

MAE5776 - 1º Semestre/2022 – Análise Multivariada - Lista 3

Alunos:

Fernando F. Paulos Vieira - nº USP: 13492870

Leandro Alves da Silva - nº USP: 11868023

Thiago Ferreira Miranda - nº USP: 11925711

1 - A partir de uma matriz de dados normalizados $Y_{n \times p}^*$, considere a matriz de covariâncias $nS_{p \times p} = Y^{*'}Y^* = V\Lambda V'$, tal que $V_{p \times p} = (V_1, \dots, V_p)$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ são matrizes de autovetores (das colunas de $Y_{n \times p}^*$) e autovalores, respectivamente, e a matriz de distâncias $D_{n \times n}$, tal que seus elementos são função dos elementos de $B_{n \times n} = Y^*Y^{*'} = U\Lambda U'$, com $U_{n \times n} = (U_1, \dots, U_n)$ matriz de autovetores (das linhas de $Y_{n \times p}^*$). Três pesquisadores realizaram análises estatísticas e chegaram à seguinte redução de dimensionalidade de Y^* .

Pesquisador 1: $Y_{n \times p}^* \rightarrow \tilde{Y}_{n \times 2} = Y^*(V_1 \ V_2)$

Pesquisador 2: $Y_{n \times p}^* \rightarrow \tilde{Y}_{n \times 2} = Y^*\left(\frac{V_1}{\sqrt{\lambda_1}} \ \frac{V_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right)$

Pesquisador 3: $Y_{n \times p}^* \rightarrow \tilde{Y}_{n \times 2} = Y^*(V_1\sqrt{\lambda_1} \ V_2\sqrt{\lambda_2})$

1.1 - Qual análise estatística cada pesquisador realizou? Que propriedades dos dados estão preservadas em cada caso? Eles partiram do mesmo objetivo? Faça suposições necessárias.

R:

O pesquisador 1 - Realizou uma Análise de Componentes Principais. Buscou preservar a variância total dos dados (ou a maior proporção da variância total que possa ser preservada) em 2 componentes.

O pesquisador 2 - Realizou uma Análise Fatorial Exploratória. Buscou aproximar a matriz de covariâncias em termos de fatores latentes comuns e específicos, descrevendo as variáveis em função de 2 fatores.

O pesquisador 3 - Realizou uma Análise de Coordenadas Principais ou Escalonamento Multidimensional. Analogamente ao Pesquisador 1, buscou preservar a variância total dos dados (ou a maior proporção da variância total que possa ser preservada).

Em um primeiro momento, acredita-se que estes pesquisadores partiram de um mesmo objetivo de redução de dimensionalidade das variáveis presentes nos dados originais disponíveis.

1.2 - Simule dados e realize as análises dos três pesquisadores. Interprete os resultados.

Parâmetros da Simulação:

| Amostra | Vetor de Médias | Matriz de Covariâncias |
|-------------|-----------------------------|--|
| $n_1 = 100$ | $\mu_1 = (5, 7, 10, 11, 6)$ | $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 1 \\ 0.6 & 1.5 & 0.2 & 0.6 & 1.2 \\ 0.5 & 0.2 & 3 & 1.5 & 0.9 \\ 0.7 & 0.6 & 1.5 & 3.5 & 1.3 \\ 1 & 1.2 & 0.9 & 1.3 & 2 \end{pmatrix}$ |

Pesquisador 1 - Análise de Componentes Principais:

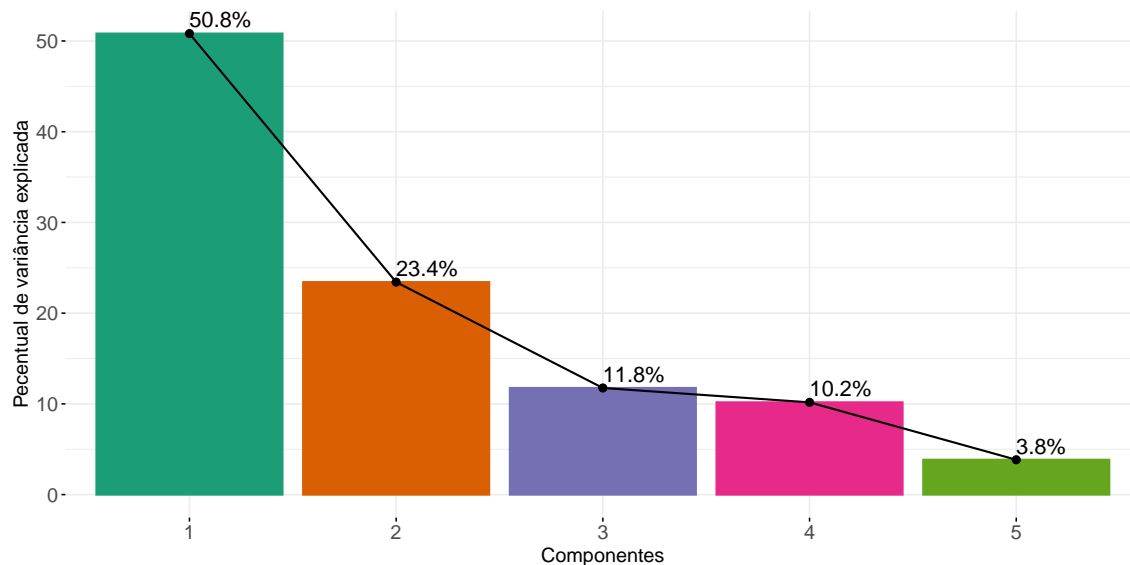
O pesquisador 1 buscou reduzir o banco de dados para dois componentes. Na sua análise de componentes principais com dados padronizados, os dois componentes encontrados explicam 74,2% da variabilidade total presentes nos dados. O primeiro componente encontrado é formado, principalmente, pela variáveis V1, V2, V4 e V5, com carga maior na variável V5(0,5828), este componente representa 50,8% da variabilidade total dos dados. No segundo componente destacam-se as variáveis V2, V3 e V4, sendo a V3 a variável com maior carga, este componente explicou 23,4% da variabilidade presente nos dados.

Autovalores dos componentes:

| PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| 2.5407 | 1.1711 | 0.5877 | 0.5084 | 0.192 |

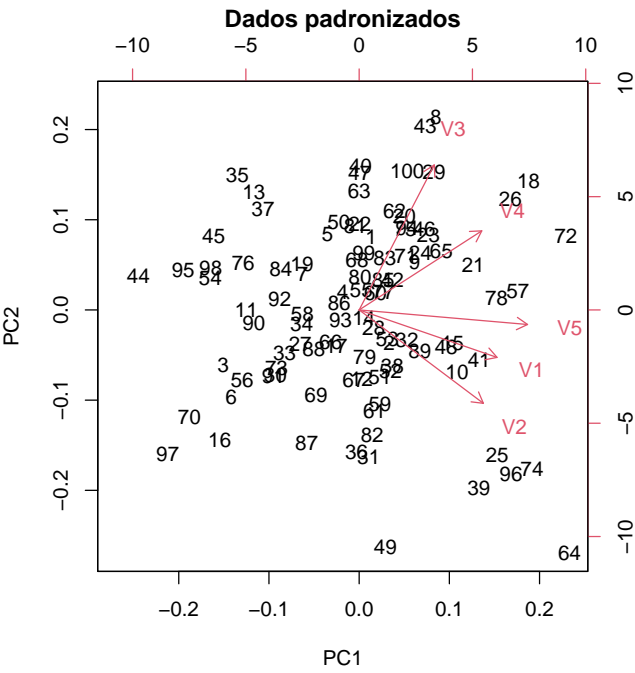
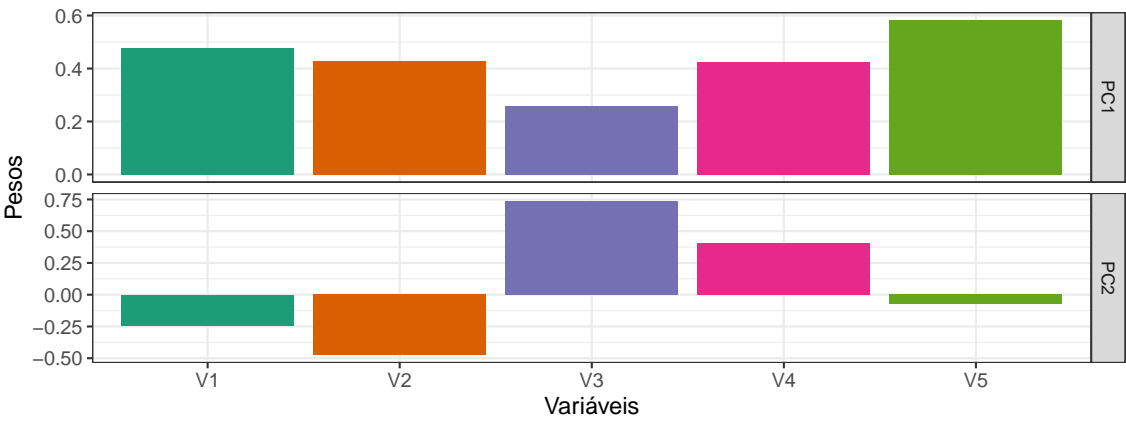
Importância dos componentes:

