Lógica para Computação

Consequência e Equivalência da Lógica Proposicional

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

1. Introdução
2. Consequência Lógica
3. Equivalência Lógica
4. Propriedades
5. Definição de Conectivos

Introdução

- Quando podemos dizer que uma fórmula é consequência lógica de um conjunto de fórmulas?
- Exemplo:
  - Premissa 1: "Se o trem chega tarde e não tem táxis na estação então João está atrasado para a reunião."
  - Premissa 2: "João não está atrasado para a reunião."
  - Premissa 3: "O trem chega tarde."
  - Conclusão: "Tem táxi na estação."

Introdução

- Quando podemos dizer que uma fórmula é consequência lógica de um conjunto de fórmulas?
- Exemplo:
  - Premissa 1: "Se o trem chega tarde e não tem táxis na estação então João está atrasado para a reunião."
  - Premissa 2: "João não está atrasado para a reunião."
  - Premissa 3: "O trem chega tarde."
  - Conclusão: "Tem táxi na estação."

Seja v uma valoração tal que $v(t) = T$, $v(\neg a) = T$, $v((t \wedge \neg e) \rightarrow a) = T$.
Logo, $v(a) = F$ pois $v(\neg a) = T$.
Dessa forma, $v(t \wedge \neg e) = F$ pois $v((t \wedge \neg e) \rightarrow a) = T$ e $v(a) = F$.
Portanto, $v(\neg e) = F$ pois $v(t \wedge \neg e) = F$ e $v(t) = T$.
Logo, $v(e) = T$.

Introdução

- Quando todas as fórmulas do conjunto são verdadeiras então a fórmula tem que ser verdadeira
- Temos várias possibilidades de deixar as fórmulas do conjunto verdadeiras

Introdução

- Quando todas as fórmulas do conjunto são verdadeiras então a fórmula tem que ser verdadeira
- Temos várias possibilidades de deixar as fórmulas do conjunto verdadeiras
- Depende de **todas** as valorações que definem a semântica do conjunto e da fórmula

Tópicos

Consequência Lógica

Definição

Seja Γ um conjunto de fórmulas e ψ uma fórmula. ψ é consequência lógica de Γ quando para toda valoração v, se $v(\phi) = T$ para todo $\phi \in \Gamma$ então $v(\psi) = T$. Representamos por $\Gamma \models \psi$.

Consequência Lógica

Definição

Seja Γ um conjunto de fórmulas e ψ uma fórmula. ψ é consequência lógica de Γ quando para toda valoração v, se $v(\phi) = T$ para todo $\phi \in \Gamma$ então $v(\psi) = T$. Representamos por $\Gamma \models \psi$.

- Quando uma fórmula ψ não é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ representamos por $\Gamma \not\models \psi$
- Escrevemos $\phi_1, ..., \phi_k \models \psi$ no lugar de $\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$ para facilitar

Exemplos

- Mostre que $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$

Exemplos

- Mostre que $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$

Seja v uma valoração qualquer. Suponha que $v(p \rightarrow q) = T$ e $v(\neg q) = T$.
Logo, $v(q) = F$ pois $v(\neg q) = T$.
Dessa forma, $v(p) = F$ pois $v(p \rightarrow q) = T$.
Portanto, $v(\neg p) = T$.
Dessa maneira, $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$.

Exemplos

- Premissa 1: "Se a cidade tem muitos carros, então a cidade é poluída."
- Premissa 2: "A cidade não tem muitos carros."
- Conclusão: "A cidade não é poluída."

Exemplos

- Mostre que $c \to p, \neg c \not\models \neg p$

Seja v_1 uma valoração tal que $v_1(p) = T$ e $v_1(c) = F$.
Temos que $v_1(c \to p) = T$, $v_1(\neg c) = T$ e $v_1(\neg p) = F$.
Logo, $c \to p, \neg c \not\models \neg p$.

