

# Teoria da Computação

## Gramáticas Livres de Contexto

Thiago Alves Rocha

# Introdução

- ◆ Uma *Gramática Livre de Contexto (GLC)* é uma notação para descrever linguagens
- ◆ Ideia básica é usar variáveis no lugar de conjunto de strings

# Exemplo

$A \rightarrow 0A1$

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow \#$

# Introdução

- ◆ Regras para concatenar conjuntos de strings
- ◆ Regras alternativas para uma variável permite a união
- ◆ Regras são chamadas de produções

# Exemplo

$$P \rightarrow A$$

$$P \rightarrow B$$

$$P \rightarrow 0P0$$

$$P \rightarrow 1P1$$

$$A \rightarrow \varepsilon$$

$$B \rightarrow 1$$

$$B \rightarrow 0$$

# Formalismo de GLC

- ◆ *Símbolo inicial*: a variável  $S$  cuja linguagem está sendo definida
- ◆ *Variáveis (não terminais)*: um conjunto finito  $V$  de outros símbolos, cada um representando uma linguagem
- ◆ *Terminais*: conjunto  $T$  de símbolos do alfabeto da linguagem sendo definida

# Produções

- ◆ Uma *produção* tem a forma
  - ▶ variável  $\rightarrow$  string de variáveis e terminais
  - ▶ cabeça  $\rightarrow$  corpo
- ◆ Convenção:
  - ▶ A, B, C,... e também S são variáveis
  - ▶ a, b, c,... são terminais
  - ▶ ..., X, Y, Z podem ser variáveis ou terminais
  - ▶ ..., w, x, y, z são strings de terminais
  - ▶  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  são strings de terminais ou variáveis

# GLC - Formalismo

- ◆  $G = (V, T, P, S)$
- ◆  $V$  é o conjunto de variáveis
- ◆  $T$  é o conjunto de terminais
- ◆  $P$  é o conjunto de produções
- ◆  $S$  é o símbolo inicial



# Exemplo

◆  $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$

◆  $V_1 = \{A, B\}$

◆  $T_1 = \{0, 1, \#\}$

◆  $S_1 = A$

◆  $P_1 = \{A \rightarrow 0A1, A \rightarrow B, B \rightarrow \#\}$

# Representação

- ◆ Podemos representar uma GLC apenas pelas suas regras
- ◆ Variáveis aparecem no lado esquerdo das regras
- ◆ Terminais são os outros símbolos

# Representação

- ◆ Símbolo da esquerda da primeira regra de produção é o inicial
- ◆ Regras com mesmo símbolo na esquerda podem ser compactadas:

$A \rightarrow 0A1$

$A \rightarrow 0A1 \mid B$

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow \#$

$B \rightarrow \#$

# Exemplo

◆  $E \rightarrow E + T$

◆  $E \rightarrow T$

◆  $T \rightarrow T \times F$

◆  $T \rightarrow F$

◆  $F \rightarrow (E) \mid a$

◆ Definição formal da GLC?

# Intuição das Derivações

- ◆ Nós *derivamos* strings iniciando pelo símbolo inicial, e repetidamente trocando alguma variável A pelo corpo de uma das suas produções
  - ▶ As produções de A são aquelas que tem A na cabeça da produção
  - ▶ Repetindo até não sobrar variáveis

# Derivações – Formalismo

- ◆ Dizemos que  $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$  se  $A \rightarrow \gamma$  é uma produção
- ◆ **Exemplo:**  $\{A \rightarrow 0A1, A \rightarrow B, B \rightarrow \#\}$
- ◆  $A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 00B11 \Rightarrow 00\#11$

# Derivação Iterada

- ◆  $\Rightarrow^*$  significa “zero ou mais passos de derivação”
- ◆  $\alpha \Rightarrow^* \alpha$  para qualquer string  $\alpha$
- ◆ Se  $\alpha \Rightarrow^* \beta$  e  $\beta \Rightarrow \gamma$ , então  $\alpha \Rightarrow^* \gamma$

