Entretanto, esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de $\vec{a}$ é para a direita e para baixo na Fig. 4-8. Porém, sabemos pelas componentes x e y que a orientação de $\vec{a}$ é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que $-35°$, mas não é mostrado pela calculadora, somamos 180°:

$$-35° + 180° = 145°. \quad \text{(Resposta)}$$

Este novo resultado *é* compatível com as componentes de $\vec{a}$. Observe que $\vec{a}$ tem o mesmo módulo e a mesma orientação para qualquer instante de tempo, já que a aceleração do coelho é constante.

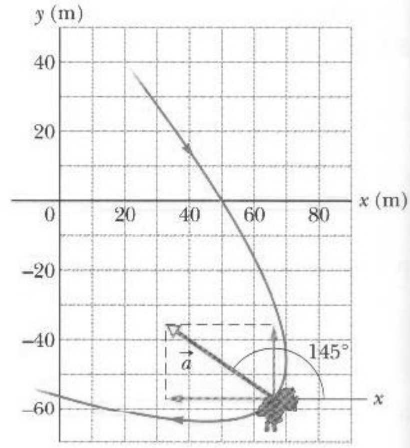

FIG. 4-8 A aceleração $\vec{a}$ do coelho em $t = 15$ s. O coelho possui essa mesma aceleração em todos os pontos de sua trajetória.

Exemplo 4-5

Uma partícula cuja velocidade é $\vec{v}_0 = -2{,}0\hat{\imath} + 4{,}0\hat{\jmath}$ (em metros por segundo) em $t = 0$ sofre uma aceleração constante $\vec{a}$, de módulo $a = 3{,}0$ m/s², que faz um ângulo $\theta = 130°$ com o semi-eixo x positivo. Qual é a velocidade $\vec{v}$ da partícula em $t = 5{,}0$ s?

IDÉIA-CHAVE Como a aceleração é constante, a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) pode ser usada, mas devemos aplicá-la separadamente ao movimento paralelo ao eixo x e para o movimento paralelo ao eixo y.

Cálculos: Determinamos as componentes da velocidade, v_x e v_y, a partir das equações

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{e} \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Nessas equações, v_{0x} (= −2,0 m/s) e v_{0y} (= 4,0 m/s) são as componentes x e y de $\vec{v}_0$ e a_x e a_y são as componentes x e y de $\vec{a}$. Para determinar a_x e a_y podemos decompor $\vec{a}$ usando uma calculadora ou com o auxílio da Eq. 3-5:

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\ \text{m/s}^2)(\cos 130°) = -1{,}93\ \text{m/s}^2,$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta = (3{,}0\ \text{m/s}^2)(\text{sen}\ 130°) = +2{,}30\ \text{m/s}^2.$$

Quando esses valores são inseridos nas equações de v_x e v_y, descobrimos que no instante $t = 5{,}0$ s

$$v_x = -2{,}0\ \text{m/s} + (-1{,}93\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{s}) = -11{,}65\ \text{m/s},$$
$$v_y = 4{,}0\ \text{m/s} + (2{,}30\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{s}) = 15{,}50\ \text{m/s}.$$

Assim, em $t = 5{,}0$ s temos, depois de arredondar,

$$\vec{v} = (-12\ \text{m/s})\hat{\imath} + (16\ \text{m/s})\hat{\jmath}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando uma calculadora ou a Eq. 3-6 descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19{,}4 \approx 19\ \text{m/s} \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 127° \approx 130°. \quad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Que resultado a sua calculadora fornece, 127° ou −53°? Desenhe o vetor $\vec{v}$ com suas componentes para verificar qual dos dois ângulos é mais razoável.

4-5 | Movimento de Projéteis

Consideraremos a seguir um caso especial de movimento bidimensional: Uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre $\vec{g}$, dirigida para baixo. Uma partícula que se move dessa forma é chamada de **projétil** (o que significa que é projetada ou lançada), e seu movimento é chamado de **movimento balístico**. Um projétil pode ser uma bola de tênis (Fig. 4-9) ou de pingue-pongue, mas não um avião ou um pato. Muitos esportes (do golfe e do futebol ao lacrosse e ao raquetebol) envolvem os movimentos balísticos de uma bola; jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esses movimentos para obter o máximo de vantagem. O jogador que descobriu a rebatida em Z no raquetebol na década de 1970, por exemplo, vencia os jogos com facilidade porque a trajetória peculiar da bola no fundo da quadra surpreendia os adversários.

