Lógica para Computação

Linguagem da Lógica de Primeira Ordem

Thiago Alves Rocha

thiagoalvesifce@gmail.com

Tópicos

Introdução

- Seja a sentença declarativa "Todo estudante é mais novo que algum professor"
- Como a sentença pode ser representada em Lógica Proposicional?

Introdução

- Seja a sentença declarativa "Todo estudante é mais novo que algum professor"
- Como a sentença pode ser representada em Lógica Proposicional?
- p: "Todo estudante é mais novo que algum professor"

Introdução

- Seja a sentença declarativa "Todo estudante é mais novo que algum professor"
- Como a sentença pode ser representada em Lógica Proposicional?
- p: "Todo estudante é mais novo que algum professor"
- A sentença tem uma estrutura interna que não é considerada na proposição p

Introdução

- Todo aluno de Computação é inteligente.
- João é aluno de Computação.
- O que podemos concluir?

Introdução

- Todo aluno de Computação é inteligente.
- João é aluno de Computação.
- O que podemos concluir?
- João é inteligente.

Introdução

- Usando Lógica Proposicional:
- p: “Todo aluno de Computação é inteligente”
- q: “João é aluno de Computação.”
- O que podemos concluir?

Introdução

- Usando Lógica Proposicional:
- p: “Todo aluno de Computação é inteligente”
- q: “João é aluno de Computação.”
- O que podemos concluir?
- Não é possível concluir que “João é inteligente” usando lógica proposicional.

Predicados

- "Todo estudante é mais novo que algum professor"
- A senteça fala das propriedades "ser estudante", "ser mais novo que outra pessoa" e "ser professor"
- Vamos usar predicados para representar propriedades
- E(x) para representar que x é um estudante
- P(x) para representar que x é professor
- N(x, y) para representar que x é mais novo que y
- E, P e N são chamados de predicados

Aridade dos Predicados

- E e P são predicados unários
- N é um predicado binários
- A lógica de primeira ordem permite predicados de qualquer aridade aridade

Funções e Constantes

- "A mãe de João é professora"
- A setença fala de dois objetos concretos: a mãe do João e o João
- Podemos usar constantes e funções para representar objetos concretos
- Constante j para representar João
- m(j) para representar a mãe do João
- m é uma função aplicada em j
- $P(m(j))$

Variáveis e Quantificadores

- Como representar "Todo estudante é mais novo que algum professor"?
- Podemos usar variáveis no lugar de objetos concretos
- E(x), P(x), P(z), N(x,y)
- Quantificadores para representar "Todo" e "algum"
- $\forall$ e $\exists$
- $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(N(x, y) \wedge P(y)))$
- Para todo x, se x é estudante então existe y tal que x é mais novo que y e y é professor

Exemplo

- Para a sentença declarativa: "Nem todo pássaro consegue voar"

Exemplo

- Para a sentença declarativa: "Nem todo pássaro consegue voar"
- P(y): "y é pássaro"
- V(y): "y voa"
- $\neg(\forall x(P(x) \rightarrow V(x)))$

Exemplo

- "Nenhum mamífero tem penas"

Exemplo

- “Nenhum mamífero tem penas”
- M(z): “z é mamífero”
- P(z): “representa que z tem penas”
- $\neg(\exists x(M(x) \land P(x)))$

Exemplo

- “Toda criança é mais nova que sua mãe”

Exemplo

- “Toda criança é mais nova que sua mãe”
- C(x): “x é criança”
- N(x,y): “x é mais novo que y”
- m(x) representa a mãe de x
- $\forall x(C(x) \rightarrow N(x, m(x)))$

Alfabeto

Definição

Seja $VAR = \{x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, w_1, ...\}$ o conjunto de variáveis.
Seja $\mathcal{F} = \{f, g, h, f_1, g_1, h_1, ...\}$ o conjunto de símbolos de funções em que cada função tem uma aridade.
Seja $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, ...\}$ o conjunto de símbolos de predicados em que cada predicado tem uma aridade.
Seja $\mathcal{C} = \{a, b, c, a_1, b_1, c_1, ...\}$ o conjunto de símbolos de constantes.
O alfabeto da lógica de primeira ordem
$A_{lpo} = VAR \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \{(,), \rightarrow, \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}$.

