Lógica para Computação

Método dos Tableaux

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- A Dedução Natural permite mostrar que uma fórmula é conclusão de um conjunto de premissas
- Infelizmente não fornece, de maneira óbvia, um algoritmo para realizar essa verificação
- Além disso, a Dedução Natural permite mostrar que $\Gamma \vdash \varphi$ mas não consegue mostrar que $\Gamma \nvdash \varphi$
- Tabelas Verdade permitem fazer essa verificação mas a quantidade de linhas da Tabela Verdade é exponencial na quantidade de atômicas

Introdução

- Vamos apresentar o método dos Tableaux
- É um método por refutação
- Para mostrar que $\Gamma \vdash_T \varphi$ vamos mostrar que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_T \bot$
- Caso não seja possível chegar em $\bot$, o tableaux fornece um contra-exemplo para $\Gamma \vdash_T \varphi$, ou seja, temos que $\Gamma \nvdash_T \varphi$

- Tableau para mostrar que $p \to q, q \to r \vdash_T p \to r$

$$(p \to q)$$
$$(q \to r)$$
$$\neg(p \to r)$$
$$p$$
$$\neg r$$

```
            ¬r
          /    \
        ¬p      q
        x      / \
             ¬q   r
              x   x
```

- Um tableau tem o formato de uma árvore
- Regras que podem adicionar novas fórmulas ao final de um ramo ou bifurcar um ramo em dois

Tableaux

- Se queremos mostrar que $\gamma_1, ..., \gamma_k \vdash_T \varphi$ iniciamos o tableau da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \gamma_1 \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_k \\ \neg\varphi \end{array}$$

- Em seguida, o tableau é expandido através das regras

Regras dos Tableaux

- Regras em que não ocorre bifurcação

$$\begin{array}{c} (\psi_1 \wedge \psi_2) \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\psi_1 \vee \psi_2) \\ \neg\psi_1 \\ \neg\psi_2 \end{array}$$

Regras dos Tableaux

- Regras em que não ocorre bifurcação

$$\begin{array}{c} \neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \\ \psi_1 \\ \neg\psi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\neg\psi_1) \\ \psi_1 \end{array}$$

Regras dos Tableaux

- Regras em que ocorre bifurcação

$$\begin{array}{c} \neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\psi_1 \qquad \neg\psi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\psi_1 \vee \psi_2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \psi_1 \qquad \psi_2 \end{array}$$

Regras dos Tableaux

- Regras em que ocorre bifurcação

$$\begin{array}{c} (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \\ \neg\psi_1 \qquad \psi_2 \end{array}$$

Exemplo

- Tableau para $p, (p \wedge q) \rightarrow r \vdash_T r$

$$
\begin{array}{ccc}
 & p & \\
 & (p \wedge q) \rightarrow r & \\
 & \neg r & \\
\neg(p \wedge q) & & r \\
 & & \times \\
\begin{array}{cc} p & \neg q \\ \times & \end{array} & &
\end{array}
$$

Tableaux

- Note que não podemos aplicar regras em fórmulas p e $\neg p$ em que p é atômica
- Em cada ramo, uma fórmula só precisa ser expandida uma única vez

Definição

Um ramo em um tableau que não possui mais fórmulas para serem expandidas é chamado de ramo **saturado**

- Como as regras geram fórmulas de tamanho menor então quando todas as fórmulas tiverem sido expandidas até chegar nas atômicas temos todos os ramos saturados
- O processo de expansão sempre termina

Tableaux

Definição

Um ramo em um tableau está **fechado** se possui uma fórmula φ e sua negação $\neg\varphi$. Um ramo é aberto quando não está fechado.

- Um ramo fechado não precisa mais ser expandido, mesmo que ainda não esteja saturado

Definição

Um tableau está fechado se todos os seus ramos estão fechados. Caso contrário, o tableau está aberto.

Definição

Temos que $\gamma_1, ..., \gamma_k \vdash_T \varphi$ pelo método dos Tableaux se existe um tableau fechado para ele.