Nosso objetivo atual é analisar o movimento dos projéteis usando as ferramentas descritas nas Seções 4-2 a 4-4 para o movimento bidimensional, desprezando a influência do ar. A Fig. 4-10, que será discutida na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil quando o efeito do ar pode ser ignorado. O projétil é lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathrm{i}} + v_{0y}\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-19}$$

As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\vec{v}_0$ e o semi-eixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0. \tag{4-20}$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do projétil mudam continuamente, mas o vetor aceleração $\vec{a}$ é constante e está *sempre* dirigido verticalmente para baixo. O projétil *não possui* aceleração horizontal.

O movimento de projéteis, como os das Figs. 4-9 e 4-10, parece complicado, mas temos a seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):

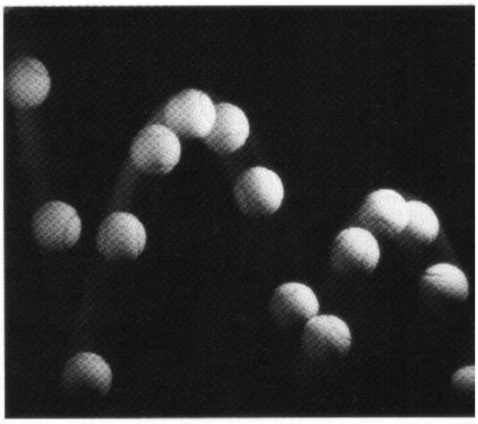

FIG. 4-9 Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis amarela quicando em uma superfície dura. Entre os impactos, a trajetória da bola é balística. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.

No movimento de projéteis, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.

Esta propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com *aceleração nula*) e outro para o movimento vertical (com *aceleração constante para baixo*). Apresentamos a seguir dois experimentos que mostram que o movimento horizontal e o movimento vertical são realmente independentes.

Duas Bolas de Golfe

A Fig. 4-11 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma que simplesmente se deixou cair e outra que é lançada horizontalmente por uma mola. As bolas de golfe têm o mesmo movimento vertical; ambas percorrem a mesma distância vertical no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola estar se movendo horizontalmente enquanto está caindo não afeta o seu movimento vertical*, ou seja, os movimentos horizontal e vertical são independentes.

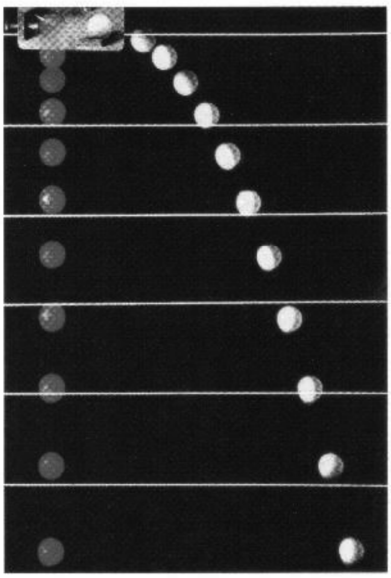

FIG. 4-11 Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.

