Hashes Camaleão: Definição e Construção

Thiago Leucz Astrizi

24 de janeiro de 2020

1 Introdução

Hashes camaleão são funções muito semelhantes à hashes comuns. A diferença é que elas possuem uma chave pública e uma chave privada associada a elas. De posse de sua chave pública, é possível usá-las para calcular o hash de algum dado qualquer, o que também permite conferir se o cálculo de um hash está correto. Todas as propriedades características à funções hash criptográficas (resistência à pré-imagem, resistência à segunda pré-imagem, resistência à colisão) estão presentes nas hashes camaleão quando elas são usadas somente junto à sua chave pública.

Tendo acesso à chave privada de uma hash camaleão, a propriedade de resistência à segunda pré-imagem se perde, o que também acaba com a propriedade de resistência à colisões. Dependendo da construção da hash camaleão, a propriedade de resistência à primeira pré-imagem também pdode se perder quando tem-se acesso à chave privada.

Existem 3 tipos principais de esquemas de hash camaleão que serão descritas nas próximas seções.

2 Hashes Camaleão Simples

Um Esquema de Hash Camaleão Simples é uma tupla formada por três algoritmos definidos sobre os conjuntos M, R e C:

- **KeyGen**: $1^k \to (\mathcal{SK}, \mathcal{PK})$
  Dado um parâmetro de segurança, ela retorna um par de chaves pública e privada a ser usada com uma hash camaleão.
- **Hash**: $(\mathcal{PK}, m, r) \to c$, onde $m \in M$, $r \in R$ e $c \in C$.
- **Collision**: $(\mathcal{SK}, m, r, m') \to r'$ tal que $Hash(\mathcal{PK}, m, r) = Hash(\mathcal{PK}, m', r')$ e $(m, r) \neq (m', r')$.

Além disso, as seguintes propriedades devem estar presentes no esquema:

- **Resistência a Colisão:** Para todo adversário eficiente $\mathcal{A}$ a probabilidade do experimento abaixo retornar 1 é negligível:

Experimento $\texttt{CollRes}_{\mathcal{A}}^{CH}(n)$**:**
  $(\mathcal{PK}, \mathcal{SK}) \leftarrow^{\$} \textbf{KeyGen}(1^n)$;
  $(m, r, m', r') \leftarrow \mathcal{A}(\mathcal{PK})$;
  if $Hash(\mathcal{PK}, m, r) = Hash(\mathcal{PK}, m', r')$ ***e*** $(m, r) \neq (m', r')$ **then**
    retorne 1;
  else
    retorne 0;
  end
Fim

- **Resistência à Pré-Imagem:** Para todo adversário eficiente $\mathcal{A}$, a probabilidade do experimento abaixo retornar 1 é negligível:

Experimento $\texttt{PreImg}_{\mathcal{A}}^{CH}(n)$**:**
  $(\mathcal{PK}, \mathcal{SK}) \leftarrow^{\$} \textbf{KeyGen}(1^n)$;
  $m \leftarrow^{\$} M$;
  $r \leftarrow^{\$} R$;
  $c \leftarrow Hash(\mathcal{PK}, m, r)$;
  $m' \leftarrow \mathcal{A}(\mathcal{PK}, c, r)$;
  if $m' = m$ **then**
    retorne 1;
  else
    retorne 0;
  end
Fim

- **Segurança Semântica:** Se para todo adversário eficiente $\mathcal{A}$, a probabilidade do experimento abaixo retornar 1 é negligível:

Experimento $\texttt{SemanticSecurity}_{\mathcal{A}}^{CH}(n)$**:**
  $(\mathcal{PK}, \mathcal{SK}) \leftarrow \textbf{KeyGen}(1^n)$;
  $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(\mathcal{PK})$;
  $b \leftarrow^{\$} \{0, 1\}$;
  $r \leftarrow^{\$} R$;
  $c \leftarrow Hash(\mathcal{PK}, m_b, r)$;
  $b' \leftarrow \mathcal{A}(c, r)$;
  if $b' = b$ **then**
    retorne 1;
  else
    retorne 0;
  end

Opcionalmente um esquema pode apresentar também as seguintes propriedades:

- **Livre de Exposição de Chave:** Se para todo adversário eficiente $\mathcal{A}$, capaz de realizar uma quantidade polinomial de consultas à um oráculo que retorna colisões aleatórias no esquema de hash camaleão, a probabilidade do experimento abaixo retornar 1 é negligível.

