

Teoria da Computação

Forma Normal de Chomsky

Thiago Alves Rocha

Introdução

- ◆ Formas normais são úteis para construir algoritmos mais facilmente
- ◆ Vamos usar a forma normal de Chomsky

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Uma GLC está na forma normal de Chomsky se toda regra é as forma
 - ▶ $A \rightarrow BC$
 - ▶ $A \rightarrow a$
- ◆ Em que
 - ▶ a é terminal
 - ▶ A, B e C são variáveis
 - ▶ B e C não são a variável inicial

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Uma GLC está na forma normal de Chomsky se toda regra é as forma
 - ▶ $A \rightarrow BC$
 - ▶ $A \rightarrow a$
- ◆ Para permitir que a GLC derive a string vazia permitimos a regra
 - ▶ $S \rightarrow \varepsilon$
 - ▶ Em que S é variável inicial

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Será que podemos converter qualquer GLC em uma GLC na forma normal de Chomsky?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Como tirar o símbolo inicial do lado direito das regras?

$$\begin{array}{l} S \rightarrow ASA \mid aB \\ A \rightarrow B \mid S \\ B \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Como tirar o símbolo inicial do lado direito das regras?
- ◆ Criar um novo símbolo inicial

$$\begin{array}{l} S \rightarrow ASA \mid aB \\ A \rightarrow B \mid S \\ B \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \\ S \rightarrow ASA \mid aB \\ A \rightarrow B \mid S \\ B \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Como remover regras com ϵ no lado direito da regra em que o lado esquerdo não seja a variável inicial?

$$\begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \\ S \rightarrow ASA \mid aB \\ A \rightarrow B \mid S \\ B \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

Eliminando Produções ε

- ◆ Removemos produção $V \rightarrow \varepsilon$, em que V não é a inicial
- ◆ Para cada ocorrência de V no lado direito de uma produção, adicionamos uma nova regra com a ocorrência deletada

Eliminando Produções ϵ

- ◆ Se $R \rightarrow uVx$ é uma regra, adicionamos $R \rightarrow ux$.
- ◆ Regras do tipo $R \rightarrow uVxVw$ nos faz adicionar $R \rightarrow uxVw$, $R \rightarrow uVxw$ e $R \rightarrow uxw$.
- ◆ Se temos a regra $R \rightarrow V$, adicionamos $R \rightarrow \epsilon$, a menos que já tenha sido removida

Eliminando Produções ϵ

◆ Remover $B \rightarrow \epsilon$

$$\begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \\ S \rightarrow ASA \mid aB \\ A \rightarrow B \mid S \\ B \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \\ S \rightarrow ASA \mid aB \mid \mathbf{a} \\ A \rightarrow B \mid S \mid \mathbf{\epsilon} \\ B \rightarrow b \end{array}$$

Eliminando Produções ϵ

◆ Remover $A \rightarrow \epsilon$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid \mathbf{a} \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \mathbf{\epsilon} \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{SA} \mid \mathbf{AS} \mid \mathbf{S} \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Eliminando Regras Unitárias

- ◆ Remover regras unitárias da forma $V_1 \rightarrow V_2$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Eliminando Regras Unitárias

- ◆ Se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow aC$
 - Podemos fazer $A \rightarrow aC$
- ◆ Para toda regra unitária $V_1 \rightarrow V_2$
 - Removemos a regra
 - E para toda regra do tipo $V_2 \rightarrow u$
 - Criamos a regra $V_1 \rightarrow u$, a menos que esta regra seja unitária já removida

Eliminando Regras Unitárias

◆ Remover $S \rightarrow S$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

Eliminando Regras Unitárias

◆ Remover $S_0 \rightarrow S$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow \quad \quad \quad \mathbf{ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS}$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

Eliminando Regras Unitárias

◆ Remover $A \rightarrow B$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow S \mid \mathbf{b} \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Eliminando Regras Unitárias

