Lógica para Computação

Resolução

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Tópicos

Introdução

- Resolução é uma regra de inferência que requer que as fórmulas estejam na forma normal conjuntiva
- Diferente dos outros sistemas dedutivos, consta de apenas uma regra

Introdução

- Resolução é uma regra aplicada em cláusulas
- Cláusulas tem o formato $l_1 \vee ... \vee l_n$
- Podemos usar a representação de conjunto $\{l_1, ..., l_n\}$

Tópicos

Resolução

- A regra engloba duas cláusulas que possuem literais complementares
- Em uma das cláusulas o literal deve ser positivo e na outra deve ser negativo
- Na regra abaixo, a_i e b_j são os literais complementares
- A conclusão da regra da resolução é chamada de resolvente

$$\frac{a_1 \lor \ldots \lor a_{i-1} \lor a_i \lor a_{i+1} \lor \ldots \lor a_n, \quad b_1 \lor \ldots \lor b_{j-1} \lor b_j \lor b_{j+1} \lor \ldots \lor b_m}{a_1 \lor \ldots \lor a_{i-1} \lor a_{i+1} \lor \ldots \lor a_n \lor b_1 \lor \ldots \lor b_{j-1} \lor b_{j+1} \lor \ldots \lor b_m}$$

Intuição da Resolução

- Para entender por qual motivo podemos usar essa regra vamos usar um exemplo
- Seja $\neg p \vee \neg q$ e $p \vee r$ duas cláusulas
- Usando equivalência lógica temos $p \rightarrow \neg q$ e $p \vee r$
- Obtemos $\neg q \vee r$

- Em representação de conjuntos temos duas cláusulas $C_1 = \{a_1, ..., a_n\}$ e $C_2 = \{b_1, ..., b_m\}$ com a_i e b_j os literais complementares
- O resolvente $res(C_1, C_2) = (\{a_1, ..., a_n\} - \{a_i\}) \cup (\{b_1, ..., b_m\} - \{b_j\})$

Exemplo

Exemplo

$C_1 = \{p, \neg q, r\}$ e $C_2 = \{\neg p, r\}$
$res(C_1, C_2) = \{\neg q, r\}$

Exemplo

$C_1 = \{p, \neg q\}$ e $C_2 = \{\neg p, q\}$
$res(C_1, C_2) = \{\neg q, q\}$

Exemplo

$C_1 = \{p\}$ e $C_2 = \{\neg p\}$
$res(C_1, C_2) = \{\}$

Dedução por Resolução

Definição

Seja C uma fórmula e C' uma fórmula na forma normal conjuntiva equivalente a $\neg C$.
Dizemos que uma fórmula C pode ser deduzida por resolução de um conjunto de cláusulas Γ se a partir de $\Gamma \cup \{C'\}$, por aplicações da regra de resolução, podemos obter a cláusula vazia $\{\}$. Usamos a notação $\Gamma \vdash_{res} C$.

Intuição da Prova por Resolução

- Seja $\{q\}$ e $\{\neg q\}$ duas cláusulas
- Ou seja, temos a fórmula $q \wedge \neg q$
- Por conta disso, quando aplicamos resolução em $\{q\}$ e $\{\neg q\}$ obtemos $\{\}$ que representa $\perp$

Tópicos

Exemplo

- Vamos provar que $\vdash_{res} p \vee \neg p$

Exemplo

- Vamos provar que $\vdash_{res} p \vee \neg p$
- $\Gamma = \emptyset$ e $\neg(p \vee \neg p) \equiv \neg p \wedge p$ que está na forma normal conjuntiva

Exemplo

- Vamos provar que $\vdash_{res} p \vee \neg p$
- $\Gamma =$ e $\neg(p \vee \neg p) \equiv \neg p \wedge p$ que está na forma normal conjuntiva
- Temos que partir de $\Gamma \cup \{\{\neg p\}, \{p\}\}$