Experimento $\texttt{KeyExposition}_{\mathcal{A}}^{CH}(n)$**:**
  $(\mathcal{PK}, \mathcal{SK}) \leftarrow$ **KeyGen**(1^n);
  $\mathcal{SK}' \leftarrow \mathcal{A}^{Collision(\mathcal{SK},.,.,.)}(\mathcal{PK})$;
  if $\mathcal{SK} = \mathcal{SK}'$ **then**
    retorne 1;
  else
    retorne 0;
  end
Fim

Se um esquema de hash camaleão é livre de exposição de chaves, a mesma chave pode ser reutilizada mesmo quando colisões obtidas com a sua chave privada tornam-se públicas.

- A **Resistência à Falsificação** afirma que para todo algoritmo adversário $\mathcal{A}$ que recebe uma chave pública $\mathcal{PK}$ e pode consultar um número polinomial de vezes um oráculo que retorna diferentes resultados de $Collision(\mathcal{SK}, m, r, m')$ para quaisquer valores de m, r e m', a probabilidade do experimento abaixo retornar 1 é negligível:

Experimento $\texttt{ForgeRes}_{\mathcal{A}}^{CH}(n)$**:**
  $(\mathcal{PK}, \mathcal{SK}) \leftarrow$ **KeyGen**(1^n);
  $(m, r, m', r') \leftarrow \mathcal{A}^{Collision(\mathcal{SK},.,.,.)}(\mathcal{PK})$;
  if $Hash(\mathcal{PK}, m, r) = Hash(\mathcal{PK}, m', r')$ **e** $(m, r) \neq (m', r')$ **e** *r e r' não foram retornados pelo oráculo* **then**
    retorne 1;
  else
    retorne 0;
  end
Fim

Sem esta propriedade, uma vez que uma colisão é descoberta para uma mensagem m, não é possível garantir a segurança de qualquer outro uso da hash camaleão para calcular novamente o hash desta mesma mensagem. Contudo, a função ainda pode ser utilizada com a mesma chave para calcular o hash de outras mensagens. Na maioria dos casos esta propriedade é desejável, mas existem alguns usos de hash camaleão, como no caso das assinaturas camaleão como propostas por Krawczyk em [6] nos quais a ausência desta propriedade é um requisito.

É importante notar que a Resistência à Falsificação implica que um esquema é Livre de Exposição de Chaves. Afinal, um adversário capaz de computar eficientemente com probabilidade não-negligível a chave privada tendo acesso à um número polinomial de colisões pode ser usado para construir um adversário com uma vantagem não-negligível em encontrar colisões. Também será válida a contrapositiva de que se um esquema não é livre de exposição de chave, ele não será resistente à falsificação.

- **Cálculo de Pré-Imagem:** Existe um algoritmo determinístico eficiente $PreImage$ que recebe uma chave privada $\mathcal{SK}$ e um valor de hash $c \in C$ e

retorna um par (m, r) tal que $Hash(\mathcal{PK}, m, r) = c$ para a chave pública correspondente à chave privada recebida como argumento.

É importante notar que a composição de uma hash convencional e uma hash camaleão é uma hash camaleão. Grande parte das definições de hash camaleão assume que a mensagem de entrada possui um tamanho fixo ou está em um formato pré-estabelecido. Em tais casos, assumimos que a mensagem já passou previamente por uma função hash que a deixou no formato adequado.

Uma função de hash camaleão $Hash(\mathcal{PK}, m, r)$ pode ser vista como um caso particular de uma função hash com chave $H_{\mathcal{PK}}(m||r)$ e deste fato podemos derivar algumas propriedades. Se $|M||R| \geq s|T|$ para algum s super-polinomial em relação ao parâmetro de segurança n, então se a função hash é resistente à colisão, então ela será uma função de mão única. Em tais casos, a existência de uma função $PreImage$ também implica a existência de uma função $Collision$ dada a chave privada.

