Lógica para Computação

Resolução - Lógica de Primeira Ordem

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

Introdução

- Seja $C_1 = \{R(f(x)), R(f(z))\}$
- Seja $C_2 = \{\neg R(x), S(x)\}$
- $res(C_1, C_2)$?

Introdução

- Seja $C_1 = \{R(f(x)), R(f(z))\}$
- Seja $C_2 = \{\neg R(x), S(x)\}$
- $res(C_1, C_2)$?
- Podemos modificar a variável da segunda cláusula: $\{\neg R(w), S(w)\}$
- Seja $\theta = \{w \leftarrow f(x), z \leftarrow x\}$
- $res(C_1, C_2) = \{S(f(x))\}$

Tópicos

Resolvente

Definição

Seja l um literal da lógica de primeira ordem.
$l^c = \neg l$, se l é atômica.
$l^c = l$, se l não é atômica.
Seja $L = \{l_1, ..., l_n\}$ um conjunto de literais.
$L^c = \{l_1^c, ..., l_n^c\}$.

Definição

Considere duas cláusulas da lógica de primeira ordem C_1 e C_2 sem variáveis em comum.
Seja $L_1 = \{a_1, ..., a_k\} \subseteq C_1$ e $L_2 = \{b_1, ..., b_n\} \subseteq C_2$ tal que L_1 e L_2^c possuem um unificador mais geral θ.
$res(C_1, C_2) = \{C_1\theta - L_1\theta\} \cup \{C_2\theta - L_2\theta\}$.

Exemplos

Exemplo

Seja $C_1 = \{P(f(x), y, x), \neg Q(a, y, w_1)\}$
Seja $C_2 = \{\neg P(z, g(z), w)\}$
Seja $L_1 = \{P(f(x), y, x)\}$ e $L_2 = \{\neg P(z, g(z), w)\}$. L_1 e L_2^c são unificáveis.
$\theta_1 = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}$ é a umg de L_1 e L_2^c.
$res(C_1, C_2) = (C_1\theta_1 - \{P(f(x), y, x)\}\theta_1) \cup (C_2\theta_1 - \{\neg P(z, g(z), w)\}\theta_1)$.
$res(C_1, C_2) = \{\neg Q(a, g(f(w)), w_1)\}$

Exemplos

Exemplo

Seja $C_3 = \{Q(x, g(f(a)), c)\}$
Seja $C_4 = \{\neg Q(a, g(f(w)), w_1)\}$
$\theta_2 = \{x \leftarrow a, w \leftarrow a, w_1 \leftarrow c\}$ é a unificação mais geral de $\{Q(x, g(f(a)), c)\}$ e $\{Q(a, g(f(w)), w_1)\}$.
$res(C_3, C_4) = \{\}$.

Tópicos

Resolução

- $\forall x \forall y((P(x) \vee P(y)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$
- Na representação de conjuntos: $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(x), \neg P(y)\}\}$
- Modificando as variáveis de uma das cláusulas: $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(w), \neg P(z)\}\}$
- Seja $C_1 = \{P(x), P(y)\}$
- Seja $C_2 = \{\neg P(w), \neg P(z)\}$
- $res(C_1, C_2)$?

- Seja $C_1 = \{P(x), P(y)\}$
- Seja $C_2 = \{\neg P(w), \neg P(z)\}$
- $L_1 = \{P(x), P(y)\}$ e $L_2 = \{\neg P(w), \neg P(z)\}$
- $\theta = \{y \leftarrow x, w \leftarrow x, z \leftarrow x\}$ é o unificador mais geral
- $res(C_1, C_2) = (C_1\theta - L_1\theta) \cup (C_2\theta - L_2\theta) = \{\}$

Resolução

- Seja $C_1 = \{P(x), P(y)\}$
- Seja $C_2 = \{\neg P(w), \neg P(z)\}$
- $L_1 = \{P(x), P(y)\}$ e $L_2 = \{\neg P(w), \neg P(z)\}$
- $\theta = \{y \leftarrow x, w \leftarrow x, z \leftarrow x\}$ é o unificador mais geral
- $res(C_1, C_2) = (C_1\theta - L_1\theta) \cup (C_2\theta - L_2\theta) = \{\}$

- A fórmula $\forall x \forall y((P(x) \vee P(y)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$ é insatisfatível

Resolução

Teorema

Seja S um conjunto de cláusulas. S é insatisfatível se e somente se é possível obter a cláusula vazia $\{\}$ a partir de S e aplicações sucessivas da regra da resolução.

Exemplo

$S = \{\{P(f(x), y, x), \neg Q(a, y, w_1)\}, \{\neg P(z, g(z), w)\}, \{Q(x, g(f(a)), c))\}\}$

1.	$\{P(f(x), y, x), \neg Q(a, y, w_1)\}$	
2.	$\{\neg P(z, g(z), w)\}$	
3.	$\{Q(x, g(f(a)), c))\}$	
4.	$\{\neg Q(a, g(f(w)), w_1)\}$	1,2 $\{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}$
5.	$\{\}$	3,4 $\{x \leftarrow a, w \leftarrow a, w_1 \leftarrow c\}$

S é insatisfatível.

