Teoria da Computação

Lema do Bombeamento

Thiago Alves Rocha

Introdução

- Vamos fazer um autômato para a linguagem a seguir:

  $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Introdução

- $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
  - Será que é possível?

Introdução

- Chamamos a classe de linguagens aceitas por AFDs de linguagens regulares
- Se não for possível construir um AFD para a linguagem então ela não é regular

Introdução

- Mas como podemos ter certeza de que não é possível construir um AFD ou AFD ou ER?

Propriedades de LR

- $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ tem um número par de 0's e um número par de 1's$\}$
- Quantidade de estados é 4
- Vamos analisar strings com tamanho maior ou igual a 4

Propriedades de LR

- String aceita pela linguagem com tamanho maior ou igual ao número de estados
  - Garante que algum estado seja repetido no processamento
  - Existe alguma estrutura na string que se repete
  - O estado repetido pode ocorrer no início do processamento

Lema do Bombeamento

Para toda linguagem regular L

existe um inteiro k, tal que

para toda string $w \in L$ com $|w| \geq k$

existe uma forma de fazer $w = xyz$ tal que:

$|xy| \leq k$.

$|y| > 0$.

Para todo $i \geq 0$, xy^iz está em L.

Lema do Bombeamento

- k é número de estados do AFD A tal que L(A) = L
- y é a string que pode ser repetida por conta do ciclo
- $|w| \geq k$ para repetir pelo menos um estado
- $|xy| \leq k$ pois a repetição pode ocorrer antes de visitar todos os estados

Lema do Bombeamento - Prova

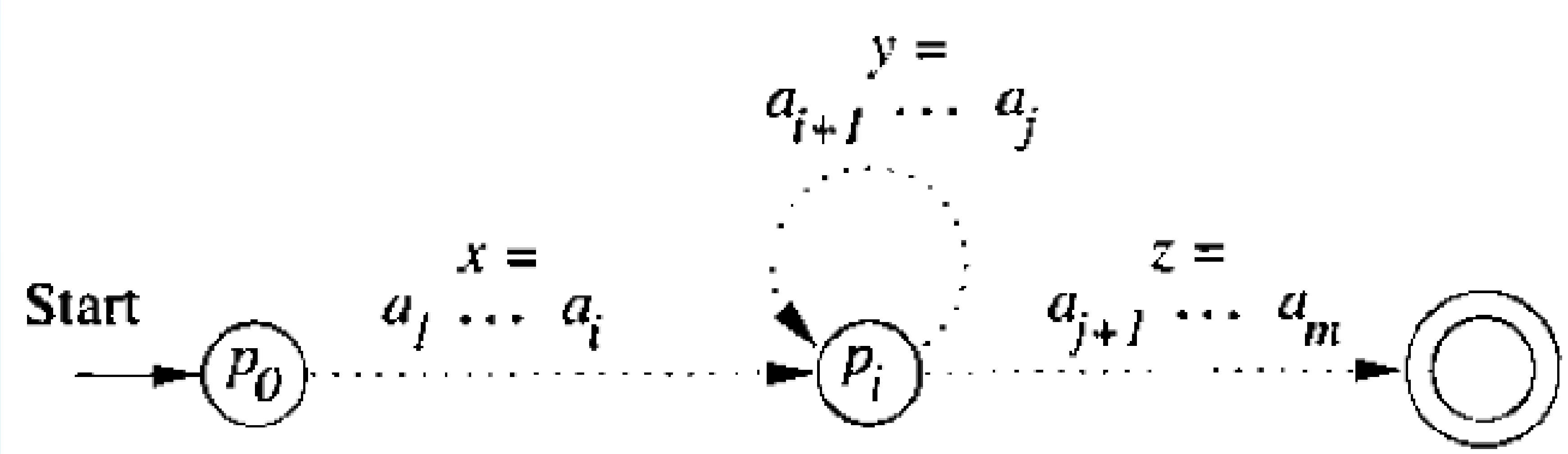
- Seja L regular
- L tem um AFD com k estados
- Suponha $w = a_1a_2...a_m$ e $m \geq k$
- Algum estado foi visitado mais de uma vez: vamos escolher o primeiro que se repete e chamar de q

Lema do Bombeamento - Prova

- Depois de processar a_i e a_j chegamos em q
- Podemos dividir w em xyz da seguinte forma:
- $x = a_1 a_2 \ldots a_i$
- $y = a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_j$
- $z = a_{j+1} a_{j+2} \ldots a_m$