2.1 Construção Baseada em Permutações de Resíduos Quadráticos (Krawczyk) (2000) [6]

2.1.1 Funções

KeyGen: Como chave pública, gere duas funções de permutação que atuam sobre um mesmo Domínio. Chamaremos elas de f_0 e f_1. Como chave privada, armazene o inverso destas funções: f_0^{-1} e f_1^{-1}.

A construção de Krawczyk usa como funções: $f_0(x) = x^2 \mod n$ e $f_1(x) = 4x^2 \mod n$ para n sendo um múltiplo de dois primos grandes p e q, tal que $p \equiv 3 \mod 8$ e $q \equiv 7 \mod 8$. E sendo a função definida apenas para resíduos quadráticos módulo n que também são primos em relação à n. A chave pública precisa então apenas armazenar n e a chave privada armazena p e q. As funções inversas envolvem raíz quadrada modular, as quais só sabemos como resolver eficientemente módulo n quando conhecemos os fatores de n.

Hash: A função aceita como parâmetro aleatório somente valores de r que são resíduos quadráticos módulo n. Em seguida, usando a representação binária da mensagem m, percorremos em ordem cada um dos bits em uma iteração. Inicialmente o valor do hash é considerado como igual a r. Em cada bit da iteração atualizamos como novo valor da hash o valor anterior passado para f_0 se o bit for 0 ou o valor anterior passado para f_1 se o bit for 1.

PreImage: Para obter um valor válido de r para que a mensagem m tenha o hash C, comece com o valor inicial de C e percorra a representação binária de m de trás pra frente. Toda vez que encontrar um 0, aplique sobre o valor atual de r a função f_0^{-1}. Sempre que encontrar um 1, aplique f_1^{-1}. O valor final é o r desejado.

Collision: Basta escolher uma mensagem m' qualquer que seja diferente de m e calcular usando a equação:

$Collision(\mathcal{SK}, m, r) = (m', PreImage(\mathcal{SK}, m', Hash(\mathcal{PK}, m, r)))$

Isso funciona pelo fato de que toda mensagem neste esquema é capaz de produzir qualquer $c \in C$, bastando que se mude o valor de r utilizado no hash.

2.1.2 A Exposição de Chave

Se encontramos uma colisão nesta hash camaleão, temos duas mensagens que à partir de algum momento em que iteramos sobre seus bits, obtemos valores distintos x e y tais que:

$$x^2 \equiv 4y^2 \pmod{n}$$

O que nos leva a:

$$x^2 - 4y^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$(x + 2y)(x - 2y) \equiv 0 \pmod{n}$$

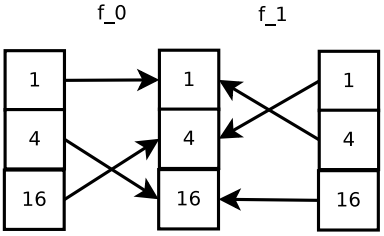
Desta forma, conseguimos fatorar n e ter acesso à chave privada $\mathcal{SK}$.

O mesmo raciocínio também nos mostra que encontrar uma colisão sem acesso à $\mathcal{SK}$ é tão difícil quanto fatorar números.

2.1.3 Exemplo Didático

Começamos escolhendo os valores $p = 3$ e $q = 7$, que tem a propriedade desejada de serem respectivamente côngruos a 3 e 7 módulo 8. Multiplicamos estes números para obtermos $n = 21 = pq$. No módulo 21 obtemos 3 números que são resíduos quadráticos: 1, 4 e 16.

