Lógica para Computação Lógica de Primeira Ordem - Dedução Natural

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

- Introdução
- 2 Substituição
- Regras do ∀
- 4 Regras do ∃

Introdução

- Temos que ter novas regras para tratar dos quantificadores
- As outras regras funcionam de forma semelhante ao caso da lógica proposicional

Introdução

- Se $\forall x \phi$ é verdade então trocar x por qualquer termo t também é verdade
- Variáveis são utilizadas para representar objetos quaisquer
- Podemos trocar uma variável por um termo fazendo uma substituição

Substituição

Definição

Seja x uma variável, t um termo e ϕ uma fórmula, $\phi[x \leftarrow t]$ é a fórmula obtida trocando toda ocorrência livre da variável x em ϕ por t. Também é usada a notação $\phi[t/x]$.

Substituição

Exemplo

Seja
$$\phi = (\forall x (P(x) \land Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \lor Q(y)).$$

 $\phi[x \leftarrow f(x,y)] = (\forall x (P(x) \land Q(x))) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \lor Q(y)).$

Exemplo

Seja $\phi = (\forall x ((P(x) \to Q(x)) \land S(x, y))).$ $\phi[x \leftarrow f(x, y)] = \phi$ pois todas as ocorrências de x em ϕ são ligadas.

Substituição

Exemplo

Seja
$$\phi = (\forall x (P(x) \land Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \lor Q(y)).$$

 $\phi[x \leftarrow f(x,y)] = (\forall x (P(x) \land Q(x))) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \lor Q(y)).$

Exemplo

Seja
$$\phi = (\forall x ((P(x) \to Q(x)) \land S(x, y))).$$

 $\phi[x \leftarrow f(x, y)] = \phi$ pois todas as ocorrências de x em ϕ são ligadas.

 Substituições são aplicadas apenas nas ocorrências livres da variável a ser substituída

Eliminação do ∀

- Se $\forall x \phi$ é verdade então trocar x por qualquer termo t também é verdade
- Seja a fórmula $\forall x \exists y (x < y)$ em que $\phi = \exists y (x < y)$
- Trocando o x sem cuidado podemos obter $\phi[x \leftarrow y]$
- $\phi[x \leftarrow y] = \exists y (y < y)$ que não é verdadeira para números naturais e a relação de menor.

Substituição Cuidadosa

Definição

Seja t um termo, x uma variável e ϕ uma fórmula. Dizemos que t é livre para x em ϕ se nenhuma ocorrência livre de x em ϕ ocorre no escopo de um $\forall y$ e $\exists y$ para qualquer variável y ocorrendo em t.

Substituição Cuidadosa

Exemplo

Seja $\phi = S(x) \land \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)).$

Seja o termo f(y, y).

Substituir as ocorrências livres de x por f(y, y) torna o y do termo ligado ao $\forall y$.

f(y, y) não é livre para x em ϕ .

Exemplo

Seja $\phi = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$

Seja o termo f(x, y).

f(x,y) é livre para x em ϕ .

Eliminação do ∀

- Se $\forall x \phi$ é verdade então trocar x por qualquer termo t também é verdade
- ullet o termo t que substitui x tem que ser livre para x em ϕ

$$\frac{\forall x \, \phi}{\phi[t/x]} \, \forall x \, e.$$

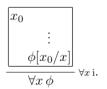
Introdução do ∀

- Como introduzir o ∀?
- Seja x_0 um elemento qualquer
- Se conseguimos deduzir $\phi[x_0/x]$, o que podemos concluir?

Introdução do ∀

- Como introduzir o ∀?
- Seja x_0 um elemento qualquer
- Se conseguimos deduzir $\phi[x_0/x]$, o que podemos concluir?
- Temos que vale para qualquer elemento x, ou seja, $\forall x \phi$

Introdução do ∀



- A caixa indica o escopo da variável que representa um elemento qualquer
- x₀ tem que ser uma variável que não aparece fora da caixa, ou seja, é um termo arbitrário que não pode ser outro termo já usado

• Vamos mostrar que $\forall x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$

• Vamos mostrar que $\forall x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$

1		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\forall x P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x \in 1$
4		$P(x_0)$	$\forall x \mathbf{e} 2$
5		$Q(x_0)$	\rightarrow e 3, 4
6		$\forall x Q(x)$	$\forall x\mathrm{i}\ 3{-}5$

ullet Vamos mostrar que P(t), orall x(P(x)
ightarrow
eg Q(x)) dash
eg Q(t)

• Vamos mostrar que $P(t), \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1	P(t)	premise
2	$\forall x (P(x) \to \neg Q(x))$	premise
3	$P(t) \rightarrow \neg Q(t)$	$\forall x \mathbf{e} 2$
4	$\neg Q(t)$	\rightarrow e 3, 1

Introdução do ∃

- Como introduzir o ∃?
- Se temos $\phi[t/x]$ para algum termo t, o que podemos concluir?

