Lógica para Computação

Dedução Natural

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

1. Introdução
2. Regras do $\wedge$
3. Regras da Dupla Negação
4. Regras do $\rightarrow$
5. Regras do $\vee$
6. Regras da $\neg$

Tópicos

1. Introdução
2. Regras do $\wedge$
3. Regras da Dupla Negação
4. Regras do $\rightarrow$
5. Regras do $\vee$
6. Regras da $\neg$

Introdução

- Precisamos de um método para saber se uma fórmula é conclusão de um conjunto de fórmulas
- O método deve servir como uma explicação da conclusão
- Se todas as fórmulas do conjunto são verdadeiras então a conclusão **tem** que ser verdadeira
- Podemos ter regras para derivar uma conclusão a partir de um conjunto de fórmulas

Dedução Natural

- Suponha que temos um conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ que chamamos de **premissas**
- Temos uma outra fórmula ψ que chamamos de conclusão

Exemplo

Premissas:
Se o trem chega tarde e não tem táxi na estação então João está atrasado para a reunião.
João não está atrasado para a reunião.
O trem chega tarde.
$\{(p \land \neg q) \to r, \neg r, p\}$.
Conclusão: Tem táxi na estação.
q.

- Queremos aplicar as regras de inferência nas premissas obtendo novas fórmulas até chegar na conclusão
- Se for possível, dizemos que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ deduz ψ.
  - Também podemos dizer que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ deriva ψ.
- Denotamos por $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \psi$
  - Também representado como $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \psi$

Exemplo

$\{(p \land \neg q) \to r, \neg r, p\} \vdash q$

Dedução Natural

- Devemos escolher regras corretas
- Não deve ser possível fazer $\{p, q\} \vdash p \wedge \neg q$

Tópicos

Regras do $\wedge$

- Introdução do $\wedge$: permite concluir $\phi \wedge \psi$, dado que já concluímos ϕ e concluímos ψ separadamente

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge\mathrm{i}.$$

Regras do $\wedge$

- Eliminação do $\wedge$ 1: se temos uma dedução de $\phi \wedge \psi$ então temos uma prova de ϕ
- Eliminação do $\wedge$ 2: se temos uma dedução de $\phi \wedge \psi$ então temos uma dedução de ψ

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2.$$

Regras do $\wedge$

- Vamos mostrar que $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

Regras do $\wedge$

- Vamos mostrar que $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	premissa
2.	$(s \wedge t)$	premissa
3.	$(p \wedge q)$	$\wedge e_2$ 1
4.	q	$\wedge e_1$ 3
5.	s	$\wedge e_2$ 2
6.	$q \wedge s$	$\wedge i_2$ 4,5

Tópicos

Regras da Dupla Negação

- Como seria uma regra para eliminar dupla negação?
- Como seria uma regra para introduzir dupla negação?

Regras da Dupla Negação

- Como seria uma regra para eliminar dupla negação?
- Como seria uma regra para introduzir dupla negação?

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg\mathrm{e} \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg\mathrm{i}.$$

Regras da Dupla Negação

- Vamos mostrar que $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

Regras da Dupla Negação

- Vamos mostrar que $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1	p	premise
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premise
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg$e 2
5	r	$\wedge$e$_2$ 4
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge$i 3, 5

Tópicos

Regras da $\rightarrow$

- Se a entrada do programa é um inteiro então a saída do programa é um booleano
- A entrada do programa é um inteiro
- O que podemos concluir?

Regras da $\rightarrow$

- Se a entrada do programa é um inteiro então a saída do programa é um booleano
- A entrada do programa é um inteiro
- O que podemos concluir?
- A saída do programa é um booleano
- Como podemos definir uma regra para eliminação do $\rightarrow$?

Regras da $\rightarrow$

- Se a entrada do programa é um inteiro então a saída do programa é um booleano
- A entrada do programa é um inteiro
- O que podemos concluir?
- A saída do programa é um booleano
- Como podemos definir uma regra para eliminação do $\rightarrow$?

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow\text{e.}$$

Regras da $\rightarrow$

Sejam as seguintes premissas:

- "José vai para Fortaleza".
- "Se José vai para Fortaleza, então ele só vai para Jericoacoara se Carlos convidá-lo".
- "Se José vai para Fortaleza, então ele vai para Jericoacoara".

Mostre que podemos concluir que "Carlos convida José para Jericoacoara".

Regras da $\rightarrow$

- Vamos mostrar que $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premise
2	$p \rightarrow q$	premise
3	p	premise
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$e $1, 3$
5	q	$\rightarrow$e $2, 3$
6	r	$\rightarrow$e $4, 5$

Regras da $\rightarrow$

- Se o cão de guarda detectar um intruso então o cão de guarda vai latir
- O cão de guarda não latiu
- O que podemos concluir?