Exemplos

- "Se José toma vinho e o vinho está ruim, José fica com ressaca"
- "Se José fica com ressaca, ele vai para casa"
- "José se encontra com Maria ou vai para casa mas não ambos"
- Mostre que podemos concluir que "Se José toma vinho e o vinho está ruim, então não se encontra com Maria".
- Mostrar que $(v \wedge r) \rightarrow m, m \rightarrow c, (e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c) \models (v \wedge r) \rightarrow \neg e$

Exemplos

- "Se José toma vinho e o vinho está ruim, José fica com ressaca"
- "Se José fica com ressaca, ele vai para casa"
- "José se encontra com Maria ou vai para casa mas não ambos"
- Mostre que podemos concluir que "Se José toma vinho e o vinho está ruim, então ele perde o encontro com Maria".
- Mostrar que $(v \wedge r) \rightarrow m, m \rightarrow c, (e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c) \models (v \wedge r) \rightarrow \neg e$

Suponha que existe valoração v tal que $v((v \wedge r) \rightarrow m) = T$, $v(m \rightarrow c) = T$, $v((e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c)) = T$ e $v((v \wedge r) \rightarrow \neg e) = F$.
Pela definição de valoração do $\rightarrow$ temos que $v(v \wedge r) = T$ e $v(\neg e) = F$.
Pela definição de valoração do $\neg$ temos que $v(e) = T$.
Por $v(v \wedge r) = T$ e pela definição do $\rightarrow$ temos que $v(m) = T$.
Por $v(m) = T$ e pela definição do $\rightarrow$ temos que $v(c) = T$.
Como $v(c) = T$ e $v(e) = T$, temos que $v((e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c)) = F$.
Absurdo pois $v((e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c)) = T$ e $v((e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c)) = F$!
Logo, $(v \wedge r) \rightarrow m, m \rightarrow c, (e \vee c) \wedge \neg(e \wedge c) \models (v \wedge r) \rightarrow \neg e$.

- Será que existe uma forma de automatizar a verificação de $\Gamma \models \psi$?

Consequência Lógica

- Será que existe uma forma de automatizar a verificação de $\Gamma \models \psi$?
- Podemos usar tabelas verdade!
- Se todas as linhas em que **todas** as fórmulas de Γ são verdadeiras temos que ψ também é verdadeira então $\Gamma \models \psi$

Exemplos

- Verifique se $p \to q, \neg p \models \neg q$

p	q	$(p \to q)$	$\neg p$	$\neg q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	**T**	**T**	**F**
F	F	**T**	**T**	**T**

Exemplos

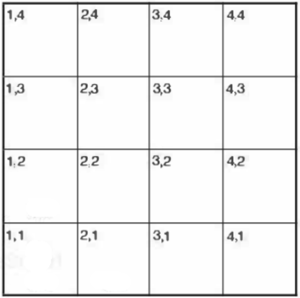
- Verifique se $p \rightarrow q, \neg p \models \neg q$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	**T**	**T**	**F**
F	F	**T**	**T**	**T**

- Logo, $p \rightarrow q, \neg p \not\models \neg q$.

Caminho Seguro

- Imagine uma ambiente consistindo de células ligadas
- Algumas células possuem armadilhas como buracos
- Você inicia em uma das células
- Uma das células possui a saída



Caminho Seguro

- O ambiente é um grid 4x4 de células
- Você começa na célula com rótulo 1,1
- A célula 1,1 não possui buraco
- Células adjacentes não diagonalmente são ligadas
- Você morre se entrar em uma sala com buraco
- Você sente uma brisa nas células ligadas às células com buraco
- Em cada célula é possível ver as passagens para as outras células

Representação

- Vamos usar consequência lógica $\Gamma \models \psi$ para concluir que células não possuem buracos
- O conjunto Γ contém todas as informações que são verdadeiras
- A conclusão ψ representa se uma célula está livre de buraco