Lema do Bombeamento - Prova

- Podemos dividir w em xyz da seguinte forma:



Lema do Bombeamento - Prova

- String x pode ser vazia no caso em que i=0
- String z pode ser vazia no caso em que j=m
- String y não pode ser vazia pois j>i
  - Processamento da string y volta para o estado q
  - |y| > 0

Lema do Bombeamento - Prova

- $|xy| \leq k$ pois estamos escolhendo a primeira repetição de estado que pode ocorrer antes de visitar todos
- Quando $i = 0$ temos que xz está em L
  - O AFD não percorre o ciclo
- xy^iz está em L
  - Percorrer o ciclo do AFD i vezes

Lema do Bombeamento

- O lema mostra uma propriedade das linguagens regulares
- Podemos usar o lema para mostrar que uma linguagem não é regular

Linguagem Não Regular

- $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Existe a constante k do lema
  - Seja $w = 0^k 1^k \in L$
  - Para dividir w em xyz com $|xy| \leq k$ e $|y| > 0$ temos que ter
    - $y = 0^i$ com $i > 0$

Linguagem Não Regular

- $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Existe a constante k do lema
  - Seja $w = 0^k 1^k \in L$
  - Para fazer $w = xyz$
  - $y = 0^i$ com $i > 0$
  - $xz = 0^{k-l-i} 0^l 1^k \in L$ pelo Lema
  - Mas $0^{k-l-i} 0^l 1^k \notin L$ pela definição de L
  - Absurdo!

Linguagem Não Regular

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem a mesma quantidade de 0's e 1's$\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Se escolhermos $w = (01)^k$?

Linguagem Não Regular

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem a mesma quantidade de 0's e 1's$\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Se escolhermos $w = (01)^k$?
    - Não funciona!

Linguagem Não Regular

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem a mesma quantidade de 0's e 1's$\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Seja $w = 0^k 1^k \in L$
  - Usar a mesma ideia da anterior

Linguagem Não Regular

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem a mesma quantidade de 0's e 1's$\}$ não é regular
- Outra forma:
  - Suponha L regular
  - Logo, $L \cap 0^*1^*$ é regular
  - Mas $L \cap 0^*1^* = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$
  - Absurdo! Pois já provamos que não é regular!

Linguagem Não Regular

- $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Se escolhermos $w = 0^k0^k$?

Linguagem Não Regular

- $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Se escolhermos $w = 0^k0^k$?
    - Não funciona!

Linguagem Não Regular

- $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Se escolhermos $w = 0^k 1 0^k 1 \in L$?

Linguagem Não Regular

- $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Seja $w = 0^k 1 0^k 1 \in L$
  - Podemos fazer $w = xyz$
  - y é formado apenas por 0's
  - $xy^2z \in L$ pelo Lema do Bombeamento
  - Mas $xy^2z \notin L$ pela definição de L

Linguagem Não Regular

- $L = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Seja $w = 1^{k^2} \in L$
  - Podemos fazer $w = xyz$ de acordo com o lema
  - $|xyz| = k^2$

Linguagem Não Regular

- $|xyz| = k^2$
- Como $|y| > 0$, $k^2 < |xy^2z|$
- Como $|xy| \leq k$, $|y| \leq k$ e também
- $k^2 < |xy^2z| \leq k^2 + k$, logo
- $k^2 < |xy^2z| \leq k^2 + k < (k+1)^2$
- Logo, $xy^2z \in L$ pelo Lema
- Mas $xy^2z \notin L$ pois o tamanho está entre dois quadrados perfeitos consecutivos

Linguagem Não Regular

- $L = \{0^i 1^j \mid i > j\}$ não é regular
  - Suponha L regular
  - Temos a constante k do lema
  - Seja $w = 0^{k+1}1^k \in L$
  - Podemos fazer $w = xyz$ com as condições do lema
  - Logo, y é formado por 0's

Linguagem Não Regular

- $L = \{0^i1^j \mid i > j\}$ não é regular
  - $xy^0z \in L$ pelo Lema do Bombeamento
  - Mas $xy^0z \notin L$ pois a quantidade de 0's é maior ou igual a de 1's.
  - Absurdo!

Importância

- Provar que uma linguagem não é regular é importante
- Em geral, uma linguagem que não é regular não pode ser processada por um AFD, AFN ou ER

Importância

- A linguagem dos documentos XML não é regular
- $L_{XML} = \{w \in ASCII^* \mid w \text{ é um documento XML}\}$ não é regular
- Não é possível construir um AFD para verificar se um documento XML está correto