Lógica para Computação

Semântica da Lógica Proposicional

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

Introdução

- Vamos definir quando uma fórmula é verdadeira
- Isso depende do valor verdade das proposições atômicas
- o valor verdade de uma fórmula do tipo $\phi \wedge \psi$ depende da verdade de ϕ, da verdade de ψ e do significado de $\wedge$
- O significado de $\wedge$ é capturado pela observação que $\phi \wedge \psi$ é verdade se e somente se ϕ e ψ são ambos verdadeiros
- Não depende da informação de ϕ e ψ mas apenas de seus valores verdade

Tópicos

1. Introdução
2. Valoração
3. Tabelas Verdade

Valoração

Definição

O conjunto de valores verdade consiste de apenas dois elementos: T e F. T representa verdadeiro e F representa falso.

Definição

Uma valoração/interpretação de uma fórmula φ é um mapeamento de cada proposição atômica que ocorre em φ em $\{T, F\}$. Ou seja, $v : atom(\varphi) \to \{T, F\}$.

- O mapeamento das atômicas é a valoração das atômicas

Exemplo

O mapeamento v que associa $v(p) = F$ e $v(q) = T$ é uma valoração para $(p \vee (\neg q))$. Quais são as outras valorações possíveis?

Exemplo

Exemplo

O mapeamento v que associa $v(p) = F$ e $v(q) = T$ é uma valoração para $(p \vee (\neg q))$. Quais são as outras valorações possíveis?

Valoração

- A valoração de uma fórmula φ é definida indutivamente usando a valoração das atômicas

Definição

$v(\neg\varphi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = F$.
$v(\varphi \land \psi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = T$ e $v(\psi) = T$.
$v(\varphi \lor \psi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = T$ ou $v(\psi) = T$.
$v(\varphi \to \psi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = F$ ou $v(\psi) = T$.

Valoração

- A valoração de uma fórmula φ é definida indutivamente usando a valoração das atômicas

Definição

$v(\neg\varphi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = F$.
$v(\varphi \wedge \psi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = T$ e $v(\psi) = T$.
$v(\varphi \vee \psi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = T$ ou $v(\psi) = T$.
$v(\varphi \rightarrow \psi) = T$ se e somente se $v(\varphi) = F$ ou $v(\psi) = T$.

- Quando $v(\varphi) = T$ também usamos o termo v satisfaz φ e a notação $v \models \varphi$

Exemplo

Exemplo

Seja v_1 uma valoração tal que $v_1(p) = T$, $v_1(q) = F$ e $v_1(r) = T$. Vamos descobrir o valor de $v_1((p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q))$.

Tabelas dos Conectivos

- Podemos especificar a definição de valoração dos conectivos em uma tabela

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

Algoritmo Valoração

procedure $\textsc{ValorVerdade}(\phi, val)$
    if ϕ é atômica **then**
        return $val(\phi)$
    if $\phi = (\neg\psi)$ **then**
        return not $\textsc{ValorVerdade}(\psi, val)$
    if $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ **then**
        return $\textsc{ValorVerdade}(\psi_1, val)$ **and** $\textsc{ValorVerdade}(\psi_2, val)$
    if $\phi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ **then**
        return $\textsc{ValorVerdade}(\psi_1, val)$ **or** $\textsc{ValorVerdade}(\psi_2, val)$
    if $\phi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ **then**
        if $\textsc{ValorVerdade}(\psi_1, val)$ **then**
            return $\textsc{ValorVerdade}(\psi_2, val)$
        return True

Tópicos

Tabelas Verdade

- Também podemos construir tabelas verdade para analisar as valorações de uma fórmula qualquer ϕ
- Se uma fórmula ϕ tem exatamente n proposições atômicas, quantas valorações ela possui?
- Podemos usar uma tabela verdade em que cada linha representa uma valoração possível
- Depois de listar todas as possibilidade podemos computar o valor verdade de ϕ em cada valoração

Exemplo

- Vamos fazer uma tabela verdade para $(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$

Exemplo

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \lor \neg p$	$(p \to \neg q) \to (q \lor \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Exemplo

- Podemos usar as colunas para computar o valor verdade das subfórmulas em cada valoração
- Vamos fazer uma tabela verdade para $(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee \neg r))$