Representação

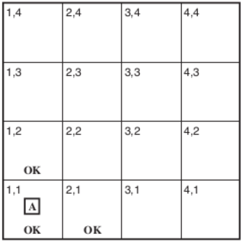
- Vamos usar consequência lógica $\Gamma \models \psi$ para concluir que células não possuem buracos
- O conjunto Γ contém todas as informações que são verdadeiras
- A conclusão ψ representa se uma célula está livre de buraco
- Atômicas:
  - p_{ij} para $i \in \{1, ..., 4\}$ e $j \in \{1, ..., 4\}$: a sala i,j tem buraco
  - b_{ij} para $i \in \{1, ..., 4\}$ e $j \in \{1, ..., 4\}$: a sala i,j tem vento

Representação

- Vamos usar consequência lógica $\Gamma \models \psi$ para concluir que células não possuem buracos
- O conjunto Γ contém todas as informações que são verdadeiras
- A conclusão ψ representa se uma célula está livre de buraco
- Atômicas:
  - p_{ij} para $i \in \{1, ..., 4\}$ e $j \in \{1, ..., 4\}$: a sala i,j tem buraco
  - b_{ij} para $i \in \{1, ..., 4\}$ e $j \in \{1, ..., 4\}$: a sala i,j tem vento
- A célula 1,1 não possui buraco: $\neg p_{11}$
- Uma célula tem vento se e somente se alguma célula vizinha tem buraco: $b_{11} \leftrightarrow (p_{12} \vee p_{21})$

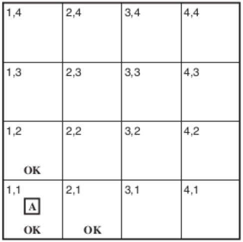
Representação

- $\Gamma = \{\neg p_{11}, b_{11} \rightarrow (p_{12} \vee p_{21}), (p_{12} \vee p_{21}) \rightarrow b_{11}, b_{21} \rightarrow (p_{11} \vee p_{22} \vee p_{31}), (p_{11} \vee p_{22} \vee p_{31}) \rightarrow b_{21}, ...\}$
- A célula 1,1 não possui vento
- $\neg b_{11}$ pode ser adicionado em Γ



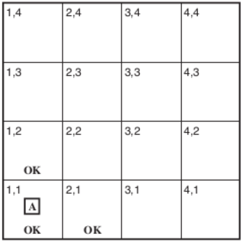
Representação

- $\Gamma = \{\neg p_{11}, b_{11} \rightarrow (p_{12} \vee p_{21}), (p_{12} \vee p_{21}) \rightarrow b_{11}, b_{21} \rightarrow (p_{11} \vee p_{22} \vee p_{31}), (p_{11} \vee p_{22} \vee p_{31}) \rightarrow b_{21}, \ldots\}$
- A célula 1,1 não possui vento
- $\neg b_{11}$ pode ser adicionado em Γ
- $\Gamma \models \neg p_{21}$?
- $\Gamma \models \neg p_{12}$?



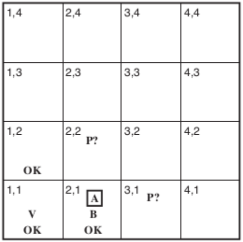
Representação

- $\Gamma = \{\neg p_{11}, b_{11} \rightarrow (p_{12} \lor p_{21}), (p_{12} \lor p_{21}) \rightarrow b_{11}, b_{21} \rightarrow (p_{11} \lor p_{22} \lor p_{31}), (p_{11} \lor p_{22} \lor p_{31}) \rightarrow b_{21}, ...\}$
- A célula 1,1 não possui vento
- $\neg b_{11}$ pode ser adicionado em Γ
- $\Gamma \models \neg p_{21}$?
- $\Gamma \models \neg p_{12}$?
- Você vai para a célula 2,1



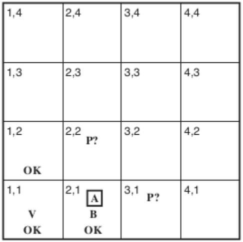
Representação

- Você sente vento na sala 2,1
- Podemos adicionar v_{21} em Γ



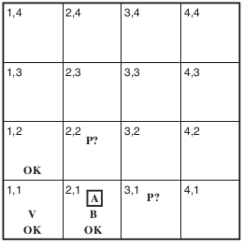
Representação

- Você sente vento na sala 2,1
- Podemos adicionar v_{21} em Γ
- $\Gamma \models \neg p_{22}$?
- $\Gamma \models \neg p_{31}$?
- $\Gamma \models p_{31}$?



