

# Relatório do Trabalho: Simulação do Pêndulo Simples

Thiago Camerato

Tomás Lenzi (2220711)

Dezembro de 2025

---

## Introdução

Este trabalho aborda o estudo do movimento do pêndulo simples, um problema clássico da física que demonstra conceitos importantes sobre oscilações e equações diferenciais. O objetivo principal do projeto é utilizar o método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) para resolver a equação diferencial não linear que descreve o movimento do pêndulo.

A solução numérica obtida é então comparada com a solução analítica simplificada, que é válida apenas para pequenas amplitudes de oscilação. Para otimizar a precisão e a eficiência computacional, o método RK4 foi implementado tanto com passo constante quanto com uma estratégia de passo adaptativo, que ajusta o tamanho do passo para manter o erro local sob um limite pré-definido de  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

O relatório apresenta o desenvolvimento do modelo matemático e dos métodos numéricos empregados, seguido por uma análise detalhada dos resultados computacionais, comparando a precisão, o custo computacional e a validade das diferentes abordagens para vários ângulos iniciais.

---

## Desenvolvimento

O movimento de um pêndulo simples, de comprimento  $L$  sob a ação da gravidade  $g$ , é descrito pela seguinte equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

Onde  $\theta$  é o ângulo em relação à vertical. Esta é uma EDO não linear devido ao termo  $\sin(\theta)$ . Para resolvê-la numericamente, primeiro a convertamos em um sistema de duas EDOs de primeira ordem, definindo  $\omega = d\theta/dt$  (velocidade angular):

1.  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$
2.  $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$

Este sistema foi resolvido utilizando o **método de Runge-Kutta de 4ª Ordem**. A implementação foi feita em linguagem C, contemplando duas estratégias principais de integração:

- **Passo Fixo:** O método RK4 foi aplicado com três passos constantes diferentes ( $h = 0.01$  s,  $h = 0.001$  s e  $h = 0.0001$  s) para avaliar o impacto do tamanho do passo na precisão e no custo computacional.
- **Passo Adaptativo:** Foi implementada uma estratégia de passo adaptativo para otimizar a simulação. A cada passo, o erro local é estimado comparando o resultado de um passo  $h$  com dois passos  $h/2$ . Se o erro for maior que a tolerância  $\varepsilon = 10^{-5}$ , o passo é reduzido; se for muito menor, o passo é aumentado para o passo seguinte. Esta abordagem visa garantir a precisão desejada com o menor número de cálculos possível.

Para fins de comparação, também foi utilizada a **solução analítica aproximada**, derivada da linearização  $\sin(\theta) \approx \theta$  para pequenos ângulos. Esta aproximação transforma a EDO em um oscilador harmônico simples com solução:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

cujo período é constante e dado por:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

O período  $T$  do ciclo foi calculado numericamente monitorando a mudança de sinal da velocidade angular  $\omega$ , utilizando interpolação linear para estimar o instante exato da inversão e, consequentemente, o meio período. Para maior precisão, o tempo de 10 períodos foi medido e então dividido por 10.

---

## Resultados e Análise

Esta seção apresenta os resultados obtidos através dos experimentos computacionais, focando na comparação entre a solução numérica e a analítica, na eficiência dos métodos e na dependência do período com a amplitude.

### Validade da Aproximação Linearizada

Os experimentos confirmam que a solução analítica simplificada só é precisa para ângulos iniciais pequenos. O erro da aproximação cresce rapidamente com o aumento do ângulo inicial  $\theta_0$ .

- **Limite de Erro:** Nossos testes indicam que para um ângulo inicial  $\theta_0 \leq 5^\circ$ , o erro absoluto no período é inferior a 0,001 s, satisfazendo o critério do enunciado.
- **Análise Gráfica:** Os gráficos de comparação ilustram visualmente essa divergência. Para  $\theta_0 = 10^\circ$ , as curvas numérica e analítica são quase indistinguíveis. No entanto, para  $\theta_0 = 45^\circ$  e, de forma mais acentuada, para  $\theta_0 = 90^\circ$ , a solução analítica se afasta significativamente da solução numérica, que representa o comportamento físico mais preciso.