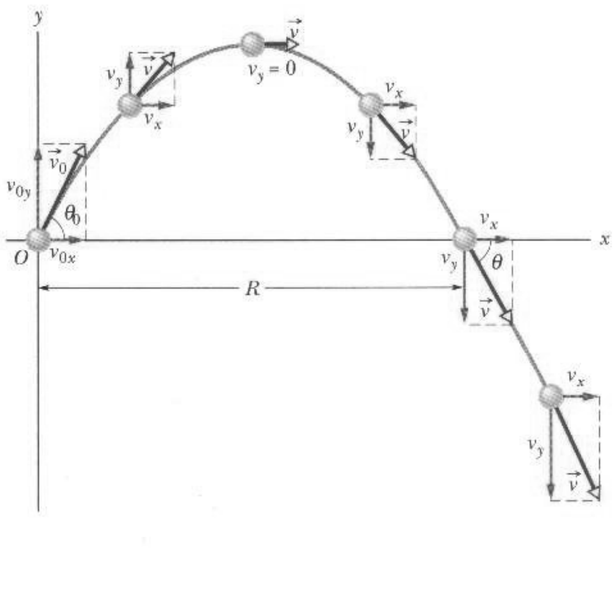

FIG. 4-10 Trajetória de um projétil que é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. São mostradas a velocidade inicial e as velocidades em vários pontos ao longo da trajetória, juntamente com suas componentes. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, mas a componente vertical muda continuamente. O *alcance R* é a distância horizontal percorrida pelo projétil *quando retorna à altura do lançamento*.

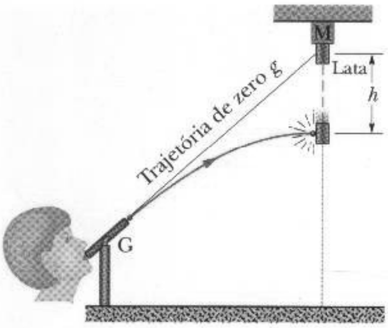

FIG. 4-12 A bola sempre acerta na lata que está caindo, já que as duas percorrem a mesma distância h em queda livre.

Uma Demonstração Interessante

A Fig. 4-12 mostra uma demonstração que tem animado muitas aulas de física. Ela envolve um canudo G, através do qual se pode soprar pequenas bolas que se comportam como projéteis. O alvo é uma lata suspensa por um eletroímã M, e o tubo é apontado para a lata. O experimento é arranjado de tal forma que o ímã solta a lata no mesmo instante em que a bola deixa o tubo.

Se g (o módulo da aceleração de queda livre) fosse zero, a bola seguiria a trajetória em linha reta mostrada na Fig. 4-12 e a lata continuaria no mesmo lugar após ter sido solta pelo eletroímã. Assim, a bola certamente atingiria a lata.

Na verdade, g *não é* zero, mas a bola *atinge* a lata! Como mostra a Fig. 4-12, a aceleração da gravidade faz com que a bola e a lata sofram o mesmo deslocamento para baixo, h, em relação à posição que teriam, a cada instante, se a gravidade fosse nula. Quanto maior a força do sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo que a bola leva para se chocar com a lata e menor o valor de h.

TESTE 3 Em um certo instante, uma bola que descreve um movimento balístico tem uma velocidade $\vec{v} = 25\hat{\imath} - 4{,}9\hat{\jmath}$ (o eixo x é horizontal, o eixo y é para cima e $\vec{v}$ está em metros por segundo). A bola já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

4-6 | Análise do Movimento de um Projétil

Agora estamos preparados para analisar o movimento horizontal e vertical de um projétil.

Movimento Horizontal

Como *não existe aceleração* na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao seu valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória, como mostra a Fig. 4-13. Em qualquer instante t, o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado por

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \tag{4-21}$$

FIG. 4-13 A componente vertical da velocidade deste skatista está variando, mas não a componente horizontal, que é igual à velocidade do skate. Em conseqüência, o skate permanece abaixo do atleta, permitindo que ele pouse no skate após o salto. *Fonte:* Jamie Budge/Liaison/Getty Images, Inc.

Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento que discutimos na Seção 2-9 para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. Assim, as equações da Tabela 2-1 podem ser usadas, desde que a seja substituído por $-g$ e o eixo x seja substituído pelo eixo y. Assim, por exemplo, a Eq. 2-15 se torna

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \tag{4-22}$$

onde a componente vertical da velocidade inicial, v_{0y}, é substituída pela expressão equivalente $v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. Da mesma forma, as Eqs. 2-11 e 2-16 se tornam

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \tag{4-23}$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4-24}$$

Como mostram a Fig. 4-10 e a Eq. 4-23, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima.

