;
   * $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;

   utilizando polinômios de primeira ordem ($n = 1$).

b) Realizando uma análise da discretização gerada pelo método de elementos finitos do item (a) obtém-se a seguinte relação de estabilidade $h < \sqrt{6\varepsilon}$. Valide graficamente esta relação para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-4}$.

c) Repita o item (a) utilizando polinômios de ordem $n = 2, 3, 4, 5$.

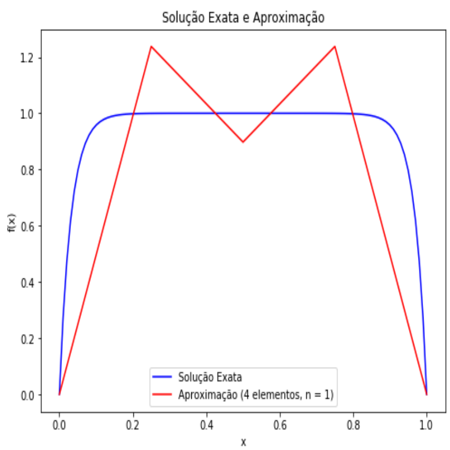
d) Compare os resultados dos itens (a) e (c) com a aproximação obtida pelo método de diferenças finitas (Questão 2 da Lista 1) e a solução exata.

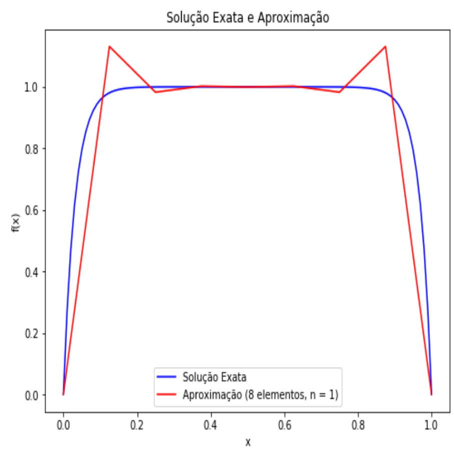
e) apresente um gráfico da taxa de convergência comparando o erro entre a solução exata e a aproximada tomando $\varepsilon = 10^{-3}$ para malhas formadas por 4^i elementos, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$, utilizando a norma do máximo ou L2 para aproximações por elementos finitos de ordem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e diferenças finitas (apresente todos os resultados no mesmo gráfico).

Para resolução da Lista 7 foram utilizados os métodos implementados em listas anteriores de forma a elaborar uma função resolução de elementos finitos. Todos os gráficos e métodos foram gerados com máxima precisão possível, float128.

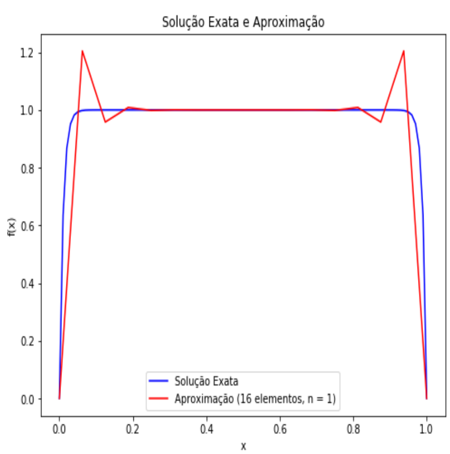
a) Comparação da solução exata com a solução aproximada, com polinomios $n = 1$:

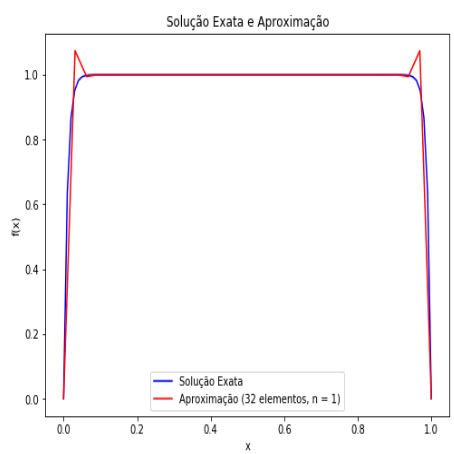
– $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