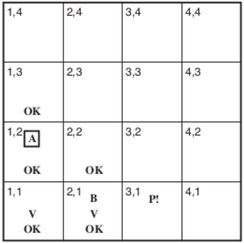
Representação

- Você sente vento na sala 2,1
- Podemos adicionar v_{21} em Γ
- $\Gamma \models \neg p_{22}$?
- $\Gamma \models \neg p_{31}$?
- $\Gamma \models p_{31}$?
- Você vai para a 1,2



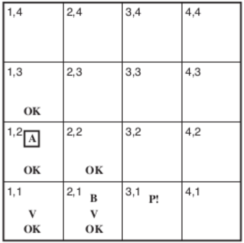
Representação

- Você não sente vento na sala 1,2
- Podemos adicionar $\neg v_{12}$ em Γ



Representação

- Você não sente vento na sala 1,2
- Podemos adicionar $\neg v_{12}$ em Γ
- $\Gamma \models \neg p_{22}$?
- $\Gamma \models \neg p_{31}$?
- $\Gamma \models p_{31}$?



Tópicos

Introdução

- Quando uma fórmula é equivalente a outra?

Introdução

- Quando uma fórmula é equivalente a outra?
- Depende das valorações que definem a semântica das duas fórmulas
- $p \rightarrow q$ e $\neg q \rightarrow \neg p$ são equivalentes?

Equivalência Lógica

Definição

ψ é equivalente logicamente a ϕ se para toda valoração v, $v(\phi) = v(\psi)$. Representamos por $\phi \equiv \psi$.

- Quando duas fórmulas não são equivalentes usamos a notação $\phi \not\equiv \psi$

Exemplo

- Mostre que $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Exemplo

- Mostre que $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Prova

Suponha que existe uma valoração v tal que $v(\neg(p \wedge q)) = T$.
$v(\neg(p \wedge q)) = T$ se e somente se $v((p \wedge q)) = F$.
$v((p \wedge q)) = F$ se e somente se $v(p) = F$ ou $v(q) = F$.
$v(p) = F$ ou $v(q) = F$ se e somente se $v(\neg p) = T$ ou $v(\neg q) = T$.
$v(\neg p) = T$ ou $v(\neg q) = T$ se e somente se $v(\neg p \vee \neg q)$.

Exemplo

- Mostre que $\neg(p \vee q) \not\equiv \neg p \vee \neg q$

Exemplo

- Mostre que $\neg(p \vee q) \not\equiv \neg p \vee \neg q$

Seja v uma valoração tal que $v(p) = F$ e $v(q) = T$.
Temos que $v(\neg(p \vee q)) = F$ mas $v(\neg p \vee \neg q) = T$.
Logo, temos uma valoração v tal que $v(\neg(p \vee q)) \neq v(\neg p \vee \neg q)$.
Portanto, $\neg(p \vee q) \not\equiv \neg p \vee \neg q$.

Exemplo

- Podemos usar tabelas verdade para verificar se duas fórmulas são equivalentes
- Basta verificar se em todas as linhas os valores verdade das duas fórmulas são iguais

Exemplos

- Vamos verificar se $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$

p	q	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Exemplos

- Vamos verificar se $p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

- Logo, $p \rightarrow q \not\equiv \neg p \rightarrow \neg q$.

Equivalências Importantes

- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Substituição

- Podemos usar equivalências para obter outras equivalências:

Exemplo

Temos que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.
Logo, $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \equiv (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$.