Inicialmente ela está dirigida para cima e seu módulo diminui continuamente até se anular, *o que determina a altura máxima da trajetória*. Em seguida, a componente vertical da velocidade muda de sentido e seu módulo passa a aumentar com o tempo.

Equação da Trajetória

Podemos obter a equação do caminho percorrido pelo projétil (sua **trajetória**) eliminando o tempo t nas Eqs. 4-21 e 4-22. Explicitando t na Eq. 4-21 e substituindo o resultado na Eq. 4-22, obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad \text{(trajetória)}. \tag{4-25}$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-10. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas Eqs. 4-21 e 4-22, respectivamente. Como g, θ_0 e v_0 são constantes, a Eq. 4-25 é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. Como esta é a equação de uma parábola, a trajetória é *parabólica*.

Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R de um projétil, como mostra a Fig. 4-10, é a distância *horizontal* percorrida pelo projétil até voltar à sua altura inicial (altura de lançamento). Para determinar o alcance R, fazemos $x = x_0 = R$ na Eq. 4-21 e $y - y_0 = 0$ na Eq. 4-22, obtendo

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

e

$$0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t nessas duas equações, obtemos

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0.$$

Usando a identidade $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0$ (veja o Apêndice E), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-26}$$

Atenção: Esta equação *não* fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que R na Eq. 4-26 atinge o valor máximo para $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90°$ ou $\theta_0 = 45°$.

O alcance horizontal R é máximo para um ângulo de lançamento de 45°.

Quando a altura final é diferente da altura de lançamento, como acontece no arremesso de peso, lançamento de disco e basquetebol, a distância horizontal máxima não é atingida para um ângulo de lançamento de 45°.

Efeito do Ar

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Entretanto, em muitas situações a diferença entre a trajetória calculada dessa forma e a trajetória real do projétil pode ser muito grande, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 44,7 m/s. A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condi-

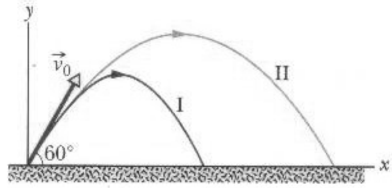

FIG. 4-14 (I) Trajetória teórica de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball," Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

TABELA 4-1

Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol*

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

*Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 44,7 m/s.

ções normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.

TESTE 4 Uma bola de beisebol é rebatida em direção ao campo de jogo. Durante o percurso (ignorando o efeito do ar), o que acontece com as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade? Quais são as componentes (c) horizontal e (d) vertical da aceleração durante a subida, durante a descida e no ponto mais alto da trajetória da bola?

Exemplo 4-6 Aumente sua capacidade

Na Fig. 4-15 um avião de salvamento voa a 198 km/h (= 55,0 m/s), a uma altura constante de 500 m, rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa.

(a) Qual deve ser o ângulo ϕ da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa?

IDÉIAS-CHAVE Depois de liberada, a balsa é um projétil; assim, seus movimentos horizontal e vertical podem ser examinados separadamente (não é preciso levar em conta a forma da trajetória).

Cálculos: Na Fig. 4-15 vemos que ϕ é dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h}, \tag{4-27}$$

onde x é a coordenada horizontal da vítima (e da balsa ao chegar à água) e $h = 500$ m. Podemos calcular x com o auxílio da Eq. 4-21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4-28}$$

Sabemos que $x_0 = 0$ porque a origem foi colocada no ponto de lançamento. Como a balsa é *deixada cair* e não lançada do avião, sua velocidade inicial $\vec{v}_0$ é igual à velocidade do avião. Assim, sabemos também que a velocidade inicial tem módulo $v_0 = 55{,}0$ m/s e ângulo $\theta_0 = 0°$ (medido em relação ao semi-eixo x positivo). Entretanto, não conhecemos o tempo t que a balsa leva para percorrer a distância do avião até a vítima.

