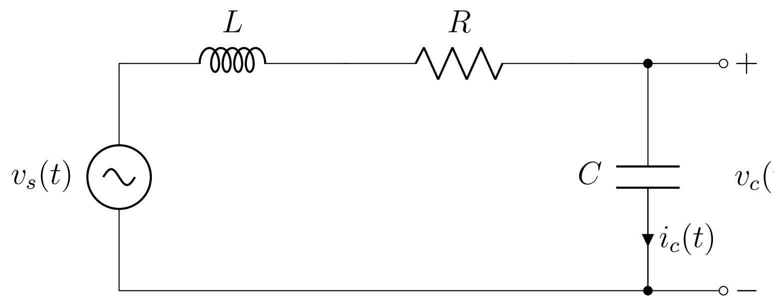
Prática 5 (30/10/2020). Valor: 25 pontos.

Sistemas dinâmicos contínuos e discretos em espaço de estados.

1. Considere o circuito elétrico abaixo



em que L é uma indutância, R é uma resistência e C é uma capacitância. Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito acima, obtém-se a relação

$$v_s(t) = L\frac{di_c(t)}{dt} + R\,i_c(t) + v_c(t).$$

Além disso, sabe-se que a relação entre a corrente e a tensão do capacitor é dada pela equação

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}.$$

Considere que esse circuito pode ser tratado como um sistema dinâmico cuja entrada é a tensão da fonte $v_s(t)$ e cuja saída é a tensão do capacitor $v_c(t)$.

(a) Obtenha a função de transferência $H(s)$ para esse sistema.

(b) Obtenha expressões para os pólos desse sistema em função de R, L e C.

(c) Defina valores de R, L e C que resultem em pólos reais. Escreva a função de transferência com coeficientes numéricos que apresenta esses pólos.

(d) Defina valores de R, L e C que resultem em pólos complexos. Escreva a função de transferência com coeficientes numéricos que apresenta esses pólos.

(e) Proponha um modelo em espaço de estados para esse sistema cujas variáveis de estado sejam $x_1(t) = v_c(t)$ e $x_2(t) = \frac{dv_c(t)}{dt}$. Para ambos os conjuntos de valores obtidos nos itens (c) e (d), obtenha a função de transferência a partir das matrizes A, B, C e D da representação em espaço de estados.

(f) Utilize a função `eig` do MATLAB para verificar que os autovalores da matriz A são, de fato, os pólos do sistema.

(g) Utilize a função `lsim` para simular o sistema com pólos reais quando submetido a uma entrada em degrau unitário e gere os gráficos da evolução temporal dos estados. Gere também o retrato de fase desse sistema.

(h) Refaça o item anterior para o sistema com pólos complexos.

2. O comportamento dinâmico de uma população de besouros é descrito pelo seguinte modelo discreto em espaço de estados:

$$\begin{aligned} L(k+1) &= \nu B(k) \\ C(k+1) &= L(k)[1-\mu_l] \\ B(k+1) &= C(k)[1-\mu_c] + B(k)[1-\mu_b] + u(k), \end{aligned}$$

em que $L(k)$ é a quantidade de larvas, $C(k)$ é a quantidade de casulos, $B(k)$ é o número de besouros, $u(k)$ é uma entrada que representa a quantidade de besouros imigrantes que chegam no instante k, ν é a taxa de natalidade, e μ_l, μ_c e μ_b (que assumem valores entre 0 e 1) são as taxas de mortalidade de larvas, de casulos e de besouros, respectivamente.

   (a) Reescreva o modelo em espaço de estados acima explicitando as matrizes A, B, C e D. Considere que a saída $y(k)$ do seu sistema é a quantidade de besouros no instante k.

   (b) Atribua valores para os parâmetros ν, μ_l, μ_c e μ_b, determine os pólos do sistema utilizando a função `eig` e simule o comportamento do sistema para uma entrada em degrau unitário. Gere os gráficos de evolução temporal das variáveis de estado desse sistema. O comportamento observado faz sentido?

   (c) Gere o retrato de fase do sistema utilizando a função `plot3`.

   (d) Diagonalize o sistema, isto é, determine as matrizes P, V, A_w, B_w, C_w e D_w. Dica: Utilize a função `eig` do MATLAB.

   (e) Aplique um degrau unitário ao sistema transformado (utilize a função `lsim`). Gere os gráficos da evolução temporal dos estados desse sistema transformado e compare os resultados com aqueles obtidos no item (b).