Introdução

- Vamos fazer uma gramática livre de contexto para a linguagem a seguir:

  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

Introdução

- Precisamos de uma forma de provar que uma linguagem não é livre de contexto

Teoria da Computação

Lema do Bombeamento para Linguagens Livres de Contexto

Thiago Alves Rocha

Introdução

- Já mostramos o Lema do Bombeamento para linguagens regulares
  - O lema garante que toda linguagem regular tem um tamanho de bombeamento tal que toda string nela maior pode ser bombeada

Introdução

- O mesmo vale para linguagens livres de contexto
  - Toda linguagem livre de contexto tem um tamanho de bombeamento tal que toda string nela maior pode ser bombeada

Introdução

- A string pode ser dividida em 5 partes e a segunda e a quarta podem ser repetidas juntas qualquer quantidade de vezes e a nova string resultante continua na linguagem

Lema do Bombeamento

- Para toda linguagem livre de contexto L, existe um inteiro p, tal que para toda string w em L com $|w| \geq p$, existe uma forma de fazer w = uvxyz tal que:
  - $|vxy| \leq p$.
  - $|vy| > 0$.
  - Para todo $i \geq 0$, uv^ixy^iz está em L.

Lema do Bombeamento

- $|vy| > 0$ pois $v \neq \varepsilon$ ou $y \neq \varepsilon$
  - Se $v = \varepsilon$ e $y = \varepsilon$ o lema seria trivial
- $|vxy| \leq p$ indica que v, x e y tem tamanho no máximo p

