Lógica para Computação

Corretude e Completude da Dedução Natural

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- Dedução natural para mostrar derivações da forma $\Gamma \vdash \varphi$
- Uma fórmula φ é consequência lógica de um conjunto de fórmula Γ quando $\Gamma \models \varphi$

Introdução

- Dedução natural para mostrar derivações da forma $\Gamma \vdash \varphi$
- Uma fórmula φ é consequência lógica de um conjunto de fórmula Γ quando $\Gamma \models \varphi$
- Corretude da Dedução Natural: se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$.
- Completude da Dedução Natural: se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.

Corretude

Teorema da Corretude

Seja $\phi_1, ..., \phi_n$ um conjunto de fórmulas e ψ uma fórmula. Se $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi$ então $\phi_1, ..., \phi_n \models \psi$.

- Definimos regras da dedução natural que funcionam da mesma forma que a consequência lógica

Exemplo

- $r \rightarrow (p \rightarrow q), r \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Corretude

Teorema da Corretude

Seja $\phi_1, ..., \phi_n$ um conjunto de fórmulas e ψ uma fórmula. Se $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi$ então $\phi_1, ..., \phi_n \models \psi$.

- Definimos regras da dedução natural que funcionam da mesma forma que a consequência lógica

Exemplo

- $r \to (p \to q), r \vdash \neg q \to \neg p$
- Pelo Teorema, $r \to (p \to q), r \models \neg q \to \neg p$

Corretude

- A corretude é útil para mostrar a não existência de uma dedução

Corretude

- A corretude é útil para mostrar a não existência de uma dedução
- Pela contrapositiva do teorema da corretude, se $\phi_1, ..., \phi_n \not\models \psi$ então $\phi_1, ..., \phi_n \nvdash \psi$.

Exemplo

- Mostre que $\neg p \vee (q \rightarrow p) \nvdash \neg p \wedge q$

Completude

- Temos que provar que se $\phi_1, ..., \phi_n \models \psi$ então $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi$
- É equivalente a mostrar que se $\models \phi_1 \to (...(\phi_n \to \psi)...)$ então $\vdash \phi_1 \to (...(\phi_n \to \psi)...)$

Completude

Teorema da Completude

Seja ϕ uma fórmula. Se $\models \phi$ então $\vdash \phi$.

Exemplo

Exemplo

Seja $\phi = p \land q \to p$. Temos que $\models p \land q \to p$.
Temos que mostrar de forma uniforme que $\vdash p \land q \to p$.

- Como $\models p \land q \to p$, para qualquer valoração temos que $v(p \land q \to p) = T$.

Exemplo

Exemplo

Seja $\phi = p \land q \to p$. Temos que $\models p \land q \to p$.
Temos que mostrar de forma uniforme que $\vdash p \land q \to p$.

- Como $\models p \land q \to p$, para qualquer valoração temos que $v(p \land q \to p) = T$.
- $p, q \vdash p \land q \to p$
- $p, \neg q \vdash p \land q \to p$
- $\neg p, q \vdash p \land q \to p$
- $\neg p, \neg q \vdash p \land q \to p$

Exemplo

Vamos mostrar que $\vdash p \land q \to p$

- $p, q \vdash p \land q \to p$
- $p, \neg q \vdash p \land q \to p$
- $\neg p, q \vdash p \land q \to p$
- $\neg p, \neg q \vdash p \land q \to p$

1	$p \lor \neg p$							LEM
2	p			ass	$\neg p$			ass
3	$q \lor \neg q$			LEM	$q \lor \neg q$			LEM
4	q	ass	$\neg q$	ass	q	ass	$\neg q$	ass
5	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
6								
7	$p \land q \to p$		$p \land q \to p$		$p \land q \to p$		$p \land q \to p$	
8	$p \land q \to p$			$\lor e$	$p \land q \to p$			$\lor e$
9	$p \land q \to p$							$\lor e$

Completude

Lema

Seja ϕ com $atom(\phi) = \{p_1, ..., p_n\}$. Seja v uma valoração de ϕ e $\hat{p}_i = p_1$ se $v(p_i) = T$ e $\hat{p}_i = \neg p_1$ se $v(p_i) = F$. Temos que:

$$\hat{p}_1 \land \hat{p}_2 \land ... \land \hat{p}_n \vdash \phi \text{ se } v(\phi) = T$$
$$\hat{p}_1 \land \hat{p}_2 \land ... \land \hat{p}_n \vdash \neg\phi \text{ se } v(\phi) = F$$

Completude

Prova

Indução estrutural em ϕ.