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Standard deviation | 1.5940 | 1.0822 | 0.7666 | 0.7130 | 0.4382 |
| Proportion of Variance | 0.5082 | 0.2342 | 0.1175 | 0.1017 | 0.0384 |
| Cumulative Proportion | 0.5082 | 0.7424 | 0.8599 | 0.9616 | 1.0000 |



Autovetores:

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 |
|----|--------|---------|---------|---------|---------|
| V1 | 0.4773 | -0.2420 | 0.6577 | 0.3750 | 0.3748 |
| V2 | 0.4299 | -0.4760 | -0.4156 | -0.5143 | 0.3891 |
| V3 | 0.2600 | 0.7394 | 0.2632 | -0.5228 | 0.2075 |
| V4 | 0.4244 | 0.4032 | -0.5669 | 0.5580 | 0.1563 |
| V5 | 0.5828 | -0.0742 | 0.0635 | -0.1009 | -0.8004 |



Pesquisador 2 - Análise Fatorial Exploratória via Máxima Verossimilhança - Sem Rotação:

O pesquisador 2 buscou reduzir a dimensionalidade dos dados padronizados para dois fatores por meio da análise fatorial exploratória, onde buscou preservar a variância comum dos dados padronizados. Com dois fatores estimados, o pesquisador 2 conseguiu explicar 62,6% da variância total a partir da comunalidade. O fator 1 é majoritariamente composto por todas as variáveis, com grande influência da variável V5, enquanto o fator 2 é caracterizado pela variáveis V2, V3 e V4, com ênfase para a variável V3.

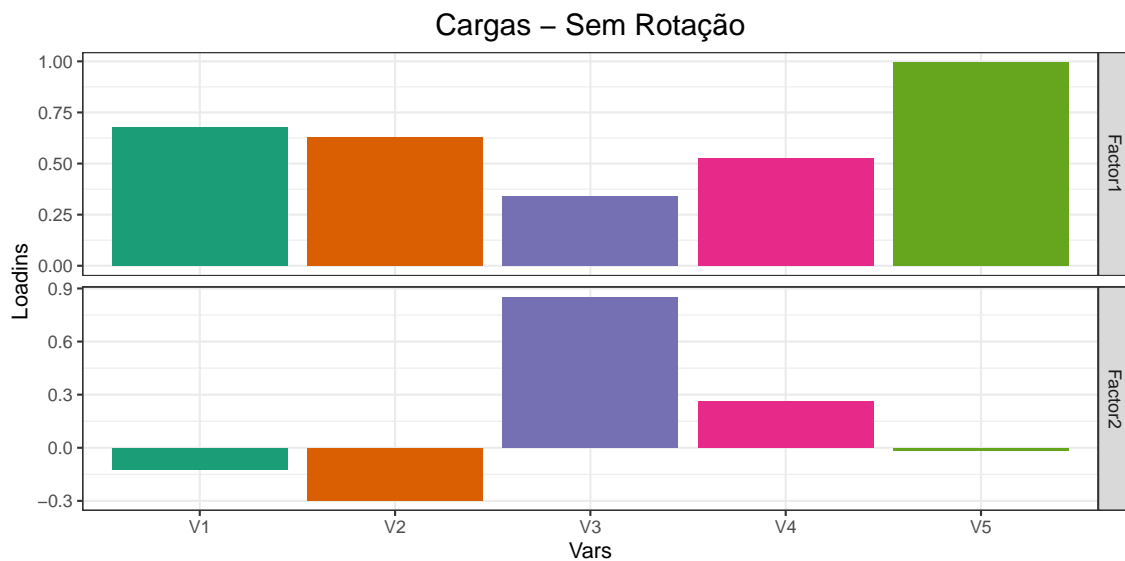
Cargas Fatoriais:

| | Factor1 | Factor2 |
|----|-----------|------------|
| V1 | 0.6763300 | -0.1239107 |
| V2 | 0.6271729 | -0.2968888 |
| V3 | 0.3401737 | 0.8520002 |
| V4 | 0.5258317 | 0.2614647 |
| V5 | 0.9948799 | -0.0152961 |

Variância Explicada:

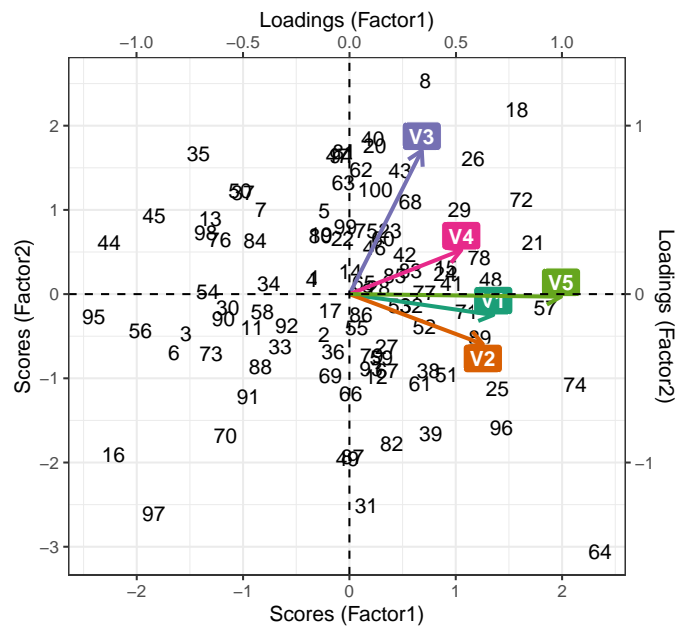
| | Factor1 | Factor2 |
|----------------|---------|---------|
| SS loadings | 2.233 | 0.898 |
| Proportion Var | 0.447 | 0.180 |
| Cumulative Var | 0.447 | 0.626 |

Cargas ou coeficientes dos fatores comuns:



Biplot:

AF – Bartlett – Sem Rotação



Especificidades:

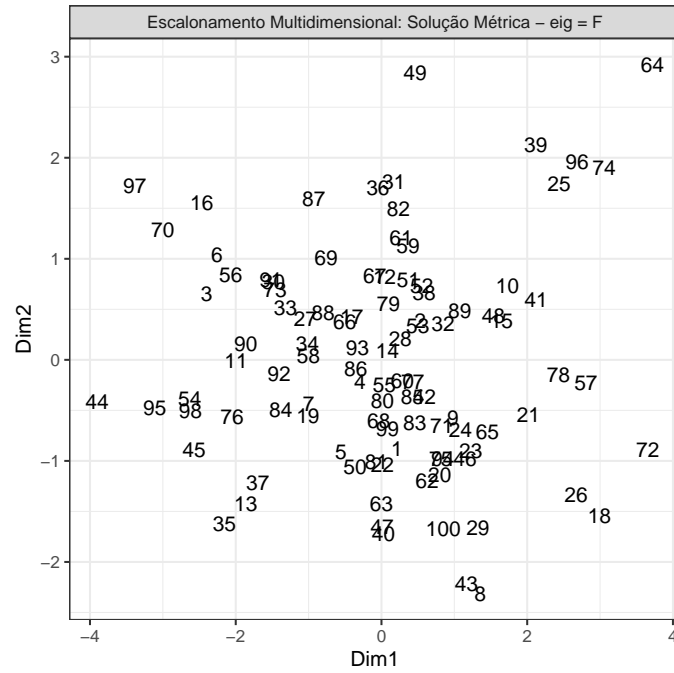
| V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |
|-------|-------|-------|-------|------|
| 0.527 | 0.518 | 0.158 | 0.655 | 0.01 |

Matrizes de correlação para a qual a aproximação é feita:

| | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |
|----|--------|---------|---------|--------|--------|
| V1 | 1.0000 | 0.4255 | 0.1227 | 0.2989 | 0.6754 |
| V2 | 0.4255 | 1.0000 | -0.0403 | 0.2431 | 0.6290 |
| V3 | 0.1227 | -0.0403 | 1.0000 | 0.3997 | 0.3254 |
| V4 | 0.2989 | 0.2431 | 0.3997 | 1.0000 | 0.5196 |
| V5 | 0.6754 | 0.6290 | 0.3254 | 0.5196 | 1.0000 |

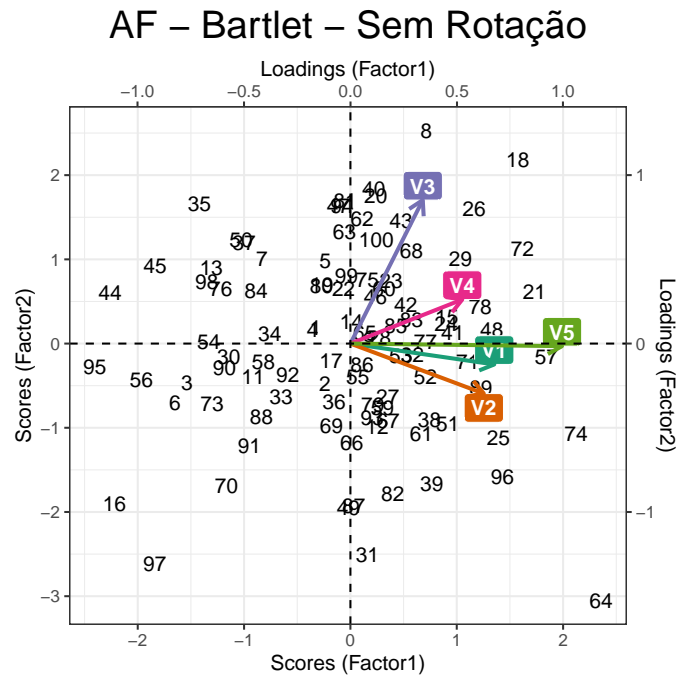
Pesquisador 3 - Escalonamento Multidimensional:

O pesquisador pesquisador 3 buscou mapear as distâncias entre os dados padronizados através da técnica de interdependência Escalonamento Multidimensional, técnica que facilitou a representação gráfica dos dados em duas dimensões.