Para determinar o valor de t, temos que considerar o movimento *vertical* e, mais especificamente, a Eq. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4-29}$$

onde o deslocamento vertical $y - y_0$ da balsa é -500 m (o valor negativo indica que a balsa se move *para baixo*). Assim,

$$-500\text{ m} = (55{,}0\text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $t = 10{,}1$. Substituindo este valor na Eq. 4-28, temos:

$$x - 0 = (55{,}0\text{ m/s})(\cos 0°)(10{,}1\text{ s}),$$

ou

$$x = 555{,}5\text{ m}.$$

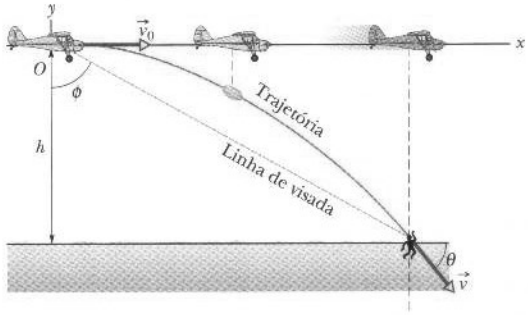

FIG. 4-15 Um avião lança uma balsa enquanto se desloca com velocidade constante em um vôo horizontal. Durante a queda a velocidade horizontal da balsa permanece igual à velocidade do avião.

Nesse caso, a Eq. 4-27 nos dá

$$\phi = \tan^{-1}\frac{555{,}5\text{ m}}{500\text{ m}} = 48{,}0°. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é sua velocidade $\vec{v}$ em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIAS-CHAVE (1) As componentes horizontal e vertical da velocidade da balsa são independentes. (2) A componente v_x não muda em relação ao valor inicial $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, pois não existe uma aceleração horizontal. (3) A componente v_y muda em relação ao valor inicial $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, pois existe uma aceleração vertical.

Cálculos: Quando a balsa atinge a água,

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (55{,}0\text{ m/s})(\cos 0°) = 55{,}0\text{ m/s}.$$

Usando a Eq. 4-23 e o tempo de queda da balsa $t = 10{,}1$ s, descobrimos que quando a balsa atinge a água

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \\ &= (55{,}0\text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°) - (9{,}8\text{ m/s}^2)(10{,}1\text{ s}) \\ &= -99{,}0\text{ m/s}. \end{aligned} \tag{4-30}$$

Assim, no momento em que a balsa atinge a água, sua velocidade é

$$\vec{v} = (55{,}0\text{ m/s})\hat{\imath} - (99{,}0\text{ m/s})\hat{\jmath}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando a Eq. 3-6 como guia, descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são

$$v = 113\text{ m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60{,}9°. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 4-7

A Fig. 4-16 mostra um navio pirata a 560 m de um forte que protege a entrada de um porto. Um canhão de defesa, situado ao nível do mar, dispara balas com uma velocidade inicial $v_0 = 82$ m/s.

(a) Com que ângulo θ_0 em relação à horizontal as balas devem ser disparadas para acertar o navio?

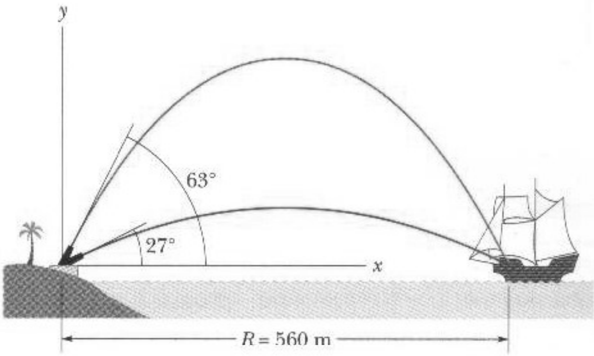

FIG. 4-16 Um navio pirata sendo atacado.

IDÉIAS-CHAVE (1) Uma bala disparada pelo canhão é um projétil. Estamos interessados em uma equação que relacione o ângulo de lançamento θ_0 ao deslocamento horizontal da bala entre o canhão e o navio. (2) Como o canhão e o navio estão na mesma altura, o deslocamento horizontal é igual ao alcance.