Caso Base: $\phi = p_i$. É trivial que $p_i \vdash p_i$ e $\neg p_i \vdash \neg p_i$.

Hipótese de Indução:

$\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \phi_1$ se $v(\phi_1) = T$

$\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \neg\phi_1$ se $v(\phi_1) = F$

Passo de Indução: Seja $\phi = \neg\phi_1$. Temos dois casos:

1) $v(\phi) = T$. Logo, $v(\phi_1) = F$. Pela hipótese de indução, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \neg\phi_1$. Logo, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \phi$ pois $\phi = \neg\phi_1$.

2) $v(\phi) = F$. Logo, $v(\phi_1) = T$. Pela hipótese de indução, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \phi_1$. Com a regra $\neg i$, temos que $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \neg\neg\phi_1$. Logo, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ pois $\phi = \neg\phi_1$.

Completude

Prova

Hipótese de Indução:
$\hat{q}_1 \wedge \hat{q}_2 \wedge ... \wedge \hat{q}_l \vdash \phi_1$ se $v(\phi_1) = T$
$\hat{q}_1 \wedge \hat{q}_2 \wedge ... \wedge \hat{q}_l \vdash \neg\phi_1$ se $v(\phi_1) = F$
$\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \wedge ... \wedge \hat{r}_k \vdash \phi_2$ se $v(\phi_2) = T$
$\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \wedge ... \wedge \hat{r}_k \vdash \neg\phi_2$ se $v(\phi_2) = F$
Passo de Indução: Seja $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ tal que $atomos(\phi) = \{p_1, ..., p_n\} = atomos(\phi_1) \cup atomos(\phi_2)$. Temos dois casos:
1) $v(\phi) = T$. Logo, $v(\phi_1) = T$ e $v(\phi_2) = T$. Pela hipótese de indução, $\hat{q}_1 \wedge \hat{q}_2 \wedge ... \wedge \hat{q}_l \vdash \phi_1$ e $\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \wedge ... \wedge \hat{r}_k \vdash \phi_2$. Logo, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \phi_1$ e $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \phi_2$. E pela $\wedge i$ temos que $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge ... \wedge \hat{p}_n \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$.

Completude

Prova

Passo de Indução:

2) $v(\phi) = F$. Temos 3 subcasos:

2.1) $v(\phi_1) = T$ e $v(\phi_1) = F$. Pela hipótese de indução, $\hat{q}_1 \wedge \hat{q}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{q}_l \vdash \phi_1$ e $\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{r}_k \vdash \neg\phi_2$. Logo, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{p}_n \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$. Temos que mostrar que $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{p}_n \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$.

2.2) $v(\phi_1) = F$ e $v(\phi_2) = T$. Pela hipótese de indução, $\hat{q}_1 \wedge \hat{q}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{q}_l \vdash \neg\phi_1$ e $\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{r}_k \vdash \phi_2$. Logo, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{p}_n \vdash \neg\phi_1 \wedge \phi_2$. Temos que mostrar que $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{p}_n \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$.

2.3) $v(\phi_1) = F$ e $v(\phi_2) = F$. Pela hipótese de indução, $\hat{q}_1 \wedge \hat{q}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{q}_l \vdash \neg\phi_1$ e $\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{r}_k \vdash \neg\phi_2$. Logo, $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{p}_n \vdash \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$. Temos que mostrar que $\hat{p}_1 \wedge \hat{p}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{p}_n \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$.

Completude

Teorema da Completude

Seja ϕ uma fórmula. Se $\models \phi$ então $\vdash \phi$.

Prova

Seja ϕ uma fórmula tal que $\models \phi$. Logo, para toda valoração v, $v(\phi) = T$. Seja $atom(\phi) = \{p_1, ..., p_n\}$. Pelo Lema provado anteriormente, temos que

$p_1, p_2, ..., p_n \vdash \phi$

$\neg p_1, p_2, ..., p_n \vdash \phi$

$p_1, \neg p_2, ..., p_n \vdash \phi$

...

$\neg p_1, \neg p_2, ..., \neg p_n \vdash \phi$.

Agora falta mostrar que $\vdash \phi$. Basta usar a regra *LEM* nas atômicas que aparecem em ϕ, ou seja, $p_1, ..., p_n$.