R: O gráfico biplot representa cada observação dos dados, sendo construído pela dispersão de pares de escores gerados por alguma análise de redução de dimensionalidade e pelo sentido das cargas que geram tais escores.

Biplot entre os dois fatores da análise fatorial:



2 - Considere os dados “bodyfat” disponíveis na biblioteca TH.data do R. Neste caso, a matriz de trabalho contém 71 observações avaliadas em 10 variáveis. Gere 5 observações (para tanto, adote um critério) e considere seu novo conjunto de dados “bodyfat_new”. Com base na matriz de trabalho resultante realize as seguintes análises:

2.1 - Componentes Principais.

Centróides dos componentes:

| PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|-------|---------|---------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 50.75 | 30.6439 | 87.2789 | 105.0844 | 6.5048 | 9.3218 | 3.8605 | 4.2793 | 3.8764 | 5.383 |

Centróides dos componentes com dados padronizados:

| PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|-------|---------|---------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 50.75 | 30.6439 | 87.2789 | 105.0844 | 6.5048 | 9.3218 | 3.8605 | 4.2793 | 3.8764 | 5.383 |

Autovalores dos componentes:

| PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|---------|----------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 415.484 | 162.7966 | 19.4313 | 11.2885 | 0.3823 | 0.2692 | 0.1336 | 0.0345 | 0.0077 | 0.0018 |

Autovalores dos componentes com dados padronizados:

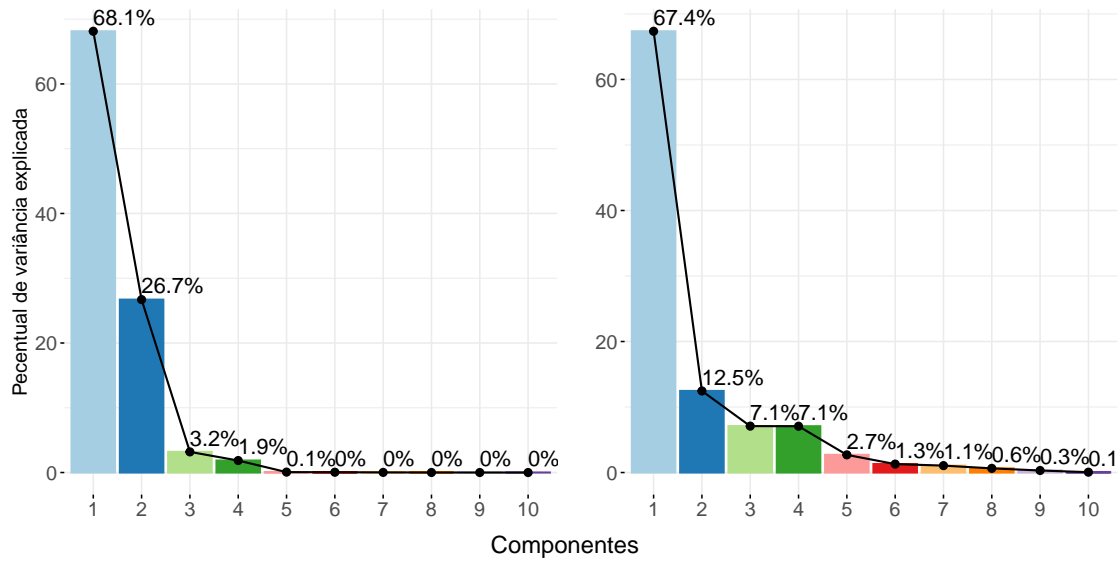
| PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 6.7355 | 1.2452 | 0.7084 | 0.7067 | 0.2697 | 0.1289 | 0.1054 | 0.0638 | 0.0311 | 0.0054 |

Importância dos componentes:

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|------------------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|
| Standard deviation | 20.3834 | 12.7592 | 4.4081 | 3.3598 | 0.6183 | 0.5189 | 0.3656 | 0.1859 | 0.088 | 0.0421 |
| Proportion of Variance | 0.6813 | 0.2670 | 0.0319 | 0.0185 | 0.0006 | 0.0004 | 0.0002 | 0.0001 | 0.000 | 0.0000 |
| Cumulative Proportion | 0.6813 | 0.9483 | 0.9801 | 0.9986 | 0.9993 | 0.9997 | 0.9999 | 1.0000 | 1.000 | 1.0000 |

Importância dos componentes com dados padronizados:

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Standard deviation | 2.5953 | 1.1159 | 0.8416 | 0.8407 | 0.5193 | 0.3590 | 0.3247 | 0.2525 | 0.1763 | 0.0733 |
| Proportion of Variance | 0.6736 | 0.1245 | 0.0708 | 0.0707 | 0.0270 | 0.0129 | 0.0105 | 0.0064 | 0.0031 | 0.0005 |
| Cumulative Proportion | 0.6736 | 0.7981 | 0.8689 | 0.9396 | 0.9666 | 0.9794 | 0.9900 | 0.9964 | 0.9995 | 1.0000 |

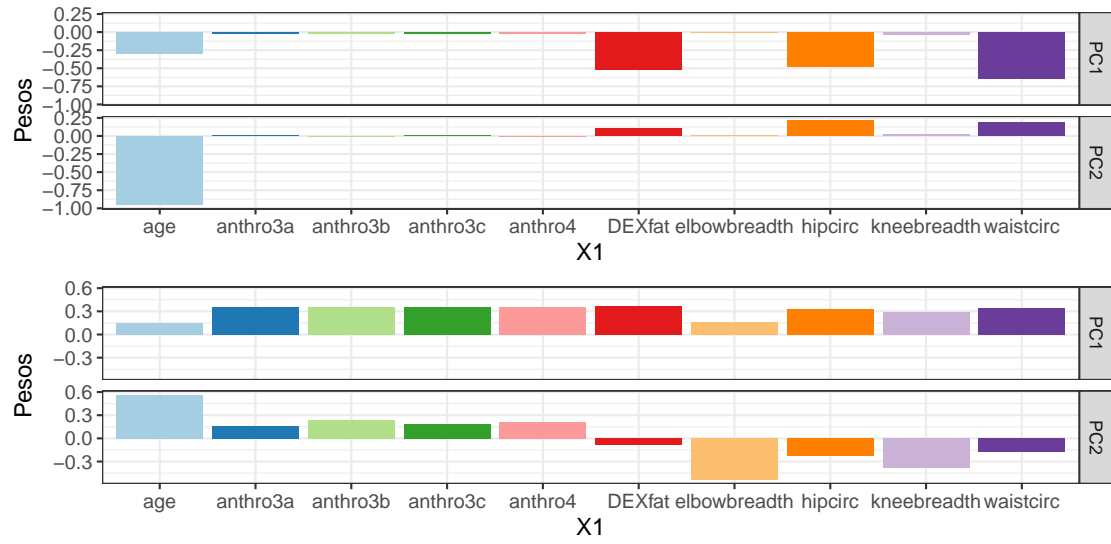


Autovetores:

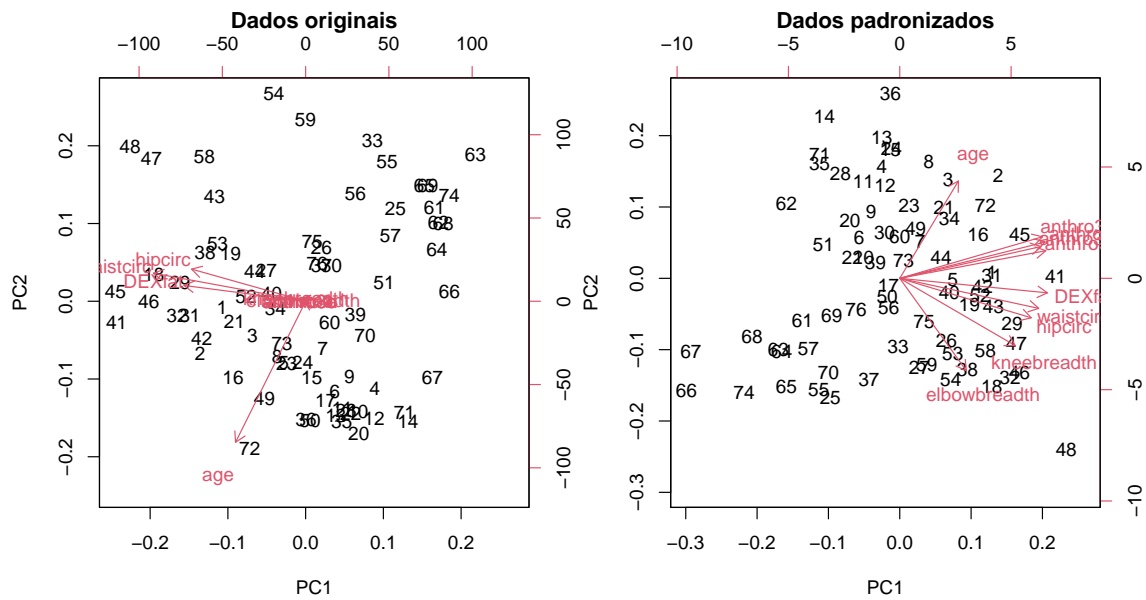
| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| age | -0.2959 | -0.9515 | 0.0355 | -0.0753 | 0.0094 | 0.0023 | 0.0044 | 0.0023 | -0.0003 | 0.0002 |
| DEXfat | -0.5140 | 0.1068 | 0.2621 | 0.8026 | 0.0261 | 0.1014 | 0.0228 | 0.0014 | -0.0014 | -0.0024 |
| waistcirc | -0.6428 | 0.1895 | -0.7129 | -0.2054 | -0.0080 | 0.0151 | -0.0094 | -0.0039 | 0.0025 | 0.0016 |
| hipcirc | -0.4817 | 0.2169 | 0.6491 | -0.5460 | -0.0312 | -0.0203 | 0.0105 | 0.0016 | 0.0007 | 0.0001 |
| elbowbreadth | -0.0078 | 0.0071 | -0.0156 | 0.0082 | 0.2307 | -0.3360 | 0.9058 | 0.1138 | 0.0083 | 0.0051 |
| kneebreadth | -0.0327 | 0.0143 | 0.0146 | 0.0168 | 0.7956 | -0.4714 | -0.3769 | -0.0086 | 0.0289 | -0.0087 |
| anthro3a | -0.0191 | -0.0009 | 0.0016 | 0.0406 | -0.1997 | -0.3557 | -0.0229 | -0.4422 | -0.6344 | 0.4827 |
| anthro3b | -0.0187 | -0.0020 | 0.0026 | 0.0479 | -0.2752 | -0.3689 | -0.0712 | -0.0442 | 0.7192 | 0.5111 |
| anthro3c | -0.0220 | 0.0005 | -0.0017 | 0.0473 | -0.2914 | -0.3843 | -0.1690 | 0.8156 | -0.2657 | -0.0187 |
| anthro4 | -0.0254 | -0.0024 | 0.0003 | 0.0573 | -0.3340 | -0.4936 | -0.0513 | -0.3525 | 0.0930 | -0.7109 |

Autovetores com dados padronizados:

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | PC10 |
|--------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| age | 0.1456 | 0.5618 | 0.7324 | 0.3430 | 0.0407 | -0.0149 | 0.0778 | -0.0334 | 0.0094 | -0.0046 |
| DEXfat | 0.3663 | -0.0838 | -0.0746 | 0.2012 | 0.1138 | -0.0947 | 0.0292 | 0.8841 | 0.0780 | 0.0471 |
| waistcirc | 0.3447 | -0.1733 | -0.0219 | 0.2481 | 0.4187 | 0.6043 | -0.4527 | -0.1811 | -0.0962 | -0.0397 |
| hipcirc | 0.3263 | -0.2279 | -0.1581 | 0.3918 | 0.3615 | -0.5205 | 0.3510 | -0.3711 | -0.0228 | -0.0021 |
| elbowbreadth | 0.1653 | -0.5331 | 0.5998 | -0.5266 | 0.1871 | -0.0455 | 0.1178 | 0.0189 | -0.0016 | -0.0044 |
| kneebreadth | 0.2866 | -0.3884 | 0.1281 | 0.3342 | -0.7856 | 0.0795 | -0.0228 | -0.1060 | -0.0589 | 0.0140 |
| anthro3a | 0.3624 | 0.1596 | -0.0591 | -0.2252 | -0.1031 | -0.2918 | -0.4290 | -0.1220 | 0.5764 | -0.4026 |
| anthro3b | 0.3541 | 0.2394 | -0.1185 | -0.2759 | -0.0899 | -0.0663 | 0.0453 | 0.0187 | -0.7239 | -0.4338 |
| anthro3c | 0.3505 | 0.1835 | -0.1789 | -0.2029 | -0.0611 | 0.4818 | 0.6445 | -0.0886 | 0.3333 | 0.0117 |
| anthro4 | 0.3608 | 0.2094 | -0.0829 | -0.2641 | -0.0695 | -0.1567 | -0.2215 | -0.1097 | -0.1152 | 0.8035 |

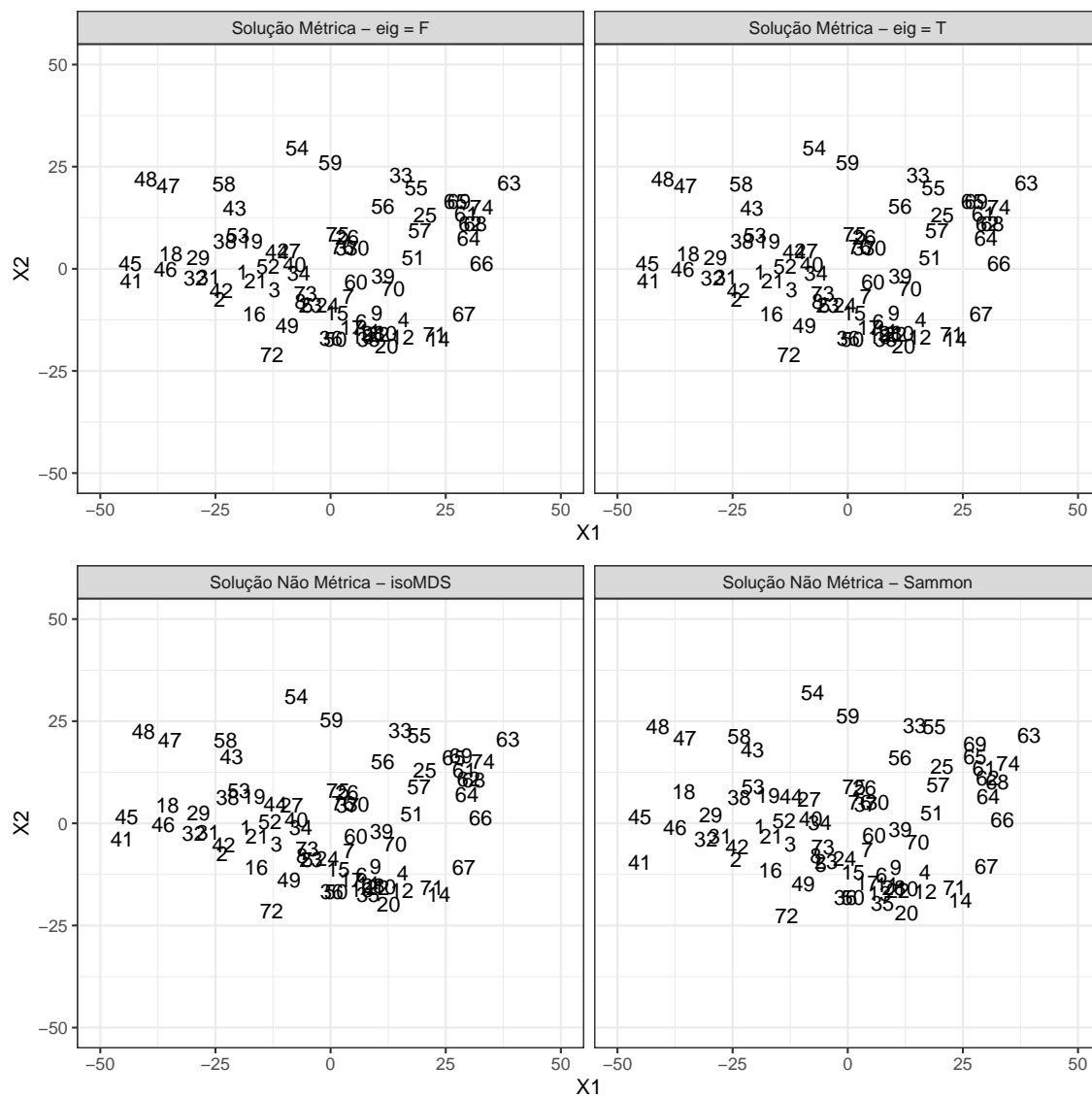


Biplots:



2.2 - Escalonamento Multidimensional (ou Coordenadas Principais) – Compare as soluções métricas e não-métricas.

R:



2.3 - Análise Fatorial Exploratória – Solução de MVS (rotacionar, se for de interesse). Em cada caso, que proporção da variância total dos dados pode ser explicada por 2 componentes? Quais variáveis mais influenciaram na redução de dimensionalidade? Represente os dados em eixos bidimensionais, identifique as observações e compare os resultados das três análises.

R: Foram feitas 3 análises fatoriais, a primeira sendo via Componentes Principais, a segunda e a terceira via Máxima Verossimilhança, sendo que na terceira rotacionamos via Varimax. Em dois componentes, análise fatorial via CP explicou 78,8 da variação total dos dados e a análise fatorial via MVS sem rotação e com rotação Varimax explicou 74,5.