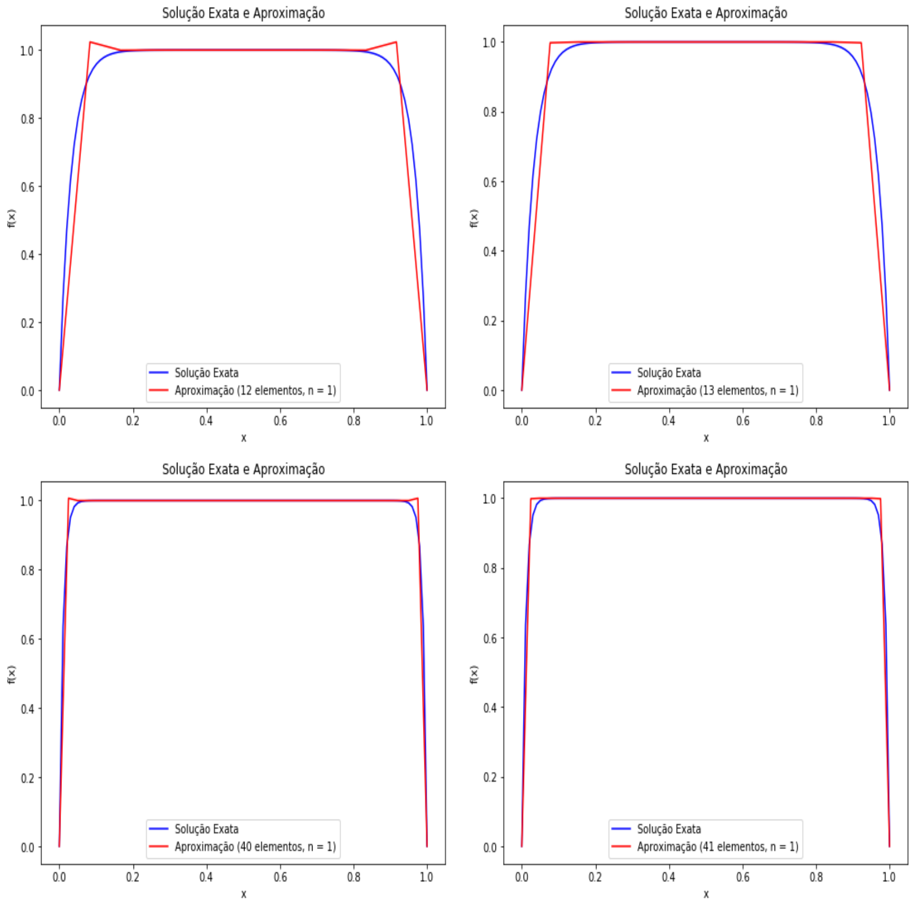


– $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;





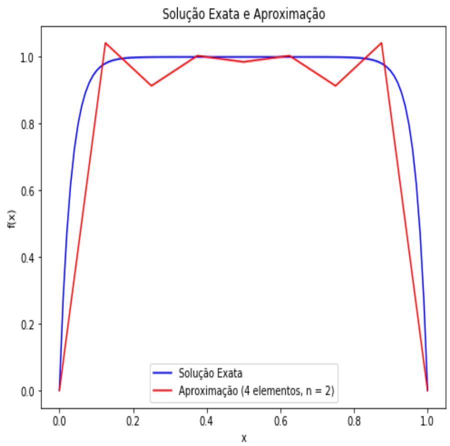
b) Utilizando a discretização do item a, obtem-se a seguinte relação graficamente:

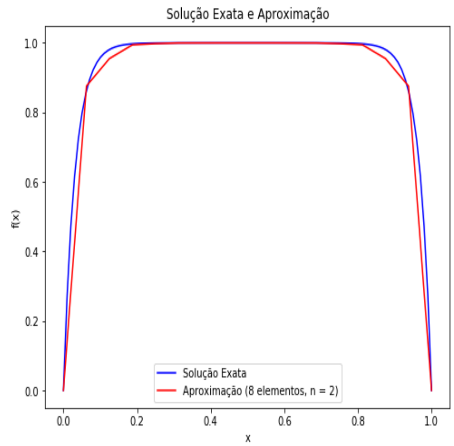


Assim, conclui-se que o metodo se torna estável em $nel >= 13$, para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $nel >= 41$ para $\varepsilon = 10^{-4}$ evidenciado pela ausência do picos verticais nas extremidades superiores.