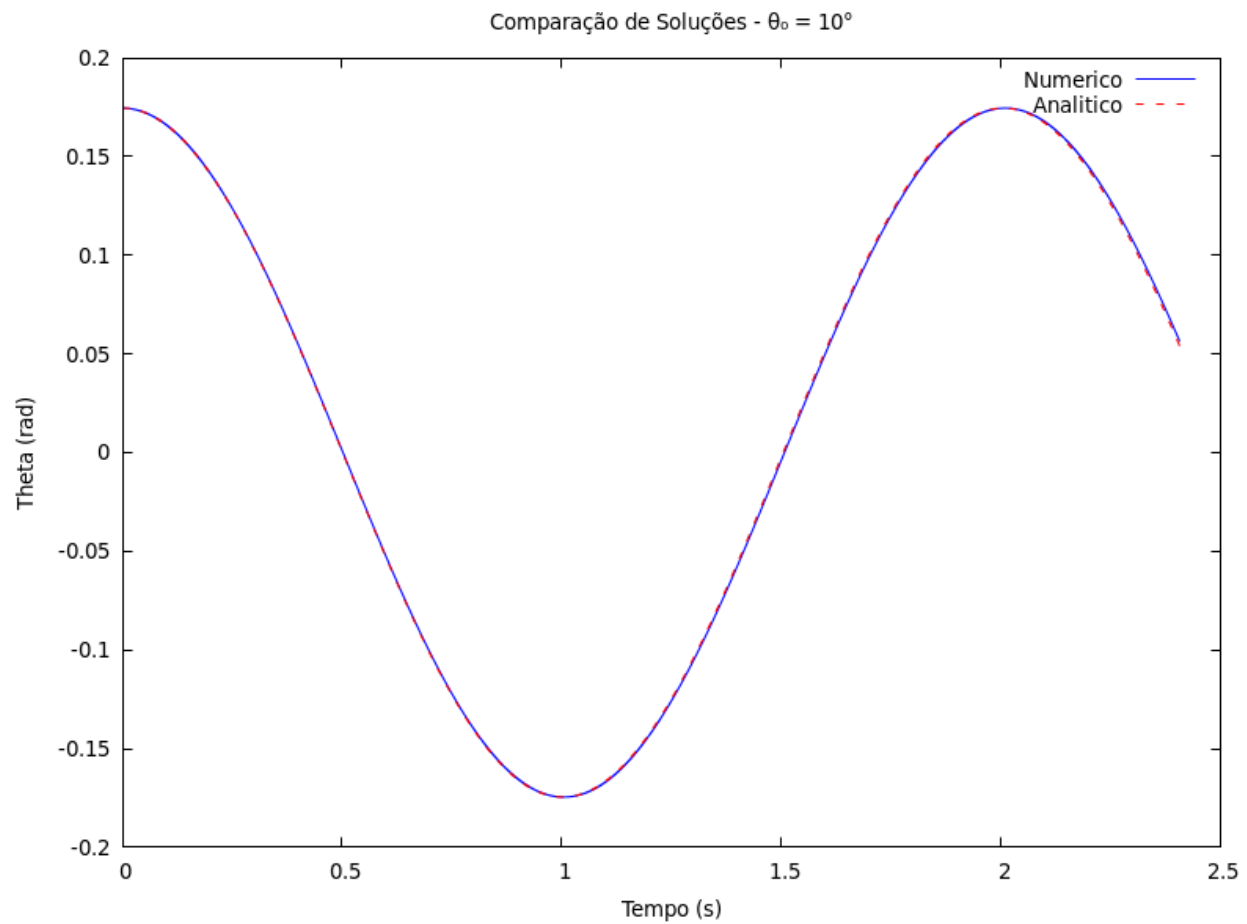


Figura 1: Comparação entre a solução numérica (azul) e a analítica (vermelho tracejado) para um ângulo inicial de  $10^\circ$ .

