Lógica para Computação

Lógica de Primeira Ordem - Semântica

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- Como podemos dar um valor verdade para fórmulas do tipo $\exists y P(y)$?

Introdução

- Como podemos dar um valor verdade para fórmulas do tipo $\exists y P(y)$?
- Temos que achar um elemento a tal que a tenha propriedade P
- Temos que indicar um domínio com todos os valores que queremos utilizar
- Temos que indicar os elementos do domínio que tenham a propriedade P

Tópicos

Estruturas

Definição

Uma estrutura ou modelo é uma tupla da forma
$\mathcal{A} = (A, P_1^{\mathcal{A}}, ..., P_k^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, ..., f_s^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, ...c_r^{\mathcal{A}})$ em que
A é um conjunto não-vazio representando o domínio.
$P_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ em que n é a aridade do símbolo de predicado P_i.
$c_i^{\mathcal{A}} \in A$ representando um elemento do domínio.
$f_i^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ em que n é a aridade do símbolo de função f_i.

Estruturas

Definição

Uma estrutura ou modelo é uma tupla da forma
$\mathcal{A} = (A, P_1^{\mathcal{A}}, ..., P_k^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, ..., f_s^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, ...c_r^{\mathcal{A}})$ em que
A é um conjunto não-vazio representando o domínio.
$P_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ em que n é a aridade do símbolo de predicado P_i.
$c_i^{\mathcal{A}} \in A$ representando um elemento do domínio.
$f_i^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ em que n é a aridade do símbolo de função f_i.

- Note a diferença entre P_1 e $P_1^{\mathcal{A}}$
- P_1 é apenas um símbolo enquanto $P_1^{\mathcal{A}}$ representa uma relação concreta na estrutura $\mathcal{A}$
- A mesma distinção vale para funções e constantes

Exemplo

Exemplo de Estrutura

Seja $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}}, i^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{a, b, c\}$, $i^{\mathcal{A}} = a$,
$R^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$ e $F^{\mathcal{A}} = \{a, b, c\}$.

Exemplo

Exemplo de Estrutura

Seja $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}}, i^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{a, b, c\}$, $i^{\mathcal{A}} = a$,
$R^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$ e $F^{\mathcal{A}} = \{a, b, c\}$.

- Vamos analisar as fórmulas abaixo:
- $\forall y R(i, y)$
- $\exists x \neg F(x)$
- $\forall x \exists y R(x, y)$

Exemplo

Exemplo de Estrutura

Seja $\mathcal{M} = (M, F^{\mathcal{M}})$ com
$M = \mathbb{N}$ e $F^{\mathcal{M}} = \{n \in M \mid n \text{ é par}\}$.

Exemplo

Exemplo de Estrutura

Seja $\mathcal{M} = (M, F^{\mathcal{M}})$ com
$M = \mathbb{N}$ e $F^{\mathcal{M}} = \{n \in M \mid n \text{ é par}\}$.

- Vamos analisar as fórmulas abaixo:
- $\exists x \neg F(x)$
- $\forall x \neg F(x)$

Tópicos

Contexto

- E para atribuir um valor verdade para fórmulas do tipo $\exists x(P(x) \land Q(y))$?

Contexto

- E para atribuir um valor verdade para fórmulas do tipo $\exists x(P(x) \wedge Q(y))$?
- Temos que ter uma forma de associar variáveis livres em elementos do domínio
- Uma função $I : VAR \rightarrow A$

Contexto

Definição

Um contexto para o domínio A é uma função $I : VAR \to A$. Para um contexto I denotamos por $I[x \mapsto a]$ o contexto que mapeia x em a e qualquer outra variável y em $I(y)$.

Contexto

Definição

Um contexto para o domínio A é uma função $I : VAR \to A$. Para um contexto I denotamos por $I[x \mapsto a]$ o contexto que mapeia x em a e qualquer outra variável y em $I(y)$.

- $I[x \mapsto a]$ indica que podemos modificar/atualizar um contexto I trocando apenas a imagem de exatamente uma variável
- Para $A = \{1, 2, 3\}$, $I(x) = 1$, $I(y) = 2$ e $I(z) = 2$ temos que
  - $I[x \mapsto 3](x) = 3$
  - $I[x \mapsto 3](y) = 2$
  - $I[x \mapsto 3](z) = 2$

Tópicos

Interpretação dos Termos

- Chamamos de interpretação o par $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, I)$ formado por um modelo $\mathcal{M}$ e um contexto I

Definição

Podemos interpretar um termo t em uma interpretação $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, I)$ da seguinte forma:
$x^{\mathcal{I}} = I(x)$
$c^{\mathcal{I}} = c^{\mathcal{M}}$
$f^{\mathcal{I}}(t_1, ..., t_n) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{I}}, ..., t_n^{\mathcal{I}})$.

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2, ...\}$, $a^{\mathcal{A}} = 1$ e $f^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$.
Seja I tal que $I(x) = 5$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2, ...\}$, $a^{\mathcal{A}} = 1$ e $f^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$.
Seja I tal que $I(x) = 5$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos interpretar $f^{\mathcal{I}}(x, a)$

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2, ...\}$, $a^{\mathcal{A}} = 1$ e $f^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$.
Seja I tal que $I(x) = 5$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos interpretar $f^{\mathcal{I}}(x, a)$
- Vamos interpretar $f^{\mathcal{I}}(f(x, a), x)$

Tópicos

Interpretação das Fórmulas

- Vamos definir quando uma fórmula é verdadeira em uma interpretação.