1.	$\{p\}$	
2.	$\{\neg p\}$	
3.	$\{\}$	1, 2

Exemplo

- Vamos mostrar que $p \lor s \lor r, \neg s \lor r \vdash_{res} p \lor r$

Exemplo

- Vamos mostrar que $p \vee s \vee r, \neg s \vee r \vdash_{res} p \vee r$
- Aplicar resolução em $\{\{p, s, r\}, \{\neg s, r\}, \{\neg p\}, \{\neg r\}\}$

Exemplo

- Vamos provar que $p \lor s \lor r, \neg s \lor r \vdash_{res} p \lor r$
- Aplicar resolução em $\{\{p, s, r\}, \{\neg s, r\}, \{\neg p\}, \{\neg r\}\}$

1.	$\{p, s, r\}$	
2.	$\{\neg s, r\}$	
3.	$\{\neg p\}$	
4.	$\{\neg r\}$	
5.	$\{s, r\}$	1, 3
6.	$\{r\}$	2,5
7.	$\{\}$	4,6

Exemplo

- Outra forma de mostrar que $p \vee s \vee r, \neg s \vee r \vdash_{res} p \vee r$

1.	$\{p, s, r\}$	
2.	$\{\neg s, r\}$	
3.	$\{\neg p\}$	
4.	$\{\neg r\}$	
5.	$\{s, r\}$	1, 3
6.	$\{s\}$	5,4
7.	$\{r\}$	2,6
8.	$\{\}$	4,7

Exemplo

- Mostrar que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \vdash_{res} \neg p \wedge r$

Exemplo

- Mostrar que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \vdash_{res} \neg p \wedge r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q, r\}, \{p, r\}, \{p, \neg r\}\}$

Exemplo

- Mostrar que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \vdash_{res} \neg p \wedge r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q, r\}, \{p, r\}, \{p, \neg r\}\}$

1.	$\{\neg p, q, r\}$	
2.	$\{p, r\}$	
3.	$\{p, \neg r\}$	
4.	$\{q, r\}$	1,2
5.	$\{q, r, \neg r\}$	1,3
6.	$\{p, \neg p, q\}$	1,3
7.	$\{p\}$	2,3
8.	$\{p, q, r\}$	2,5
9.	$\{p, q, \neg r\}$	3,5
10.	$\{p, q\}$	6,7

Exemplo

- Mostrar que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \vdash_{res} \neg p \wedge r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q, r\}, \{p, r\}, \{p, \neg r\}\}$

1.	$\{\neg p, q, r\}$	
2.	$\{p, r\}$	
3.	$\{p, \neg r\}$	
4.	$\{q, r\}$	1,2
5.	$\{q, r, \neg r\}$	1,3
6.	$\{p, \neg p, q\}$	1,3
7.	$\{p\}$	2,3
8.	$\{p, q, r\}$	2,5
9.	$\{p, q, \neg r\}$	3,5
10.	$\{p, q\}$	6,7

- Temos que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \nvdash_{res} \neg p \wedge r$

Exemplo

Lema

Seja S um conjunto de cláusulas e $C = \{l_1, ..., l_k\}$ em que existem literais complementares $l_i \in C$ e $l_j \in C$. Então $S \equiv S - \{C\}$.

- Cláusulas da forma $C = \{l_1, ..., l_k\}$ com literais complementares $l_i \in C$ e $l_j \in C$ podem ser desconsideradas.
- Chamamos de cláusulas triviais.

Lema

Sejam as cláusulas $C_1 = \{a_1, ..., a_n\}$ e $C_2 = \{b_1, ..., b_m\}$ com literais complementares a_i e b_j e com literais complementares a_k e b_l. Então $res(C_1, C_2)$ é uma cláusula trivial.