Com estes três valores diferentes, definimos a função $f_0(x) = x^2 \mod 21$ e $f_1 = 4x^2 \mod 21$:



Para gerarmos o hash da mensagem com bits 01101, geramos um r aleatório que pode ser 1, 4 ou 16. No caso, escolhemos 4. Calculamos então:

$$f_1(f_0(f_1(f_1(f_0(4))))) = f_1(f_0(f_1(f_1(16)))) = f_1(f_0(f_1(16))) = f_1(f_0(16)) = f_1(4) = 1$$

Queremos que a mensagem com bits 00101 tenha exatamente o mesmo hash que a mensagem acima (no caso, 1). Para descobrirmos o valor de r' que devemos associar à ela para este fim, calculamos:

$$f_0^{-1}(f_0^{-1}(f_1^{-1}(f_0^{-1}(f_1^{-1}(1))))) = f_0^{-1}(f_0^{-1}(f_1^{-1}(f_0^{-1}(4)))) = f_0^{-1}(f_0^{-1}(f_1^{-1}(16))) =$$
$$= f_0^{-1}(f_0^{-1}(16)) = f_0^{-1}(4) = 16$$

O que significa que podemos calcular o hash dessa mensagem e obteremos $Hash(00101, 16) = 1$. O que podemos conferir calculando abaixo:

$$f_1(f_0(f_1(f_0(f_0(16))))) = f_1(f_0(f_1(f_0(4)))) = f_1(f_0(f_1(16))) = f_1(f_0(16)) = f_1(4) = 1$$

Exatamente o valor que era esperado.

2.1.4 Medida de Desempenho

Usando uma implementação em C baseada na biblioteca GNU MP com chaves de 2048 bits e mensagens de 54 bytes, rodando em um computador Intel i7, foi obtido os seguintes tempos de execução:

KeyGen	0,43400s	Hash	0,00104s	Collision	1,79000s

2.2 Construção Baseada em Permutações do RSA

Esta proposta funciona da mesma forma que a anterior, mas utiliza o RSA como função de permutação. Na literatura não foi encontrada uma proposta de uso desta hash camaleão, provavelmente devido ao seu desempenho pior comparada à anterior.

Contudo, esta construção está sencdo mencionada aqui devido a possuir algumas características únicas, como ser até onde se sabe livre de exposição de chaves, resistente à falsificação e possuir definida uma função $PreImage$ para calcular a pré-imagem com a chave privada.

2.2.1 Medida de Desempenho

Executando uma implementação de 2048 bits em mensagens de 54 bytes, os seguintes tempos de execução foram obtidos:

KeyGen	0,4040s	Hash	0,0146s	Collision	2,1200s

2.3 Construção Baseada em Logaritmo Discreto (Krawczyk) (2000) [6]

2.3.1 Funções

KeyGen: Primeiro encontre primos grandes p e q tais que $p = kq + 1$ e um grupo multiplicativo modular $\mathbb{Z}_p^*$ com um gerador g.

A chave privada é um valor aleatório $x \in \mathbb{Z}_q^*$.

A chave pública é um valor $y = g^x \mod p$.

Hash: Dada uma mensagem $m \in \mathbb{Z}_q^*$ e um parâmetro $r \in \mathbb{Z}_q^*$, a hash camaleão é obtida por meio da definição:

$$Hash(\mathcal{PK} = y, m, r) = g^m y^r \mod p$$

PreImage: Não. Seria necessário resolver o problema do logaritmo discreto para implementar esta função.

Collision: A chave privada é o logaritmo discreto de y. Se temos um m e um r que possui um hash conhecido e queremos que um m' qualquer gere o mesmo valor hash, o valor r' necessário é retornado por:

$$Collision(\mathcal{SK} = x, m, r, m') = (m + xr - m')(x)^{-1}$$

Este esquema não é livre de exposição de chaves. A chave secreta x pode ser obtida por qualquer um que tenha acesso à uma colisão (m, r) e (m', r') por meio da fórmula $m + xr = m' + xr'$.

2.3.2 Exemplo Didático

Vamos escolher um $p = 11 = (5)(2) + 1$ com um $q = 5$. Para o nosso valor de p temos então o seguinte grupo multiplicativo:

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Com relação à exponenciação, se fizermos o valor de cada linha abaixo elevado ao valor da coluna obtemos a tabela:

a^b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

Podemos escolher qualquer elemento cuja ordem é $q = 5$ como gerador. Pode ser o 3, 4, 5 ou 9. Escolheremos então $g = 5$. Podemos escolher como chave privada os valores 1, 2, 3 ou 4, pois eles tem ordem $q = 5$. Façamos então $\mathcal{SK} = 3$. O que faz com que nossa chave pública seja $\mathcal{PK} = 5^3 \mod 11 = 4$.

