Lógica para Computação

Lógica de Primeira Ordem - Propriedades Semânticas

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

1. Introdução
2. Satisfatibilidade
3. Validade
4. Consequência Lógica
5. Equivalência Lógica

Introdução

- Como podemos definir a satisfatibilidade para Lógica de Primeira Ordem?

Introdução

- Como podemos definir a satisfatibilidade para Lógica de Primeira Ordem?
- Na Lógica Proposicional era necessário verificar todas as valorações

Introdução

- Como podemos definir a satisfatibilidade para Lógica de Primeira Ordem?
- Na Lógica Proposicional era necessário verificar todas as valorações
- Na Lógica de Primeira Ordem temos as interpretações

Tópicos

Satisfatibilidade

Definição

Seja ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
ψ é satisfatível se e somente se existe interpretação $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \psi$.

Satisfatibilidade

Definição

Seja ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
ψ é satisfatível se e somente se existe interpretação $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \psi$.

- Uma fórmula ϕ é insatisfatível se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \not\models \phi$.

Exemplo

- Verifique se $\forall x \forall y (Q(x,y) \rightarrow Q(y,x))$ é satisfatível

Exemplo

- Verifique se $\exists x(P(x) \land \neg P(x))$ é satisfatível.

Tópicos

Validade

Definição

Seja ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
ψ é válida se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \psi$.

Validade

Definição

Seja ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
ψ é válida se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \psi$.

- Quando uma fórmula ϕ é válida, usamos a notação $\models \phi$

Validade

Definição

Seja ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
ψ é válida se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \psi$.

- Quando uma fórmula ϕ é válida, usamos a notação $\models \phi$
- Uma fórmula ϕ não é válida se e somente se existe uma interpretação $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \not\models \phi$

Exemplo

- Verifique se $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ é válida

Exemplo

- Verifique se $\forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow Q(y, x))$ é válida

Teorema

Teorema

Seja ϕ uma fórmula da Lógica de Primeira Ordem.
ϕ é satisfatível se e somente se $\neg\phi$ não é válida.

Teorema

Teorema

Seja ϕ uma fórmula da Lógica de Primeira Ordem.
ϕ é satisfatível se e somente se $\neg\phi$ não é válida.

Prova

$\Rightarrow$ Suponha que ϕ é satisfatível. Então existe uma interpretação $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models phi$. Logo, $\mathcal{I} \not\models \neg\phi$. Dessa forma, $\neg\phi$ não é válida.
$\Leftarrow$ Suponha que $\neg\phi$ não é válida. Logo, existe interpretação $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \not\models \neg\phi$. Logo, $\mathcal{I} \models \phi$. Dessa forma, ϕ é satisfatível.

Exemplo

- Verifique se $\neg\forall x P(x, y)$ é válida

Tópicos

Consequência Lógica

Seja as seguintes premissas:

- Todo cientista da computação é inteligente.
- Nenhum político é inteligente

Será que podemos concluir a afirmação abaixo?

- Nenhum político é cientista da computação

Consequência Lógica

- $\forall x(C(x) \rightarrow I(x)), \neg\exists x(P(x) \wedge I(x)) \models \neg\exists x(P(x) \wedge C(x))$

Consequência Lógica

Definição

Seja Γ um conjunto de fórmulas na Lógica de Primeira Ordem e ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
$\Gamma \models \psi$ se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, se $\mathcal{I} \models \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$ então $\mathcal{I} \models \psi$.

Consequência Lógica

Definição

Seja Γ um conjunto de fórmulas na Lógica de Primeira Ordem e ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
$\Gamma \models \psi$ se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, se $\mathcal{I} \models \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$ então $\mathcal{I} \models \psi$.

- Ou seja, se uma interpretação satisfaz todos os elementos de Γ então ela também deve satisfazer ψ

Consequência Lógica

Definição

Seja Γ um conjunto de fórmulas na Lógica de Primeira Ordem e ψ uma fórmula na Lógica de Primeira Ordem.
$\Gamma \models \psi$ se e somente se para toda interpretação $\mathcal{I}$, se $\mathcal{I} \models \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$ então $\mathcal{I} \models \psi$.

- Ou seja, se uma interpretação satisfaz todos os elementos de Γ então ela também deve satisfazer ψ
- Em geral, escrevemos $\phi_1, ..., \phi_k \models \psi$ no lugar de $\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$

Exemplo

- Verifique se $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Exemplo

- $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$?

Exemplo

- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \models \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$?

Teorema

Teorema

Seja Γ um conjunto de fórmulas na Lógica de Primeira Ordem, φ e ψ fórmulas na Lógica de Primeira Ordem.
$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ se e somente se $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

Exemplo

- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y \forall x R(x, y)$?

Teorema

Teorema

Seja α e β fórmulas da Lógica de Primeira Ordem.
$\alpha \models \beta$ se e somente se $\alpha \wedge \neg\beta$ não é satisfatível.

Teorema

Teorema

Seja α e β fórmulas da Lógica de Primeira Ordem.
$\alpha \models \beta$ se e somente se $\alpha \wedge \neg\beta$ não é satisfatível.

Prova

$\Rightarrow$ Suponha que $\alpha \models \beta$. Logo, para toda interpretação $\mathcal{I}$, se $\mathcal{I} \models \alpha$ então $\mathcal{I} \models \beta$. Suponha que existe uma interpretação $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1 \models \alpha \wedge \neg\phi$. Logo, $\mathcal{I}_1 \models \alpha$ e $\mathcal{I}_1 \models \phi$. Se $\mathcal{I}_1 \models \alpha$ então $\mathcal{I}_1 \models \beta$. Absurdo!
$\Leftarrow$ Suponha que $\alpha \wedge \neg\beta$ não é satisfatível. Suponha que $\alpha \not\models \beta$. Logo, existe interpretação $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1 \models \alpha$ e $\mathcal{I}_1 \not\models \beta$. Ou seja, $\mathcal{I}_1 \models \alpha$ e $\mathcal{I}_1 \models \neg\beta$. Logo, $\alpha \wedge \neg\beta$ é satisfatível. Absurdo!

Exemplo

- $\exists y \forall x R(x, y) \models \forall x \exists y R(x, y)$?

Tópicos

Equivalência Lógica

Definição

Seja φ e ψ fórmulas da Lógica de Primeira Ordem.
$\varphi \equiv \psi$ quando para toda interpretação $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \varphi$ se e somente se $\mathcal{I} \models \psi$.

Exemplo

- Vamos mostrar que $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Exemplo

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists Q(x)$?

Exemplo

- $\forall x(P(x) \vee \exists x Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$?

Equivalências Importantes

- $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
- $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$
- $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$
- $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$
- $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$
- $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
- $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
- $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \psi$, se $x \notin free(\psi)$
- $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\varphi \wedge \psi$, se $x \notin free(\psi)$