Lab 7: Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

INF1608 – Análise Numérica

Leonardo Quatrin Campagnolo

lquatrin@tecgraf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Considere a solução de equações diferenciais ordinárias expressas por:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

O método de Runge-Kutta de ordem 4, considerando passos h constantes, é dado por:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t, y(t)) \\
k_2 &= hf(t + h/2, y(t) + k_1/2) \\
k_3 &= hf(t + h/2, y(t) + k_2/2) \\
k_4 &= hf(t + h, y(t) + k_3) \\
y(t + h) &= y(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Para se ter uma estratégia com passos adaptativos, pode-se adotar o método que avalia um avanço com passo h, obtendo $y_1(t + h)$, e um avanço com dois passos $h/2$, obtendo y_2. Como o erro é proporcional a h^5, tem-se que o erro local associado a $y_2(t + h)$ pode ser estimado por:

$$\Delta = \frac{y_2 - y_1}{15}$$

Considerando ϵ a tolerância (erro local aceitável), o fator de ampliação/redução do passo é dado por:

$$f = \sqrt[5]{\frac{\epsilon}{|\Delta|}}$$

Se $f \geq 1.0$, validamos o passo, e adotamos como solução a resposta de ordem superior acrescida da estimativa do erro: $y_2 + \Delta$. Neste caso, a próxima iteração pode ser avaliada com um novo passo:

$$h' = \min(1.2, f)\ h$$

Caso contrário, o passo é invalidado e tem que ser reavaliado com h atualizado:

$$h' = 0.8\ f\ h$$

1. Pede-se:

   (a) Implemente uma função que calcula um passo do método de Runge Kutta. Sua função deve receber como parâmetros o tempo t, o passo de integração h, o valor de y em t $y(t)$ e a função derivada $f(t, y(t))$, tendo como retorno o valor no tempo $t+h$ $y(t+h)$, seguindo o protótipo:

   ```
   double RungeKuttaPasso (double t, double h, double y,
                           double (*f) (double t, double y));
   ```

   (b) Implemente o método de Runge Kutta com passo constante. Sua função deve receber como parâmetros o tempo inicial t_0, o tempo final t_1, o número de passos n, o valor inicial $y(t_0)$ e a função derivada $f(t, y(t))$, tendo como retorno o valor no tempo final $y(t_1)$, seguindo o protótipo:

   ```
   double RungeKutta (double t0, double t1, int n, double y0,
                      double (*f) (double t, double y));
   ```

   (c) Implemente o método de Runge Kutta adaptativo, conforme apresentado acima. Sua função deve receber como parâmetros o tempo inicial t_0, o tempo final t_1, o valor inicial $y(t_0)$, a função derivada $f(t, y(t))$ e a tolerância do erro local tol, tendo como retorno o valor no tempo final $y(t_1)$. Como valor de passo inicial, pode-se adotar $h_0 = 10^{-7}$. A função deve ter o seguinte o protótipo:

   ```
   double RungeKuttaAdaptativo (double t0, double t1, double y0,
                                double (*f) (double t, double y), double tol);
   ```

2. Para testar suas funções, avalie:

   (a) $y(2.0)$ sabendo que $y' = 10y(1-y)$, com $y(0) = 0.5$. Para o método com passos constante, use $h = 0.01$ (desconsidere que pode-se ter erros de precisão ao calcular n); para o método com passo adaptativo, use $tol = 10^{-12}$.

   Sabe-se que a solução desta EDO para $y(0) = 0.5$ é: $y(t) = \frac{1}{1+e^{-ct}}$

   (b) $y(2.4)$ sabendo que $y' = ty + t^3$, com $y(0) = -1$. Para o método com passos constante, use $h = 0.001$ (desconsidere que pode-se ter erros de precisão ao calcular n); para o método com passo adaptativo, use $tol = 10^{-12}$.

   Sabe-se que a solução desta EDO para $y(0) = -1$ é: $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} - t^2 - 2$

   Preencha o arquivo main.c para comparar os resultados obtidos pelos métodos com a solução da EDO, além do número de vezes que a função foi avaliada por cada método.

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “ode.h” e as implementações em um módulo “ode.c”. Complete o módulo “main.c”.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “ode.c”, “ode.h” e “main.c”, *e eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução*) devem ser enviados via página da disciplina no EAD até às 14h. O sistema receberá trabalhos com atraso até o final do dia (com perda de 1 ponto na avaliação).