

Introdução

- ◆ Vamos fazer uma gramática livre de contexto para a linguagem a seguir:

$$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Introdução

- ◆ Precisamos de uma forma de provar que uma linguagem não é livre de contexto

Teoria da Computação

Lema do Bombeamento para
Linguagens Livres de
Contexto

Thiago Alves Rocha

Introdução

- ◆ Já mostramos o Lema do Bombeamento para linguagens regulares
 - Para toda linguagem regular L , existe um inteiro k , tal que para toda string $w \in L$ com $|w| \geq k$, existe uma forma de fazer $w = xyz$ tal que:
 - $|xy| \leq k$.
 - $|y| > 0$.
 - Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in L$.

Introdução

- ◆ Toda linguagem livre de contexto L tem um tamanho de bombeamento p
- ◆ Uma string $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser dividida $w = uvxyz$ satisfazendo algumas condições
- ◆ Para todo $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in L$

Lema do Bombeamento

- ◆ Para toda linguagem livre de contexto L , existe um inteiro p , tal que para toda string w em L com $|w| \geq p$, existe uma forma de fazer $w = uvxyz$ tal que:
 - ◆ $|vxy| \leq p$.
 - ◆ $|vy| > 0$.
 - ◆ Para todo $i \geq 0$, uv^ixy^iz está em L .

Lema do Bombeamento

- ◆ $|vy| > 0$ pois $v \neq \varepsilon$ ou $y \neq \varepsilon$
 - ◆ Se $v = \varepsilon$ e $y = \varepsilon$ o lema seria trivial
- ◆ $|vxy| \leq p$ indica que v , x e y tem tamanho no máximo p

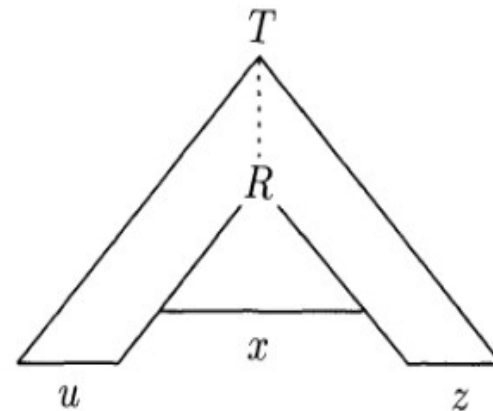
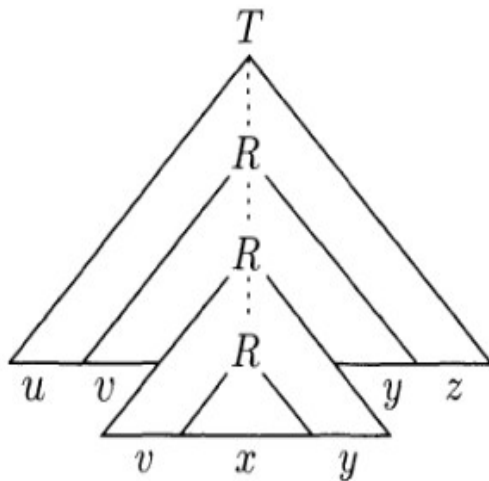
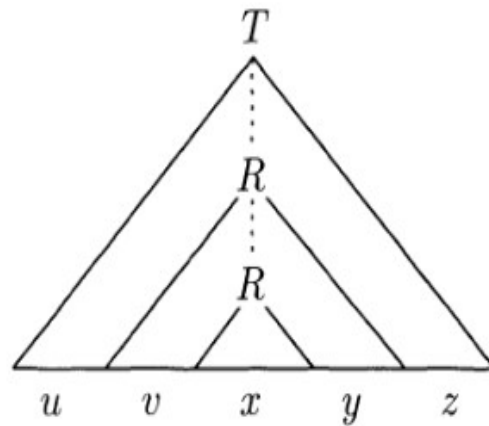
Ideia da Prova

- ◆ Seja L uma linguagem livre de contexto e w uma string suficientemente grande em L
- ◆ w tem uma árvore de derivação em uma gramática livre de contexto que gera L
- ◆ A árvore tem altura muito alta pois w é muito longa

Ideia da Prova

- ◆ A árvore tem um caminho longo entre a variável inicial até um dos terminais
 - ▶ Alguma variável se repete nesse caminho
 - ▶ Podemos trocar a subárvore da variável na segunda ocorrência pela subárvore da primeira ocorrência

Ideia da Prova



Ideia da Prova

- ◆ Podemos dividir $w = uvxyz$ de acordo com a figura
- ◆ Podemos repetir v e y e obter strings na linguagem
 - A árvore com a repetição continua sendo uma derivação da mesma gramática

Prova

- ◆ Como escolher p para garantir que a árvore de derivação repita variáveis?
- ◆ Altura da árvore tem que ser $|V| + 1$
- ◆ Qual o tamanho para strings com árvores de derivação dessa altura?