Regras da $\rightarrow$

- Se o cão de guarda detectar um intruso então o cão de guarda vai latir
- O cão de guarda não latiu
- O que podemos concluir?
- Nenhum intruso foi detectado
- Como podemos construir uma regra para esse raciocínio?

Regras da $\rightarrow$

- Se o cão de guarda detectar um intruso então o cão de guarda vai latir
- O cão de guarda não latiu
- O que podemos concluir?
- Nenhum intruso foi detectado
- Como podemos construir uma regra para esse raciocínio?

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ \mathrm{MT}.$$

Regras da $\rightarrow$

Sejam as premissas:

- "Se o crime ocorreu 01h, então se José é o ladrão, então ele estava de folga".
- "O crime ocorreu 01h".
- "José não estava de folga".

Vamos concluir que "José não é o ladrão".

Regras da $\rightarrow$

- Vamos mostrar que $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premise
2	p	premise
3	$\neg r$	premise
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$e $1, 2$
5	$\neg q$	MT $4, 3$

Regras da $\rightarrow$

- Vamos mostrar que $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

Regras da $\rightarrow$

- Vamos mostrar que $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

1	$\neg p \rightarrow q$	premise
2	$\neg q$	premise
3	$\neg\neg p$	MT 1, 2
4	p	$\neg\neg$e 3

Introdução da $\rightarrow$

- Formato da conclusão deve ser $\varphi \rightarrow \psi$
- Temos que ter uma suposição de φ
- Chegar em ψ a partir de φ através de aplicações das regras

Introdução da $\rightarrow$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow\mathrm{i}.$$

Exemplo

Seja a premissa a seguir:

- "Se José tira férias, então Carlos trabalha".

Vamos concluir: "Se Carlos não trabalha, então José não tira férias".

Exemplo

- Vamos mostrar que $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

$$
\begin{array}{lll}
1. & p \rightarrow q & \text{premissa} \\
2. & \neg q & \text{suposição} \\
3. & \neg p & \text{MT 1,2} \\
4. & \neg q \rightarrow \neg p & \rightarrow \mathrm{i}\ 2\text{-}3
\end{array}
$$

Introdução da $\rightarrow$

- A caixa serve para demarcar o escopo de uma suposição temporária
- Quando chegamos na conclusão desejada na dedução dentro caixa podemos usar a regra da introdução do $\rightarrow$
- As deduções podem aninhar caixas e abrir novas caixas depois depois de fechar as antigas
- Dentro da caixa podemos usar a própria suposição e as premissas
- Também podemos usar qualquer fórmula obtida anteriormente que ainda esteja com o escopo aberto
- A linha depois da caixa deve seguir a conclusão de uma regra que usa a caixa

Exemplo

- Vamos mostrar que $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

Exemplo

1.	$\neg q \to \neg p$	premissa
2.	p	suposição
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 2
4.	$\neg\neg q$	MT 1,3
5.	$p \to \neg\neg q$	$\to$ i 2-4

Tópicos

Regras do $\vee$

- Uma fórmula do tipo $\phi \vee \psi$ representa que ϕ ou ψ deve ser verdade
- Se sabemos que ϕ é verdade, o que podemos falar sobre $\phi \vee \psi$?

Regras do $\vee$

- Uma fórmula do tipo $\phi \vee \psi$ representa que ϕ ou ψ deve ser verdade
- Se sabemos que ϕ é verdade, o que podemos falar sobre $\phi \vee \psi$?
- $\phi \vee \psi$ também é verdade
- Qualquer que seja ψ

Introdução do $\vee$

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee\mathrm{i}_1 \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee\mathrm{i}_2.$$

Regras do $\vee$

- E o que podemos deduzir de $\phi \vee \psi$?

Regras do $\vee$

- E o que podemos deduzir de $\phi \vee \psi$?
- Podemos dividir em casos!
- Primeiro fazemos uma suposição de que ϕ é verdade e chegamos em alguma conclusão χ
- Depois fazemos uma suposição de que ψ é verdade e chegamos na mesma conclusão χ
- O que podemos concluir das duas informações acima?

