Lógica para Computação

Propriedades da Dedução Natural

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- Vamos mostrar que $p \vdash p$
- Vamos mostrar que $\vdash p \to p$

Teorema da Dedução

Teorema da Dedução

Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ uma fórmula. $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ se e somente se $\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$.

Exemplo

- Vamos mostrar que $p, p \rightarrow q \vdash q$

Exemplo

- Vamos mostrar que $p, p \to q \vdash q$
- Podemos mostrar que $p \vdash (p \to q) \to q$ pelo Teorema da Dedução

Exemplo

- Vamos mostrar que $p, p \rightarrow q \vdash q$
- Podemos mostrar que $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$ pelo Teorema da Dedução
- Aplicando novamente, é o mesmo que mostrar que $\vdash p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

Teorema

Definição

Fórmulas φ tal que $\vdash \varphi$ são chamadas de teoremas.

Exemplo de Teorema

- Vamos mostrar que $(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$ é um teorema.

Exemplo de Teorema

1.	$p \to r$	suposição
2.	$\neg q \to \neg p$	suposição
3.	p	suposição
4.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 3
5.	$\neg\neg q$	MT 2,4
6.	q	$\neg\neg$e 5
7.	r	$\to$ e 1,6
8.	$p \to q$	$\to$ i 3-7
9.	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to$ i 2-8
10.	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to$ i 1-9

Equivalência Sintática

Definição

Duas fórmulas φ e ψ são sintaticamente equivalentes se e somente se $\varphi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \varphi$. Usamos a notação $\varphi \dashv\vdash \psi$ para dizer que φ e ψ são sintaticamente equivalentes.

Exemplo

- $(p \land q) \rightarrow r \dashv\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Regras Derivadas

- Podemos construir outras regras a partir das regras existentes
- Inclusive algumas regras que vimos podem ser obtidas a partir das outras regras
- As regras que já vimos e que podem ser derivadas são: MT e $\neg\neg\mathrm{i}$
- Essas regras construídas a partir de outras podem ser vistas como abreviações

Tópicos

Modus Tollens

$$\frac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ \mathrm{MT}.$$

- Podemos obter a regra Modus Tollens a partir do $\to \mathrm{e}, \neg \mathrm{i}, \neg \mathrm{e}$
- Podemos trocar a aplicação da regra *MT* por uma combinação das três regras
- Todas as deduções em que aplicamos a regra *MT* podem ser modificadas com essa combinação de regras

Modus Tollens

1	$\phi \to \psi$	premise
2	$\neg\psi$	premise
3	ϕ	assumption
4	ψ	$\to$e $1, 3$
5	$\perp$	$\neg$e $4, 2$
6	$\neg\phi$	$\neg$i 3–5

Tópicos

$\neg\neg\mathrm{i}$

- Podemos obter a regra $\neg\neg\mathrm{i}$ a partir do $\neg\mathrm{i}, \neg\mathrm{e}$
- Podemos trocar a aplicação da regra $\neg\neg\mathrm{i}$ por uma combinação das duas regras
- Todas as deduções em que aplicamos a regra $\neg\neg\mathrm{i}$ podem ser modificadas com essa combinação de regras

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg\mathrm{i}.$$

1	ϕ	premise
2	$\neg\phi$	assumption
3	$\perp$	$\neg$e 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg$i 2–3

Tópicos

Prova por Contradição

- Se fizermos uma suposição de que $\neg\phi$ é verdade e conseguirmos chegar em uma contradição?
- $\neg\phi$ é falso e ϕ tem que ser verdade

PBC

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \text{PBC.}$$

- A regra *PBC* pode ser obtida a partir das regras $\rightarrow \mathrm{i}, \rightarrow \mathrm{e}, \neg\mathrm{i}, \neg\neg\mathrm{e}$
- Existe uma dedução partindo de $\neg\phi$ que chega em $\bot$
- Podemos supor $\neg\phi$ e chegar em $\bot$
- Podemos usar a $\rightarrow \mathrm{i}$ para obter $\neg\phi \rightarrow \bot$
- Depois aplicar as outras regras da seguinte forma:

PBC

1	$\neg\phi \rightarrow \bot$	given
2	$\neg\phi$	assumption
3	$\bot$	$\rightarrow$e 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg$i 2–3
5	ϕ	$\neg\neg$e 4

Tópicos

Lei do Terceiro Excluído

- ϕ é verdadeiro ou falso.
- No caso em que ϕ é falso temos que $\neg\phi$ tem que ser verdade
- Logo temos que $\phi \lor \neg\phi$ é sempre verdade

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	assumption
2	ϕ	assumption
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4	$\bot$	$\neg e$ 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2–4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7	$\bot$	$\neg e$ 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg i$ 1–7
9	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg e$ 8

Exemplo

- Vamos mostrar que $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

Exemplo

1	$p \rightarrow q$	premise
2	$\neg p \vee p$	LEM
3	$\neg p$	assumption
4	$\neg p \vee q$	$\vee$i$_1$ 3
5	p	assumption
6	q	$\rightarrow$e 1, 5
7	$\neg p \vee q$	$\vee$i$_2$ 6
8	$\neg p \vee q$	$\vee$e 2, 3–4, 5–7