Definição

Seja uma interpretação $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, I)$.
$\mathcal{I} \models P(t_1, ..., t_n)$ se e somente se $(t_1^{\mathcal{I}}, ..., t_n^{\mathcal{I}}) \in P^{\mathcal{M}}$
$\mathcal{I} \models \neg\psi$ se e somente se $\mathcal{I} \not\models \psi$
$\mathcal{I} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$ se e somente se $\mathcal{I} \models \psi_1$ e $\mathcal{I} \models \psi_2$
$\mathcal{I} \models (\psi_1 \vee \psi_2)$ se e somente se $\mathcal{I} \models \psi_1$ ou $\mathcal{I} \models \psi_2$
$\mathcal{I} \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ se e somente se se $\mathcal{I} \models \psi_1$ então $\mathcal{I} \models \psi_2$
$\mathcal{I} \models \exists x\psi$ se e somente se existe $a \in A$ tal que $(\mathcal{M}, I[x \mapsto a]) \models \psi$
$\mathcal{I} \models \forall x\psi$ se e somente se para todo $a \in A$ temos que $(\mathcal{M}, I[x \mapsto a]) \models \psi$

Interpretação das Fórmulas

- Vamos definir quando uma fórmula é verdadeira em uma interpretação.

Definição

Seja uma interpretação $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, I)$.

$\mathcal{I} \models P(t_1, ..., t_n)$ se e somente se $(t_1^{\mathcal{I}}, ..., t_n^{\mathcal{I}}) \in P^{\mathcal{M}}$

$\mathcal{I} \models \neg\psi$ se e somente se $\mathcal{I} \not\models \psi$

$\mathcal{I} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$ se e somente se $\mathcal{I} \models \psi_1$ e $\mathcal{I} \models \psi_2$

$\mathcal{I} \models (\psi_1 \vee \psi_2)$ se e somente se $\mathcal{I} \models \psi_1$ ou $\mathcal{I} \models \psi_2$

$\mathcal{I} \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ se e somente se se $\mathcal{I} \models \psi_1$ então $\mathcal{I} \models \psi_2$

$\mathcal{I} \models \exists x\psi$ se e somente se existe $a \in A$ tal que $(\mathcal{M}, I[x \mapsto a]) \models \psi$

$\mathcal{I} \models \forall x\psi$ se e somente se para todo $a \in A$ temos que $(\mathcal{M}, I[x \mapsto a]) \models \psi$

- Quando a fórmula não possui variáveis livres, o contexto é irrelevante. Neste caso, podemos usar a notação $\mathcal{M} \models \phi$.

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2\}$, $a^{\mathcal{A}} = 0$ e $L^{\mathcal{A}} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$. Seja I tal que
$I(y) = 0$, $I(x) = 1$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \exists x L(y, x)$

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2\}$, $a^{\mathcal{A}} = 0$ e $L^{\mathcal{A}} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$. Seja I tal que
$I(y) = 0$, $I(x) = 1$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \exists x L(y, x)$
- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x (L(x, a) \rightarrow L(a, x))$

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2\}$, $a^{\mathcal{A}} = 0$ e $L^{\mathcal{A}} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$. Seja I tal que
$I(y) = 0$, $I(x) = 1$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \exists x L(y, x)$
- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x(L(x, a) \rightarrow L(a, x))$
- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x \forall y((L(x, a) \wedge L(y, x)) \rightarrow \neg L(y, a))$

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, I^{\mathcal{A}}, E^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{jose, joao, maria\}$ representando todos os alunos de Ciência da Computação,
$I^{\mathcal{A}} = \{jose, maria, joao\}$ representando a propriedade de ser inteligente,
$E^{\mathcal{A}} = \{maria, joao\}$ representando a propriedade de ser extrovertido.

- Vamos verificar se, nessa interpretação, todo aluno de computação é inteligente.

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, I^{\mathcal{A}}, E^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{jose, joao, maria\}$ representando todos os alunos de Ciência da Computação,
$I^{\mathcal{A}} = \{jose, maria, joao\}$ representando a propriedade de ser inteligente,
$E^{\mathcal{A}} = \{maria, joao\}$ representando a propriedade de ser extrovertido.

- Vamos verificar se, nessa interpretação, todo aluno de computação é inteligente.
- Vamos verificar se, nessa interpretação, todo aluno de computação é inteligente e extrovertido.

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2, ...\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 < n_2\}$ e $f^{\mathcal{A}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$.
Seja I tal que $I(x) = 3$, $I(y) = 4$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x P(x, y)$

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2, ...\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 < n_2\}$ e $f^{\mathcal{A}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$.
Seja I tal que $I(x) = 3$, $I(y) = 4$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x P(x, y)$
- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x \exists y P(x, y)$

Exemplo

Exemplo de Interpretação

Seja $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}})$ com
$A = \{0, 1, 2, ...\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 < n_2\}$ e $f^{\mathcal{A}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$.
Seja I tal que $I(x) = 3$, $I(y) = 4$ e seja $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, I)$.

- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x P(x, y)$
- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x \exists y P(x, y)$
- Vamos verificar se $\mathcal{I} \models \forall x \exists y P(x, y) \wedge \exists x P(x, f(x, x))$