Análise Fatorial Exploratória via CP:

Autovalores e Variância explicada:

| | CP01 | CP02 | CP03 | CP04 | CP05 | CP06 | CP07 | CP08 | CP09 | CP10 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Eigenvalues | 6.736 | 1.245 | 0.708 | 0.707 | 0.270 | 0.129 | 0.105 | 0.064 | 0.031 | 0.005 |
| Cumulative Proportion | 0.674 | 0.798 | 0.869 | 0.940 | 0.967 | 0.979 | 0.990 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |

Matriz de cargas:

| | vecn1 | vecn2 |
|--|---------|---------|
| | -0.3778 | 0.6269 |
| | -0.9508 | -0.0935 |
| | -0.8947 | -0.1934 |
| | -0.8469 | -0.2543 |
| | -0.4290 | -0.5949 |
| | -0.7439 | -0.4334 |
| | -0.9405 | 0.1781 |
| | -0.9190 | 0.2672 |
| | -0.9098 | 0.2047 |
| | -0.9365 | 0.2337 |

Análise Fatorial Exploratória via Máxima Verossimilhança - Sem Rotação:

Cargas Fatoriais:

| | Factor1 | Factor2 |
|--------------|-----------|------------|
| age | 0.3863035 | -0.0938985 |
| DEXfat | 0.8605744 | 0.4561501 |
| waistcirc | 0.7728966 | 0.5158784 |
| hipcirc | 0.7079938 | 0.6112358 |
| elbowbreadth | 0.3318770 | 0.2222714 |
| kneebreadth | 0.5775541 | 0.5619146 |
| anthro3a | 0.9831915 | -0.0050008 |
| anthro3b | 0.9819688 | -0.0831253 |
| anthro3c | 0.9307952 | 0.0218796 |
| anthro4 | 0.9959090 | -0.0610975 |

Variância Explicada:

| | Factor1 | Factor2 |
|----------------|---------|---------|
| SS loadings | 6.221 | 1.233 |
| Proportion Var | 0.622 | 0.123 |
| Cumulative Var | 0.622 | 0.745 |

Análise Fatorial Exploratória via Máxima Verossimilhança - Rotação Varimax:

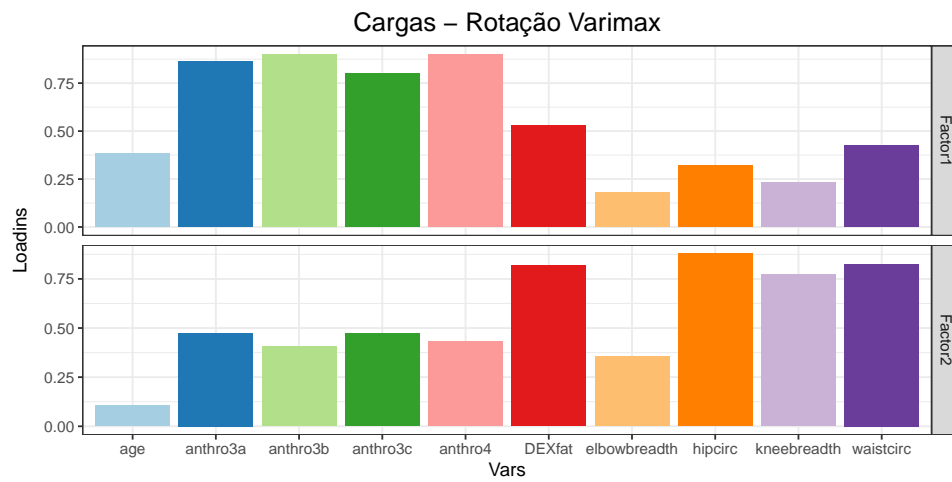
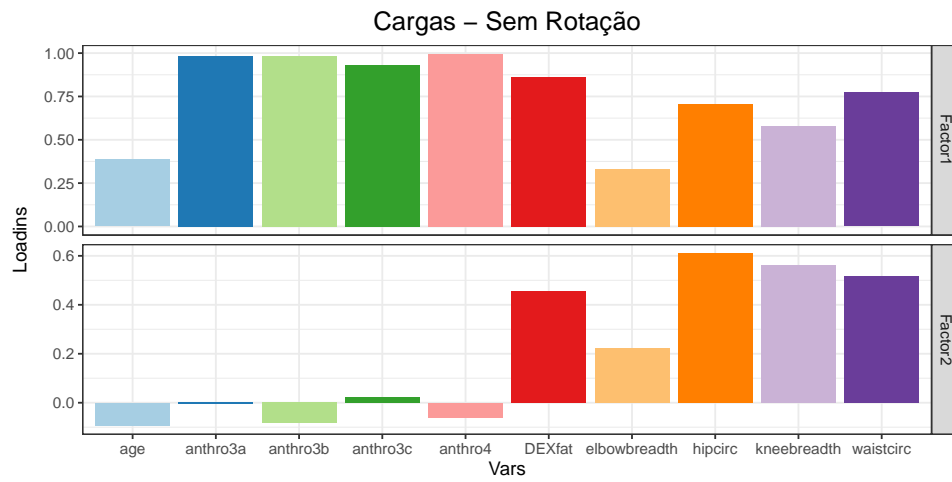
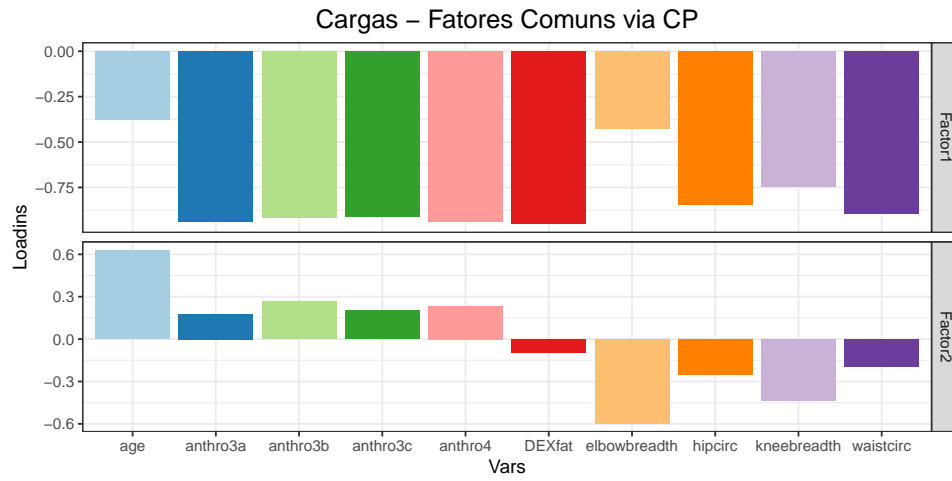
Cargas Fatoriais:

| | Factor1 | Factor2 |
|--------------|-----------|-----------|
| age | 0.3831653 | 0.1059796 |
| DEXfat | 0.5297791 | 0.8173098 |
| waistcirc | 0.4241169 | 0.8268159 |
| hipcirc | 0.3210104 | 0.8785310 |
| elbowbreadth | 0.1817450 | 0.3556904 |
| kneebreadth | 0.2310648 | 0.7719623 |
| anthro3a | 0.8613290 | 0.4741338 |
| anthro3b | 0.8982827 | 0.4052908 |
| anthro3c | 0.8024745 | 0.4721156 |
| anthro4 | 0.8997401 | 0.4313183 |

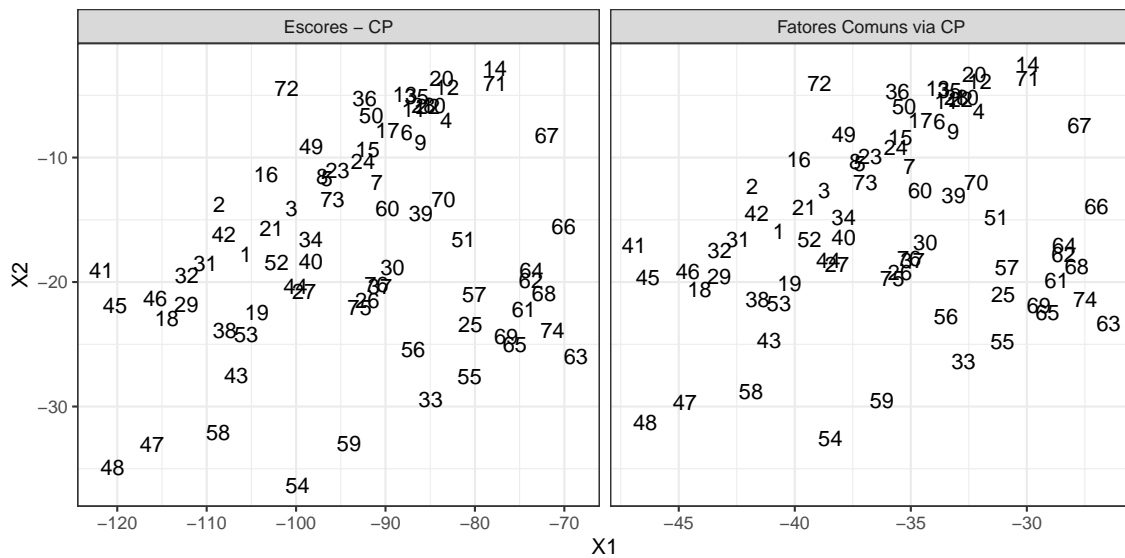
Variância Explicada:

| | Factor1 | Factor2 |
|----------------|---------|---------|
| SS loadings | 3.799 | 3.655 |
| Proportion Var | 0.380 | 0.366 |
| Cumulative Var | 0.622 | 0.745 |