Vamos calcular um hash para a mensagem representada pelo número $m = 8$. O nosso parâmetro aleatório r pode ser 1, 2, 3 ou 4. Façamos então $r = 2$. A hash é calculada então por:

$$Hash(\mathcal{PK} = 4, m = 8, r = 2) = g^m y^r = 5^8 4^2 \mod 11 = 9$$

Agora supondo que tenhamos a chave privada, queremos fazer com que a mensagem $m' = 7$ tenha exatamente o mesmo valor de hash. Para isso fazemos:

$$\begin{aligned} UForge(\mathcal{SK} = 3, m = 8, r = 2, m' = 7) &= \frac{m + xr - m'}{x} \mod 5 \\ &= 2(3)^{-1} \mod 5 = (2)(2) \mod 5 = 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Para checar que isso é correto, vamos calcular:

$$Hash(\mathcal{PK} = 4, m' = 7, r' = 4) = g^{m'} y^{r'} = 5^7 4^4 \mod 11 = (3)(3) = 9$$

Exatamente o resultado esperado.

2.3.3 Medida de Desempenho

KeyGen	0,005490s	Hash	0,009530s	Collision	0,000032s

2.4 Construção Baseada em Assinatura de Nyberg-Rueppel (Ateniese e Medeiros) (2005) [1]

2.4.1 Funções

KeyGen: Assuma termos acesso a um grupo de inteiros módulo $p = 2q+1$, sendo p e q primos. A chave pública é $(g, y = g^x)$. A chave privada é x. Os valores são sempre módulo p, exceto nos expoentes que são módulo q. Então a chave privada deve ser vista como um valor módulo q.

Hash: Neste esquema, consideramos o r como sendo uma tupla de dois valores aleatórios (r_1, r_2). O hash é calculado então:

$$Hash(m, (r_1, r_2)) = \Big[r_1 - (y^{\mathcal{H}(m||r_1)} g^{r_2} \mod p)\Big] \mod q$$

Assumindo $\mathcal{H}(m||r_1)$ como o cálculo de um hash criptográfico convencional da concatenação de m e r_1.

PreImage: Seja C o valor da hash desejada para uma mensagem m, gere r'_1 pela fórmula abaixo para qualquer k aleatório:

$$r'_1 = \big[(C + (g^k \mod p))\big] \mod q$$

E gere r'_2 de acordo com a equação abaixo usando o mesmo valor k:

$$r'_2 = [k - \mathcal{H}(m'||r'_1)x] \mod q$$

Collision: Como existe uma função $PreImage$, podemos obter uma colisão calculando:

$$Collision(\mathcal{S}\|, m, r, m') = PreImage(\mathcal{SK}, Hash(\mathcal{PK}, m, r), m')$$

Isso funciona e nos retorna (r'_1, r'_2) com as propriedaes desejadas, pois se formos usar tais valores para computar o hash da mensagem m', obtemos:

$$\begin{aligned}
Hash(m', (r'_1, r'_2)) &= \Big[r'_1 - (y^{\mathcal{H}(m'||r'_1)} g^{r'_2} \mod p)\Big] \mod q \\
&= \big[\,\big[(Hash(m, (r_1, r_2)) + (g^k \mod p))\big] \mod q \\
&\quad - (y^{\mathcal{H}(m'||r'_1)} g^{[k - \mathcal{H}(m'||r'_1)x]} \mod p)\big] \mod q \\
&= \big[\,\big[(Hash(m, (r_1, r_2)) + (g^k \mod p))\big] \mod q \\
&\quad - (g^{x\mathcal{H}(m'||r'_1)} g^{[k - \mathcal{H}(m'||r'_1)x]} \mod p)\big] \mod q \\
&= Hash(m, (r_1, r_2)) + g^k - g^k \mod q \\
&= Hash(m, (r_1, r_2))
\end{aligned} \tag{2}$$