Elementos Básicos

- Na lógica de primeira ordem temos dois tipos de entidades
- Objetos dos quais falamos: constantes, variáveis e funções aplicadas em argumentos
- a, $f(x)$, $f(c)$ em que f é símbolo de função, a e c são símbolos de constantes e x é variável
- Chamados de **termos**

Termos

Definição

Se $c \in \mathcal{C}$ então c é um termo
Se $x \in VAR$ então x é um termo
Se $t_1, ..., t_n$ são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n então $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo

Termos

Definição

Se $c \in \mathcal{C}$ então c é um termo
Se $x \in VAR$ então x é um termo
Se $t_1, ..., t_n$ são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n então $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo

- $c, x, f(c), f(x), g(f(x), c), f(g(c, x))$, em que f é unária e g é binária, são termos.
- $g(x)$, $f(f(c), x)$ e $f(g)$, em que f é unária e g é binária, **não** são termos.

Variáveis de um Termo

Definição

$$var(t) = \begin{cases} \{v\}, & \text{se } t \text{ é variável v.} \\ \emptyset, & \text{se } t \text{ é constante.} \\ var(t_1) \cup ... \cup var(t_n), & \text{se } t = f(t_1, ..., t_n) \end{cases}$$

Variáveis de um Termo

Definição

$$var(t) = \begin{cases} \{v\}, & \text{se } t \text{ é variável v.} \\ \emptyset, & \text{se } t \text{ é constante.} \\ var(t_1) \cup ... \cup var(t_n), & \text{se } t = f(t_1, ..., t_n) \end{cases}$$

- $var(g(f(x), y))$?

Elementos Básicos

- Entidades que denotam valor verdade: fórmulas
- $(P(f(x)) \rightarrow N(x, f(x)))$ em que P e N são símbolos de predicado, f é símbolo de função e x é variável

Fórmulas

Definição

Se $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n e $t_1, ..., t_n$ são termos então $P(t_1, ..., t_n)$ é fórmula atômica.
Se ϕ é fórmula então $(\neg\phi)$ é fórmula.
Se ϕ e ψ são fórmula então (ϕ) com $\{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ é fórmula.
Se ϕ é fórmula e x é uma variável então $(\forall x\phi)$ e $(\exists x\phi)$ são fórmulas.

Construção de Fórmulas

- $H \in \mathcal{P}$ unário, $N \in \mathcal{P}$ binário, $m \in \mathcal{F}$ unário e $a \in \mathcal{C}$
- $H(x)$ e $N(m(a), y)$ são fórmulas
- Como $H(x)$ e $N(m(a), y)$ são fórmulas então $(H(x) \vee N(m(a), y))$ é fórmula
- Como $(H(x) \vee N(m(a), y))$ é fórmula então $(\forall y(H(x) \vee N(m(a), y)))$ é fórmula

Subfórmulas

- Subfórmulas de $(\exists y(P(y) \wedge (\forall x Q(x))))$:
- $P(y), Q(x), (\forall x Q(x)), (P(y) \wedge (\forall x Q(x))), (\exists y(P(y) \wedge (\forall x Q(x))))$.

Subfórmulas

Definição

$$sub(\phi) = \begin{cases} \{\phi\}, & \text{se } \phi \text{ é atômica.} \\ \{\phi\} \cup sub(\psi), & \text{se } \phi = (\neg\psi) \\ \{\phi\} \cup sub(\psi_1) \cup sub(\psi_2), & \text{se } \phi = (\psi_1 \Box \psi_2) \\ \{\phi\} \cup sub(\psi), & \text{se } \phi = (Qv\psi) \end{cases}$$

Com $\Box \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $v \in VAR$.