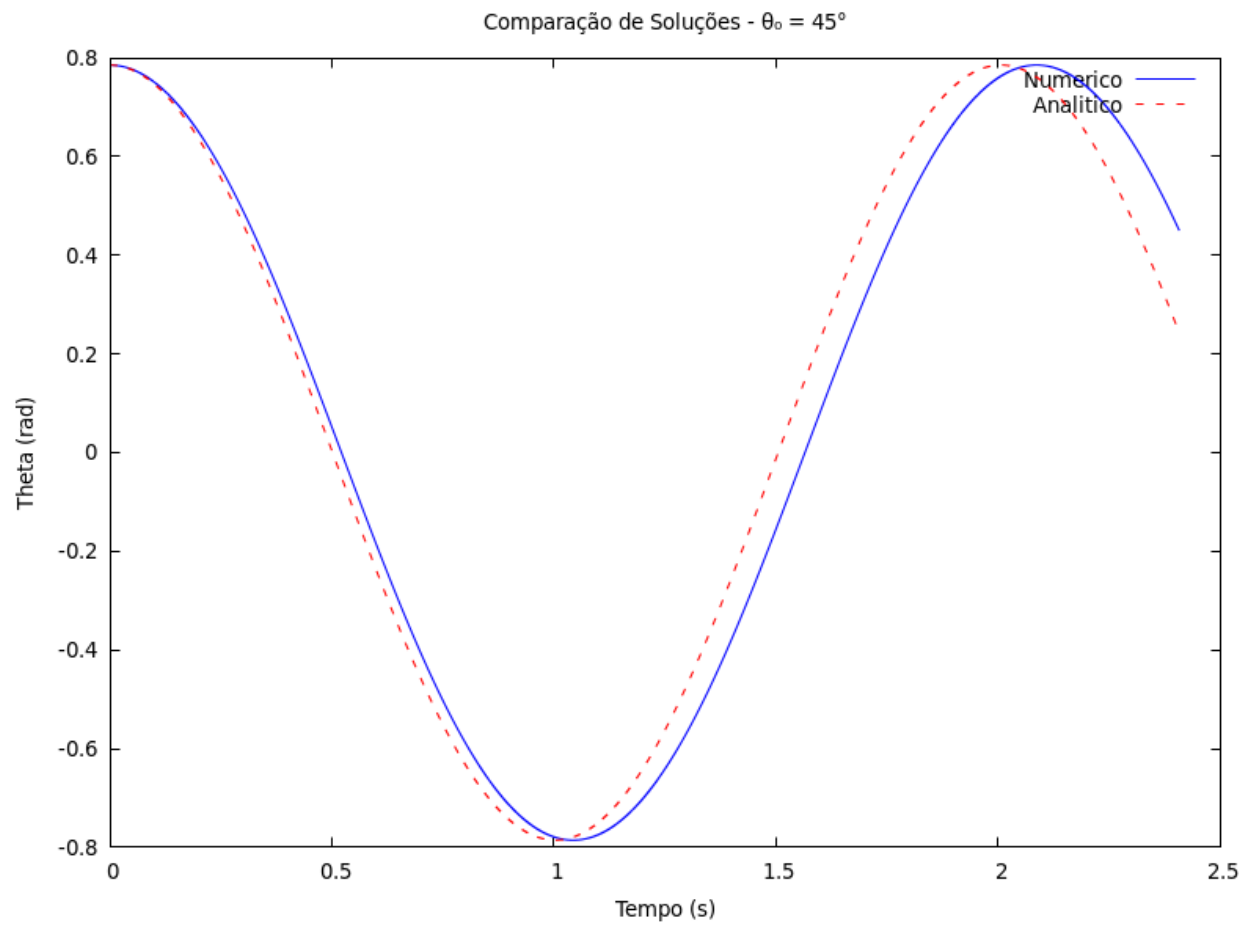


Figura 2: Comparação para  $45^\circ$ .