2.4.2 Variações

Ateniese e Medeiros, no mesmo artigo em que apresentou esta construção, apontou que é possível definir a função hash como:

$$Hash(\mathcal{PK}, m, r) = \left(r_1 y^{\mathcal{H}(m||r_1)} g^{r_2}\right) \mod p$$

Em tal caso, para obter a função $PreImage$, o cálculo de r'_2 não se modifica, mas r'_1 é obtido com a nova fórmula:

$$r'_1 = Cg^{-k} \mod p$$

2.4.3 Medida de Desempenho

KeyGen	0,005568s	Hash	0,009608s	Collision	0,000044s

2.5 Construção Baseada no Protocolo Sigma de Fiat-Shamir (Mihir Bellare e Todor Ristov) (2008) [2]

Esta construção foi obtida em um artigo no qual os autores estavam demonstrando a possibilidade de construir novas funções hash com provas de segurança à partir de protocolos sigma. Eles demonstraram que as funções hash que eles obtiveram também tinham a propriedade de ser hashes camaleão.

2.5.1 Funções

KeyGen: Gere dois primos aleatórios p e q. Faça $n = pq$.

Como chave pública, gere um vetor s de k números que sejam resíduos quadráticos módulo n, sendo k o número de bits das mensagens a serem recebidas. Para adotar as melhorias propostas no Protocolo Micali-Shamir, tais números devem ser primos pequenos que sejam resíduos quadráticos módulo n, Adicione também à chave o valor n.

Como chave privada, gere um vetor v de k números tal que $v_i = s_i^{-2} \mod n$ e também adicione à chave os fatores p e q.

Hash: Seja a mensagem m um vetor binário com k bits e sendo $r \leq n/2$, a hash é obtida por:

$$Hash(\mathcal{PK}, m, r) = r^2 \prod_{m_i=1} v_i \mod n$$

PreImage: Esta função é definida como:

$$PreImage(\mathcal{SK}, C, m') = \sqrt{C} \prod_{m'_i=1} s_i \mod n$$

A raíz quadrada modular só pode ser calculada por quem conheça os fatores primos de n. A fórmula acima funciona, pois:

$$C = r^2 \prod_{m_i=1} v_i = r^2 \prod_{m_i=1} \frac{1}{s_i^2} \Longrightarrow r = \sqrt{C} \prod_{m'_i=1} s_i$$

2.5.2 O Problema da Exposição de Chave

Esta construção não é livre de exposição de chave. Se somos capazes de obter uma colisão na qual as duas mensagens que colidem possuem bits 1s nas mesmas posições, para cada bit 1 em comum, podemos gerar uma nova colisão para novas mensagens idênticas, mas que possuem o bit 1 correspondente trocado para 0, mantendo os parâmetros aleatórios das mensagens idênticos.

Sendo assim, a probabilidade de que uma colisão não revele novas colisões derivadas é negligível.

2.5.3 Medida de Desempenho

KeyGen	4,838347s	Hash	0,000004s	Collision	0,004199s

2.6 Construção Baseada no Protocolo Sigma de Okamoto (Mihir Bellare e Todor Ristov) (2008) [2]

Esta construção foi obtida assim como a anterior à partir de protocolos sigma já existentes após o autor perceber a relação existente entre protocolos sigma e hashes camaleão. Mas ao contrário do método anterior, esta construção não se destaca por ter vantagem em desempenho comparada à outras construções e nem tem a propriedade desejável de ser livre de exposição de chave.

2.6.1 Funções

KeyGen: Obtenha um grupo onde calcular o logaritmo discreto é um problema difícil. Escolha como chave pública (g_1, g_2, x) onde g_1 e g_2 são geradores e escolha como chave privada (s_1, s_2) tais que $g_1^{s_1} g_2^{s_2} = x$.