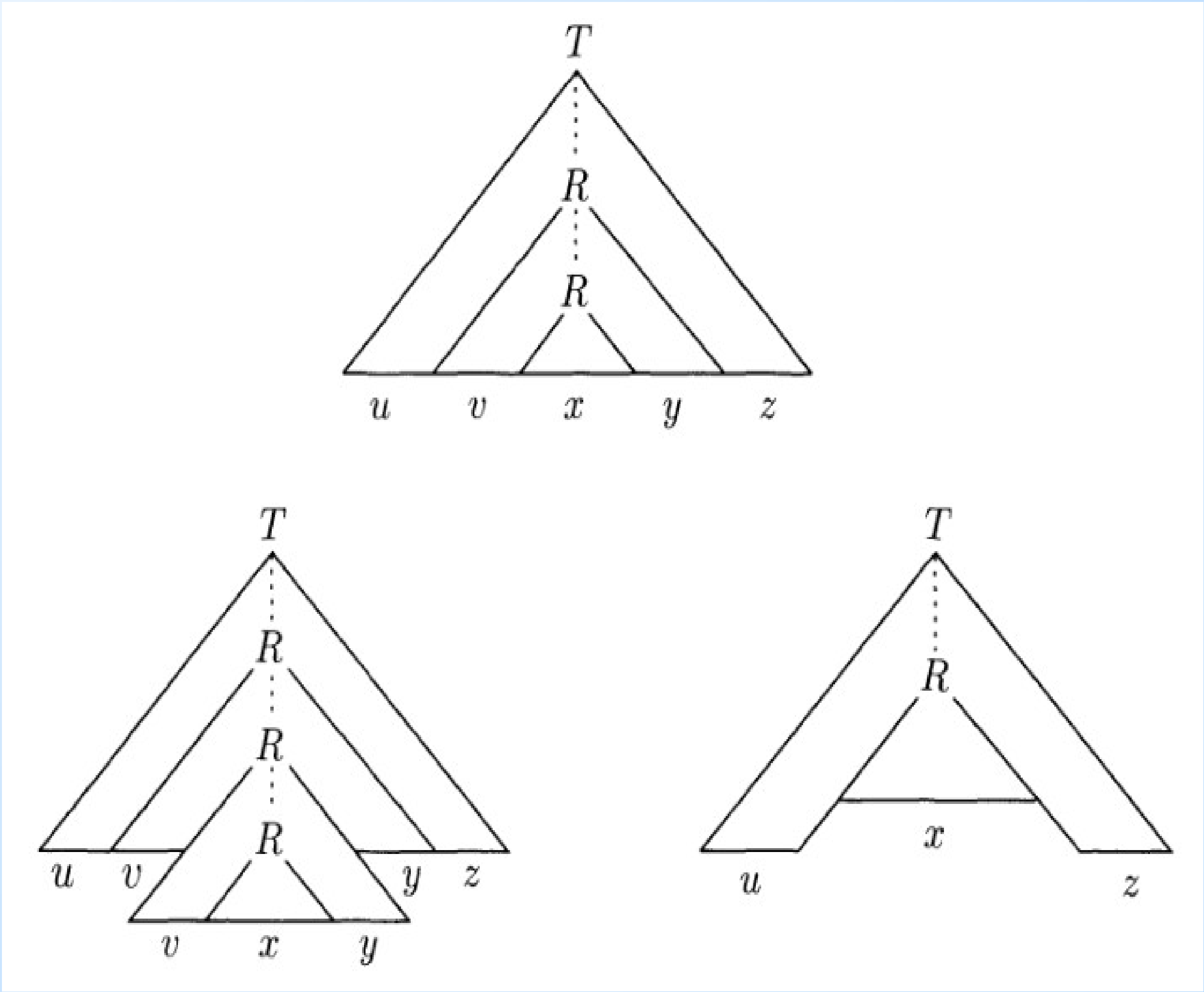
Ideia da Prova

- Seja L uma linguagem livre de contexto e w uma string suficientemente grande em L
- w tem uma árvore de derivação em uma gramática livre de contexto que gera L
- A árvore tem altura muita alta pois w é muito longa

Ideia da Prova

- A árvore tem um caminho longo entre a variável inicial até um dos terminais
  - Alguma variável se repete nesse caminho
  - Podemos trocar a subárvore da variável na segunda ocorrência pela subárvore da primeira ocorrência

Ideia da Prova



Ideia da Prova

- Podemos dividir w = uvxyz de acordo com a figura
- Podemos repetir v e y e obter strings na linguagem
  - A árvore com a repetição continua sendo uma derivação da mesma gramática

Prova

- Como escolher p para garantir que a árvore de derivação repita variáveis?
- Altura da árvore tem que ser $|V| + 1$
- Qual o tamanho para strings com árvores de derivação dessa altura?

Ideia da Prova

- Seja b a quantidade máxima de símbolos na lado de direito de uma regra
- Exemplo
  - $S \rightarrow SS$
  - $S \rightarrow 0 \mid 1$
  - $b = 2$

Ideia da Prova

- Seja b a quantidade máxima de símbolos na lado de direito de uma regra
- Nível 0: no máximo b^0 nós
- Nível 1: no máximo b^1 nós
- Nível 2: no máximo b^2 nós
- Nível |V|: no máximo $b^{|V|}$ nós

Prova

- Temos que escolher strings em que a árvore de derivação tenha altura pelo menos $|V| + 1$
- Se uma string tem tamanho maior ou igual a $b^{|V|+1}$ então qualquer árvore de derivação tem altura maior ou igual a $|V|+1$
- Logo, fazemos $p = b^{|V|+1}$

Prova

- Seja w em L tal que $|w| \geq p$
- Seja T sua árvore de derivação com menor quantidade de nós
- A árvore repete variável no caminho da inicial até um terminal
  - Seja R a variável em que as duas ocorrências estão entre as $|V|+1$ mais baixas na árvore

Prova

- Podemos substituir a subárvore menor pela maior e ainda ter um árvore de derivação válida
  - Gerando strings da forma uv^ixy^iz para $i>1$
- Substituir a maior pela menor gera strings da forma uxz
- Mostramos a condição 3.

Prova

- Se $v = \varepsilon$ e $y = \varepsilon$
  - A árvore de derivação substituindo a maior subárvore pela menor teria menos nós que T e ainda deriva w
  - Absurdo pois escolhemos T como a árvore com menor quantidade de nós
  - Logo, $|vy| > 0$.