Ideia da Prova

- ◆ Seja b a quantidade máxima de símbolos na lado de direito de uma regra
- ◆ Exemplo
 - ▶ $S \rightarrow SS$
 - ▶ $S \rightarrow 0 \mid 1$
 - ▶ $b = 2$

Ideia da Prova

- ◆ Seja b a quantidade máxima de símbolos na lado de direito de uma regra
- ◆ Nível 0: no máximo b^0 nós
- ◆ Nível 1: no máximo b^1 nós
- ◆ Nível 2: no máximo b^2 nós
- ◆ Nível $|V|$: no máximo $b^{|V|}$ nós

Prova

- ◆ Temos que escolher strings em que a árvore de derivação tenha altura pelo menos $|V| + 1$
- ◆ Se uma string tem tamanho maior ou igual a $b^{|V|+1}$ então qualquer árvore de derivação tem altura maior ou igual a $|V|+1$
- ◆ Logo, fazemos $p = b^{|V|+1}$

Prova

- ◆ Seja w em L tal que $|w| \geq p$
- ◆ Seja T sua árvore de derivação com menor quantidade de nós
- ◆ A árvore repete variável no caminho da inicial até um terminal
 - ▶ Seja R a variável em que as duas ocorrências estão entre as $|V|+1$ mais baixas na árvore

Prova

- ◆ Podemos substituir a subárvore menor pela maior e ainda ter um árvore de derivação válida
 - ◆ Gerando strings da forma uv^ixyiz para $i > 1$
- ◆ Substituir a maior pela menor gera strings da forma uxz
- ◆ Mostramos a condição 3.

Prova

◆ Se $v = \varepsilon$ e $y = \varepsilon$

- ▶ A árvore de derivação substituindo a maior subárvore pela menor teria menos nós que T e ainda deriva w
- ▶ Absurdo pois escolhemos T como a árvore com menor quantidade de nós
- ▶ Logo, $|vy| > 0$.

Prova

- ◆ A ocorrência mais acima de R deriva v_{xy}
- ◆ Escolhemos R de forma que ambas ocorrências estão entre as $|V| + 1$ variáveis mais baixas na árvore
 - ▶ Subárvore que R deriva v_{xy} tem altura no máximo $|V| + 1$
 - ▶ $|v_{xy}| \leq p = b^{|V|+1}$

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Vamos mostrar que $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é livre de contexto

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Suponha L livre de contexto
- ◆ Seja p o tamanho do bombeamento de L que existe pelo lema do bombeamento
- ◆ Seja $w = a^p b^p c^p$
 - ▶ Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = a^p b^p c^p$

► Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$

► 1) v e y contém apenas um tipo de símbolo

- $v = a^l$ e $y = a^m$

- uv^2xy^2z tem mais a 's que as outras

- Absurdo!

- Análogo para $v = b^l$ e $y = b^m$ ou $v = c^l$ e $y = c^m$

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = a^p b^p c^p$

► Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$

► 2) v e y contêm mais de um símbolo diferente

- uv^2xy^2z tem símbolos na ordem incorreta
- Pelo lema $uv^2xy^2z \in L$ mas $uv^2xy^2z \notin L$ pela definição de L
- Absurdo!

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Vamos mostrar que
 $L = \{a^i b^j c^k \mid k \geq j \geq i \geq 0\}$ não é livre de contexto

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Suponha L livre de contexto
- ◆ Pelo lema do bombeamento existe um tamanho de bombeamento p
- ◆ Seja $w = a^p b^p c^p$
 - ▶ 1) v e y contém apenas um tipo de símbolo
 - ▶ Não é possível fazer do jeito anterior
 - Pois a quantidade de b 's pode ser maior que a de a 's, por exemplo

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = a^p b^p c^p$

- ▶ 1) v contém apenas um tipo de símbolo e y contém apenas um tipo de símbolo
- ▶ 1.1) símbolo a não aparece
 - Fazer uv^0xy^0z pois vamos ter menos b 's que a 's

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = a^p b^p c^p$

► 1.2) b não aparece

- Fazer uv^0xy^0z se aparecer c em v ou y
- Quantidade de c 's menor que b 's
- Fazer uv^2xy^2z se aparecer a em v ou y
- Quantidade de a 's maior que b 's

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = a^p b^p c^p$

► 1.3) c não aparece

- Fazer uv^2xy^2z para ter mais a 's ou mais b 's que c

► 2) Quando v ou y tem mais de um tipo de símbolo fazemos uv^2xy^2z para mudar a ordem

► Absurdo em todos os casos!

► L não é livre de contexto!

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Vamos mostrar que
 $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Suponha L livre de contexto
- ◆ Pelo lema do bombeamento existe um tamanho de bombeamento p
- ◆ Seja $w = 0^p 1 0^p 1$

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = 0_p 1 0_p 1$

◆ $u = 0_{p-1}$

◆ $v = 0$

◆ $x = 1$

◆ $y = 0$

◆ $z = 0_{p-1} 1$

◆ Satisfaz as 3 condições

◆ Temos que escolher outra string

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Suponha L livre de contexto
- ◆ Pelo lema do bombeamento existe um tamanho de bombeamento p
- ◆ Seja $w = 0_p 1_p 0_p 1_p$
 - ▶ 1) vxy está na primeira metade
 - uv^2xy^2z tem um 1 no início da segunda metade
 - Logo, não é da forma ww

Linguagem Não Livre de Contexto

- ◆ Seja $w = 0_p 1_p 0_p 1_p$
 - ▶ 2) vxy está na segunda metade
 - uv^2xy^2z tem um 0 no final da primeira metade
 - Logo, não é da forma ww

Linguagem Não Livre de Contexto

◆ Seja $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$

► 3) vxy está no meio da string

- $vxy = 1^l 0^m$ com $p \geq l+m$
- $uv^0xy^0z = 0^p 1^i 0^j 1^p$
- Como $|vy| > 0$, temos que i e j não podem ser p ao mesmo tempo
- Logo, uv^0xy^0z não é da forma ww

► Absurdo em todos os casos!

► L não é livre de contexto!