Exemplo

- Seja $\varphi_1 = \forall x(\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x, f(x)))$
- Seja $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \vee Q(x) \vee S(f(x)))$
- Seja $\varphi_3 = \forall x((\neg T(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg T(x) \vee \neg S(x)))$
- Seja $\varphi_4 = \forall y((R(a, y) \wedge T(y)) \wedge T(a) \wedge P(a))$
- Vamos mostrar que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$ é insatisfatível

Exemplo

1.	$\{\neg P(x), Q(x), R(x, f(x))\}$	
2.	$\{\neg P(x), Q(x), S(f(x))\}$	
3.	$\{T(a)\}$	
4.	$\{P(a)\}$	
5.	$\{\neg R(a, y), T(y)\}$	
6.	$\{\neg T(x), \neg Q(x)\}$	
7.	$\{\neg T(x), \neg S(x)\}$	
8.	$\{\neg Q(a)\}$	3,6 $\{x \leftarrow a\}$
9.	$\{Q(a), S(f(a))\}$	2,4 $\{x \leftarrow a\}$
10.	$\{S(f(a))\}$	8,9 $\{\}$
11.	$\{Q(a), R(a, f(a))\}$	1,4 $\{x \leftarrow a\}$
12.	$\{R(a, f(a))\}$	8,11 $\{\}$
13.	$\{T(f(a))\}$	5,12 $\{y \leftarrow f(a)\}$
14.	$\{\neg S(f(a))\}$	7,13 $\{x \leftarrow f(a)\}$
15.	$\{\}$	10,14 $\{\}$

Exemplo

$S = \{\{\neg P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}, \{P(x,f(x))\}, \{\neg P(x,x)\}\}$
Vamos mostrar que S é insatisfatível.

Exemplo

1.	$\{\neg P(x, y), P(y, x)\}$	
2.	$\{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\}$	
3.	$\{P(x, f(x))\}$	
4.	$\{\neg P(x, x)\}$	
5.	$\{P(x_1, f(x_1))\}$	renomear 3
6.	$\{P(f(x), x)\}$	1,5 $\{y \leftarrow f(x), x_1 \leftarrow x\}$
7.	$\{P(x_2, f(x_2))\}$	renomear 3
8.	$\{\neg P(f(x), z), P(x, z)\}$	2,7 $\{y \leftarrow f(x), x_2 \leftarrow x\}$
9.	$\{P(f(x_3), x_3)\}$	renomear 6
10.	$\{P(x, x)\}$	8,9 $\{z \leftarrow x, x_3 \leftarrow x\}$
11.	$\{\neg P(f(x_4), x_4)\}$	renomear 4
12.	$\{\}$	10,11 $\{x_4 \leftarrow x\}$

Tópicos

Consequência Lógica por Resolução

Podemos usar o seguinte resultado:
$\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \varphi$ se e somente se $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\varphi$ é insatisfatível.

Exemplo

Sejam as premissas:
"Toda pessoa é sábia ou política."
"Zé não é político."
Vamos concluir que "Zé é sábio".
$\forall x(S(x) \vee P(x)), \neg P(a) \models S(a)$
$S = \{\{S(x), P(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg S(a)\}\}$

Exemplo

1.	$\{S(x), P(x)\}$	
2.	$\{\neg P(a)\}$	
3.	$\{\neg S(a)\}$	
4.	$\{S(a)\}$	1,2 $\{x \leftarrow a\}$
5.	$\{\}$	3,4 $\{\}$

$S = \{\{S(x), P(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg S(a)\}\}$ é insatisfatível.
Logo, $\forall x(S(x) \lor P(x)), \neg P(a) \models S(a)$.

Exemplo

Exemplo

Seja a premissa:
"Se alguém é comediante, então todos são felizes."
Vamos concluir que "Todo comediante é feliz".

$\exists x C(x) \rightarrow \forall x F(x) \models \forall x(C(x) \rightarrow F(x))$

$(\exists x C(x) \rightarrow \forall x F(x)) \wedge \neg \forall x(C(x) \rightarrow F(x))$

$(\neg \exists x C(x) \vee \forall x F(x)) \wedge \neg \forall x(\neg C(x) \vee F(x))$

$(\forall x \neg C(x) \vee \forall x F(x)) \wedge \exists x \neg(\neg C(x) \vee F(x))$

$(\forall x \neg C(x) \vee \forall x F(x)) \wedge \exists x(C(x) \wedge \neg F(x))$

$(\forall x_1 \neg C(x_1) \vee \forall x_2 F(x_2)) \wedge \exists x_3(C(x_3) \wedge \neg F(x_3))$

$\forall x_1 \forall x_2(\neg C(x_1) \vee F(x_2)) \wedge \exists x_3(C(x_3) \wedge \neg F(x_3))$

$\exists x_3 \forall x_1 \forall x_2((\neg C(x_1) \vee F(x_2)) \wedge C(x_3) \wedge \neg F(x_3))$

$\forall x_1 \forall x_2((\neg C(x_1) \vee F(x_2)) \wedge C(a) \wedge \neg F(a))$

$S = \{\{\neg C(x_1), F(x_2)\}, \{C(a)\}, \{\neg F(a)\}\}$

Exemplo

1.	$\{\neg C(x_1), F(x_2)\}$	
2.	$\{C(a)\}$	
3.	$\{\neg F(a)\}$	
4.	$\{F(x_2)\}$	1,2 $\{x_1 \leftarrow a\}$
5.	$\{\}$	3,4 $\{x_2 \leftarrow a\}$

$S = \{\{\neg C(x_1), F(x_2)\}, \{C(a)\}, \{\neg F(a)\}\}$ é insatisfatível.
Logo, $\exists x C(x) \rightarrow \forall x F(x) \models \forall x(C(x) \rightarrow F(x))$.