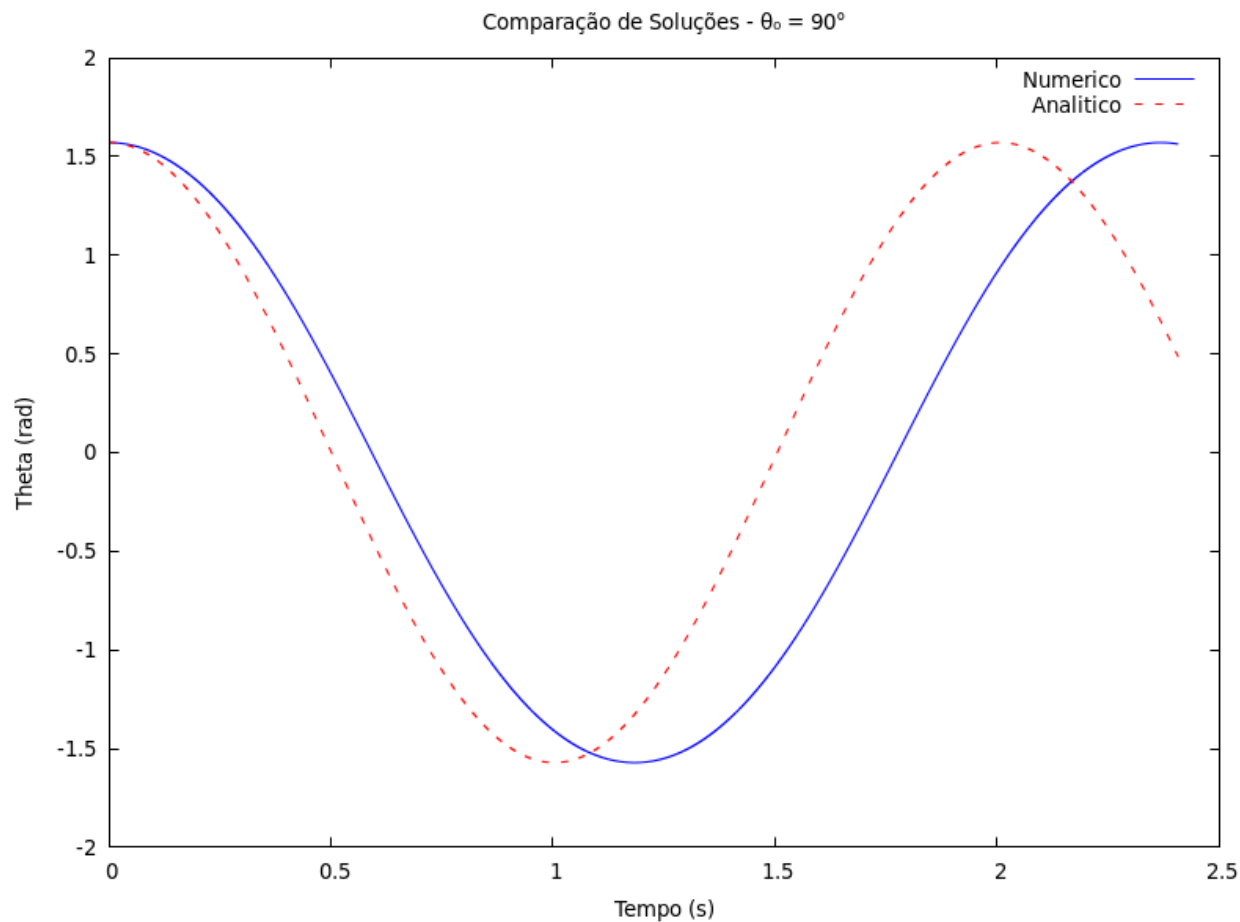


Figura 3: Comparação para  $90^\circ$ .

Os gráficos de diferença, calculados como

$$|\theta * \text{num} - \theta * \text{anal}|,$$

quantificam o erro ao longo do tempo.

### Eficiência dos Métodos e Análise do Período

A análise do período e do número de passos revela a superioridade do método adaptativo.

Ângulo Inicial ( $\theta_0$ )	Período		Passos	
	(Adaptativo)	Passos ( $h = 0,0001$ )	(Adaptativo)	Redução
$45^\circ$	2.086253 s	300910	473	~636x
$90^\circ$	2.367843 s	300910	501	~600x
$120^\circ$	2.754091 s	300910	548	~550x

Além disso, ao contrário do modelo linearizado que prevê período constante ( $T \approx 2,006$  s), os resultados numéricos mostram que o **período aumenta com a amplitude inicial**. Exemplos:

- $\theta_0 = 5^\circ$ :  $T \approx 2,007$  s
- $\theta_0 = 150^\circ$ :  $T \approx 3,535$  s