Cargas ou coeficientes dos fatores comuns:

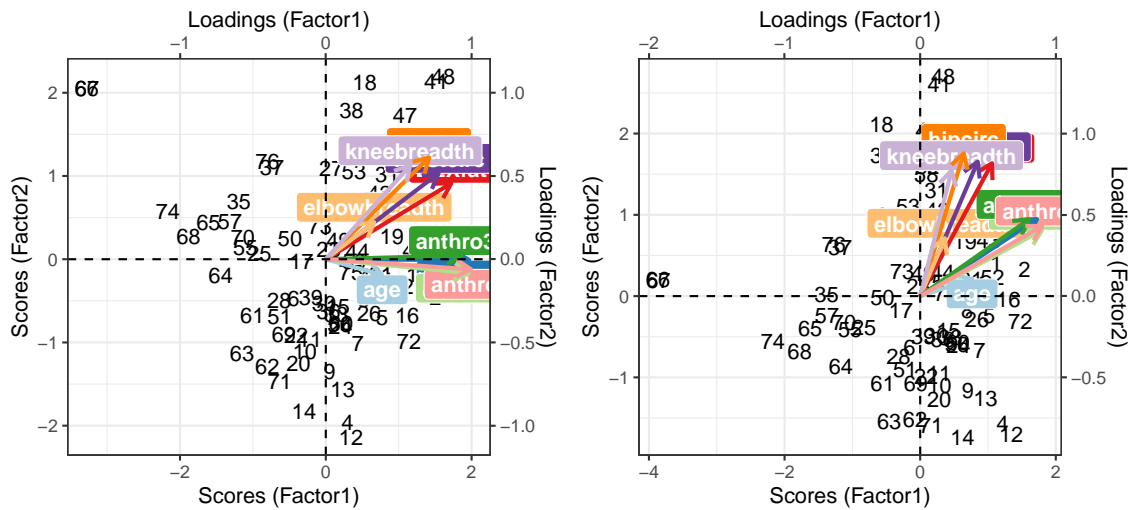


Plot de escore dos componentes:



Biplot entre os fatores:

AF – Bartlet – Sem Rotação AF – Bartlet – Rotação Varimax



Especificidades:

| age | DEXfat | waistcirc | hipcirc | elbowbreadth | kneebreadth | anthro3a | anthro3b | anthro3c | anthro4 |
|-------|--------|-----------|---------|--------------|-------------|----------|----------|----------|---------|
| 0.842 | 0.051 | 0.136 | 0.125 | 0.84 | 0.351 | 0.033 | 0.029 | 0.133 | 0.005 |

Matrizes de correlação para a qual a aproximação é feita:

| | age | DEXfat | waistcirc | hipcirc | elbowbreadth | kneebreadth | anthro3a | anthro3b | anthro3c | anthro4 |
|--------------|---------|--------|-----------|---------|--------------|-------------|----------|----------|----------|---------|
| age | 1.0000 | 0.3105 | 0.2656 | 0.1820 | -0.0243 | 0.1481 | 0.3780 | 0.3856 | 0.3340 | 0.3911 |
| DEXfat | 0.3105 | 1.0000 | 0.8987 | 0.8906 | 0.3647 | 0.7573 | 0.8422 | 0.8132 | 0.8165 | 0.8281 |
| waistcirc | 0.2656 | 0.8987 | 1.0000 | 0.8659 | 0.4090 | 0.7260 | 0.7543 | 0.7086 | 0.7414 | 0.7396 |
| hipcirc | 0.1820 | 0.8906 | 0.8659 | 1.0000 | 0.3268 | 0.7382 | 0.6916 | 0.6447 | 0.6697 | 0.6680 |
| elbowbreadth | -0.0243 | 0.3647 | 0.4090 | 0.3268 | 1.0000 | 0.4665 | 0.3473 | 0.2841 | 0.2700 | 0.3203 |
| kneebreadth | 0.1481 | 0.7573 | 0.7260 | 0.7382 | 0.4665 | 1.0000 | 0.5836 | 0.5114 | 0.5402 | 0.5401 |
| anthro3a | 0.3780 | 0.8422 | 0.7543 | 0.6916 | 0.3473 | 0.5836 | 1.0000 | 0.9516 | 0.8930 | 0.9828 |
| anthro3b | 0.3856 | 0.8132 | 0.7086 | 0.6447 | 0.2841 | 0.5114 | 0.9516 | 1.0000 | 0.9382 | 0.9841 |
| anthro3c | 0.3340 | 0.8165 | 0.7414 | 0.6697 | 0.2700 | 0.5402 | 0.8930 | 0.9382 | 1.0000 | 0.9240 |
| anthro4 | 0.3911 | 0.8281 | 0.7396 | 0.6680 | 0.3203 | 0.5401 | 0.9828 | 0.9841 | 0.9240 | 1.0000 |

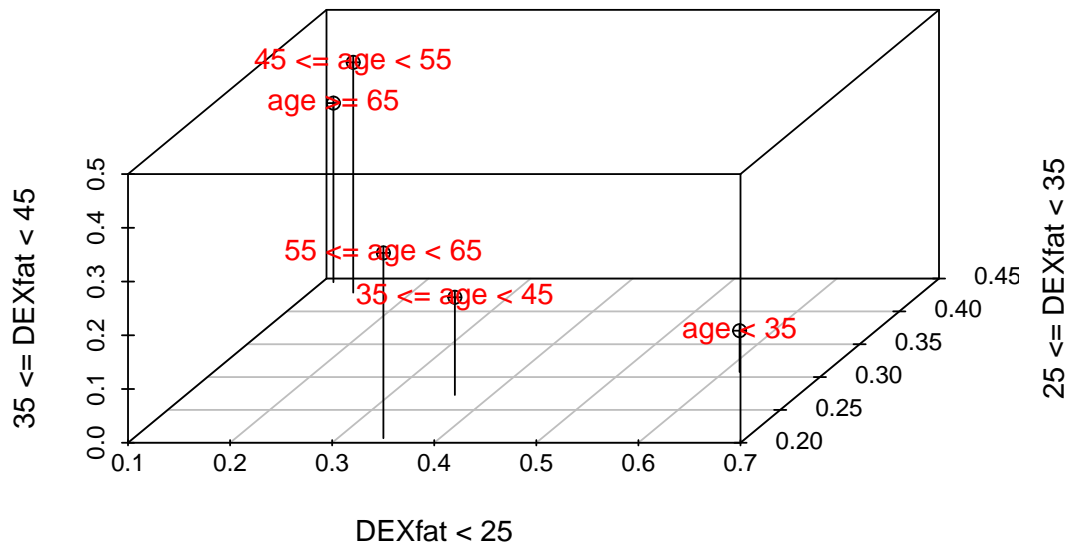
2.4 - Escolha uma das variáveis do banco de dados e obtenha uma tabela de contingência categorizando esta variável de acordo com faixas etárias das observações. Realize uma Análise de Correspondência e comente sobre o padrão de associação presente nesses dados.

| | DEXfat...25 | X25....DEXfat...35 | X35....DEXfat...45 | DEXfat....45 |
|----------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------|
| age < 35 | 8 | 4 | 1 | 0 |
| 35 <= age < 45 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 45 <= age < 55 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 55 <= age < 65 | 10 | 6 | 10 | 3 |
| age >= 65 | 1 | 4 | 3 | 1 |

| | DEXfat...25 | X25....DEXfat...35 | X35....DEXfat...45 | DEXfat....45 |
|----------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------|
| age < 35 | 0.62 | 0.31 | 0.08 | 0.00 |
| 35 <= age < 45 | 0.36 | 0.27 | 0.18 | 0.18 |
| 45 <= age < 55 | 0.14 | 0.43 | 0.43 | 0.00 |
| 55 <= age < 65 | 0.34 | 0.21 | 0.34 | 0.10 |
| age >= 65 | 0.11 | 0.44 | 0.33 | 0.11 |

| | DEXfat...25 | X25....DEXfat...35 | X35....DEXfat...45 | DEXfat....45 |
|----------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------|
| age < 35 | 0.32 | 0.17 | 0.05 | 0.00 |
| 35 <= age < 45 | 0.16 | 0.13 | 0.09 | 0.33 |
| 45 <= age < 55 | 0.08 | 0.26 | 0.27 | 0.00 |
| 55 <= age < 65 | 0.40 | 0.26 | 0.45 | 0.50 |
| age >= 65 | 0.04 | 0.17 | 0.14 | 0.17 |

```
>
>   Pearson's Chi-squared test
>
> data:  tab2.4
> X-squared = 16.037, df = 12, p-value = 0.1895
```



```

>
> Principal inertias (eigenvalues):
>      1      2      3
> Value  0.127399 0.060829 0.022787
> Percentage 60.37% 28.83% 10.8%
>
>
> Rows:
>      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
> Mass      0.171053  0.144737  0.184211  0.381579  0.118421
> ChiDist    0.696076  0.425081  0.550881  0.221901  0.480061
> Inertia    0.082879  0.026153  0.055902  0.018789  0.027291
> Dim. 1    -1.734949 -0.464387  1.267163 -0.016350  1.155162
> Dim. 2     1.273328 -1.373762  1.269898 -0.629188 -0.108222
>
>
> Columns:
>      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
> Mass      0.328947  0.302632  0.289474  0.078947
> ChiDist    0.493035  0.312332  0.414061  0.810813
> Inertia    0.079962  0.029522  0.049629  0.051901
> Dim. 1    -1.368467  0.461980  1.049513  0.082807