Introdução do ∃

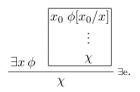
- Como introduzir o ∃?
- Se temos $\phi[t/x]$ para algum termo t, o que podemos concluir?
- \bullet $\exists x \phi$

Introdução do ∃

Introdução do ∃

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\phi} \,\exists x \, \mathrm{i}.$$

Eliminação do ∃



- Vamos chamar de x_0 o elemento que existe
 - Perceba que não sabemos quem é o elemento
 - x_0 tem que ser um termo que ainda não apareceu pois não podemos garantir que é o mesmo elemento do existe
- x_0 não pode ocorrer na conclusão χ pois não sabemos quem é o elemento do existe
- A caixa controla o escopo de x_0 e da suposição $\phi[x_0/x]$

• Vamos mostrar que $\forall x\phi \vdash \exists x\phi$

• Vamos mostrar que $\forall x \vdash \exists x$

1	$\forall x\phi$	premise
2	$\phi[x/x]$	$\forall x \in 1$
3	$\exists x \phi$	$\exists x \ \mathbf{i} \ 2$

• Vamos mostrar que $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

• Vamos mostrar que $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\exists x P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x \in 1$
5		$Q(x_0)$	\rightarrow e 4,3
6		$\exists x Q(x)$	$\exists x$ i 5
7		$\exists x Q(x)$	$\exists x \in 2, 3-6$

- Vamos mostrar que $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$
- A prova alternativa a seguir está correta?

1		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\exists x P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x \in 1$
5		$Q(x_0)$	\rightarrow e 4,3
6		$Q(x_0)$	$\exists x \mathbf{e} \ 2, 3{-}5$
7		$\exists x Q(x)$	$\exists x$ i 6

- Vamos mostrar que $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$
- A prova alternativa a seguir está correta?
- Não! Na conclusão da eliminação do \exists não pode ocorrer a variável da suposição x_0

1		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\exists x P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x \in 1$
5		$Q(x_0)$	\rightarrow e 4,3
6		$Q(x_0)$	$\exists x \mathbf{e} \ 2, 3{-}5$
7		$\exists x Q(x)$	$\exists x$ i 6

Vamos mostrar que

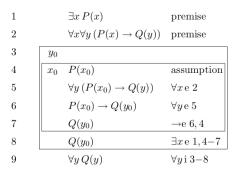
$$\forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x (P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x (P(x) \land R(x))$$

• Vamos mostrar que $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \land R(x))$

1		$\forall x (Q(x) \to R(x))$	premise
2		$\exists x (P(x) \land Q(x))$	premise
3	x_0	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	assumption
4		$Q(x_0) \to R(x_0)$	$\forall x \in 1$
5		$Q(x_0)$	∧e ₂ 3
6		$R(x_0)$	\rightarrow e 4, 5
7		$P(x_0)$	$\wedge e_1 \ 3$
8		$P(x_0) \wedge R(x_0)$	∧i 7, 6
9		$\exists x (P(x) \land R(x))$	$\exists x i 8$
10		$\exists x (P(x) \land R(x))$	$\exists x \in 2, 3{-}9$

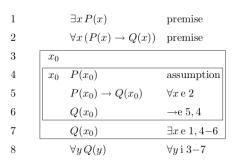
• Vamos mostrar que $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$

• Vamos mostrar que $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$



• Vamos tentar mostrar que $\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$

- Vamos tentar mostrar que $\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$
- Será que a dedução abaixo está correta?



- Vamos tentar mostrar que $\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$
- Será que a dedução abaixo está correta?
- Não!
- Temos a utilização de um x_0 que já ocorre antes
- Temos eliminação do ∃ com uma conclusão em que ocorre x₀

1		$\exists x P(x)$	premise
2		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	premise
3	x_0		
4	x_0	$P(x_0)$	assumption
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x \in 2$
6		$Q(x_0)$	\rightarrow e 5, 4
7		$Q(x_0)$	$\exists x \in 1, 4-6$
8		$\forall y Q(y)$	$\forall y \mathrm{i} 3{-}7$