Exemplo

$\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg\neg p \equiv \neg(p \rightarrow q) \wedge p$ pois $\neg\neg p \equiv p$.
$\neg(p \rightarrow q) \wedge p \equiv \neg(\neg p \vee q) \wedge p$ pois $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
$\neg(\neg p \vee q) \wedge p \equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge p$ pois $\neg(\neg p \vee q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg q$.
$(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge p \equiv (p \wedge \neg q) \wedge p$.

Tópicos

Consequência Lógica e Validade

Definição

Seja ϕ uma fórmula da Lógica Proposicional. ϕ é válida se e somente se $\models \phi$.

Consequência Lógica e Validade

Definição

Seja ϕ uma fórmula da Lógica Proposicional. ϕ é válida se e somente se $\models \phi$.

Prova

$\models \phi$ sse
Para toda valoração v, se $v(\gamma) = T$ para todo $\gamma \in \emptyset$ então $v(\psi) = T$ sse
Para toda valoração v, $v(\psi) = T$ sse
ϕ é uma fórmula válida.

Consequência e $\rightarrow$

- Já mostramos que $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$
- Será que $p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$?

Consequência e $\to$

Teorema

Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ e ψ fórmulas. Temos que

$$\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi \text{ se e somente se } \Gamma \models \phi \to \psi$$

Consequência e $\rightarrow$

Teorema

Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ e ψ fórmulas. Temos que

$$\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi \text{ se e somente se } \Gamma \models \phi \rightarrow \psi$$

Prova

$\Rightarrow$ Seja Γ um conjunto de fórmulas, ϕ e ψ fórmulas. Suponha que $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$ (*).
Seja v_1 uma valoração qualquer. Suponha que $v_1(\gamma) = T$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Temos dois casos:
1) $v_1(\phi) = F$. Logo, $v_1(\phi \rightarrow \psi) = T$.
2) $v_1(\phi) = T$. Por (*) e que $v_1(\phi) = T$ temos que $v_1(\psi) = T$. Logo, $v_1(\phi \rightarrow \psi) = T$.
Portanto, $v(\phi \rightarrow \psi) = T$.
Dessa forma, para toda valoração v, se $v(\gamma) = T$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $v(\phi \rightarrow \psi) = T$. Logo, $\Gamma \models \phi \rightarrow \psi$.

Consequência e $\rightarrow$

Teorema da Dedução

Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ e ψ fórmulas. Temos que

$$\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi \text{ se e somente se } \Gamma \models \phi \rightarrow \psi$$

Prova

$\Leftarrow$ Seja Γ um conjunto de fórmulas, ϕ e ψ fórmulas. Suponha que $\Gamma \models \phi \rightarrow \psi$.
Seja v_1 uma valoração qualquer tal que $v_1(\gamma) = T$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v_1(\phi) = T$.
Temos que $v_1(\psi) = T$ pois temos que $v_1(\phi \rightarrow \psi) = T$ e $v_1(\phi) = T$.
Portanto, para toda valoração v, se $v(\gamma) = T$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v(\phi) = T$, então $v(\psi) = T$.
Logo, $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$.

Exemplo

- Para verificar se $p \rightarrow q, q \models p$ podemos usar o Teorema e verificar se $p \rightarrow q \models q \rightarrow p$
- Para verificar se $p \rightarrow q \models q \rightarrow p$ basta verificar $\models (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

- Já mostramos que $p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$.
- O que podemos dizer da fórmula $(p \rightarrow q) \land \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$?

Consequência Lógica e Satisfatibilidade

Teorema

$\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$ se e somente se $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi$ não é satisfatível

Teorema

$\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$ se e somente se $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi$ não é satisfatível

Prova

$\Rightarrow$ Suponha que $\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$
Logo, para toda v, se $v(\phi_i) = T$ para $i \in \{1, ..., k\}$ então $v(\psi) = T$ (*)
Suponha que $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi$ é satisfatível.
Portanto, existe v_1 tal que $v_1(phi_i) = T$ para $i \in \{1, ..., k\}$ e $v_1(\psi) = F$.
Mas por (*), $v_1(\psi) = T$. Absurdo!