Cálculos: Podemos relacionar o ângulo de lançamento θ_0 ao alcance R através da Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$, que pode ser escrita na forma

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m/s})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} 0{,}816. \qquad (4\text{-}31)$$

Uma solução de $\operatorname{sen}^{-1} 0{,}816$ (54,7°) é a fornecida pelas calculadoras; subtraindo-a de 180°, obtemos a outra solução (125,3°). Assim, a Eq. 4-31 nos dá

$$\theta_0 = 27° \quad \text{e} \quad \theta_0 = 63°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o alcance máximo das balas de canhão?

Cálculos: Como vimos anteriormente, o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Assim,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{(82\ \mathrm{m/s})^2}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}\operatorname{sen}(2 \times 45°)$$
$$= 686\ \mathrm{m} \approx 690\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Quando o navio pirata se afasta do porto, a diferença entre os dois ângulos de elevação que permitem acertar o navio diminui até que eles se tornam iguais entre si e iguais a $\theta = 45°$ quando o navio está a 690 m de distância. Para distâncias maiores é impossível acertar o navio.

Exemplo 4-8

Suponha que um jogador de beisebol B rebata uma bola na direção de um jogador F com uma velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s e um ângulo inicial $\theta_0 = 35°$. Durante o trajeto da bola uma reta ligando o jogador F à posição da bola faz um ângulo ϕ com o solo. Faça um gráfico do ângulo de visada ϕ em função do tempo t, supondo (a) que o jogador F está na posição correta para apanhar a bola; (b) que o jogador está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B; (c) está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do batedor B.

IDÉIAS-CHAVE (1) Desprezando a resistência do ar, a bola é um projétil para o qual o movimento vertical e o movimento horizontal podem ser analisados separadamente. (2) Supondo que a bola é apanhada aproximadamente na mesma altura em que é rebatida, a distância horizontal percorrida pela bola é o alcance R, dado pela Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$.

Cálculos: A bola será apanhada se a distância entre o jogador F e o jogador B for igual ao alcance R da bola. De acordo com a Eq. 4-26, temos:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{(40\ \mathrm{m/s})^2}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}\operatorname{sen}(70°) = 153{,}42\ \mathrm{m}. \qquad (4\text{-}32)$$

A Fig. 4-17a mostra um instantâneo da bola quando ela se encontra a altura y e a uma distância horizontal x do jogador B (que está na origem). A distância horizontal entre a bola e o jogador F é $R - x$, e o ângulo de visada da bola, ϕ, do ponto de vista do jogador F, é dado por $\tan\phi = y/(R - x)$. Para calcular a altura y usamos a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - gt^2/2$, fazendo $y_0 = 0$. Para calcular a distância horizontal x usamos a Eq. 4-21, $x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t$, fazendo $x_0 = 0$. Nesse caso, para $v_0 = 40$ m/s e $\theta_0 = 35°$, temos:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{(40\operatorname{sen} 35°)t - 4{,}9t^2}{153{,}42 - (40\cos 35°)t}. \qquad (4\text{-}33)$$

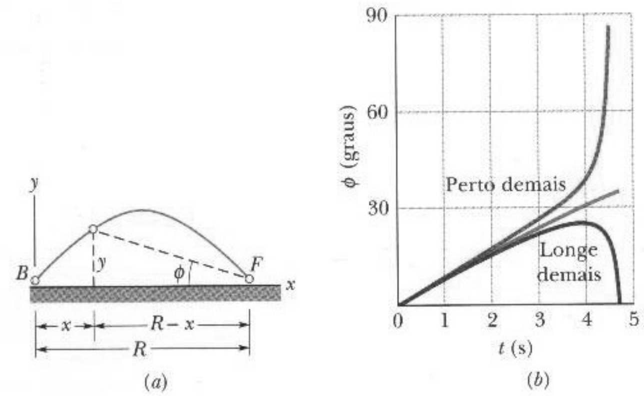

FIG. 4-17 (*a*) Ângulo de elevação ϕ de uma bola em relação a um jogador. (*b*) Gráfico de ϕ em função do tempo *t*.

A curva do meio da Fig. 4-17*b* é o gráfico desta função. Vemos que o ângulo de visada aumenta de forma quase linear durante todo o percurso da bola.

