Lógica para Computação

Unificação - Lógica de Primeira Ordem

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

Introdução

- Precisamos adaptar a resolução para lidar com as variáveis e símbolos de função
- Considere as cláusulas $C_1 = \{P(x), Q(x)\}$ e $C_2 = \{\neg P(a), \neg R(x, y)\}$
- Qual o valor do resolvente entre elas $res(C_1, C_2)$?

Introdução

- Precisamos adaptar a resolução para lidar com as variáveis e símbolos de função
- Considere as cláusulas $C_1 = \{P(x), Q(x)\}$ e $C_2 = \{\neg P(a), \neg R(x, y)\}$
- Qual o valor do resolvente entre elas $res(C_1, C_2)$?
- Deveria ser possível obter $res(C_1, C_2) = \{Q(a), \neg R(a, y)\}$

Introdução

- Precisamos adaptar a resolução para lidar com as variáveis e símbolos de função
- Considere as cláusulas $C_1 = \{P(x), Q(x)\}$ e $C_2 = \{\neg P(a), \neg R(x, y)\}$
- Qual o valor do resolvente entre elas $res(C_1, C_2)$?
- Deveria ser possível obter $res(C_1, C_2) = \{Q(a), \neg R(a, y)\}$
- Considere as cláusulas $C_1 = \{R(x, y)\}$ e $C_2 = \{\neg R(y, f(a))\}$
- Qual deveria ser o resolvente entre elas $res(C_1, C_2)$?

Tópicos

Substituição

- Considere $C_1 = \{P(f(y))\}$ e $C_2 = \{\neg P(f(w))\}$
- Precisamos de uma forma de unificar esses literais
- Podemos substituir a variável y por w na primeira cláusula

Substituição

Definição

Uma substituição é um conjunto $\theta = \{x_1 \leftarrow t_1, ..., x_n \leftarrow t_n\}$ em que cada x_i é um variável e cada t_i é um termo tal que $x_i \neq t_i$ e $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.
O conjunto vazio $\{\}$ é a substiuição vazia.

Definição

Uma expressão é um termo, literal, cláusula ou conjunto de cláusulas.
Seja E uma expressão e $\theta = \{x_1 \leftarrow t_1, ..., x_n \leftarrow t_n\}$ uma substituição.
A aplicação de θ em E, denotada por $E\theta$, é o conjunto obtido de E, substituindo simultaneamente todas as ocorrências de x_i em E por t_i para $i \in \{1, ..., n\}$.
Se $\theta = \{\}$, $E\theta = E$.

Substituição

Exemplo

Seja $C = \{P(x), Q(f(y))\}$ e $\theta = \{x \leftarrow y, y \leftarrow f(a)\}$.
$C\theta = \{P(y), Q(f(f(a)))\}$.

Substituição

- Considere $\theta_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\theta_2 = \{y \leftarrow b\}$ e $C = \{P(x, y)\}$
- $(C\theta_1)\theta_2 = \{P(y, y)\}\theta_2 = \{P(b, b)\}$
- Como definir a composição de substituições?

Substituição

- Considere $\theta_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\theta_2 = \{y \leftarrow b\}$ e $C = \{P(x, y)\}$
- $(C\theta_1)\theta_2 = \{P(y, y)\}\theta_2 = \{P(b, b)\}$
- Como definir a composição de substituições?
- $\{x \leftarrow (y\{y \leftarrow b\}), y \leftarrow b\}$

Composição de Substituições

Definição

Sejam $\theta_1 = \{x_1 \leftarrow t_1, ..., x_n \leftarrow t_n\}$ e $\theta_2 = \{y_1 \leftarrow s_1, ..., y_n \leftarrow s_n\}$.
Seja $X = \{x_1, ..., x_n\}$ as variáveis são substituídas em θ_1.
A **composição** de θ_1 e θ_2, denotada por $\theta_1\theta_2$, é a substituição:
$\theta_1\theta_2 = \{x_i \leftarrow (t_i\theta_2) \mid x_i \in X \text{ e } x_i \neq t_i\theta_2\} \cup \{y_j \leftarrow s_j \in \theta_2 \mid y_j \notin X\}$.

Composição de Substituições

Exemplo

Sejam $\theta_1 = \{x \leftarrow w\}$ e $\theta_2 = \{w \leftarrow x\}$.
$\theta_1\theta_2 = \{w \leftarrow x\}$

Exemplo

Sejam $\theta_3 = \{x \leftarrow a\}$ e $\theta_4 = \{x \leftarrow b\}$.
$\theta_3\theta_4 = \{x \leftarrow (a\{x \leftarrow b\})\} = \{x \leftarrow a\}$

Composição de Substituições

Exemplo

Sejam $\theta_1 = \{x \leftarrow f(y), w \leftarrow z, z \leftarrow x\}$ e $\theta_2 = \{y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}$.
$(P(x, w, z, y)\theta_1)\theta_2 = P(f(y), z, x, y)\theta_2 = P(f(w), w, z, w)$.
$P(x, w, z, y)(\theta_1\theta_2) = P(x, w, z, y)\{x \leftarrow f(w), y \leftarrow w\} =$
$P(f(w), w, z, w)$.

Proposição

Seja E uma expressão e θ_1 e θ_2 duas substituições. $(C\theta_1)\theta_2 = C(\theta_1\theta_2)$.

