Espaços Vetoriais

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, definimos as operações:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \alpha u = (0, \alpha u_2)$$

   (a) Calcule $u + v$ e αu, com $u = (-1, 2), v = (3, 4)$ e $\alpha = 3$

   (b) Explique por que $u + v, \alpha u \in V$

   (c) Quais axiomas de espaço vetorial valem para V? Quais não valem?

2. Determine se o conjunto V com as operações dadas é um espaço vetorial. Justifique sua resposta.

   (a) $V = \mathbb{R}$ com as operações: $x + y \in \mathbb{R}$ e $\alpha x \in \mathbb{R}$

   (b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ com as operações: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2)$ onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

   (c) $V = \mathbb{R}^3$ com as operações: $u + v = (u_1 + v_1 + z_1, u_2 + v_2 + z_2), \alpha u = (\alpha^2 u_1, \alpha^2 u_2, \alpha^2 u_3)$ onde $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

   (d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

   (e) $V = \{(1, x) \in \mathbb{R}\}$ com as operações: $u + v = (1, x + y), \alpha u = (1, \alpha x)$ onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = (1, x)$ e $v = (1, y)$.

Sugestões e Respostas

1. (a) (2, 6), (0, 6) (b) (c) Falha o último axioma

2. (a) É um espaço vetorial
   (b) Não é um espaço vetorial
   (c) Não é um espaço vetorial
   (d) É um espaço vetorial
   (e) É um espaço vetorial

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

[2] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.