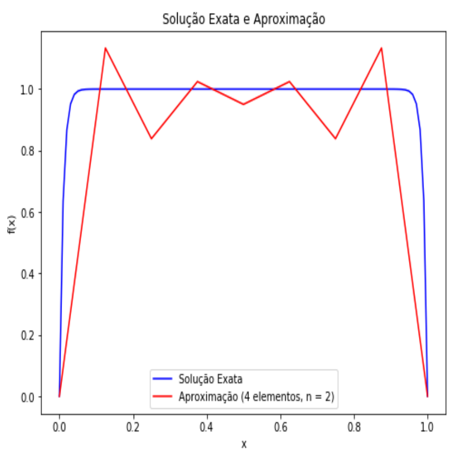
c) Comparação da solução exata com a solução aproximada, com polinomios agora $n = 2, 3, 4$ e 5:

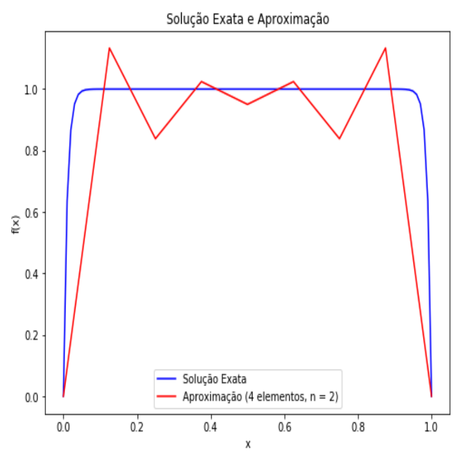
- Para n = 2.
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;





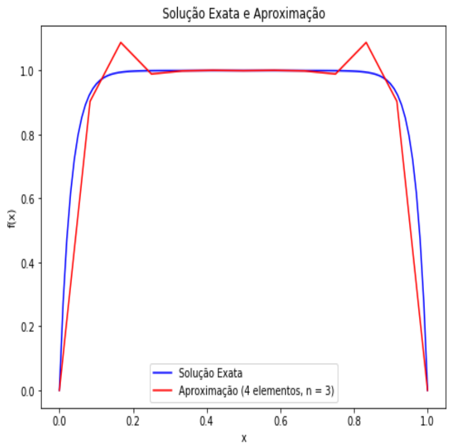
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 4 e 8 elementos;

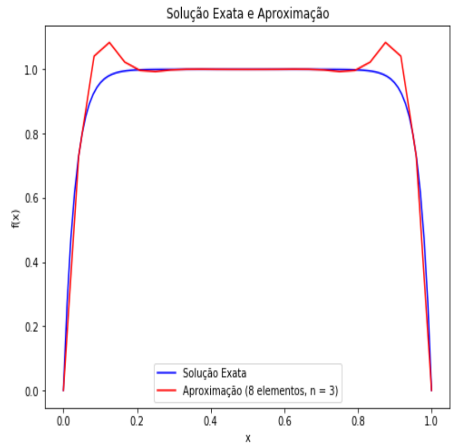




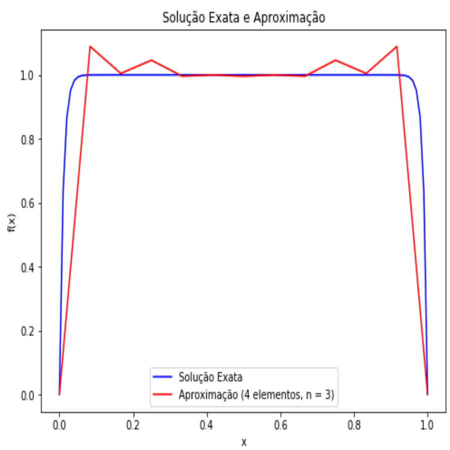
– Para n = 3.

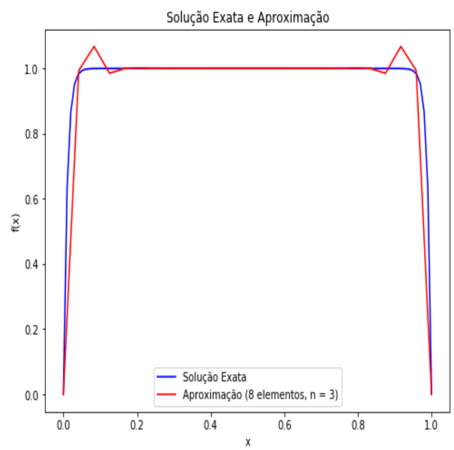
– $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;