Hash: É definida pela seguinte função:

$$Hash(\mathcal{PK} = (g_1, g_2, x), m, r = (r_1, r_2)) = x^m g_1^{z_1} g_2^{z_2}$$

Collision: Pela propriedade da exponenciação, dados m, m' e $r = (r_1, r_2)$ conhecidos, podemos obter $r' = (r'_1, r'_2)$ tal que $Hash(\mathcal{PK}, m, r) = Hash(\mathcal{PK}, m', r')$ por meio da equação:

$$r'_1 = (m - m')s_1 + r_1$$

$$r'_2 = (m - m')s_2 + r_2$$

A mesma equação também nos revela que o esquema não é livre da exposição de chaves, pois diante de uma colisão os valores s_1, s_2 podem ser trivialmente isolados.

2.7 Construção Baseada em Reticulados (David Cash) (2010) [3]

A segurança deste esquema não se baseia em fatoração de números ou no logaritmo discreto, mas no Problema da Solução Inteira Pequena (SIS), um problema baseado em reticulados. Isso torna este esquema seguro mesmo diante de computadores quânticos até onde se sabe.

A segurança desta construção se baseia no fato de que é difícil encontrar qualquer vetor x inteiro cuja norma euclideana é suficientemente pequena tal que $Ax = b$, onde A é uma matriz inteira retangular suficientemente grande em termos de número de colunas e b é um vetor conhecido.

A construção utiliza sempre matrizes e vetores inteiros módulo q nas definições seguintes.

2.7.1 Funções

Keygen: Seja $H \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ uma matriz inversível qualquer, podendo ser uma matriz identidade e G uma matriz selecionada previamente tal que para G é conhecido método eficiente de obter valores de x com norma euclideana pequena tais que $Gx = b$.

Como chave privada, gere uma matriz aleatória $R \in \mathbb{Z}^{w \times n}$. Os valores dela devem ser pequenos para aumentar a qualidade do *trapdoor*.

Como chave pública gere a matriz $A = [\overline{A}|HG - \overline{A}R]$, onde $\overline{A}$ é uma submatriz inteira gerada aleatoriamente.

O objetivo desta construção é que com isso geramos matrizes tais que:

$$A \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} = HG$$

Hash: Seja $\mathcal{H}$ uma função hash convencional tal que a saída dela possa ser interpretada como um vetor inteiro módulo q com mesmo número de elementos que o número de linhas de A. Definimos a função hash do esquema como:

$$Hash(\mathcal{PK} = A, m, r) = \mathcal{H}(m) + Ar \mod q$$

Collision: Como queremos encontrar uma colisão, dado m, r e m', queremos encontrar um valor r' de norma euclideana pequena tal que:

$$\mathcal{H}(m) + Ar \equiv \mathcal{H}(m') + Ar' \pmod q$$

O valor de r' é então uma solução para a equação $Ax = \mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m') + Ar \mod q$.

Par obter uma solução para esta equação utiliza-se um vetor qualquer de norma euclideana pequena p e obtém-se o valor x' tal que ele seja a solução para a equação abaixo:

$$Gx' = H^{-1}(\mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m') + Ar - Ap) \mod q$$

Dados os valores de x' e p, a nossa função $Collision$ é definida como:

$$Collision(\mathcal{SK} = R, m, r, m') = p + \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} x' \mod q$$

Prova:

Para provar que o resultado obtido é correto, basta mostrarmos que o valor retornado pela função acima é uma solução para $Ax = \mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m') + Ar \mod q$. Se multiplicarmos o resultado da função de colisão pela matriz A obtemos:

$$A(p + \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} x') = Ap + A \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} x'$$

Temos que $A \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} = HG$:

$$Ap + A \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} x' = Ap + HGx'$$

Sabemos também que $Gx' = H^{-1}(\mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m') + Ar - Ap)$, e portanto:

$$Ap + HGx' = Ap + HH^{-1}(\mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m') + Ar - Ap)$$

Após multiplicar H pela sua inversa e dos dis termos Ap se anularem, obtemos o resultado que queríamos para mostrar a corretude da função de colisão.

2.7.2 Detalhes da Construção

Para garantir a segurança do esquema, o número de colunas da matriz A de n linhas deve ser ao menos $n \log q$. Além disso, só devemos considerar um vetor como tendo uma norma euclideana suficientemente pequena para ser aceito como solução quando a norma dele é no máximo um valor próximo de $\sqrt{n \log q}$.

