IFCE - Campus Maracanaú **Ciência da Computação**
Lógica para Computação **Prof. Thiago Alves**

6ª Lista de Exercícios

Aluno(a): ______________________________ Matrícula: __________

1. Defina uma função para retornar o conjunto de variáveis ligadas de uma fórmula da Lógica de Primeira Ordem.

2. Seja φ uma fórmula da lógica de Primeira Ordem. Os símbolos livres de φ são as variáveis livres, os símbolos de função, os símbolos de constante e os símbolos de predicado que ocorrem em φ.
   (a) Quais os símbolos livres de $\forall x \exists y(\forall z P(x, y, w, z) \to \forall y Q(z, y, x, z))$?
   (b) Defina uma função que retorna o conjunto de símbolos livres de uma fórmula qualquer φ.

3. Seja φ uma fórmula da lógica de Primeira Ordem e $free(\varphi) = \{x_1, ..., x_k\}$. O fecho universal de φ é dado pela fórmula $\forall x_1 ... \forall x_k \varphi$. Qual o fecho universal de $\forall x \exists y(\forall z P(x, y, w, z) \to \forall y Q(z, y, x, z))$?

4. Considere a fórmula $\phi = \forall x \forall y Q(g(x, y), g(y, y), z)$.
   (a) Ache uma interpretação $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1 \models \phi$.
   (b) Ache uma interpretação $\mathcal{I}_2$ tal que $\mathcal{I}_2 \not\models \phi$.

5. Seja a fórmula $\phi = \forall x \forall y \exists z(R(x, y) \to R(y, z))$.
   (a) Seja $\mathcal{A}_1 = (A_1, R^{\mathcal{A}_1})$ uma estrutura com domínio $A_1 = \{a, b, c, d\}$ e $R^{\mathcal{A}_1} = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. Verifique se $\mathcal{A}_1 \models \phi$.
   (b) Seja a estrutura $\mathcal{A}_2 = (A_2, R^{\mathcal{A}_2})$ com $A_2 = \{a, b, c\}$ e $R^{\mathcal{A}_2} = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$. Verifique se $\mathcal{A}_2 \models \phi$.

6. Seja $\varphi = \forall x(\exists y P(x, y) \land (\exists z P(z, x) \to \forall y P(x, y)))$. Seja $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}})$ uma estrutura com $A = \{0, 1, 2\}$ e $P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\}$. Seja l um contexto tal que $l(x) = l(y) = l(z) = 1$. Seja a interpretação $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, l)$, verifique se $\mathcal{I} \models \varphi$.

7. Seja $\phi = \forall x \exists y \exists z((P(x, y) \land P(z, y)) \land (P(x, z) \to P(z, x)))$.
   (a) Seja a estrutura $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}})$ com $A = \{0, 1, 2, ...\}$ e $P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) \mid m < n\}$. Verifique se $\mathcal{A} \models \phi$.
   (b) Seja a estrutura $\mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}})$ com $B = \{0, 1, 2, ...\}$ e $P^{\mathcal{A}} = \{(m, 2m) \mid m \in B\}$. Verifique se $\mathcal{B} \models \phi$.

8. Represente, em uma fórmula φ da Lógica de Primeira Ordem, a seguinte sentença: "Se o Fortaleza ganha do Barcelona, então o Fortaleza não perde para nenhum time te futebol."
   (a) Mostre uma interpretação $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1 \models \varphi$.
   (b) Mostre uma interpretação $\mathcal{I}_2$ tal que $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$.

9. Seja $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}})$ um grafo com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e conjunto de arestas $E^{\mathcal{G}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$. Verifique se $\mathcal{G} \models \forall x \forall y(E(x, y) \leftrightarrow E(y, x))$.

10. Seja $\varphi = \forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x \exists y R(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$. Mostre uma estrutura $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$.

Fim