Lógica para Computação

Lógica de Primeira Ordem - Dedução Natural

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- Temos que ter novas regras para tratar dos quantificadores
- As outras regras funcionam de forma semelhante ao caso da lógica proposicional

- Se $\forall x \phi$ é verdade então trocar x por qualquer termo t também é verdade
- Variáveis são utilizadas para representar objetos quaisquer
- Podemos trocar uma variável por um termo fazendo uma substituição

Substituição

Definição

Seja x uma variável, t um termo e ϕ uma fórmula, $\phi[x \leftarrow t]$ é a fórmula obtida trocando toda ocorrência livre da variável x em ϕ por t.
Também é usada a notação $\phi[t/x]$.

Substituição

Exemplo

Seja $\phi = (\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$.
$\phi[x \leftarrow f(x,y)] = (\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \vee Q(y))$.

Exemplo

Seja $\phi = (\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y)))$.
$\phi[x \leftarrow f(x,y)] = \phi$ pois todas as ocorrências de x em ϕ são ligadas.

Substituição

Exemplo

Seja $\phi = (\forall x(P(x) \land Q(x))) \to (\neg P(x) \lor Q(y))$.
$\phi[x \leftarrow f(x,y)] = (\forall x(P(x) \land Q(x))) \to (\neg P(f(x,y)) \lor Q(y))$.

Exemplo

Seja $\phi = (\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y)))$.
$\phi[x \leftarrow f(x,y)] = \phi$ pois todas as ocorrências de x em ϕ são ligadas.

- Substituições são aplicadas apenas nas ocorrências livres da variável a ser substituída

Eliminação do $\forall$

- Se $\forall x \phi$ é verdade então trocar x por qualquer termo t também é verdade
- Seja a fórmula $\forall x \exists y (x < y)$ em que $\phi = \exists y (x < y)$
- Trocando o x sem cuidado podemos obter $\phi[x \leftarrow y]$
- $\phi[x \leftarrow y] = \exists y (y < y)$ que não é verdadeira para números naturais e a relação de menor.

Substituição Cuidadosa

Definição

Seja t um termo, x uma variável e ϕ uma fórmula. Dizemos que t é livre para x em ϕ se nenhuma ocorrência livre de x em ϕ ocorre no escopo de um $\forall y$ e $\exists y$ para qualquer variável y ocorrendo em t.

Substituição Cuidadosa

Exemplo

Seja $\phi = S(x) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))$.
Seja o termo $f(y, y)$.
Substituir as ocorrências livres de x por $f(y, y)$ torna o y do termo ligado ao $\forall y$.
$f(y, y)$ não é livre para x em ϕ.

Exemplo

Seja $\phi = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.
Seja o termo $f(x, y)$.
$f(x, y)$ é livre para x em ϕ.

Eliminação do $\forall$

- Se $\forall x \phi$ é verdade então trocar x por qualquer termo t também é verdade
- o termo t que substitui x tem que ser livre para x em ϕ

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall x\, \mathrm{e}.$$

Introdução do $\forall$

- Como introduzir o $\forall$?
- Seja x_0 um elemento qualquer
- Se conseguimos deduzir $\phi[x_0/x]$, o que podemos concluir?

Introdução do $\forall$

- Como introduzir o $\forall$?
- Seja x_0 um elemento qualquer
- Se conseguimos deduzir $\phi[x_0/x]$, o que podemos concluir?
- Temos que vale para qualquer elemento x, ou seja, $\forall x \phi$

Introdução do $\forall$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \qquad\vdots \\ \qquad \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\, \phi}\ \forall x\,\mathrm{i}.$$

- A caixa indica o escopo da variável que representa um elemento qualquer
- x_0 tem que ser uma variável que não aparece fora da caixa, ou seja, é um termo arbitrário que não pode ser outro termo já usado

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x P(x), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x P(x), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$

1		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	premise
2		$\forall x\, P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x\,\mathrm{e}\ 1$
4		$P(x_0)$	$\forall x\,\mathrm{e}\ 2$
5		$Q(x_0)$	$\rightarrow\mathrm{e}\ 3, 4$
6		$\forall x\, Q(x)$	$\forall x\,\mathrm{i}\ 3\text{–}5$

Exemplo

- Vamos mostrar que $P(t), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

Exemplo

- Vamos mostrar que $P(t), \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1	$P(t)$	premise
2	$\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$	premise
3	$P(t) \to \neg Q(t)$	$\forall x$ e 2
4	$\neg Q(t)$	$\to$e 3, 1

Introdução do $\exists$

- Como introduzir o $\exists$?
- Se temos $\phi[t/x]$ para algum termo t, o que podemos concluir?