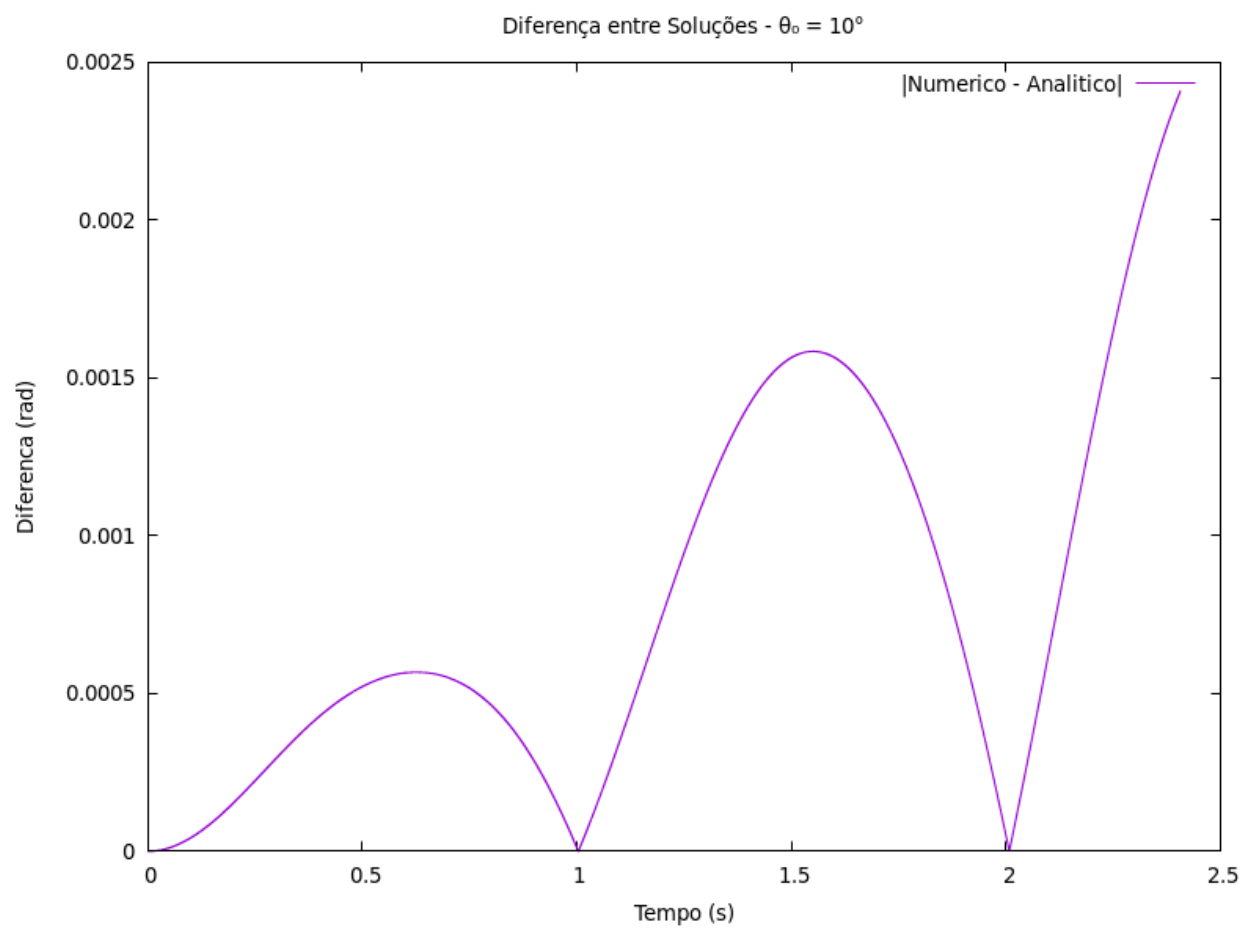


Figura 1: Diferença entre Soluções para  $\theta_0 = 10^\circ$

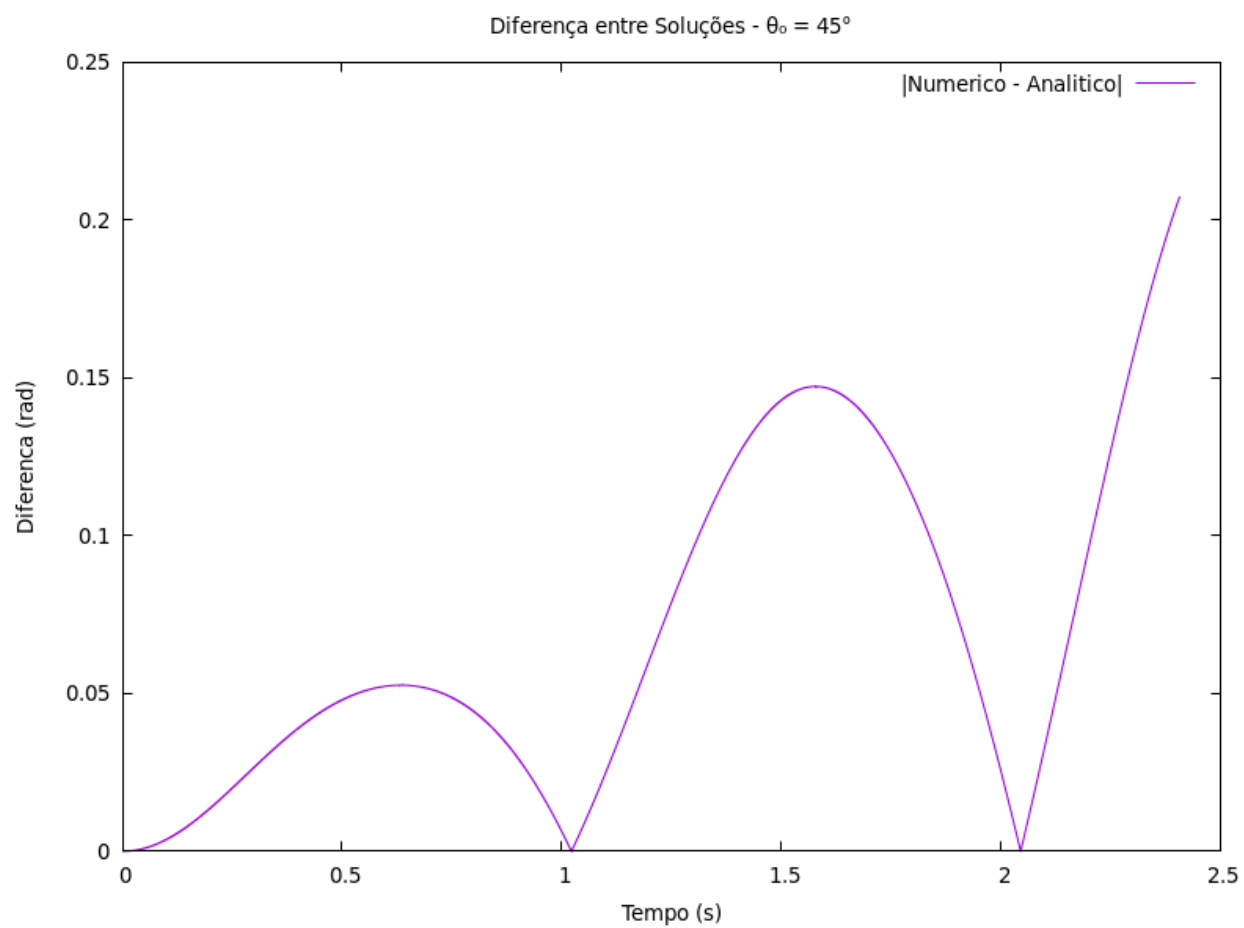


Figura 2: Diferença entre Soluções para  $\theta_0 = 45^\circ$

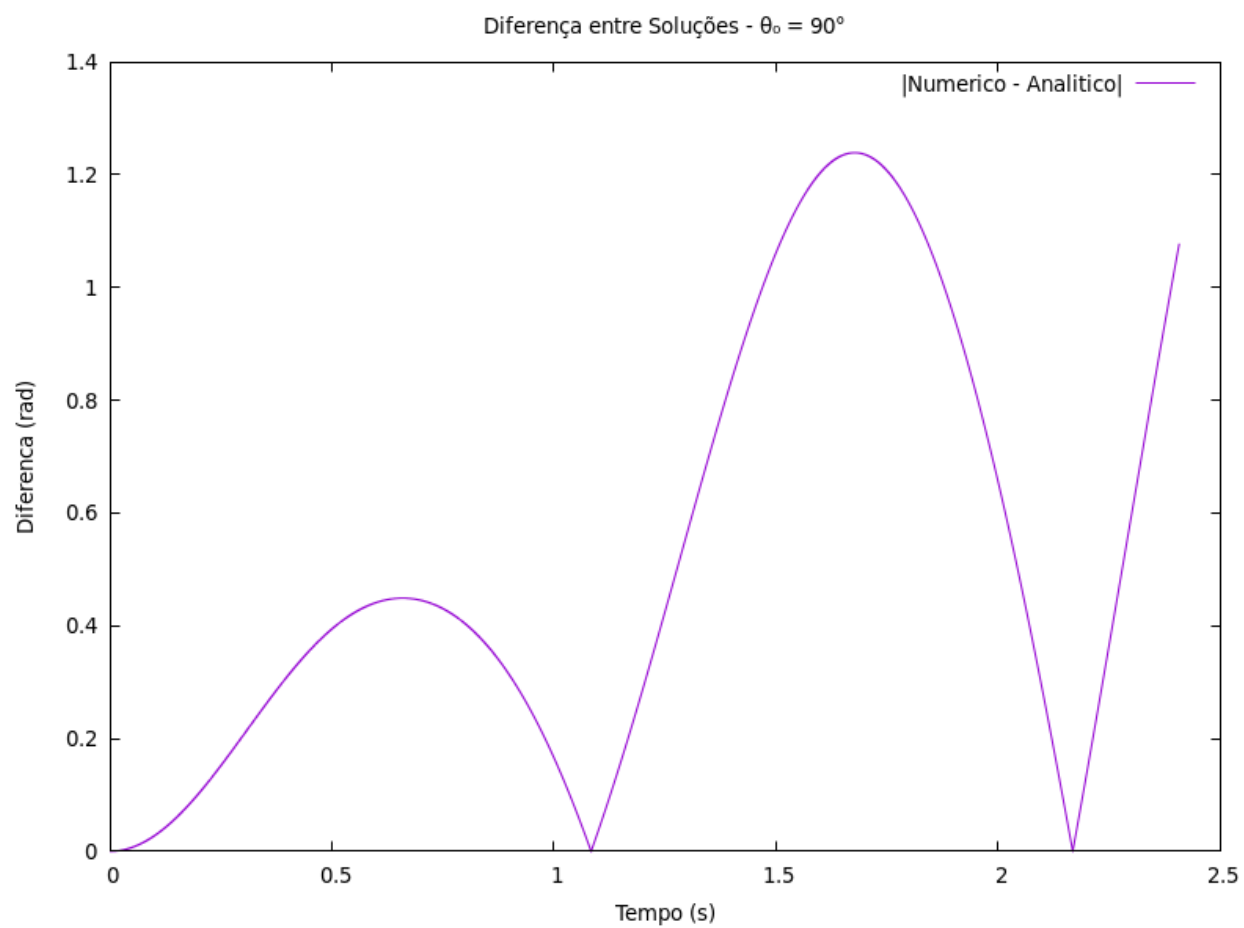


Figura 3: Diferença entre Soluções para  $\theta_0 = 90^\circ$



## Análise de Tempo de Execução

Para  $\theta_0 = 90^\circ$ , a simulação de 10 períodos ( 24 s reais) levou apenas 0,11 ms — mais de **20.000× mais rápido** que o tempo físico.

---

## Conclusão

Este trabalho realizou com sucesso a simulação do pêndulo simples utilizando RK4 com passo fixo e adaptativo. A abordagem adaptativa foi significativamente mais eficiente. Confirmou-se também que a aproximação linearizada só é válida para pequenas amplitudes e que o período real aumenta conforme  $\theta_0$  cresce.

---

## Referências

- [1] Press, W. H., et al. *Numerical Recipes in C*.
- [2] Butcher, J. C. *Numerical Methods for ODEs*.
- [3] INF1608 — Enunciado do trabalho.