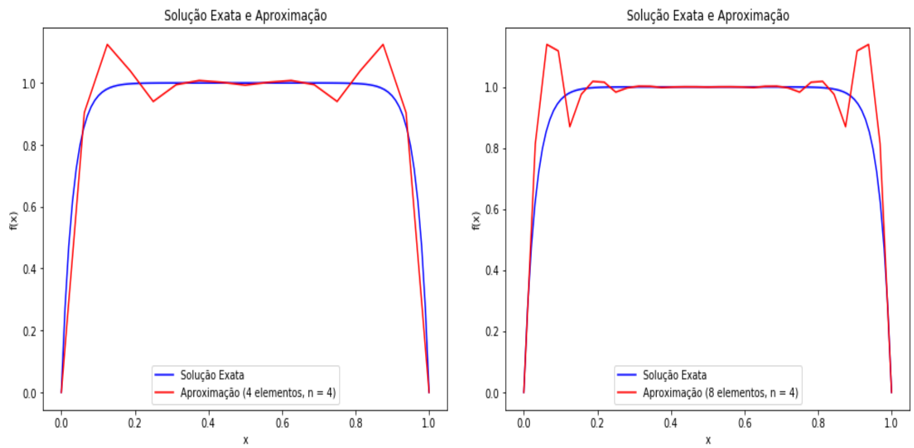
– $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;



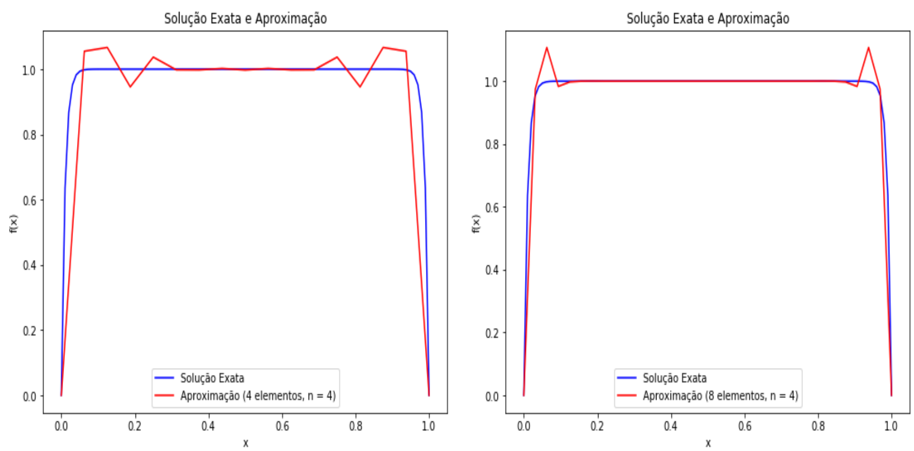


– Para n = 4.

– $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;

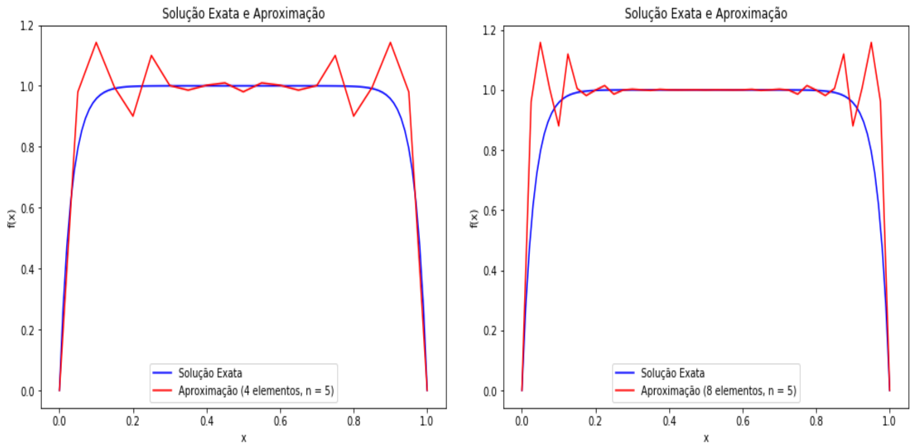


– $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;