```

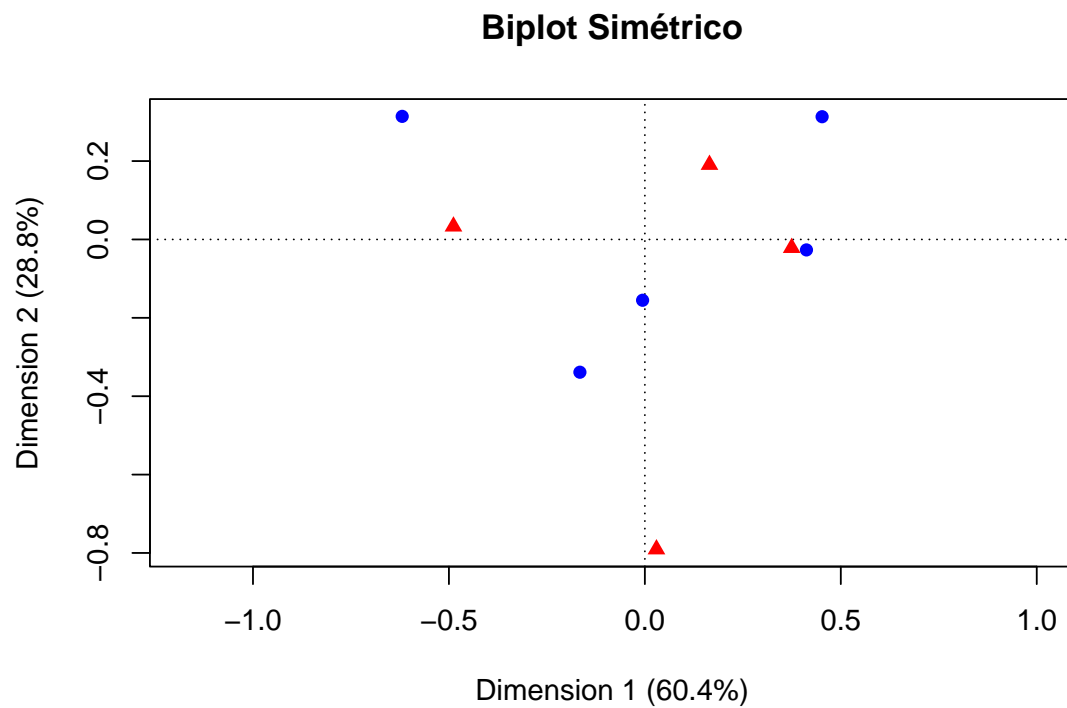
```
> Dim. 2    0.134818  0.772732 -0.086871 -3.205358
```

coordenadas padrão das linhas (autovetores_linha)

| Dim1 | Dim2 | Dim3 |
|---------|---------|---------|
| -1.7349 | 1.2733 | -0.3259 |
| -0.4644 | -1.3738 | -1.2985 |
| 1.2672 | 1.2699 | 0.1887 |
| -0.0163 | -0.6292 | 1.0501 |
| 1.1552 | -0.1082 | -1.6192 |

coord padrão das colunas (autovetores_col)

| Dim1 | Dim2 | Dim3 |
|---------|---------|---------|
| -1.7349 | 1.2733 | -0.3259 |
| -0.4644 | -1.3738 | -1.2985 |
| 1.2672 | 1.2699 | 0.1887 |
| -0.0163 | -0.6292 | 1.0501 |
| 1.1552 | -0.1082 | -1.6192 |



```
>      Dim1 Dim2
> [1,] -0.62  0.31
```

```

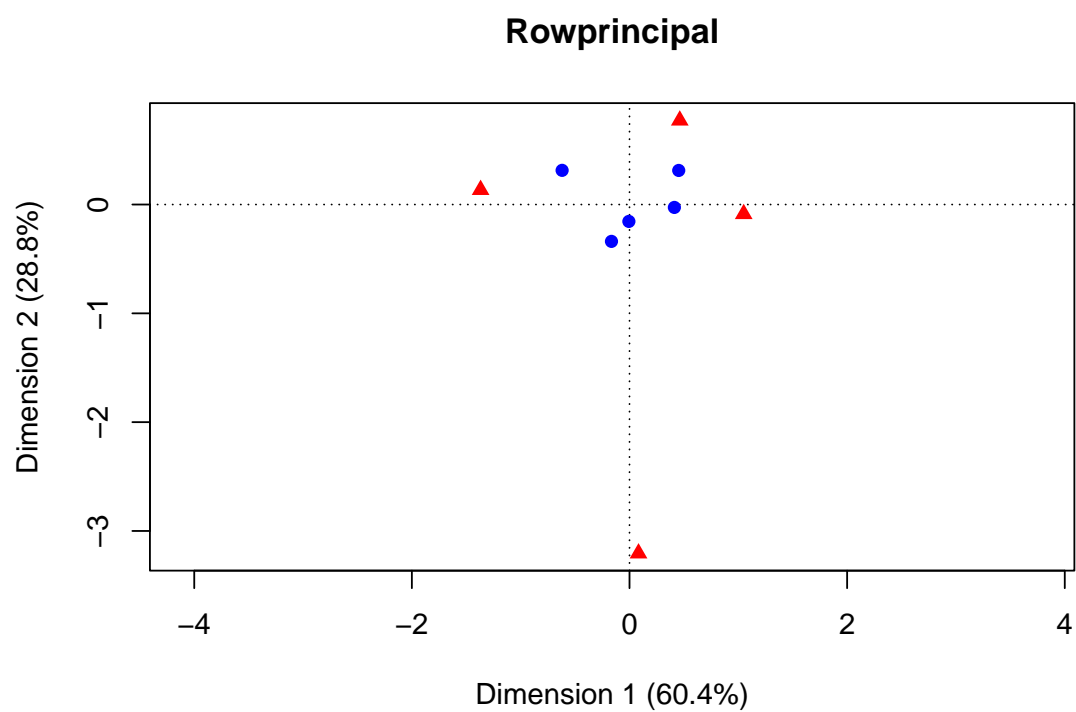
> [2,] -0.17 -0.34
> [3,]  0.45  0.31
> [4,] -0.01 -0.16
> [5,]  0.41 -0.03

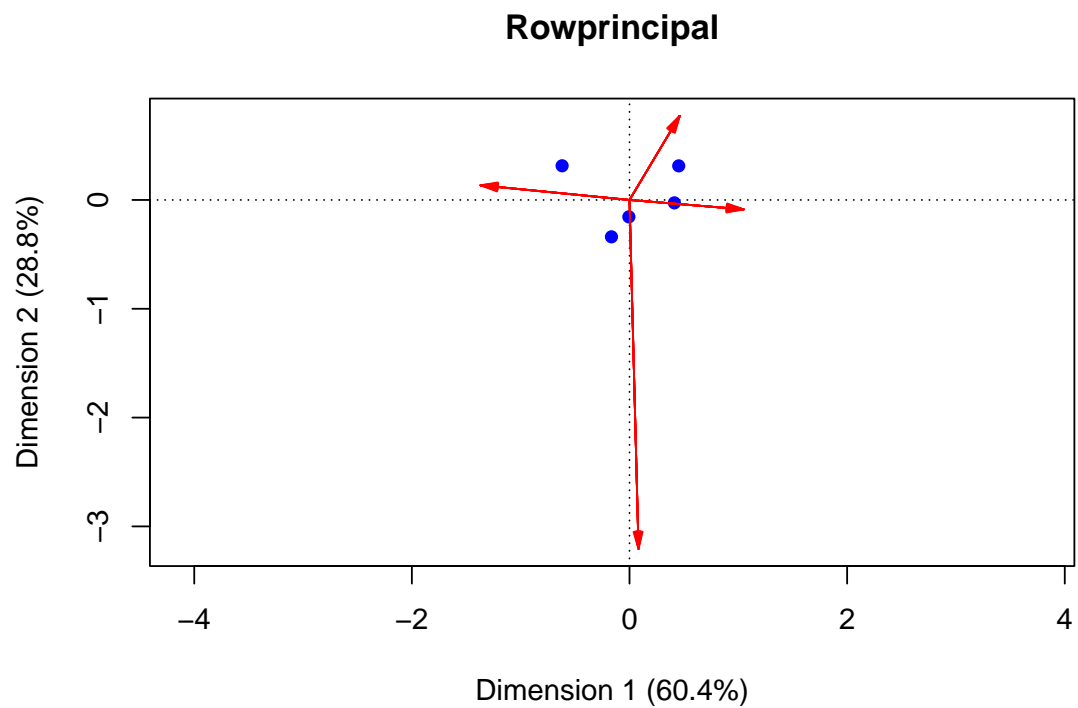
```

```

>      Dim1 Dim2
> [1,] -0.49  0.03
> [2,]  0.16  0.19
> [3,]  0.37 -0.02
> [4,]  0.03 -0.79

