Lógica para Computação **6ª Lista de Exercícios**

1. Defina uma função $free(A)$ para retornar o conjunto de variáveis livres de uma fórmula de primeira-ordem qualquer A. Seja B uma fórmula da lógica de primeira-ordem e $free(B) = \{x_1, ..., x_k\}$. O fecho universal de B é dado pela fórmula $\forall x_1 ... \forall x_k \varphi$. Qual o fecho universal de $\forall x \exists y (\forall z p(x, y, w, z) \rightarrow \forall y q(z, y, x, z))$?

2. Seja B uma fórmula da lógica de primeira-ordem. Os símbolos livres de B são as variáveis livres, os símbolos de constante e os símbolos de predicado que ocorrem em B.
   (a) Quais os símbolos livres de $\forall x \exists y (\forall z p(x, y, w, z) \rightarrow \forall y q(z, y, x, z))$?
   (b) Defina uma função que retorna o conjunto de símbolos livres de uma fórmula qualquer A.

3. Considere a fórmula $A = \forall x \forall y q(x, y, z)$.
   (a) Ache uma interpretação $\mathcal{I}_1$ e contexto σ_1 tal que $v_{\mathcal{I}_1, \sigma_1}(A) = T$.
   (b) Ache uma interpretação $\mathcal{I}_2$ e contexto σ_2 tal que $v_{\mathcal{I}_2, \sigma_2}(A) = F$.

4. Seja a fórmula $A = \forall x \forall y \exists z (p(x, y) \rightarrow p(y, z))$.
   (a) Seja $\mathcal{I}_1 = (D_1, R_p)$ uma interpretação com domínio $D_1 = \{a, b, c, d\}$ e $R_p = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. Verifique se A é verdade em $\mathcal{I}_1$.
   (b) Seja $\mathcal{I}_2 = (D_2, R'_p)$ com $D_2 = \{a, b, c\}$ e $R'_p = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$. Verifique se A é verdade em $\mathcal{I}_2$.

5. Considere os seguintes predicados e constantes:
   - $occupation(x, y)$ representando que a pessoa x tem ocupação y.
   - $client(x, y)$ indicando que a pessoa x é cliente de y.
   - m, c, a constantes representado as ocupações médico, cirurgião e advogado, respectivamente.

   Escreva as seguintes sentenças na lógica de primeira-ordem:
   (a) Todos os cirurgiões são médicos.
   (b) Algum advogado possui apenas clientes médicos.
   (c) Todo cirurgião é cliente de um advogado.

6. Seja $A = \forall x \exists x q(x)$. Seja $\mathcal{I}$ uma interpretação com domínio $D = \{0, 1, 2\}$ e $R_q = \{a \in A \mid a \text{ é par}\}$. Verifique se $\mathcal{I}(A) = T$.

7. Seja $A = \forall x (\exists y p(x, y) \wedge (\exists z p(z, x) \rightarrow \forall y p(x, y)))$. Seja $\mathcal{I} = (D, R_p)$ uma interpretação com $D = \{0, 1, 2\}$ e $R_p = \{1, 2\}$. Seja l um contexto tal que $l(x) = l(y) = l(z) = 1$. Verifique se $v_{\mathcal{I}, l}(A) = T$.

8. Seja $A = \forall x \exists y \exists z ((p(x, y) \wedge p(z, y)) \wedge (p(x, z) \rightarrow p(z, x)))$.
   (a) Seja a interpretação $\mathcal{I}_1 = (A, R_p)$ com $A = \{0, 1, 2, ...\}$ e $R_p = \{(m, n) \mid m < n\}$. Verifique se $\mathcal{I}_1(A) = T$.

(b) Seja a interpretação $\mathcal{I}_2 = (B, R'_p)$ com $B = \{0, 1, 2, ...\}$ e $R'_p = \{(m, 2m) \mid m \in B\}$. Verifique se $\mathcal{I}_2(A) = T$.

9. Considere os seguintes predicados e constantes:

   - $perde(x, y)$ representando que o time x perde para o time y.
   - $empata(x, y)$ indicando que time x empata com o time y.
   - f, b constantes representado os times Fortaleza e Barcelona, respectivamente.

   Represente, em uma fórmula A da lógica de primeira-ordem, a seguinte sentença: *Se o Fortaleza ganha do Barcelona, então o Fortaleza não perde para ninguém".*

   (a) Mostre uma interpretação $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1(A) = T$.

   (b) Mostre uma interpretação $\mathcal{I}_2$ tal que $\mathcal{I}_2(A) = F$.

10. Seja $\mathcal{I} = (V, R_e)$ com $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R_e = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$. Verifique se $\mathcal{I}(\forall x \forall y (e(x, y) \to e(y, x))) = T$.

11. Seja $A = \forall x \neg r(x, x) \wedge \forall x \exists y r(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \to r(x, z))$. Mostre uma interpretação $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(A) = T$.

12. Escreva as seguintes sentenças na lógica de primeira-ordem. Escolha predicados e constantes apropriados.

    (a) Todo estudante está matriculado em pelo menos uma matéria.

    (b) Todo professor ensina pelo menos uma matéria.

    (c) Toda matéria tem pelo menos um aluno matriculado.

    (d) Toda matéria é ensinada por pelo menos um professor.

    (e) O coordenador de uma matéria é um professor que a ensina.

    (f) Se um estudante está matriculado em uma matéria, então o estudante é ensinado por todos os professores que ensinam a matéria.

    (g) Programação é uma matéria.

    (h) José é um estudante matriculado em Programação.

    (i) Carlos é o coordenador of Programação.

Fim