Tópicos

Unificação

- Considere as cláusulas $C_1 = \{P(f(x), y, x)\}$ e $C_2 = \{\neg P(z, g(z), a)\}$
- Seja $\theta = \{x \leftarrow a, y \leftarrow g(f(a)), z \leftarrow f(a)\}$
- $C_1\theta = \{P(f(a), g(f(a)), a)\}$ e $C_2\theta = \{\neg P(f(a), g(f(a)), a)\}$
- A substituição θ unifica C_1 e C_2

Unificador

Definição

Seja $U = \{A_1, ..., A_n\}$ um conjunto de atômicas. Um unificador θ é uma substituição tal que
$A_1\theta = ... = A_n\theta$.

Exemplo

Seja $U = \{P(x, y), P(w, x)\}$. $\theta_1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow x\}$ é um unificador.
$\theta_2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a, w \leftarrow a\}$ também é um unificador mas θ_1 é mais geral.

Unificador

Definição

Seja $U = \{A_1, ..., A_n\}$ um conjunto de atômicas. Um unificador θ é uma substituição tal que
$A_1\theta = ... = A_n\theta$.

Exemplo

Seja $U = \{P(x,y), P(w,x)\}$. $\theta_1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow x\}$ é um unificador.
$\theta_2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a, w \leftarrow a\}$ também é um unificador mas θ_1 é mais geral.

- É possível obter θ_2 a partir de θ_1

Unificador

Definição

Seja $U = \{A_1, ..., A_n\}$ um conjunto de atômicas. Um unificador θ é uma substituição tal que
$A_1\theta = ... = A_n\theta$.

Exemplo

Seja $U = \{P(x, y), P(w, x)\}$. $\theta_1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow x\}$ é um unificador.
$\theta_2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a, w \leftarrow a\}$ também é um unificador mas θ_1 é mais geral.

- É possível obter θ_2 a partir de θ_1
- $\theta_2 = \theta_1\{w \leftarrow a, x \leftarrow a\}$

Unificador Mais Geral

Definição

Um unificador mais geral de um conjunto de atômicas U é um unificador θ tal que qualquer unificador θ_1 de U pode ser expresso como $\theta_1 = \theta\theta_2$ em que θ_2 é uma substituição.

Exemplo

Seja $U = \{P(f(x), g(y)), P(f(f(a)), g(z))\}$.
O unificador $\theta = \{x \leftarrow f(a), z \leftarrow y\}$ é um unificador mais geral.
$\theta_1 = \theta\{y \leftarrow f(g(a))\}$ é um unificador de U.
$\theta_2 = \theta\{y \leftarrow a\}$ é um unificador de U.

Conjunto de Diferença

- Primeiro, precisamos saber a parte que difere nas atômicas

Definição

Seja $S = \{A_1, ..., A_n\}$ um conjunto de atômicas. Seja k a posição mais à esquerda na qual as atômicas diferem.
O conjunto de termos $\{t_1, ..., t_n\}$ começando na posição k das atômicas $A_1, ..., A_n$ é o conjunto de diferença de S.
Se todos as atômicas são iguais, o conjunto de diferença é $\{\}$.

Exemplo

Seja $S = \{P(f(x), y, x), P(z, g(z), a)\}$.
O conjunto de diferença de S é $\{f(x), z\}$.

Algoritmo de Unificação

function UNIFICA($atomicas$)
    $\theta \leftarrow \{\}$
    while $|subst(atomicas, \theta)| \neq 1$ **do**
        $d \leftarrow difer(subst(atomicas, \theta))$
        $unifica \leftarrow False$
        for $termo_1 \in d$ **do**
            for $termo_2 \in d$ **do**
                if $var?(termo_1)$ **and not** $ocorre(termo_1, termo_2)$ **then**
                    $\theta \leftarrow \theta\{termo_1 \leftarrow termo_2\}$
                    $unifica \leftarrow True$
        if $unifica = False$ **then**
            return False
    return θ

Exemplo

Exemplo

Seja $S = \{P(f(x), y, x), P(z, g(z), a)\}$.
$D = \{f(x), z\}$ em que z é variável e não ocorre em $f(x)$.
$\theta = \{z \leftarrow f(x)\}$.
$D = \{y, g(f(x))\}$ em que y é variável e não ocorre em $g(f(x))$.
$\theta = \{z \leftarrow f(x)\}\{y \leftarrow g(f(x))\} = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}$.
$D = \{x, w\}$ em que x é variável e não ocorre em w.
$\theta = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}\{x \leftarrow w\} =$
$\{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}$.

Exemplo

Exemplo

Seja $S = \{P(g(y), f(x, h(x), y)), P(x, f(g(z), w, z))\}$.
$D = \{g(y), x\}$ em que x é variável e não ocorre em $g(y)$.
$\theta = \{x \leftarrow g(y)\}$.
$D = \{y, z\}$ em que y é variável e não ocorre em z.
$\theta = \{x \leftarrow g(y)\}\{y \leftarrow z\} = \{x \leftarrow g(z), y \leftarrow z\}$.
$D = \{w, h(g(z))\}$ em que w é variável e não ocorre em $h(g(z))$.
$\theta = \{x \leftarrow g(z), y \leftarrow z\}\{w \leftarrow h(g(z))\} =$
$\{x \leftarrow g(z), y \leftarrow z, w \leftarrow h(g(z))\}$.