```





```

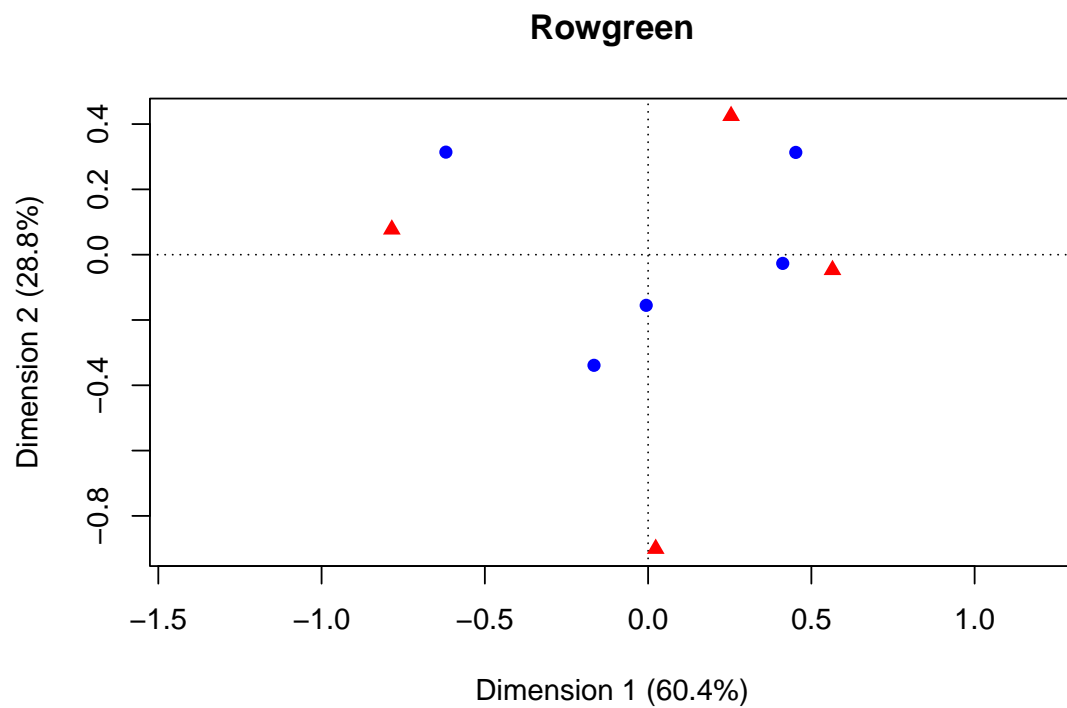
>      Dim1  Dim2
> [1 ,] -0.62  0.31
> [2 ,] -0.17 -0.34
> [3 ,]  0.45  0.31
> [4 ,] -0.01 -0.16
> [5 ,]  0.41 -0.03

```

```

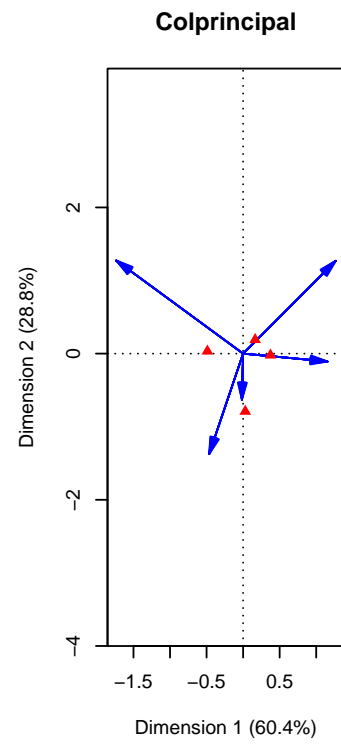
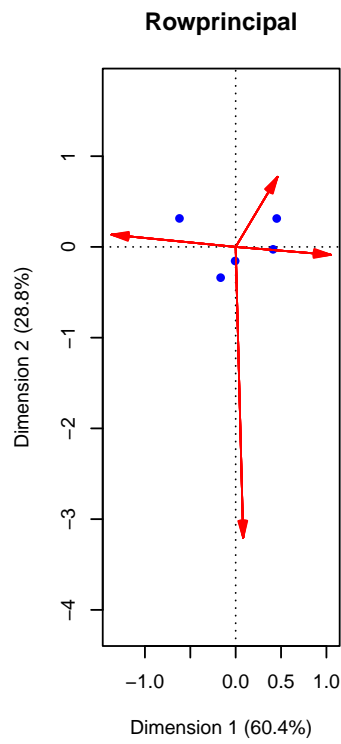
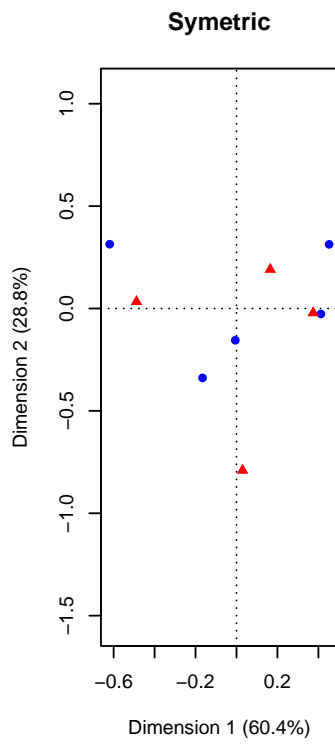
>      Dim1  Dim2
> [1 ,] -1.37  0.13
> [2 ,]  0.46  0.77
> [3 ,]  1.05 -0.09
> [4 ,]  0.08 -3.21

```

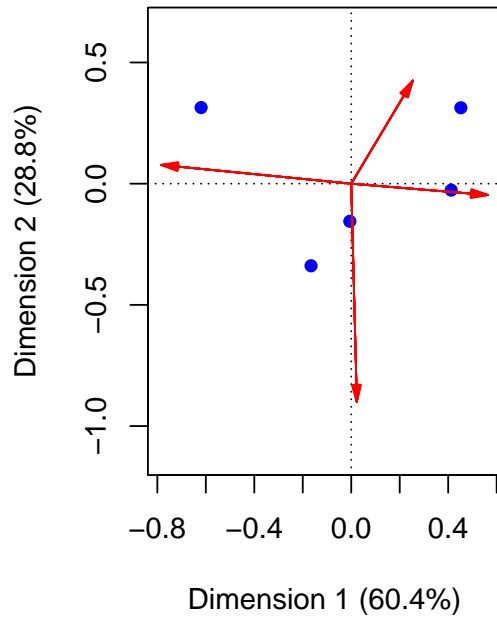


```
>      Dim1  Dim2
> [1 ,] -0.62  0.31
> [2 ,] -0.17 -0.34
> [3 ,]  0.45  0.31
> [4 ,] -0.01 -0.16
> [5 ,]  0.41 -0.03
```

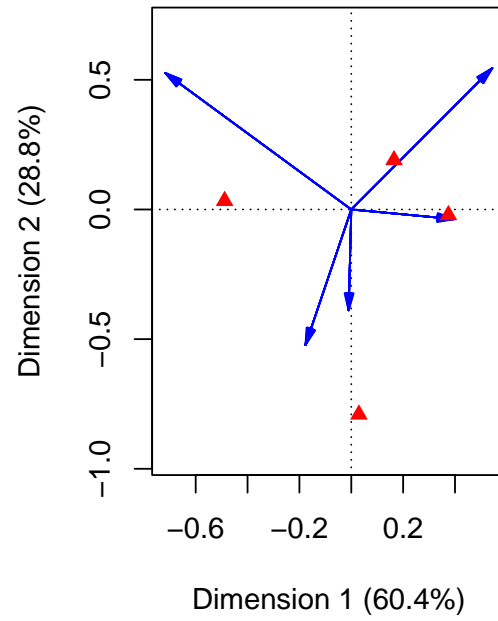
```
>      Dim1  Dim2
> [1 ,] -0.78  0.08
> [2 ,]  0.25  0.43
> [3 ,]  0.56 -0.05
> [4 ,]  0.02 -0.90
```



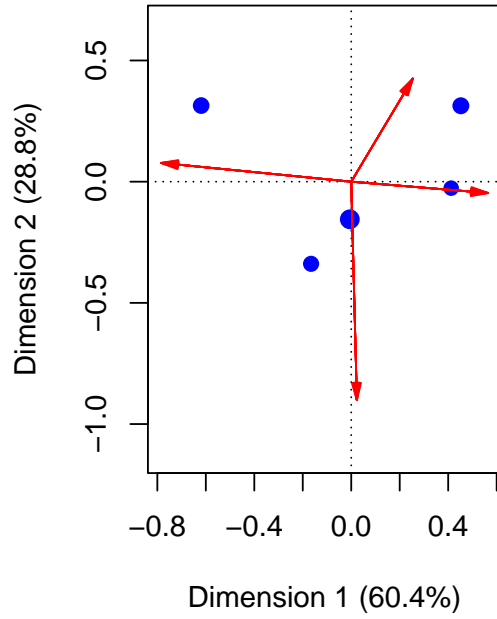
Rowgreen



Colgreen



Rowgreen.mass



Colgreen.mass