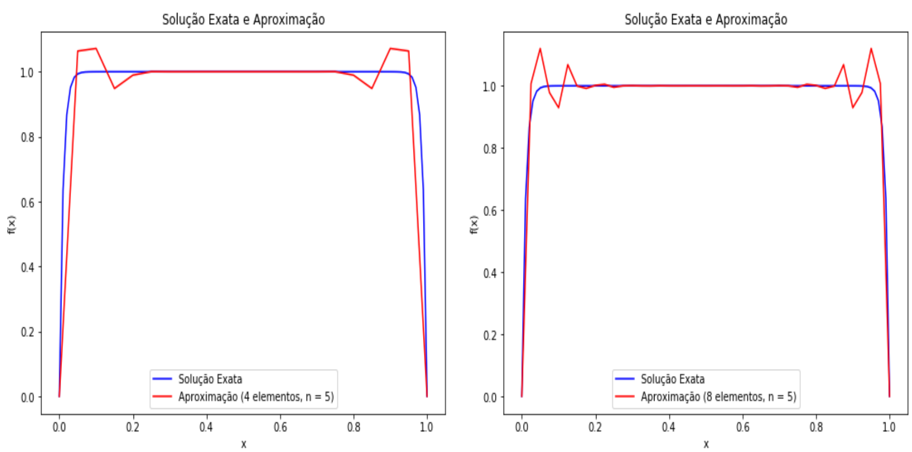


– Para n = 5.

– $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 e 8 elementos;



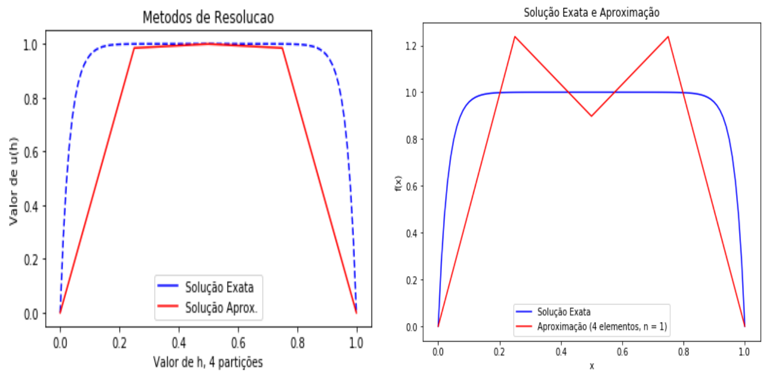
– $\varepsilon = 10^{-4}$ com 16 e 32 elementos;



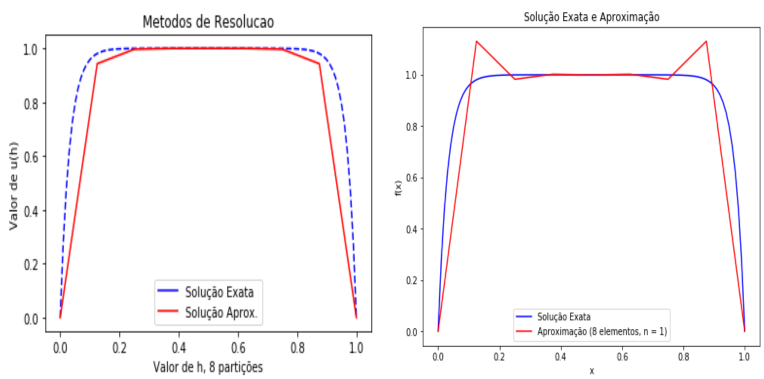
Conclui-se que o aumento da quantidade de elementos melhora a precisão do método de Elementos Finitos. Os picos presentes (instabilidades) também diminuem com o aumento da quantidade de elementos.

d) Comparando os resultados do item a das listas 1 e 7.

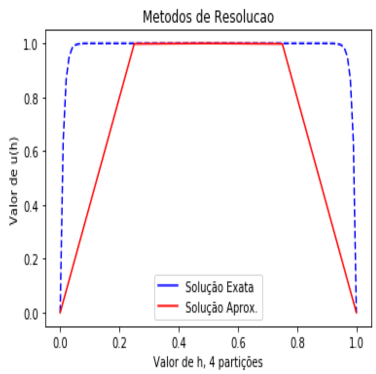
- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 4 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);

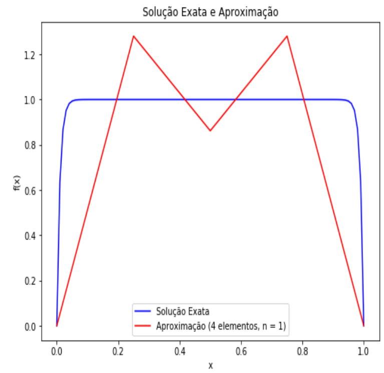


- $\varepsilon = 10^{-3}$ com 8 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);