Precedência

- $\neg$, $\forall$, $\exists$
- $\wedge$, $\vee$
- $\rightarrow$ e é associativo pela direita

Exemplo

- $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \wedge S(x, y)$

Exemplo

- $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \land S(x, y)$
- $((\forall x P(x)) \rightarrow (Q(x) \land S(x, y)))$

Variáveis Livres e Ligadas

- Variáveis ocorrem de forma diferente nas fórmulas
- $(\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y)))$
- Temos as variáveis que aparecem perto dos quantificadores
- As variáveis no escopo do $\forall x$ são ditas ligadas pelo $\forall x$
- A variável y é livre

Escopo do Quantificador

Definição

Seja φ uma fórmula da lógica de primeira ordem.
Se $(Qv\psi)$ é subfórmula de φ em que $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $v \in VAR$ então o escopo do Qv é a subfórmula ψ.

Escopo do Quantificador

Definição

Seja φ uma fórmula da lógica de primeira ordem.
Se $(Qv\psi)$ é subfórmula de φ em que $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $v \in VAR$ então o escopo do Qv é a subfórmula ψ.

- $((\exists z(Q(z) \vee R(y))) \wedge P(x))$
- O escopo de $\exists z$ é $(Q(z) \vee R(y))$

Variáveis Livres e Ligadas

Definição

Seja x uma variável e φ uma fórmula da lógica de primeira ordem.
Uma ocorrência de x em φ é ligada se está no escopo de um Qx em φ em que $Q \in \{\forall, \exists\}$.
Uma ocorrência de x em φ é livre se não for ligada.

Variáveis Livres e Ligadas

Definição

Seja x uma variável e φ uma fórmula da lógica de primeira ordem.
Uma ocorrência de x em φ é ligada se está no escopo de um Qx em φ em que $Q \in \{\forall, \exists\}$.
Uma ocorrência de x em φ é livre se não for ligada.

- $\forall x(Q(z) \wedge P(x))$
- Temos z livre e x ligada

Variáveis Livres e Ligadas

- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
- O escopo de um quantificador mais externo pode ser omitido caso ocorra outro quantificador mais interno com mesma variável
- O x de $P(x)$ é ligado ao $\forall x$ e o x de $Q(x)$ é ligado ao $\exists x$

Variáveis Livres e Ligadas

- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
- O escopo de um quantificador mais externo pode ser omitido caso ocorra outro quantificador mais interno com mesma variável
- O x de $P(x)$ é ligado ao $\forall x$ e o x de $Q(x)$ é ligado ao $\exists x$

- $(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$
- Uma mesma variável pode ter ocorrência livre e ligada
- Os x em $P(x)$ e $Q(x)$ são ligado pelo $\forall x$
- O x em $\neg P(x)$ e o y são livres

Variáveis Livres e Ligadas

- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
- O escopo de um quantificador mais externo pode ser omitido caso ocorra outro quantificador mais interno com mesma variável
- O x de $P(x)$ é ligado ao $\forall x$ e o x de $Q(x)$ é ligado ao $\exists x$

- $(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$
- Uma mesma variável pode ter ocorrência livre e ligada
- Os x em $P(x)$ e $Q(x)$ são ligado pelo $\forall x$
- O x em $\neg P(x)$ e o y são livres

- Conjunto de variáveis livres em $(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$?

Variáveis Livres

Definição

$$free(\phi) = \begin{cases} var(t_1) \cup ... \cup var(t_n), & \text{se } \phi = P(t_1, ..., t_n) \\ free(\psi), & \text{se } \phi = (\neg\psi) \\ free(\psi_1) \cup free(\psi_2), & \text{se } \phi = (\psi_1 \Box \psi_2) \\ free(\psi) - \{v\}, & \text{se } \phi = (Qv\psi) \end{cases}$$

Com $\Box \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $v \in VAR$.