Teorema

$\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$ se e somente se $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi$ não é satisfatível

Prova

$\Leftarrow$ Pela contra-positiva, suponha que $\{\phi_1, ..., \phi_k\} \not\models \psi$
Logo, existe uma valoração v_1 tal que $v_1(\phi_i) = T$ para $i \in \{1, ..., k\}$ e $v_1(\psi) = F$.
Portanto, $v_1(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi) = T$.
Dessa forma, $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi$ é satisfatível.

Consequência Lógica e Satisfatibilidade

Teorema

$\{\phi_1, ..., \phi_k\} \models \psi$ se e somente se $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \neg\psi$ não é satisfatível

- Podemos usar um algoritmo que checa a satisfatibilidade para testar a consequência lógica

```
function CONSCOMSAT(α, β)
    if SATISFATIVEL(α ∧ ¬β) then
        return False
    return True
```

Equivalência e Consequência

Teorema

$\phi \equiv \psi$ se e somente se $\phi \models \psi$ e $\psi \models \phi$

Equivalência e Consequência

Teorema

$\phi \equiv \psi$ se e somente se $\phi \models \psi$ e $\psi \models \phi$

Prova

$\Rightarrow$ Suponha que $\phi \equiv \psi$.
Suponha que $\phi \not\models \psi$.
Logo, existe uma valoração v tal que $v(\phi) = T$ e $v(\psi) = F$. Absurdo pois são equivalentes.
Portanto, $\phi \models \psi$.
Análogo para $\psi \models \phi$.

Teorema

$\phi \equiv \psi$ se e somente se $\phi \models \psi$ e $\psi \models \phi$

Prova

$\Leftarrow$ Suponha que $\phi \models \psi$ e $\psi \models \phi$.
Suponha que existe uma valoração v tal que $v(\phi) \neq v(\psi)$. Temos dois casos:
1) $v(\phi) = T$ e $v(\psi) = F$. Absurdo pois $\phi \models \psi$.
2) $v(\phi) = F$ e $v(\psi) = T$. Absurdo pois $\psi \models \phi$.
Portanto, para toda valoração v, $v(\phi) = v(\psi)$.

Tópicos

Definição de Conectivos

- Definimos fórmulas com os conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
- Apenas os conectivos $\wedge, \neg$ seriam necessários
- Por qual motivo?

Definição de Conectivos

- Definimos fórmulas com os conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
- Apenas os conectivos $\wedge, \neg$ seriam necessários
- Por qual motivo?
- Se não temos o $\vee$ ele deveria ser obtido a partir de $\wedge, \neg$

Definição de Conectivos

Teorema

Seja ϕ uma fórmula qualquer. Existe uma fórmula ψ em que só pode ocorrer $\wedge$ e $\neg$ tal que $\phi \equiv \psi$.

- Dizemos que o conjunto de conectivos $\{\wedge, \neg\}$ é completo

Definição de Conectivos

Teorema

Seja ϕ uma fórmula qualquer. Existe uma fórmula ψ em que só pode ocorrer $\wedge$ e $\neg$ tal que $\phi \equiv \psi$.

Prova

Prova por indução em ϕ.

Base: Seja ϕ uma atômica qualquer. Logo, a própria fórmula ϕ é a fórmula equivalente que usa apenas $\wedge$ e $\neg$.

H.I.: Seja ϕ_1 e ϕ_2 duas fórmulas quaisquer tal que existem ψ_1 e ψ_2 que usam apenas $\wedge$ e $\neg$ e que $\phi_1 \equiv \psi_1$ e $\phi_2 \equiv \psi_2$.

P.I.: Seja $\phi = \neg\phi_1$. Seja uma valoração v qualquer tal que $v(\neg\phi_1) = T$.