Exemplo

- Vamos mostrar que $\vdash_T p \lor \neg p$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\vdash_T p \vee \neg p$

$$
\begin{array}{c}
\neg(p \vee \neg p) \\
\neg p \\
\neg\neg p \\
\times
\end{array}
$$

Exemplo

- Vamos provar que $p \to q, q \to r \vdash_T p \to r$

Exemplo

- Vamos provar $p \to q, q \to r \vdash_T p \to r$

$$(p \to q)$$
$$(q \to r)$$
$$\neg(p \to r)$$
$$p$$
$$\neg r$$

$$\neg p \qquad\qquad q$$

$$\times \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad \neg q \qquad r$$

$$\qquad\qquad \times \qquad \times$$

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p, (p \wedge q) \rightarrow r \vdash_T r$?

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p, (p \wedge q) \rightarrow r \vdash_T r$?

$$
\begin{array}{c}
p \\
(p \wedge q) \rightarrow r \\
\neg r
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg(p \wedge q) \\
\begin{array}{cc}
p & \neg q \\
\times &
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
r \\
\times
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p, (p \land q) \to r \vdash_T r$?

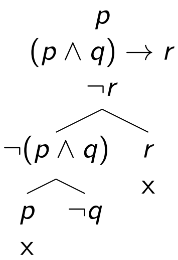
$$
\begin{array}{c}
p \\
(p \land q) \to r \\
\neg r
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\neg(p \land q) & & r \\
 & & \text{X} \\
\begin{array}{cc} p & \neg q \\ \text{X} & \end{array} & &
\end{array}
$$

- Temos um ramo saturado e aberto
- O que significa?

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p, (p \wedge q) \to r \vdash_T r$?



- Temos um ramo saturado e aberto
- O que significa?
- Um contra exemplo: $v(p) = True$, $v(q) = False$ e $v(r) = False$
- $p, (p \wedge q) \to r \nvdash_T r$

Corretude e Completude

Teorema da Corretude e Completude do Método dos Tableaux

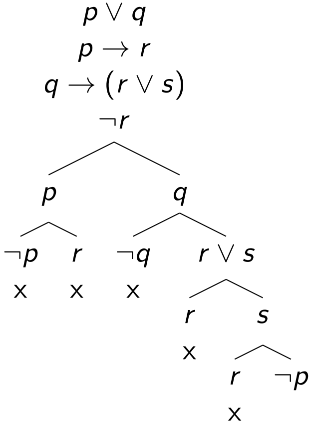
Seja Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. $\Gamma \vdash_T \varphi$ se e somente se $\Gamma \models \varphi$.

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow (r \vee s) \vdash_T r$?

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p \vee q, p \to r, q \to (r \vee s) \vdash_T r$?



Exemplo

- Será que é possível mostrar $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow (r \vee s) \vdash_T r$?

$$p \vee q$$
$$p \rightarrow r$$
$$q \rightarrow (r \vee s)$$
$$\neg r$$

p | q

$\neg p$ | r | $\neg q$ | $r \vee s$

x | x | x

r | s

x

r | $\neg p$

x

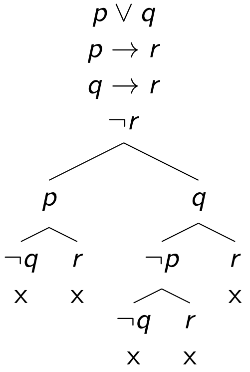
- Um contra exemplo: $v(p) = False$, $v(q) = True$ e $v(r) = False$
- $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow (r \vee s) \nvdash_T r$

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash_T r$?

Exemplo

- Será que é possível mostrar $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash_T r$?



Exemplo

- Será que é possível construir outro tableau para $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash_T r$?

Exemplo

- Será que é possível construir outro tableau para $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash_T r$?

$$p \vee q$$
$$p \rightarrow r$$
$$q \rightarrow r$$
$$\neg r$$

$\neg q$ | r

$\neg p$ | r | X

p | q | X

X | X

Exemplo

Considere as premissas a seguir:

- Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
- Se Guga joga um partida de tênis, o ingresso é barato.

Usando o método dos Tableaux, mostre que podemos concluir que

- Se Guga joga um partida de tênis, a torcida comparece.

Considerações

- Em geral, por motivos de eficiência, aplicamos as regras que não bifurcam antes
- A ordem de aplicação das regras podem influenciar no tamanho do tableau
- É mais simples de implementar que a Dedução Natural
- Diferente da Dedução Natural, com o método dos Tableaux podemos mostrar que $\Gamma \nvdash_T \varphi$
- O método dos Tableaux é mais eficiente que usar Tabela Verdade