

6ª Lista de Exercícios

Aluno(a): \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

1. Seja  $\varphi$  uma fórmula da lógica de Primeira Ordem e  $free(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . O fecho universal de  $\varphi$  é dado pela fórmula  $\forall x_1 \dots \forall x_k \varphi$ . Qual o fecho universal de  $\forall x \exists y (\forall z P(x, y, w, z) \rightarrow \forall y Q(z, y, x, z))$ ?
2. Seja  $\varphi$  uma fórmula da lógica de Primeira Ordem. Os símbolos livres de  $\varphi$  são as variáveis livres, os símbolos de função, os símbolos de constante e os símbolos de predicado que ocorrem em  $\varphi$ .
  - (a) Quais os símbolos livres de  $\forall x \exists y (\forall z P(x, y, w, z) \rightarrow \forall y Q(z, y, x, z))$ ?
  - (b) Defina uma função que retorna o conjunto de símbolos livres de uma fórmula qualquer  $\varphi$ .
3. Considere a fórmula  $\phi = \forall x \forall y Q(g(x, y), g(y, y), z)$ .
  - (a) Ache uma interpretação  $\mathcal{I}_1$  tal que  $\mathcal{I}_1 \models \phi$ .
  - (b) Ache uma interpretação  $\mathcal{I}_2$  tal que  $\mathcal{I}_2 \not\models \phi$ .
4. Seja a fórmula  $\phi = \forall x \forall y \exists z (R(x, y) \rightarrow R(y, z))$ .
  - (a) Seja  $\mathcal{A}_1 = (A_1, R^{A_1})$  uma estrutura com domínio  $A_1 = \{a, b, c, d\}$  e  $R^{A_1} = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$ . Verifique se  $\mathcal{A}_1 \models \phi$ .
  - (b) Seja a estrutura  $\mathcal{A}_2 = (A_2, R^{A_2})$  com  $A_2 = \{a, b, c\}$  e  $R^{A_2} = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$ . Verifique se  $\mathcal{A}_2 \models \phi$ .
5. Considere os seguintes predicados e constantes:
  - $O(x, y)$  representando que a pessoa  $x$  tem ocupação  $y$ .
  - $C(x, y)$  indicando que a pessoa  $x$  é cliente de  $y$ .
  - $m, c, a$  constantes representando as ocupações médico, cirurgião e advogado, respectivamente.

Escreva as seguintes sentenças na lógica de primeira ordem

- (a) Todos os cirurgiões são médicos.
  - (b) Algum advogado possui apenas clientes médicos.
  - (c) Todo cirurgião é cliente de um advogado.
6. Seja  $\varphi = \forall x (\exists y P(x, y) \wedge (\exists z P(z, x) \rightarrow \forall y P(x, y)))$ . Seja  $\mathcal{A} = (A, P^A)$  uma estrutura com  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $P^A = \{1, 2\}$ . Seja  $l$  um contexto tal que  $l(x) = l(y) = l(z) = 1$ . Seja a interpretação  $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, l)$ , verifique se  $\mathcal{I} \models \varphi$ .
  7. Seja  $\phi = \forall x \exists y \exists z ((P(x, y) \wedge P(z, y)) \wedge (P(x, z) \rightarrow P(z, x)))$ .
    - (a) Seja a estrutura  $\mathcal{A} = (A, P^A)$  com  $A = \{0, 1, 2, \dots\}$  e  $P^A = \{(m, n) \mid m < n\}$ . Verifique se  $\mathcal{A} \models \phi$ .
    - (b) Seja a estrutura  $\mathcal{B} = (B, P^B)$  com  $B = \{0, 1, 2, \dots\}$  e  $P^B = \{(m, 2m) \mid m \in B\}$ . Verifique se  $\mathcal{B} \models \phi$ .

8. Considere os seguintes predicados e constantes:

- $P(x, y)$  representando que o time  $x$  perde para o time  $y$ .
- $E(x, y)$  indicando que time  $x$  empata com o time  $y$ .
- $f, b$  constantes representando os times Fortaleza e Barcelona, respectivamente.

Represente, em uma fórmula  $\varphi$  da lógica de primeira ordem, a seguinte sentença: “Se o Fortaleza ganha do Barcelona, então o Fortaleza não perde para ninguém”.

(a) Mostre uma interpretação  $\mathcal{I}_1$  tal que  $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ .

(b) Mostre uma interpretação  $\mathcal{I}_2$  tal que  $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ .

9. Seja  $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}})$  um grafo com conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  e conjunto de arestas  $E^{\mathcal{G}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ . Verifique se  $\mathcal{G} \models \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$ .

10. Seja  $\varphi = \forall x \neg R(x, x) \wedge \forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$ . Mostre uma estrutura  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A} \models \varphi$ .