◆ Remover $A \rightarrow S$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow S \mid \mathbf{b} \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow \mathbf{b} \mid ASA \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid SA \mid AS \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Forma Normal de Chomsky

- ◆ Temos que modificar regras da forma
 - ▶ $V \rightarrow u_1 u_2 u_3 \dots u_k$
 - ▶ Em que $k \geq 3$ e cada u_i é variável ou terminal
- ◆ E da forma
 - ▶ $V \rightarrow u_1 u_2$
 - ▶ Em que u_1 ou u_2 é terminal

Forma Normal de Chomsky

◆ $V \rightarrow u_1 u_2 u_3 \dots u_k$

◆ Trocamos pelas regras:

◆ $V \rightarrow u_1 V_1$

◆ $V_1 \rightarrow u_2 V_2$

◆ ...

◆ $V_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$

◆ Cada V_i é uma nova variável

Forma Normal de Chomsky

- ◆ $V \rightarrow u_1 u_2$
- ◆ Se u_1 for terminal trocamos por:
 - ◆ $V \rightarrow U_1 u_2$
 - ◆ $U_1 \rightarrow u_1$
- ◆ Análogo para u_2 terminal

Forma Normal de Chomsky

◆ Remover regras da forma

► $V \rightarrow V_1V_2V_3$ e $V \rightarrow tV_1$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow b \mid \mathbf{ASA} \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid SA \mid AS \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Forma Normal de Chomsky

◆ Removidas regras da forma

► $V \rightarrow V_1 V_2 V_3$ e $V \rightarrow tV_1$

► E simplificação

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow b \mid AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ A_1 &\rightarrow SA \\ U &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Exercício

- ◆ Converter para a forma normal de Chomsky

$$\begin{array}{l} A \rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 00 \mid \epsilon \end{array}$$

Exercício

◆ Criar novo inicial

$$\begin{aligned} A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow 00 \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \\ A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow 00 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $B \rightarrow \epsilon$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \\ A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow 00 \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \\ A &\rightarrow BAB \mid BA \mid AB \mid A \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $A \rightarrow \epsilon$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \\ A &\rightarrow BAB \mid BA \mid AB \mid A \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid A \mid B \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $A \rightarrow A$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid A \mid B \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $S_0 \rightarrow A$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow A \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $A \rightarrow B$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $S_0 \rightarrow B$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid B \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remove $S_0 \rightarrow BAB$

$$\begin{array}{l} S_0 \rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \mid \epsilon \\ A \rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B \rightarrow 00 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} S_0 \rightarrow BD_1 \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \mid \epsilon \\ A \rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B \rightarrow 00 \\ D_1 \rightarrow AB \end{array}$$

Exercício

◆ Remove $A \rightarrow BAB$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BD_1 \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BAB \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \\ D_1 &\rightarrow AB \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BD_1 \mid BA \mid AB \mid 00 \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BD_2 \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \\ D_1 &\rightarrow AB \\ D_2 &\rightarrow AB \end{aligned}$$

Exercício

◆ Remover $S_0 \rightarrow 00$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BD_1 \mid BA \mid AB \mid 00 \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BD_2 \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \\ D_1 &\rightarrow AB \\ D_2 &\rightarrow AB \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow BD_1 \mid BB \mid BA \mid AB \mid C_1C_2 \mid \epsilon \\ A &\rightarrow BD_2 \mid BB \mid BA \mid AB \mid 00 \\ B &\rightarrow 00 \\ D_1 &\rightarrow AB \\ D_2 &\rightarrow AB \\ C_1 &\rightarrow 0 \\ C_2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Exercício

- ◆ Remover $A \rightarrow 00$, $B \rightarrow 00$ e simplificar

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow AB \mid CC \mid BA \mid BD \mid BB \mid \epsilon \\ A &\rightarrow AB \mid CC \mid BA \mid BD \mid BB \\ B &\rightarrow CC \\ C &\rightarrow 0 \\ D &\rightarrow AB \end{aligned}$$