# Exemplo

◆ Derivação  $A \Rightarrow^* 000\#111$  na GLC

$A \rightarrow 0A1 \mid B$

$B \rightarrow \#$



# Exemplo

◆  $A \Rightarrow^* A$

◆  $A \Rightarrow^* 0A1$

◆  $A \Rightarrow^* 00A11$

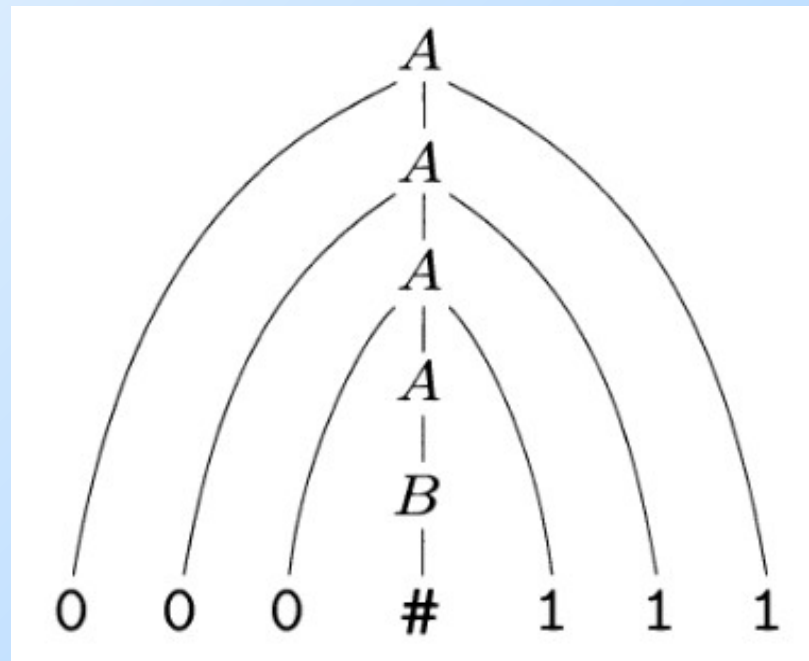
◆  $A \Rightarrow^* 00B11$

◆  $A \Rightarrow^* 00\#11$

◆  $A \Rightarrow^* 000\#111$

# Árvore de Derivação

- ◆ Podemos representar uma derivação através de uma árvore



# Exemplo

◆  $E \rightarrow E + T$

◆  $E \rightarrow T$

◆  $T \rightarrow T \times F$

◆  $T \rightarrow F$

◆  $F \rightarrow (E) \mid a$

◆ Derivação de  $a + a \times a$ ?

