Lógica para Computação

Método dos Tableaux para Lógica de Primeira Ordem

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- Sequência de fórmulas da Lógica de Primeira Ordem que está no formato de árvore
- Análogo aos tableaux da Lógica Proposicional
- As regras são adaptações das regras para a Lógica Proposicional com a adição de mais quatro regras

Introdução

- Tableau para mostrar que $\forall x \forall y P(x, y) \vdash_T P(a, a)$

$$\begin{array}{c} \forall x \forall y P(x, y) \\ \neg P(a, a) \\ \forall y P(a, y) \\ P(a, a) \\ \text{x} \end{array}$$

- Regra do $\forall$ permite substituir as variáveis ligada pelo quantificador por um termo qualquer

Tableaux

- Se queremos mostrar que $\gamma_1, ..., \gamma_k \vdash_T \varphi$ iniciamos o tableau da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \gamma_1 \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_k \\ \neg\varphi \end{array}$$

- Em seguida, o tableau é expandido através das regras

Regras dos Tableaux

- Regras em que não ocorre bifurcação

$$(\psi_1 \land \psi_2)$$
$$\psi_1$$
$$\psi_2$$

$$\neg(\psi_1 \lor \psi_2)$$
$$\neg\psi_1$$
$$\neg\psi_2$$

$$\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$$
$$\psi_1$$
$$\neg\psi_2$$

$$\neg(\neg\psi_1)$$
$$\psi_1$$

Regras dos Tableaux

- Regras em que ocorre bifurcação

$$\begin{array}{c} \neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\psi_1 \qquad \neg\psi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\psi_1 \vee \psi_2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \psi_1 \qquad \psi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\psi_1 \qquad \psi_2 \end{array}$$

Regras dos Quantificadores

$$\frac{\neg(\forall x \varphi)}{\exists x \neg \varphi}$$

$$\frac{\neg(\exists x \varphi)}{\forall x \neg \varphi}$$

Regras dos Quantificadores

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[x \mapsto t]}$$

- Em que t pode ser qualquer termo

$$\frac{\exists x \varphi}{\varphi[x \mapsto t]}$$

- Em que t deve ser um termo que ainda não apareceu
- Não é possível garantir que o elemento que existe é um que já foi mencionado

Exemplo

- Tableau para $\forall x P(x) \vdash_T \exists y P(y)$

$$
\begin{array}{c}
\forall x P(x) \\
\neg(\exists y P(y)) \\
\forall y \neg P(y) \\
\neg P(a) \\
P(a)
\end{array}
$$

Exemplo

- Tableau para $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash_T \forall x P(x)$

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$$
$$\neg(\forall x P(x))$$
$$\exists x \neg P(x)$$
$$P(a) \wedge Q(a)$$
$$P(a)$$
$$\neg P(b)$$

Exemplo

- Tableau para $\forall x(P(x) \land Q(x)) \vdash_T \forall x P(x)$

$$\begin{array}{c} \forall x(P(x) \land Q(x)) \\ \neg(\forall x P(x)) \\ \exists x \neg P(x) \\ P(a) \land Q(a) \\ P(a) \\ \neg P(b) \end{array}$$

- Tableau ficou aberto!

Exemplo

- Tableau para $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash_T \forall x P(x)$

$$
\begin{array}{c}
\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \\
\neg(\forall x P(x)) \\
\exists x \neg P(x) \\
\neg P(a) \\
P(a) \wedge Q(a) \\
P(a) \\
\mathrm{x}
\end{array}
$$

Exemplo

- Tableau para $\forall x(P(x) \land Q(x)) \vdash_T \forall x P(x)$

$$
\begin{array}{c}
\forall x(P(x) \land Q(x)) \\
\neg(\forall x P(x)) \\
\exists x \neg P(x) \\
\neg P(a) \\
P(a) \land Q(a) \\
P(a) \\
\mathrm{x}
\end{array}
$$

- Tableau fechado!
- Existe um tableaux fechado!

Tableaux

Definição

Um ramo em um tableau está **fechado** se possui uma fórmula φ e sua negação $\neg\varphi$. Um ramo é aberto quando não está fechado.

Definição

Um tableau está fechado se todos os seus ramos estão fechados. Caso contrário, o tableau está aberto.

Definição

Temos que $\gamma_1, ..., \gamma_k \vdash_T \varphi$ pelo método dos Tableaux se **existe** um tableau fechado para ele.

Exemplo

- Tableau para $\exists x \exists y P(x, y) \vdash_T P(a, a)$

$$\begin{gathered} \exists x \exists y P(x, y) \\ \neg P(a, a) \\ \exists y P(b, y) \\ P(b, c) \end{gathered}$$

Exemplo

- Tableau para $\exists x \exists y P(x, y) \vdash_T P(a, a)$

$$\begin{array}{c} \exists x \exists y P(x, y) \\ \neg P(a, a) \\ \exists y P(b, y) \\ P(b, c) \end{array}$$

- Tableau ficou aberto!
- Não existe tableau fechado para este caso!

