Lógica para Computação

Formas Normais da Lógica de Primeira Ordem

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

Introdução

- Precisamos de uma forma normal para as fórmulas da lógica de primeira ordem
- Podemos nos basear na forma normal conjuntiva da lógica proposicional
- Temos que colocar os quantificadores na parte mais externa da fórmula
- A parte sem quantificadores deve ficar na forma normal conjuntiva

Tópicos

1. Introdução
2. Forma Normal Prenex
3. Skolemização
4. Forma Normal Clausal

Forma Normal Prenex

Definição

Uma fórmula da lógica de primeira ordem está na forma normal prenex conjuntiva prenex se é da forma
$Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$
em que os Q_i são quantificadores e ψ é uma fórmula livre de quantificadores na forma normal conjuntiva.

Exemplo

$\forall x \forall y((P(f(x)) \vee \neg P(g(y))) \wedge (\neg Q(y) \vee Q(x) \vee \neg P(g(y))))$.

Forma Normal Prenex

- Toda fórmula da lógica de primeira ordem é equivalente a uma fórmula na forma normal prenex
- Podemos usar as seguintes equivalências:

Conversão

$(Qx\varphi) \wedge \psi \equiv Qx(\varphi \wedge \psi)$ em que x não ocorre livre em ψ.
$(Qx\varphi) \vee \psi \equiv Qx(\varphi \vee \psi)$ em que x não ocorre livre em ψ.
$(\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$.
$(\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$.
$(Q_1x\varphi) \wedge (Q_2y\psi) \equiv Q_1xQ_2y(\varphi \wedge \psi)$ em que $x \neq y$.
$(Q_1x\varphi) \vee (Q_2y\psi) \equiv Q_1xQ_2y(\varphi \vee \psi)$ em que $x \neq y$.

- E as equivalências dos conectivos para deixar na forma normal conjuntiva

Forma Normal Prenex

Exemplo 1

$\forall x(P(x) \wedge (\exists y P(y) \wedge \forall z R(x,z)))$.
$\forall x(P(x) \wedge \exists y \forall z(P(y) \wedge R(x,z)))$.
$\forall x(\exists y(P(x) \wedge \forall z(P(y) \wedge R(x,z))))$.
$\forall x \exists y \forall z(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,z))$.

Exemplo 2

$((\forall x P(x)) \wedge R(y)) \vee (\forall x R(x))$.
$(\forall x(P(x) \wedge R(y))) \vee (\forall x R(x))$.

Forma Normal Prenex

Exemplo 1

$\forall x(P(x) \land (\exists y P(y) \land \forall z R(x,z)))$.
$\forall x(P(x) \land \exists y \forall z(P(y) \land R(x,z)))$.
$\forall x(\exists y(P(x) \land \forall z(P(y) \land R(x,z))))$.
$\forall x \exists y \forall z(P(x) \land P(y) \land R(x,z))$.

Exemplo 2

$((\forall x P(x)) \land R(y)) \lor (\forall x R(x))$.
$(\forall x(P(x) \land R(y))) \lor (\forall x R(x))$.

- Nem toda fórmula pode ser convertida para a forma normal prenex usando apenas as regras que definimos

Renomeação de Variáveis

Exemplo

$((\forall x P(x)) \wedge R(y)) \vee (\forall x R(x))$.
$(\forall x (P(x) \wedge R(y))) \vee (\forall x R(x))$.
$(\forall z (P(z) \wedge R(y))) \vee (\forall x R(x))$.

Definição

Considere a fórmula $Qx\psi$. A renomeação da variável x pela variável y em $Qx\psi$ é a fórmula:
$Qy\psi[x \leftarrow y]$ em que $\psi[x \leftarrow y]$ é uma substituição segura.

Renomeação de Variáveis

Exemplo 1

Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow (\exists x Q(x, y)))$.
A renomeação de x por z em φ é $\forall z(P(z) \rightarrow (\exists x Q(x, y)))$.

Exemplo 2

Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow (\exists x Q(x, y)))$.
A renomeação de x por w em $(\exists x Q(x, y))$ é $\exists w Q(w, y)$.
Substituindo em φ: $\forall x(P(x) \rightarrow (\exists w Q(w, y)))$.

Exemplo 3

$\forall x \forall y P(x, y)$.
x não pode ser renomeada para y em $\forall x \forall y P(x, y)$.
A substituição $\forall y P(x, y)[x \leftarrow y]$ não é segura.

Exemplo

Seja $\varphi = \forall x((P(x) \wedge R(y)) \rightarrow (\exists x R(x)))$. Vamos renomear x por y em φ. A substituição $(P(x) \wedge R(y)) \rightarrow (\exists x R(x))[x \leftarrow y]$ é segura. A fórmula obtida é $\forall y((P(y) \wedge R(y)) \rightarrow (\exists x R(x)))$ que não é equivalente a φ.