# Exemplo

◆  $E \rightarrow E + T$

◆  $E \rightarrow T$

◆  $T \rightarrow T \times F$

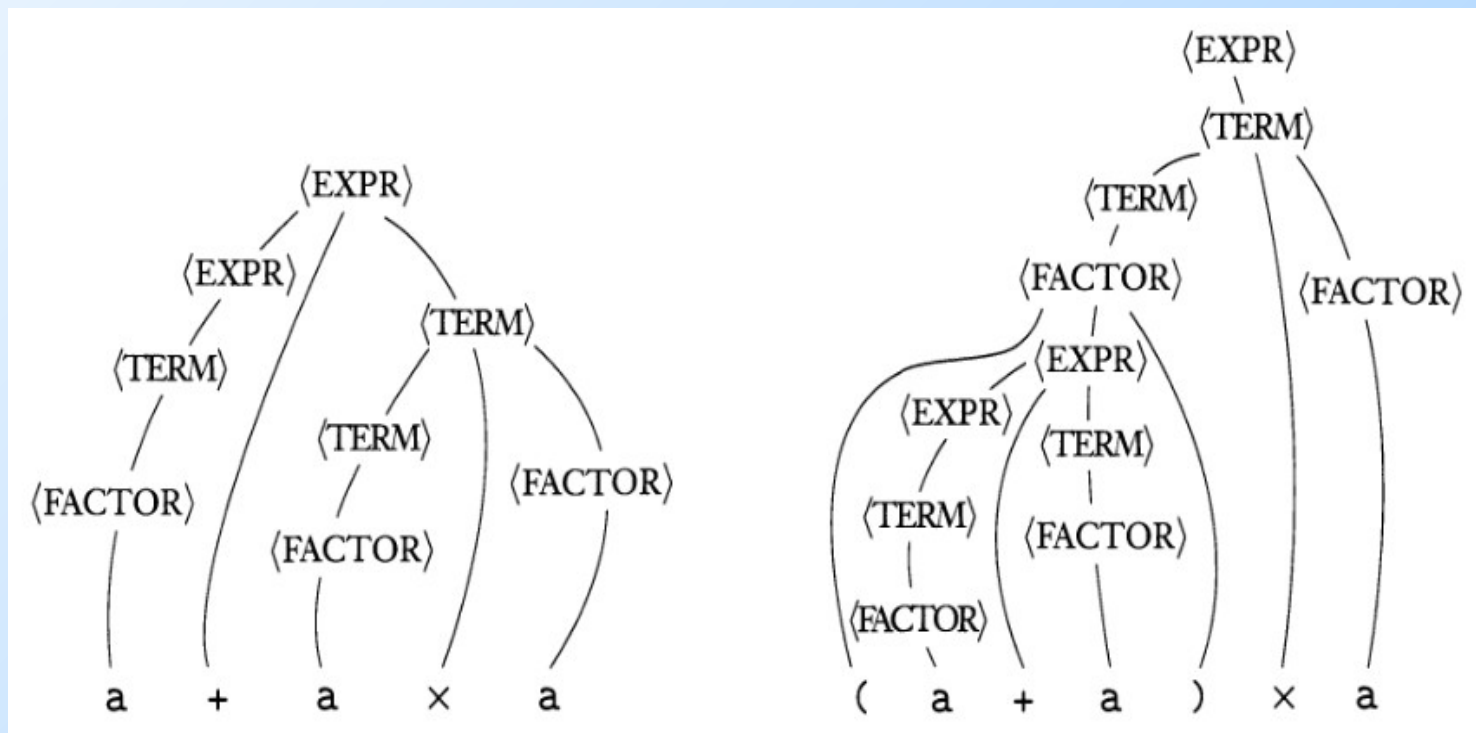
◆  $T \rightarrow F$

◆  $F \rightarrow (E) \mid a$

◆ Derivação de  $(a+a)xa$ ?

# Exemplo

- ◆ Derivação para  $a+axa$  e  $(a+a)xa$



# Linguagem de uma GLC

- ◆ Seja  $G$  uma GLC
- ◆ A *linguagem de  $G$*  é
$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$
- ◆  $L(G)$  é a linguagem **gerada** por  $G$

# Linguagem de uma GLC

◆  $G_1$ :

$A \rightarrow 0A1 \mid B$

$B \rightarrow \#$

◆  $L(G_1) = \{0^n \# 1^n \mid n \geq 1\}$

# Linguagem Livre de Contexto

- ◆ Seja  $B$  uma linguagem tal que existe uma GLC  $G$  com  $L(G) = B$ . Dizemos que  $B$  é uma **Linguagem Livre de Contexto**



# Exemplo

◆  $L_1 = \{0^n \# 1^n \mid n \geq 1\}$  é livre de contexto

◆ Pois  $L(G_1) = L_1$

◆  $G_1$ :

$A \rightarrow 0A1 \mid B$

$B \rightarrow \#$

# Exemplo

◆  $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ é palíndromo}\}$  é livre de contexto?

# Exemplo

- ◆  $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ é palíndromo}\}$  é livre de contexto
- ◆  $G_2$ :  
$$P \rightarrow A \mid 0P0 \mid 1P1$$
$$A \rightarrow \varepsilon \mid 1 \mid 0$$
- ◆  $L_2 = L(G_2)$

# Exemplo

◆  $S \rightarrow \varepsilon$

◆  $S \rightarrow 0S1$

◆  $L(G) = ?$

# Exemplo

◆  $S \rightarrow \varepsilon$

◆  $S \rightarrow 0S1$

◆  $L(G) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

◆  $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$  é livre de contexto

# Exemplo

- ◆ Faça uma gramática livre de contexto para gerar a linguagem abaixo:
- ◆  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0^n 1^n \text{ ou } w = 1^n 0^n \text{ e } n \geq 0\}$

# Exemplo

- ◆ Faça uma gramática livre de contexto para gerar a linguagem abaixo:
- ◆  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0^n 1^n \text{ ou } w = 1^n 0^n \text{ e } n \geq 0\}$
- ◆  $S \rightarrow A \mid B$
- ◆  $A \rightarrow 0A1 \mid \varepsilon$
- ◆  $B \rightarrow 1B0 \mid \varepsilon$

# Exercícios

- ◆ Seja  $L(0^*1(0+1)^*)$  a linguagem da expressão regular  $0^*1(0+1)^*$
- ◆ Construa uma GLC para gerar  $L(0^*1(0+1)^*)$



# Exercícios

- ◆ Seja  $L(\mathbf{0^*1(0+1)^*})$  a linguagem da expressão regular  $\mathbf{0^*1(0+1)^*}$
- ◆ Construa uma GLC para gerar  $L(\mathbf{0^*1(0+1)^*})$
- ◆  $S \rightarrow A1B$
- ◆  $A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$
- ◆  $B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon$

# Exercício

◆ Faça uma GLC para gerar

$$L = \{a^i b^j c^k \in \{a,b,c\}^* \mid i = j \text{ ou } j = k\}$$

# Exercício

- ◆ Faça uma GLC para gerar  
 $L = \{a^i b^j c^k \in \{a,b,c\}^* \mid i = j \text{ ou } j = k\}$

$$S \rightarrow AB \mid CD$$

$$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow cB \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow Ca \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow bDc \mid \varepsilon$$

# Exemplo

- ◆ Construa uma GLC para gerar  $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tem mesma quantidade de a's e b's}\}$

# Exemplo

- ◆ Construa uma GLC para gerar  $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tem mesma quantidade de a's e b's}\}$

$$S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$$