Prova

- A ocorrência mais acima de R deriva vxy
- Escolhemos R de forma que ambas ocorrências estão entre as |V| + 1 variáveis mais baixas na árvore
  - Subárvore que R deriva vxy tem altura no máximo |V|+1
  - $|vxy| \leq p = b^{|V|+1}$

Linguagem Não Livre de Contexto

- Vamos mostrar que $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é livre de contexto

Linguagem Não Livre de Contexto

- Suponha L livre de contexto
- Seja p o tamanho do bombeamento de L que existe pelo lema do bombeamento
- Seja $w = a^p b^p c^p$
  - Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = a^p b^p c^p$
  - Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$
  - 1) v e y contém apenas um tipo de símbolo
    - $v = a^l$ e $y = a^m$
    - uv^2xy^2z tem mais a's que as outras
    - Absurdo!
    - Análogo para $v = b^l$ e $y = b^m$ ou $v = b^l$ e $y = b^m$

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = a^p b^p c^p$
  - Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$
  - 2) v e y contém mais de um símbolo diferente
    - uv^2xy^2z tem símbolos na ordem incorreta
    - Pelo lema $uv^2xy^2z \in L$ mas $uv^2xy^2z \notin L$ pela definição de L
    - Absurdo!

Linguagem Não Livre de Contexto

- Vamos mostrar que $L = \{a^i b^j c^k \mid k \geq j \geq i \geq 0\}$ não é livre de contexto

Linguagem Não Livre de Contexto

- Suponha L livre de contexto
- Pelo lema do bombeamento existe um tamanho de bombeamento p
- Seja w = $a^p b^p c^p$
  - 1) v e y contém apenas um tipo de símbolo
  - Não é possível fazer do jeito anterior
    - Pois a quantidade de b's pode ser maior que a de a's, por exemplo

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja w = $a^p b^p c^p$
  - 1) v contém apenas um tipo de símbolo e y contém apenas um tipo de símbolo
  - 1.1) simbolo a não aparece
    - Fazer uv^0xy^0z pois vamos ter menos b's que a's

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = a^p b^p c^p$
  - 1.2) b não aparece
    - Fazer uv^0xy^0z se aparecer c em v ou y
    - Quantidade de c's menor que b's
    - Fazer uv^2xy^2z se aparecer a em v ou y
    - Quantidade de a's maior que b's

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = a^p b^p c^p$
  - 1.3) c não aparece
    - Fazer uv^2xy^2z para ter mais a's ou mais b's que c
  - 2) Quando v ou y tem mais de um tipo de símbolo fazemos uv^2xy^2z para mudar a ordem
  - Absurdo em todos os casos!
  - L não é livre de contexto!

Linguagem Não Livre de Contexto

- Vamos mostrar que $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto

Linguagem Não Livre de Contexto

- Suponha L livre de contexto
- Pelo lema do bombeamento existe um tamanho de bombeamento p
- Seja $w = 0^p10^p1$

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = 0^p10^p1$
  - $u = 0^{p-1}$
  - $v = 0$
  - $x = 1$
  - $y = 0$
  - $z = 0^{p-1}1$
- Satisfaz as 3 condições
- Temos que escolher outra string

Linguagem Não Livre de Contexto

- Suponha L livre de contexto
- Pelo lema do bombeamento existe um tamanho de bombeamento p
- Seja $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$
  - 1) vxy está na primeira metade
    - uv^2xy^2z tem um 1 no início da segunda metade
    - Logo, não é da forma ww

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$
  - 2) vxy está na segunda metade
    - uv^2xy^2z tem um 0 no final da primeira metade
    - Logo, não é da forma ww

Linguagem Não Livre de Contexto

- Seja $w = 0^p1^p0^p1^p$
  - 3) vxy está no meio da string
    - $vxy = 1^l0^m$ com $p \geq l+m$
    - $uv^0xy^0z = 0^p1^i0^j1^p$
    - Como $|vy| > 0$, temos que i e j não podem ser p ao mesmo tempo
    - Logo, uv^0xy^0z não é da forma ww
  - Absurdo em todos os casos!
  - L não é livre de contexto!