Forma Normal Prenex

Exemplo

Seja $\varphi = \forall x((P(x) \wedge R(y)) \rightarrow (\exists x R(x)))$. Vamos renomear x por y em φ. A substituição $(P(x) \wedge R(y)) \rightarrow (\exists x R(x))[x \leftarrow y]$ é segura. A fórmula obtida é $\forall y((P(y) \wedge R(y)) \rightarrow (\exists x R(x)))$ que não é equivalente a φ.

- As regras para transformar uma fórmula na forma normal prenex não podem deixar isso ocorrer

Regra Prenex de Renomeação de Variáveis

Regra Prenex de Renomeação de Variáveis

Seja φ uma fórmula com os quanticadores $Q_1 x_1, Q_2 x_2, ..., Q_n x_n$ e variáveis livres $z_1, ..., z_k$. Podemos renomear $x_1, ..., x_n$ por $y_1, ..., y_n$ respectivamente tal que $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$ e $y_i \notin \{x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_k\}$.

Exemplo

Seja $\forall x(P(x) \rightarrow (\exists x Q(x, y)))$.
Vamos renomear x do $\forall x$ e x do $\exists x$ por z e w, respectivamente:
$\forall z(P(z) \rightarrow (\exists w Q(w, y)))$

Regra Prenex de Renomeação de Variáveis

- Toda fórmula da lógica de primeira ordem é equivalente a uma fórmula na forma normal prenex
- Podemos usar as equivalências anteriores e a regra prenex de renonemação de variáveis:

Exemplo

Seja $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$.
Vamos renomear x do primeiro $\forall x$ e x do segundo $\forall x$ por y e z, respectivamente:
$\forall y P(y) \lor \forall z Q(z)$.
Pela equivalência: $\forall y \forall z (P(y) \lor Q(z))$.

Forma Normal Prenex

Exemplo

Seja $\forall x P(x) \wedge ((\forall x Q(x)) \rightarrow (\exists y R(x,y,z)))$.
$\forall x P(x) \wedge (\neg(\forall x Q(x)) \vee (\exists y R(x,y,z)))$.
$\forall x P(x) \wedge ((\exists x \neg Q(x)) \vee (\exists y R(x,y,z)))$.
$\forall y_1 P(y_1) \wedge ((\exists y_2 \neg Q(y_2)) \vee (\exists y_3 R(x,y_3,z)))$.
$\forall y_1 P(y_1) \wedge \exists y_2 \exists y_3 (\neg Q(y_2) \vee R(x,y_3,z))$.
$\forall y_1 \exists y_2 (P(y_1) \wedge \exists y_3 (\neg Q(y_2) \vee R(x,y_3,z)))$.
$\forall y_1 \exists y_2 \exists y_3 (P(y_1) \wedge (\neg Q(y_2) \vee R(x,y_3,z)))$.

Tópicos

1. Introdução
2. Forma Normal Prenex
3. Skolemização
4. Forma Normal Clausal

Introdução

- Temos que remover os quantificadores existenciais:
- Considere a fórmula $\exists x \forall y P(x, y)$
- $\exists x \forall y P(x, y)$ é satisfatível
- Como remover o $\exists$ e manter a fórmula satisfatível

Introdução

- Temos que remover os quantificadores existenciais:
- Considere a fórmula $\exists x \forall y P(x, y)$
- $\exists x \forall y P(x, y)$ é satisfatível
- Como remover o $\exists$ e manter a fórmula satisfatível
- $\forall y P(a, y)$ em que a é um símbolo de constante

Introdução

- Seja $\forall x \exists y R(y, x)$ que claramente é satisfatível
- Como remover o $\exists$ sem mudar muito a interpretação que satisfaz a fórmula?

Introdução

- Seja $\forall x \exists y R(y, x)$ que claramente é satisfatível
- Como remover o $\exists$ sem mudar muito a interpretação que satisfaz a fórmula?
- $\forall x R(b, x)$?

Introdução

- Seja $\forall x \exists y R(y, x)$ que claramente é satisfatível
- Como remover o $\exists$ sem mudar muito a interpretação que satisfaz a fórmula?
- $\forall x R(b, x)$?
- Em $\forall x R(b, x)$, o b é o mesmo para qualquer x
- Em $\forall x \exists y R(y, x)$, o y pode ser diferente para cada x

Introdução

- Seja $\forall x \exists y R(y, x)$ que claramente é satisfatível
- Como remover o $\exists$ sem mudar muito a interpretação que satisfaz a fórmula?
- $\forall x R(b, x)$?
- Em $\forall x R(b, x)$, o b é o mesmo para qualquer x
- Em $\forall x \exists y R(y, x)$, o y pode ser diferente para cada x
- $\forall x R(f(x), x)$