- Não precisamos aplicar resolução em cláusulas com dois pares de literais complementares

Exemplo

- Mostrar que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \vdash_{res} \neg p \wedge r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q, r\}, \{p, r\}, \{p, \neg r\}\}$

1.	$\{\neg p, q, r\}$	
2.	$\{p, r\}$	
3.	$\{p, \neg r\}$	
4.	$\{q, r\}$	1,2
5.	$\{p\}$	2,3
6.	$\{p, q\}$	3,4

- Temos que $\neg p \vee q \vee r, p \vee r \nvdash_{res} \neg p \wedge r$

Teorema da Corretude e Completude da Resolução

Seja Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. $\Gamma \vdash_{res} \varphi$ se e somente se $\Gamma \models \varphi$.

Algoritmo

```
function RESOLUTION(Γ, φ)
    clauses ← CNF(Γ ∪ {¬φ})
    novas ← {}
    while True do
        for C1 ∈ clauses do
            for C2 ∈ clauses do
                resolventes ← Res(C1, C2)
                if {} ∈ resolventes then
                    return True
                novas ← novas ∪ resolventes
        if novas ⊆ clauses then
            return False
        clauses ← clauses ∪ novas
```

Algoritmo

```
function RESOLUTION(Γ, φ)
    clauses ← CNF(Γ ∪ {¬φ})
    novas ← {}
    while True do
        for C1 ∈ clauses do
            for C2 ∈ clauses do
                resolventes ← Res(C1, C2)
                if {} ∈ resolventes then
                    return True
                novas ← novas ∪ resolventes
        if novas ⊆ clauses then
            return False
        clauses ← clauses ∪ novas
```

- $CNF(\{\psi_1, ..., \psi_n\})$ converte todos os ψ_i na forma normal conjuntiva e retorna o conjunto de cláusulas na notação de conjuntos.
- $Res(C_1, C_2)$ retorna $\{res(C_1, C_2)\}$ ou $\{\}$ quando não tem resolvente

Algoritmo

- O algoritmo anterior pode retornar as cláusulas obtidas caso não obtenha a cláusula vazia.
- A partir das cláusulas obtidas, podemos descobrir uma valoração em que as premissas são verdadeiras mas a conclusão é falsa.

```
function VALUATION(clauses)
    val ← {}
    atoms ← atom(clauses)
    for atom ∈ atoms do
        if {¬atom} ∈ clauses then
            val ← val ∪ {¬atom}
            lit ← ¬atom
        else
            val ← val ∪ {atom}
            lit ← atom
        for clause ∈ clauses do
            if lit ∈ clause then
                clauses ← clauses − {clause}
        for clause ∈ clauses do
            if ¬lit ∈ clause then
                clause ← clause − {¬lit}
    return val
```

Exemplo

- Vamos verificar se $p \to q, q \to r \vdash_{res} p \to r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$

Exemplo

- Vamos verificar se $p \to q, q \to r \vdash_{res} p \to r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$

1.	$\{\neg p, q\}$	
2.	$\{\neg q, r\}$	
3.	$\{p\}$	
4.	$\{\neg r\}$	
5.	$\{q\}$	1, 3
6.	$\{\neg q\}$	2,4
7.	$\{r\}$	2,5
8.	$\{\}$	5,6

Exemplo

- Verificar se $\neg p \lor q, p \lor r, p \lor \neg q \vdash_{res} q \land r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q\}, \{p, r\}, \{p, \neg q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$

Exemplo

- Verificar se $\neg p \vee q, p \vee r, p \vee \neg q \vdash_{res} q \wedge r$
- Aplicar resolução em $\{\{\neg p, q\}, \{p, r\}, \{p, \neg q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$

1.	$\{\neg p, q\}$	
2.	$\{p, r\}$	
3.	$\{p, \neg q\}$	
4.	$\{\neg q, \neg r\}$	
5.	$\{q, r\}$	1, 2
6.	$\{\neg p, \neg r\}$	1, 4

- $\neg p \vee q, p \vee r, p \vee \neg q \nvdash_{res} q \wedge r$

Considerações

- Por causa da simplicidade, tem sido um dos métodos mais utilizados nas implementações
- Fundamenta o funcionamento da linguagem de programação em lógica Prolog
- A escolha das cláusulas pode mudar a estrutura da resolução