$v(\neg\phi_1) = T$ se e somente se $v(\phi_1) = F$.

Pela **H.I.**, $v(\phi_1) = F$ se e somente se $v(\psi_1) = F$ e ψ_1 só usa $\wedge$ e $\neg$.

$v(\psi_1) = F$ se e somente se $v(\neg\psi_1) = T$. Ou seja, $\neg\phi_1 \equiv \neg\psi_1$ e $\neg\psi_1$ só usa $\wedge$ e $\neg$.

Definição de Conectivos

Teorema

Seja ϕ uma fórmula qualquer. Existe uma fórmula ψ em que só pode ocorrer $\wedge$ e $\neg$ tal que $\phi \equiv \psi$.

Prova

P.I.: Seja $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Seja uma valoração v qualquer tal que $v(\phi_1 \wedge \phi_2) = T$.
$v(\phi_1 \wedge \phi_2) = T$ se e somente se $v(\phi_1) = T$ e $v(\phi_2) = T$.
Pela **H.I.**, $v(\phi_1) = T$ e $v(\phi_2) = T$ se e somente se $v(\psi_1) = T$ e $v(\psi_2) = T$ em que ψ_1 e ψ_2 só usam $\wedge$ e $\neg$.
$v(\psi_1) = T$ e $v(\psi_2) = T$ se e somente se $v(\psi_1 \wedge \psi_2) = T$. Ou seja, $\phi_1 \wedge \phi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ em que $\psi_1 \wedge \psi_2$ só usa $\wedge$ e $\neg$.

Definição de Conectivos

Teorema

Seja ϕ uma fórmula qualquer. Existe uma fórmula ψ em que só pode ocorrer $\wedge$ e $\neg$ tal que $\phi \equiv \psi$.

Prova

P.I.: Seja $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Seja uma valoração v qualquer tal que $v(\phi_1 \vee \phi_2) = F$.
$v(\phi_1 \vee \phi_2) = F$ se e somente se $v(\phi_1) = F$ e $v(\phi_2) = F$.
Pela **H.I.**, $v(\phi_1) = F$ e $v(\phi_2) = F$ se e somente se $v(\psi_1) = F$ e $v(\psi_2) = F$ em que ψ_1 e ψ_2 só usam $\wedge$ e $\neg$.
$v(\psi_1) = F$ e $v(\psi_2) = F$ se e somente se $v(\neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)) = F$. Ou seja, $\phi_1 \vee \phi_2 \equiv \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ em que $\neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ só usa $\wedge$ e $\neg$.

Teorema

Seja ϕ uma fórmula qualquer. Existe uma fórmula ψ em que só pode ocorrer $\wedge$ e $\neg$ tal que $\phi \equiv \psi$.

Prova

P.I.: Seja $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$. Seja uma valoração v qualquer tal que $v(\phi_1 \rightarrow \phi_2) = F$.
$v(\phi_1 \rightarrow \phi_2) = F$ se e somente se $v(\phi_1) = T$ e $v(\phi_2) = F$.
Pela **H.I.**, $v(\phi_1) = T$ e $v(\phi_2) = F$ se e somente se $v(\psi_1) = T$ e $v(\psi_2) = F$ em que ψ_1 e ψ_2 só usam $\wedge$ e $\neg$.
$v(\psi_1) = T$ e $v(\psi_2) = F$ se e somente se $v(\neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)) = F$. Ou seja, $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \equiv \neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ em que $\neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ só usa $\wedge$ e $\neg$.

Definição de Conectivos

- Também é possível definir novos conectivos a partir dos existentes
- Vamos definir um conectivo ternário representado por $\circledast$
- $v(\circledast(\phi_1, \phi_2, \phi_3)) = T$ se e somente se pelo menos dois são verdadeiros
- Como seria a tabela verdade deste conectivo?
- Que fórmula é equivalente a $\circledast(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$?