Regras do $\vee$

- E o que podemos deduzir de $\phi \vee \psi$?
- Podemos dividir em casos!
- Primeiro fazemos uma suposição de que ϕ é verdade e chegamos em alguma conclusão χ
- Depois fazemos uma suposição de que ψ é verdade e chegamos na mesma conclusão χ
- O que podemos concluir das duas informações acima?
- χ é verdade independente de qual dos dois entre ϕ e ψ seja verdade

Eliminação do $\vee$

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee\text{e.}$$

Exemplo

- Vamos mostrar que $p \lor q \vdash q \lor p$

Exemplo

1.	$p \vee q$	premissa
2.	$\boxed{p}$	suposição
3.	$q \vee p$	$\vee$i 2
4.	q	suposição
5.	$q \vee p$	$\vee$i 4
6.	$q \vee p$	$\vee$e 1,2-3,4-5

Eliminação do $\vee$

- Como as caixas são separadas não é possível usar as fórmulas de uma caixa na outra.
- Cada caixa é independente
- É necessário indicar a linha da disjunção, e as linhas de cada caixa.

Exemplo

Seja a premissa a seguir:

- "Se a porta está trancada então o ladrão entra pela janela."

Mostre que podemos concluir: "Se o alarme está ligado ou a porta está fechada então o alarme está ligado ou o ladrão entra pela janela".

Exemplo

- Vamos mostrar que $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$

1.	$q \to r$	premissa
2.	$p \vee q$	suposição
3.	p	suposição
4.	$p \vee r$	$\vee$i 3
5.	q	suposição
6.	r	$\to$e 1,5
7.	$p \vee r$	$\vee$i 6
8.	$p \vee r$	$\vee$e 2,3-4,5-7
9.	$(p \vee q) \to (p \vee r)$	$\to$i 2-8

Tópicos

Introdução

- As regras da $\neg$ envolvem a noção de contradição

Definição

Contradições são fórmulas da forma $\phi \wedge \neg\phi$ ou $\neg\phi \wedge \phi$ em que ϕ é qualquer fórmula

- As regras da $\neg$ envolvem a noção de contradição

Definição

Contradições são fórmulas da forma $\phi \wedge \neg\phi$ ou $\neg\phi \wedge \phi$ em que ϕ é qualquer fórmula

- $r \wedge \neg r$
- $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$
- $\neg(r \vee s \rightarrow q) \wedge (r \vee s \rightarrow q)$

Contradições

- Será que $r \wedge \neg r \vdash p$?
- Se a fórmula que aparece na esquerda do $\vdash$ é verdade então a fórmula na direita tem que ser verdade
- Uma contradição não pode ser verdadeira
- O que podemos concluir?

Contradições

- Será que $r \wedge \neg r \vdash p$?
- Se a fórmula que aparece na esquerda do $\vdash$ é verdade então a fórmula na direita tem que ser verdade
- Uma contradição não pode ser verdadeira
- O que podemos concluir?
- $r \wedge \neg r \vdash p$
- $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q) \vdash p \vee q$
- Qualquer fórmula pode ser deduzida a partir de uma contradição
- Representamos uma contradição por $\perp$
- Para qualquer fórmula ϕ temos que $\perp \vdash \phi$

Introdução do $\bot$ e Eliminação da $\neg$

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg\text{e.}$$

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot\text{e.}$$

Exemplo

- Vamos mostrar que $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1	$\neg p \vee q$			
2	$\neg p$	premise	q	premise
3	p	assumption	p	assumption
4	$\bot$	$\neg$e $3, 2$	q	copy 2
5	q	$\bot$e 4	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$i 3–4
6	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$i 3–5		
7	$p \rightarrow q$			$\vee$e $1, 2$–6

Introdução da $\neg$

- Podemos fazer uma suposição e tentar chegar em uma contradição
- Se for possível chegar em uma contradição então a suposição não pode ser verdadeira
- Devemos colocar uma negação na frente da suposição
- Funciona como uma prova por absurdo

Introdução da ¬

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\;\neg\mathrm{i.}$$

Exemplo

- Vamos mostrar que $(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vdash q$

Exemplo

1	$p \wedge \neg q \to r$	premise
2	$\neg r$	premise
3	p	premise
4	$\neg q$	assumption
5	$p \wedge \neg q$	$\wedge$i $3, 4$
6	r	$\to$e $1, 5$
7	$\bot$	$\neg$e $6, 2$
8	$\neg\neg q$	$\neg$i 4–7
9	q	$\neg\neg$e 8

Exemplo

Sejam as premissas:

- "Se a porta não está quebrada, então se o meu cliente é o ladrão, então ele entrou pela janela no segundo andar ou tem um cúmplice".
- "Meu cliente não tem um cúmplice".
- "Meu cliente tem artrose e não subiu pela janela no segundo andar".
- "A porta não está quebrada".

Conclua que "Meu cliente não é o ladrão".