Introdução

- Seja $\forall x \exists y R(y, x)$ que claramente é satisfatível
- Como remover o $\exists$ sem mudar muito a interpretação que satisfaz a fórmula?
- $\forall x R(b, x)$?
- Em $\forall x R(b, x)$, o b é o mesmo para qualquer x
- Em $\forall x \exists y R(y, x)$, o y pode ser diferente para cada x
- $\forall x R(f(x), x)$

- Observação: perceba que $\forall x \exists y R(y, x)$ e $\forall x R(f(x), x)$ não são equivalentes

Introdução

- E para remover o quantificador existencial de $\forall z \forall x \exists y Q(z, y, x)$?

Introdução

- E para remover o quantificador existencial de $\forall z \forall x \exists y Q(z, y, x)$?
- $\forall z \forall x \exists y Q(z, g(z, x), x)$

Introdução

- E para remover o quantificador existencial de $\forall z \forall x \exists y Q(z, y, x)$?
- $\forall z \forall x \exists y Q(z, g(z, x), x)$

- E para $\exists x \exists y R(y, x)$?

Introdução

- E para remover o quantificador existencial de $\forall z \forall x \exists y Q(z, y, x)$?
- $\forall z \forall x \exists y Q(z, g(z, x), x)$

- E para $\exists x \exists y R(y, x)$?
- $R(a, b)$

Introdução

- E para remover o quantificador existencial de $\forall z \forall x \exists y Q(z, y, x)$?
- $\forall z \forall x \exists y Q(z, g(z, x), x)$

- E para $\exists x \exists y R(y, x)$?
- $R(a, b)$

- E para $\exists x \forall w \exists y Q(x, w, y)$?

Introdução

- E para remover o quantificador existencial de $\forall z \forall x \exists y Q(z, y, x)$?
- $\forall z \forall x \exists y Q(z, g(z, x), x)$

- E para $\exists x \exists y R(y, x)$?
- $R(a, b)$

- E para $\exists x \forall w \exists y Q(x, w, y)$?
- $\forall w \exists y Q(a, w, f(w))$

Skolemização

- Regras de Eliminação dos $\exists$
- Skolemização da fórmula

Definição

Seja $\phi = \forall x_1 ... \forall x_n \exists y \psi(x_1, ..., x_n, y)$ em que ψ está na forma normal prenex. A eliminação do $\exists y$ em ϕ gera $\forall x_1 ... \forall x_n \psi(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$ em que f é um novo símbolo de função que não aparece em ϕ.
Seja $\phi = \exists y Q_1 x_1 ... Q_n x_n \psi(x_1, ..., x_n, y)$ em que ψ está na forma normal prenex. A eliminação do $\exists y$ em ϕ gera $Q_1 x_1 ... Q_n x_n \psi(x_1, ..., x_n, a)$ em que a é um novo símbolo de constante que não aparece em ϕ.

Definição

Seja ϕ uma fórmula na forma normal prenex. A skolemização de ϕ é a fórmula ψ sem quantificador existencial obtida a partir de ϕ usando as regras de eliminação dos $\exists$.

Exemplo

Exemplo

Seja a fórmula $\phi_1 = \forall x \exists y \forall w \exists z(\neg P(x,y) \vee P(z,w))$.
A eliminação do $\exists y$ em ϕ gera $\phi_2 = \forall x \forall w \exists z(\neg P(x, f_1(x)) \vee P(z,w))$.
A eliminação do $\exists z$ em ϕ_2 gera $\forall x \forall w(\neg P(x, f_1(x)) \vee P(f_2(x,w), w))$.

Teorema de Skolem

Teorema

Seja ϕ uma fórmula na forma normal prenex e ψ a skolemização de ϕ. ϕ é satisfatível se e somente se ψ é satisfatível.

Tópicos

Forma Normal Clausal

Definição

Uma fórmula ϕ está na forma normal clausal quando não possui variáveis livres e é da forma
$\phi = \forall x_1 ... \forall x_n \psi$ em que ψ é livre de quantificadores e está na forma normal conjuntiva.

- Fórmulas da lógica de primeira ordem na forma normal clausal também possuem uma representação de conjuntos

Exemplo

Exemplo

$\forall y \forall z((P(f(y)) \vee \neg P(g(z)) \vee Q(z)) \wedge (\neg P(g(z)) \vee Q(y) \vee \neg Q(z)))$ está na formal normal clausal.
Na representação de conjuntos:
$\{\{P(f(y)), \neg P(g(z)), Q(z)\}, \{\neg P(g(z)), Q(y), \neg Q(z)\}\}$.

- Os quantificadores podem ser omitidos pois a fórmula não tem variáveis livres e todos os quantificadores são $\forall$.