Exemplo

- Tableau para $\exists x \exists y P(x, y) \vdash_T P(a, a)$

$$\begin{array}{c} \exists x \exists y P(x, y) \\ \neg P(a, a) \\ \exists y P(b, y) \\ P(b, c) \end{array}$$

- Tableau ficou aberto!
- Não existe tableau fechado para este caso!
- Vamos mostrar um contra-exemplo!

Corretude e Completude

Teorema da Corretude e Completude do Método dos Tableaux

Seja Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. $\Gamma \vdash_T \varphi$ se e somente se $\Gamma \models \varphi$.

Exemplo

- Vamos mostrar que $\exists x(P(x) \to Q(x)) \vdash_T \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash_T \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$$
$$\forall x P(x)$$
$$\neg(\exists x Q(x))$$
$$P(a) \rightarrow Q(a)$$
$$\forall x \neg Q(x)$$
$$\neg Q(a)$$
$$P(a)$$

$$\begin{array}{cc} \neg P(a) & Q(a) \\ \times & \times \end{array}$$

Exemplo

- Vamos provar que $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \vdash_T \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Exemplo

- Vamos provar que $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \vdash_T \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$$
\begin{array}{c}
\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \\
\neg(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \\
\exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \\
\neg(P(a) \rightarrow Q(a)) \\
P(a) \\
\neg Q(a) \\
\begin{array}{cc}
\neg(\exists x P(x)) & \forall x P(x) \\
\forall x \neg P(x) & Q(a) \\
\neg P(a) & \times \\
\times &
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo

- Verifique se $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash_T \exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Exemplo

- Será que é possível mostrar $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash_T \exists x P(x) \to \forall x Q(x)$?

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$
$$\neg(\exists x P(x) \to \forall x Q(x))$$
$$\exists x P(x)$$
$$\neg(\forall x Q(x))$$
$$\exists x \neg Q(x)$$
$$P(a)$$
$$\neg Q(b)$$
$$P(a) \to Q(a)$$

$$\begin{array}{cc} \neg P(a) & Q(a) \\ \text{x} & \end{array}$$

Exemplo

- Será que é possível mostrar $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash_T \exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$?

$$
\begin{array}{c}
\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\
\neg(\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \\
\exists x P(x) \\
\neg(\forall x Q(x)) \\
\exists x \neg Q(x) \\
P(a) \\
\neg Q(b) \\
P(a) \rightarrow Q(a) \\
\begin{array}{cc}
\neg P(a) & Q(a) \\
\text{x} &
\end{array}
\end{array}
$$

- Será que existe tableau fechado?

Exemplo

- Será que é possível mostrar
  $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash_T \exists x P(x) \to \forall x Q(x)$?

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$
$$\neg(\exists x P(x) \to \forall x Q(x))$$
$$\exists x P(x)$$
$$\neg(\forall x Q(x))$$
$$\exists x \neg Q(x)$$
$$P(a)$$
$$\neg Q(b)$$
$$P(a) \to Q(a)$$
$$\begin{array}{cc} \neg P(a) & Q(a) \\ \times & \end{array}$$

- Será que existe tableau fechado?
- Temos que mostrar um contra-exemplo!

Exemplo

- Será que é possível mostrar $\forall x P(x) \to \exists x Q(x) \vdash_T \exists x (P(x) \to Q(x))$?

Exemplo

- Será que é possível mostrar
  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \vdash_T \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$?

$$\begin{array}{c}
\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
\neg(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))) \\
\forall x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg(\forall x P(x)) & \exists x Q(x) \\
\exists x \neg P(x) & Q(a) \\
\neg P(a) & \neg(P(a) \rightarrow Q(a)) \\
\neg(P(a) \rightarrow Q(a)) & P(a) \\
P(a) & \neg Q(a) \\
\neg Q(a) & \mathsf{x} \\
\mathsf{x} &
\end{array}$$

Exemplo

Considere as premissas a seguir:

- Todo aluno de Computação gosta de Matemática.
- Nenhum político gosta de Matemática.

Usando o método dos Tableaux, mostre que podemos concluir que

- Nenhum político é aluno de Computação.

Exemplo

$$\forall x(C(x) \rightarrow M(x))$$
$$\neg(\exists x(P(x) \wedge M(x)))$$
$$\neg\neg(\exists x(P(x) \wedge C(x)))$$
$$\exists x(P(x) \wedge C(x))$$
$$P(a) \wedge C(a)$$
$$P(a)$$
$$C(a)$$
$$\forall x \neg(P(x) \wedge M(x))$$
$$\neg(P(a) \wedge M(a))$$
$$(C(a) \rightarrow M(a))$$

$$\begin{array}{ccc} \neg P(a) & & \neg M(a) \\ \text{x} & & \\ & \neg C(a) & M(a) \\ & \text{x} & \text{x} \end{array}$$