

Ecuaciones y desigualdades

Responda las preguntas 1 y 2 **justificando** en cada caso su elección.

- Considere las funciones $f(x) = 2 - x$, $g(x) = -\frac{3x^2}{4} + \frac{3}{4}$ y $p(x) = \sqrt{4x + 1}$
Subraye el valor de verdad correcto en cada una de las siguientes afirmaciones:
 - $p(x + h) = \sqrt{4x + h + 1}$. **F** **V**
 - Si $x \in D_p$ y $p(x) \in D_g$, entonces $(g \circ p)(x) = -3x$. **F** **V**
 - $(p \circ f)(2) = 1$. **F** **V**
 - -3 pertenece al rango de la función p . **F** **V**
 - La función g es par. **F** **V**
 - La preimagen de $\sqrt{2}$ mediante la función p es $-\frac{3}{16}$. **F** **V**
 - El dominio de la función $p \circ f$ es $(-\infty, \frac{9}{4}]$. **F** **V**
 - La función g es inyectiva. **F** **V**
- Un granjero tiene 150 metros de malla con los que desea cercar tres lados de un corral rectangular. Una pared existente formará el cuarto lado. El área del corral en función de la longitud x del lado paralelo a la pared es:
 - $A(x) = 150x - 2x^2$ metros cuadrados.
 - $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 75$ metros cuadrados.
 - $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 75x$ metros cuadrados.
 - $A(x) = 150 - 2x^2$ metros cuadrados.
- Determine el dominio de las siguientes funciones
 - $f(x) = \frac{1}{|x - 5|}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
 - $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$
 - $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x - 20}$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{4 + x}}{1 - x}$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 6x - 20}}{(x - 5)(\sqrt{x + 2} - 3)}$
- Es correcto afirmar que para todas funciones reales f, g, h se tiene

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$
- Considere la función $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 + 3 & \text{si } x < -1, \\ |x| - 4 & \text{si } |x| \leq 1, \\ \sqrt{x + 2} + 3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
Determine $f(0)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(\pi)$, $f(1/e)$.
 - Si $f(x) = x^2 + 6x - 7$, determine $f(0)$, $f(-1)$, $f(-x)$, $f(x + 1)$, $2f(x)$, $f(2x)$, y $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$.
- Halle una fórmula para la inversa de cada una de las siguientes funciones
 - $f(x) = 3x + 5$
 - $f(x) = \frac{1 + 3x}{5 - 2x}$
 - $f(x) = 5 - 4x^3$
 - $f(x) = \frac{4x}{x - 2}$
 - $f(x) = -3 + \sqrt{2x + 5}$
 - $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$
 - $f(x) = 2^{5^x}$
 - $f(x) = \ln(x + 3)$
 - $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$
- Determine si las siguientes funciones son polinomios, y en caso de serlo identifique el grado, el coeficiente principal y el coeficiente constante.
 - $f(x) = 7x^5 + 4x^{1/2} + 1$
 - $f(x) = 5x^2 - 3x^{-2} + 7$
 - $f(x) = 1/4$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2x^2 + x$
 - $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
 - $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x}{x}$
- Encuentre las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ siendo $p(x) = 7x(x - 4)(5 - 2x)(x - 1)$
- Construya un polinomio $p(x)$ de grado 5 con coeficientes reales que satisfaga las siguientes condiciones:
 - $p(1) = 0$
 - $x + 2$ es un factor de $p(x)$.
 - El número complejo $2 + i$ es una raíz
 - El residuo de dividir $p(x)$ entre $2x + 3$ es cero.
 - $p(-1) = 4$

11. Calcule los siguientes logaritmos

- a) $\log_2 4$
- b) $\log_2 64$
- c) $\log_2 \frac{1}{2}$
- d) $\log_2 \frac{1}{16}$
- e) $\log 0,1$
- f) $\log 0,01$
- g) $\log \sqrt[7]{100000}$
- h) $\log \sqrt{100}$

12. Reescriba las siguientes expresiones usando solamente un logaritmo

- a) $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2 + 1) + 2 \log(x - 1)$
- b) $\frac{1}{3} \log_7(2x+1) - \frac{1}{2} \left(\log_7(x-4) - \log_7(x^4 - x^2 - 1) \right)$

13. Simplifique

- a) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \ln e^x + \ln \left(\frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$
- b) $27^x \cdot \frac{9^{2x-1}}{3^x}$
- c) $\ln 15 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \ln e^x + \ln \left(\frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \ln 3$

14. Determine el dominio de las siguientes funciones

- a) $f(x) = \ln(x + 3)$
- b) $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$
- c) $f(x) = 3^{\sqrt[4]{x^2 - 16}}$
- d) $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x + 4)}$
- e) $f(x) = \log_3 \left(\frac{x - 5}{2 - 7x} \right)$
- f) $2^{\log_7(x-1)}$

15. Considere la función $f(x) = x^{\sqrt{\log x}}$.

- a) En caso de existir, calcule $f(0)$, $f(1/2)$, $f(10)$, $f(10^3)$, $f(\sqrt[4]{10})$
- b) Determine el dominio de f .
- c) Determine el (los) $x \in D_f$ tal que $f(x) = 10^{10}$

16. Resuelva las siguientes ecuaciones

- a) $e^x = 16$
- b) $\ln(2x - 1) = 3$
- c) $2^{x-5} = 3$

d) $\ln(\ln(x)) = 1$

e) $4^x + 2^x = 72$

f) $3^{2x-1} = \frac{729}{9^{x+1}}$

g) $x^2 e^x + 4e^x = 0$

h) $(e^{x+2} - 1) \ln(1 - 2x) = 0$

i) $\ln x = -1$

j) $e^{3x-4} = 2$

k) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

l) $\sqrt{\ln x - 3} = \ln x - 3$

m) $\log(x^3 - 1) - \log(x^2 + x + 1) = -2$

n) $2 - \log_5 |x^2 + 9| = 0$

\tilde{n}) $(\ln x)^2 + \ln x = 2$

o) $10^{3x-1/2} = 3^{2x}$

p) $\log(1 - 2x) = 1 + \log(x + 4)$

q) $\log_2(x) + \log_2(x - 3) = 2$

r) $(\log x)^3 + (\log x)^2 - 4 \log x - 4 = 0$

17. Verifique las siguientes identidades trigonométricas

- a) $\sec^2 \theta \csc^2 \theta = \sec^2 \theta + \csc^2 \theta$
- b) $(\tan \theta + \cot \theta)(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) = \sec \theta + \csc \theta$
- c) $\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2 \csc x$

18. Resuelva las siguientes ecuaciones

- a) $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 1$, con $x \in [0, 2\pi]$
- b) $\cos^2 2x + 3 \operatorname{sen} 2x = 3$
- c) $\tan^4 x - 13 \tan^2 x + 36 = 0$
- d) $\cos x + \operatorname{sen} x = 1$
- e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$, con $x \in [0, \pi]$
- f) $\tan x + 2 \sec x = 1$
- g) $4 \operatorname{sen}^2 x \tan x - 4 \operatorname{sen}^2 x - 3 \tan x + 3 = 0$, con $x \in [0, \pi]$, con $x \in [\pi, 3\pi]$

19. Un ingeniero desea construir una rampa de $24m$ de largo, que se levante a una altura de $5m$ del suelo. Calcule el ángulo que debe hacer la rampa con la horizontal.

20. Desde un punto Q situado a nivel del suelo, a un edificio hay 12 metros de distancia y se sabe que el ángulo de elevación es de 30° . Determinar la altura del edificio.