

Lab 1: Série de Taylor

INF1608 – Análise Numérica

Leonardo Quatrin Campagnolo
lquatrin@tecgraf.puc-rio.br
Departamento de Informática, PUC-Rio

A correção dos trabalhos será feita automaticamente por programas de teste. Siga as especificações nos seus detalhes.

Sabe-se que o teorema de Taylor é expresso por:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{k+1}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

sendo que o último termo, $\frac{f^{k+1}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$, representa o resíduo, onde $c \in [x_0, x]$.

Um polinômio de Taylor tem, portanto, a seguinte estrutura de avaliação:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i!} (x - x_0)^i$$

onde n representa o número de termos do polinômio e $c_i = f^{[i]}(x_0)$ representa cada elemento de um vetor de coeficientes.

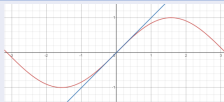
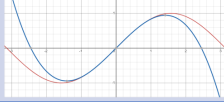
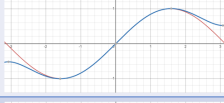

1. Escreva uma função que avalia um polinômio de Taylor dado seu vetor de coeficientes. A função recebe o número de termos n , o vetor dos coeficientes c , o valor x_0 e o valor de x onde o polinômio deve ser avaliado, retornando o valor calculado. O protótipo da função deve ser:

```
double avalia_taylor (int n, double *c, double x0, double x);
```

A função não pode fazer uso da biblioteca matemática padrão de C (não pode usar a função `pow`, por exemplo). Faça uma implementação eficiente, que tire proveito da fatoração natural dos termos. Note que $x^i = x \cdot x^{i-1}$ e $i! = i \cdot (i-1)!$.

2. A ilustração abaixo mostra o polinômio de Taylor que aproxima a função $\sin x$ em torno do ponto $x_0 = 0$. Note que os coeficientes dos polinômios seguem uma regra simples de construção: 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...

Com base nessa observação, escreva uma função que avalie o polinômio de Taylor que aproxima a função $\sin x$ em torno de $x_0 = 0$. A função recebe como parâmetro o número de termos n que deve ser usado na aproximação, retornando o valor aproximado da função no ponto x , usando a função do item anterior.

x	
$x - \frac{x^3}{3!}$	
$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$	
$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$	

```
double avalia_seno (int n, double x);
```

Usando a função `sin` da biblioteca padrão `math.h`, escreva um módulo de teste `main.c` para avaliar as aproximações no cálculo de $\sin(x)$ para $x = \{\pi/12, \pi/9, \pi/7, \pi/4, \pi/3\}$, usando diferentes números de termos. Note que o erro decresce com o aumento do número de termos, sendo sempre menor que o resíduo máximo indicado pelo Teorema de Taylor.

Observações:

- Não se pode usar chamadas da biblioteca `math.h` na avaliação das funções pedidas; funções de `math.h` só podem ser usadas no teste.
- Você pode acessar o site www.desmos.com para plotar funções (e polinômios).
- Você pode acessar o site www.derivative-calculator.net para avaliar e visualizar as funções e suas derivadas.
- Para o valor de π , você pode adicionar a diretiva **`#define PI 3.141592653589793`**.

Agrupe os protótipos das funções em um módulo “`taylor.h`”, as implementações em um módulo “`taylor.c`” e o teste no módulo “`main.c`”.

Entrega: O código fonte deste laboratório (isto é, os arquivos “`taylor.h`”, “`taylor.c`” e “`main.c`”, **não** zipados) devem ser enviados via página da disciplina até 1 hora após o horário de aula. Envios após este horário serão descontados em 1 ponto da nota.