Introdução do $\exists$

- Como introduzir o $\exists$?
- Se temos $\phi[t/x]$ para algum termo t, o que podemos concluir?
- $\exists x \phi$

Introdução do ∃

- Introdução do ∃

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi} \exists x \text{ i.}$$

Eliminação do ∃

$$\dfrac{\exists x\,\phi \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \;\; \phi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists\mathrm{e}.$$

- Vamos chamar de x_0 o elemento que existe
  - Perceba que não sabemos quem é o elemento
  - x_0 tem que ser um termo que ainda não apareceu pois não podemos garantir que é o mesmo elemento do existe
- x_0 não pode ocorrer na conclusão χ pois não sabemos quem é o elemento do existe
- A caixa controla o escopo de x_0 e da suposição $\phi[x_0/x]$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x \phi \vdash \exists x \phi$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x \vdash \exists x$

1	$\forall x\, \phi$	premise
2	$\phi[x/x]$	$\forall x$ e 1
3	$\exists x\, \phi$	$\exists x$ i 2

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\exists x\,P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x\,\mathrm{e}\ 1$
5		$Q(x_0)$	$\to\mathrm{e}\ 4, 3$
6		$\exists x\,Q(x)$	$\exists x\,\mathrm{i}\ 5$
7		$\exists x\,Q(x)$	$\exists x\,\mathrm{e}\ 2, 3\text{–}6$

- Vamos mostrar que $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$
- A prova alternativa a seguir está correta?

1		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\exists x\, P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\to$e 4, 3
6		$Q(x_0)$	$\exists x$ e 2, 3–5
7		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ i 6

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$
- A prova alternativa a seguir está correta?
- Não! Na conclusão da eliminação do $\exists$ não pode ocorrer a variável da suposição x_0

1		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	premise
2		$\exists x\, P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 4, 3
6		$Q(x_0)$	$\exists x$ e 2, 3–5
7		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ i 6

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x(Q(x) \to R(x)), \exists x(P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \land R(x))$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \wedge R(x))$

1		$\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$	premise
2		$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	premise
3	x_0	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	assumption
4		$Q(x_0) \rightarrow R(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\wedge e_2$ 3
6		$R(x_0)$	$\rightarrow$e 4, 5
7		$P(x_0)$	$\wedge e_1$ 3
8		$P(x_0) \wedge R(x_0)$	$\wedge$i 7, 6
9		$\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$	$\exists x$ i 8
10		$\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$	$\exists x$ e 2, 3–9

Exemplo

- Vamos mostrar que $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$

1		$\exists x\, P(x)$	premise
2		$\forall x \forall y\, (P(x) \to Q(y))$	premise
3	y_0		
4	x_0	$P(x_0)$	assumption
5		$\forall y\, (P(x_0) \to Q(y))$	$\forall x$ e 2
6		$P(x_0) \to Q(y_0)$	$\forall y$ e 5
7		$Q(y_0)$	$\to$e 6, 4
8		$Q(y_0)$	$\exists x$ e 1, 4–7
9		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y$ i 3–8

Exemplo

- Vamos tentar mostrar que $\exists x P(x), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$

Exemplo

- Vamos tentar mostrar que $\exists x P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$
- Será que a dedução abaixo está correta?

1		$\exists x\, P(x)$	premise
2		$\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	premise
3	x_0		
4	x_0	$P(x_0)$	assumption
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 2
6		$Q(x_0)$	$\to$e 5, 4
7		$Q(x_0)$	$\exists x$ e 1, 4–6
8		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y$ i 3–7

Exemplo

- Vamos tentar mostrar que $\exists x P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$
- Será que a dedução abaixo está correta?
- Não!
- Temos a utilização de um x_0 que já ocorre antes
- Temos eliminação do $\exists$ com uma conclusão em que ocorre x_0

1		$\exists x\, P(x)$	premise
2		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	premise
3	x_0		
4	x_0	$P(x_0)$	assumption
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 2
6		$Q(x_0)$	$\to$e 5, 4
7		$Q(x_0)$	$\exists x$ e 1, 4–6
8		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y$ i 3–7