Se o jogador *F* está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador *B*, substituímos a distância de 153,42 m da Eq. 4-33 por 153,42 m − 6,0 m = 147,42 m. O gráfico da nova função é a curva "perto demais" da Fig. 4-17*b*. Nesse caso, o ângulo de visada da bola aumenta rapidamente na parte final do percurso, quando a bola passa sobre a cabeça do jogador. Se o jogador *F* está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do jogador *B*, substituímos a distância de 153,42 m da Eq. 4-33 por 153,42 + 6,0 m = 159,42 m. O gráfico da nova função é a curva "longe demais" da Fig. 4-17*b*. Nesse caso, o ângulo de visada primeiro aumenta e depois diminui rapidamente. Assim, se a bola é rebatida na direção do jogador *F*, este é capaz de avaliar, pelo modo como o ângulo de visada ϕ varia com o tempo, se deve permanecer onde está, correr na direção do jogador *B* ou correr na direção oposta.

Exemplo 4-9 Aumente sua capacidade

Uma bola de golfe é lançada no instante $t = 0$, como mostra a Fig. 4-18*a*. A Fig. 4-18*b* mostra o ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo *x* positivo em função do tempo *t*. A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Determine o módulo v_0 da velocidade de lançamento da bola, a altura $(y - y_0)$ do ponto em que a bola atinge o solo em relação ao ponto de lançamento e a direção do movimento da bola no momento em que atinge o solo.

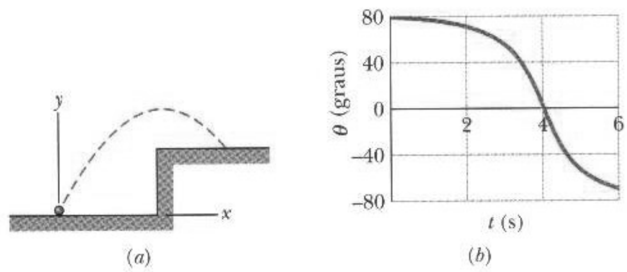

FIG. 4-18 (*a*) Trajetória de uma bola de golfe lançada em um terreno mais elevado. (*b*) Gráfico do ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo *x* positivo em função do tempo *t*.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como a bala se comporta como um projétil, as componentes horizontal e vertical do movimento podem ser analisadas separadamente. (2) A componente horizontal do movimento da bola, $v_x = v_0 \cos \theta_0$, não varia com o tempo. (3) A componente vertical do movimento da bola, v_y, *varia* com o tempo e se anula quando a bola atinge a altura máxima. (4) A direção do movimento da bola em qualquer instante é o ângulo do vetor velocidade $\vec{v}$ nesse instante. Esse ângulo é dado por $\tan \theta = v_x/v_y$, com as componentes da velocidade calculadas para esse instante.

Cálculos: Quando a bola atinge a altura máxima, $v_y = 0$. Assim, a direção da velocidade $\vec{v}$ é horizontal, ou seja, $\theta = 0°$. Observando o gráfico, vemos que isso acontece no instante $t = 0{,}4$ s. Vemos também que o ângulo de lançamento θ_0 (o ângulo no instante $t = 0$) é 80°. Usando a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$, com $t = 4{,}0$ s, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $v_y = 0$, obtemos

$$v_0 = 39{,}80 \approx 40 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Usando a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - gt^2/2$, com $t = 6{,}00$ s, obtemos

$$y - y_0 = 58{,}77 \text{ m} \approx 59 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

No momento em que a bola se choca com o solo, sua velocidade horizontal v_x ainda é $v_0 \cos \theta_0$; substituindo v_0 e θ_0 por seus valores, obtemos $v_x = 6{,}911$ m/s. Para determinar a velocidade vertical nesse instante usamos a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$, com $t = 6{,}00$ s, o que nos dá $v_y = -19{,}60$ m/s. Assim, o ângulo da direção do movimento da bola com a horizontal no momento em que se choca com o solo é

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{-19{,}60 \text{ m/s}}{6{,}911 \text{ m/s}} \approx -71°. \qquad \text{(Resposta)}$$