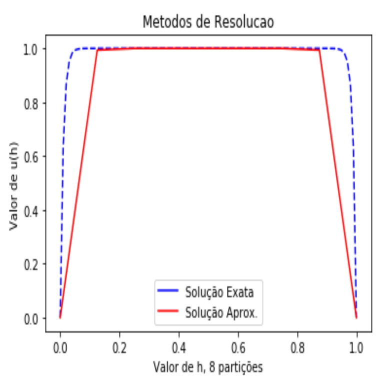


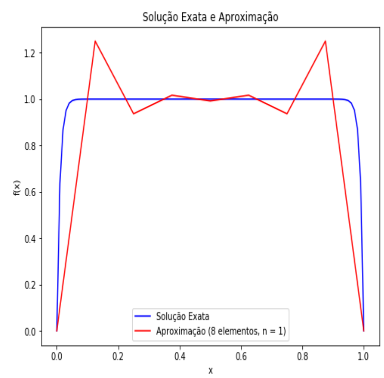
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 4 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);





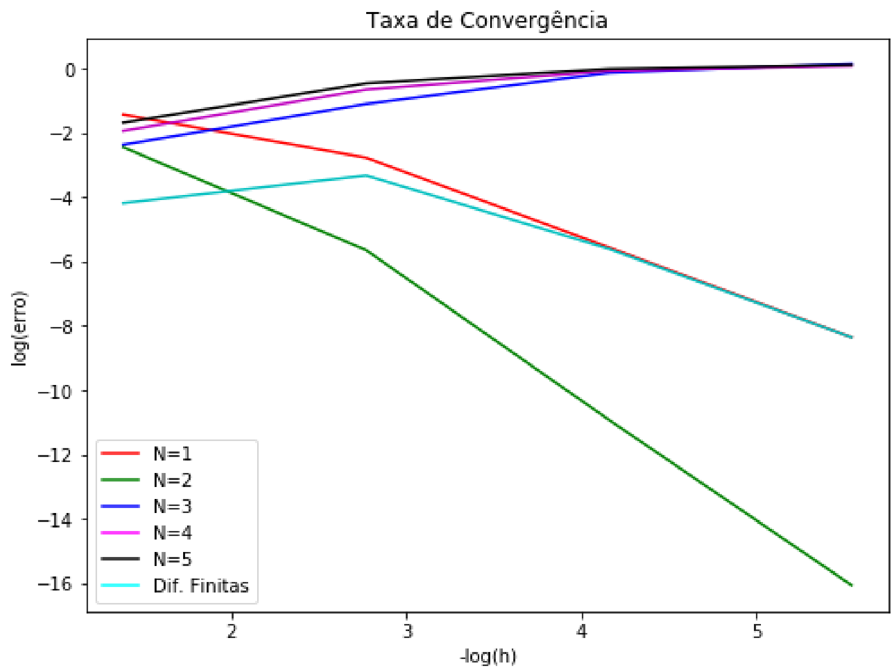
- $\varepsilon = 10^{-4}$ com 8 elementos (Diferenças Finitas a esquerda, Elementos Finitos a direita);





Conclusão: Nota-se que o método de Diferenças Finitas se comportou ligeiramente melhor em relação ao método de Elementos Finitos para o problema dado.

e) A taxa de convergência da solução exata com o erro graficamente.



Conclusão final: Para a análise, usamos para análise de erro o método da Norma do Máximo.

De acordo com os gráficos do item a e b, verificamos que abaixo da condição de estabilidade o método apresenta picos próximos às condições de contorno, e assim que a quantidade de elementos supera esse limite, o método passa a se comportar com melhor precisão.

Em comparação ao método de Diferenças Finitas, usando polinômios de ordem 1, esse se saiu ligeiramente melhor que o método de Elementos Finitos. Observando o gráfico da taxa de convergência, nota-se que o método de Diferenças Finitas tem erro aproximadamente igual ao erro do método de Elementos Finitos para polinômios de ordem 1. Se for usado um polinômio de ordem 2, a velocidade de queda do erro é bem mais acentuada que o método de Diferenças Finitas.

Para os dados registrados para Elementos Finitos com ordens polinomiais 3, 4 e 5, os dados indicam uma queda tão rápida no erro que ele tende a zero para a Norma do Máximo/