Teoria da Computação

Expressões Regulares

Thiago Alves

Introdução

- *Expressões regulares* descrevem linguagens a partir de expressões com constantes e operações
- Parecidas com expressões aritméticas
- As constantes representam linguagens

Introdução

- Exemplo de expressão regular
  - 01* + 10*
  - Linguagem das strings que começam com 0 e são seguidas por qualquer quantidade de 1's e das que começam com 1 e são seguidas por 0's

Introdução

- Exemplo de expressão regular
  - (0+1)0*
  - Linguagem das strings que começam com 0 ou 1 e são seguidas por qualquer quantidade de 0's

Introdução

- Operações nas expressões regulares representam operações entre linguagens
  - União
  - Concatenação
  - Estrela

União

- Seja A e B duas linguagens
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- Exemplo:
  - $L_1 = \{00,01\}$
  - $L_2 = \{00,10\}$
  - $L_1 \cup L_2 = \{00,01,10\}$

Concatenação

- Seja A e B duas linguagens
- $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

- Exemplo:
  - $L_1 = \{00,01\}$
  - $L_2 = \{00,10\}$
  - $L_1L_2 = \{0000,0010,0100,0110\}$

Estrela

- Seja A uma linguagem
- $A^* = \{x_1 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

- Exemplo:
  - $L_1 = \{00,01\}$
  - $L_1^* = \{\varepsilon, 00, 01, 0000, 0001, 0100, 0101, 000000, \ldots\}$

Definição de ER

- Vamos definir as expressões regulares de forma indutiva
- Se E é uma expressão regular, então L(E) é a linguagem que ela gera

Definição de ER

- Se *a* é um símbolo qualquer, então **a** é uma ER
  - L(**a**) = {a}
- ε é uma ER
  - L(ε) = {ε}
- ∅ é uma ER
  - L(∅) = ∅

Exemplos

- 0 é uma Expressão Regular
  - L(**0**) = {0}
- 1 é uma Expressão Regular
  - L(**1**) = {1}

Definição de ER

- Se E_1 e E_2 são ERs, então (E_1+E_2) é uma ER
  - $L(E_1+E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$
- Se E_1 e E_2 são ERs, então (E_1E_2) é uma ER
  - $L(E_1E_2) = L(E_1)L(E_2)$
- Se E é uma ER, então (E^*) é uma ER
  - $L(E^*) = (L(E))^*$

Exemplos

- **0** é uma Expressão Regular
- **1** é uma Expressão Regular
  - **0 + 1** é uma expressão regular

- L(**0 + 1**) = ?

Exemplos

- **0 + 1** é uma Expressão Regular
- **1** é uma Expressão Regular
  - **(0 + 1)1** é uma expressão regular

- L(**(0 + 1)1**) = ?

Exemplos

- **(0 + 1)1** é uma Expressão Regular
  - **((0 + 1)1)*** é uma expressão regular

- L(**((0 + 1)1)***) = ?

Precedência das Operações

- Ordem de precedência é
  - Estrela
  - Concatenação
  - União
- Parênteses podem ser usados para dar precedência diferente

Precedência das Operações

- L(**01*+1**) = ?
- L(**(01)*+1**) = ?
- L(**0(1*+1)**) = ?

Exemplos de ER

- L(**01+0**) = {01, 0}
- L(**0**(**1+0**)) = {01, 00}
  - Note a ordem da precedência
- L(**0***) = {ε, 0, 00, 000,… }

Exemplos

- L((**0**+**1**)**0***) = ?

Exemplos

- $L((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*) =$

  $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ w inicia com 0 ou 1 e é seguido por uma sequência de zero ou mais 0's$\}$

Exemplos

- L(($\mathbf{0}$+$\mathbf{1}$)*) = ?

Exemplos

- $L((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*) = \{0,1\}^*$

Exemplos

- L(**0***__10__*) = ?

Exemplos

- $L(\mathbf{0}^*\mathbf{1}\mathbf{0}^*) =$

  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem exatamente um $1\}$

Exemplos

- $L((\mathbf{0+1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0+1})^*) = ?$

Exemplos

- L((**0+1**)***1**(**0+1**)*) =

  {w ∈ {0,1}* | w tem pelo menos um 1}

Exemplos

- L((**0+1**)***001**(**0+1**)*) = ?

Exemplos

- L((**0+1**)***001**(**0+1**)*) =

  {w ∈ {0,1}* | w tem tem 001 como substring}

Exemplos

- $L((\mathbf{0+1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0+1})^* + (\mathbf{0+1})^*\mathbf{10}(\mathbf{0+1})^*) = ?$

Exemplos

- L((**0+1**)***01**(**0+1**)* + (**0+1**)***10**(**0+1**)*)
  =
  {w ∈ {0,1}* | w tem como substring 01 ou 10}

Exemplos

- $L((\mathbf{0}+\mathbf{10})^*(\varepsilon+\mathbf{1})) = ?$

Exemplos

- $L((\mathbf{0}+\mathbf{10})^*(\varepsilon+\mathbf{1})) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ não tem 1's consecutivos$\}$

Exemplos

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ todo zero é seguido por pelo menos um 1$\}$

Exemplos

- L = {w ∈ {0,1}* | todo zero é seguido por pelo menos um 1}
- **1***(**011***)*

Exemplos

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem tamanho par$\}$

Exemplos

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tem tamanho par$\}$
- $((\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{0}+\mathbf{1}))^*$

Exemplos

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$

Exemplos

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$
- $\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{0} + \mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}$

Exemplos

- Escreva uma expressão regular para o conjunto de strings que consiste de 0's e 1's alternados
  - Ex: 01010101, 101010101010, 01

Exemplos

- Escreva uma expressão regular para o conjunto de strings que consiste de 0's e 1's alternados
  - Ex: 01010101, 101010101010, 01

- **(01)* + (10)* + (01)*0 + (10)*1**

Exemplos

- Escreva uma expressão regular para o conjunto de strings que consiste de 0's e 1's alternados
  - Ex: 01010101, 101010101010, 01

- Outra forma:
- **$(\varepsilon + 1)(01)^*(\varepsilon + 0)$**