Construção da matriz G:

Seja $q = 2^k$. Seja o vetor $g = [1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}]$. Podemos construir a matriz G então como:

$$\begin{bmatrix} g & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & g & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & g \end{bmatrix}$$

Desta forma, podemos encontrar uma solução para uma equação $Gx = u \mod q$ simplesmente escolhendo x como a representação binária de u. Esta é uma forma viável de gerar vetores suficientemente pequenos apenas quando temos uma construção com um valor muito pequeno de n.

Para os demias casos, o modo recomendado de obter uma solução é gerar um reticulado com uma base formada pela matriz esparsa preenchida por 2 na diagonal e com um valor -1 abaixo de cada diagonal e obter um vetor suficientemente pequeno por meio de algoritmos de amostragem gaussiana.

2.7.3 Medida de Desempenho

KeyGen	–	Hash	0,0017129s	Collision	–

Também é importante mencionar que para valores consifderados seguros, o tamanho da chave privada nesta construção chega a 613KB. A chave pública é seis vezes menor e pode ser reduzida muito mais por meio das mesmas técnicas utilizadas para reduzir tamanhos de chave de funções hash baseados em reticulados.

2.8 Características dos Esquemas Apresentados

A tabela abaixo sintetiza as características mais relevantes dos esquemas vistos nesta seção. Cada esquema está identificado pelo número da subseção em que ele foi apresentado.

Esquema	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
Livre de Exposição de Chave	X	✓	X	✓	X	X	✓
Resistência à Falsificação	X	✓	X	✓	X	X	✓
Primeira Pré-Imagem	✓	✓	X	✓	✓	X	X

3 Hashes Camaleão com ID

3.1 Construção Baseada no RSA (Ateniese e Medeiros) (2005) [1]

Este esquema se baseia nas propriedades da assinatura e criptografia RSA. Elas nos dizem que se temos dois primos grandes p e q, podemos obter um número primo em relação a $\phi(pq)$ que chamamos de e e o seu inverso multiplicativo módulo $\phi(pq)$, que chamamos de d. Seja $n = pq$.

Temos então que $M' = M^e \mod n$ e $M = M'^d \mod n$. Tratamos (e, n) como a chave pública e (d, p, q) como a chave privada. As chaves podem ser calculadas facilmente somente por alguém que conhece os fatores primos que formam n.

3.2 Funções

KeyGen: Idêntica à geração de chaves do RSA. A chave pública é (e, n) e a chave privada é (d, p, q). A única restrição adicional é que e deve ser um número primo, não apenas primo em relação a $\phi(n)$.

Hash: Assuma que esta função além da mensagem m e do parâmetro r recebe também um $\mathcal{L}$ que representa uma identificação ou rótulo da operação sendo realizada. Seja C e $\mathcal{H}$ duas funções hash convencionais com um tamanho ajustado de acordo com parâmetros de segurança e de modo que $\mathcal{H}$ gere valores sempre menores que e.

Calculamos o hash camaleão calculandoda seguinte forma:

$$Hash(\mathcal{L}, m, r) = C(\mathcal{L})^{\mathcal{H}(m)} r^e \mod n$$

PreImage: Não está presente neste esquema.

UForge: Para obtermos um novo valor r' para um dado m' que tenha mesmo hash que m e r, podemos comaçar pela equação:

$$C(\mathcal{L})^{\mathcal{H}(m)} r^e \equiv C(\mathcal{L})^{\mathcal{H}(m')} r'^e \pmod n$$

Dividindo ambos os lados da equação por $C(\mathcal{L})^{\mathcal{H}(m')}$:

$$C(\mathcal{L})^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')} r^e \equiv r'^e \pmod n$$

Fazendo a equação ser elevada ao expoente d (que pertence à chave privada):

$$rC(\mathcal{L})^{d(\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m'))} \equiv r' \pmod n$$

E portanto, podemos calcular r' por meio de **UForge** com a equação abaixo:

$$r' = rC(\mathcal{L})^{d(\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m'))} \mod n$$

iForge: É possível extrair o valor $C(\mathcal{L})^d$ por meio de uma colisão, que representa uma assinatura RSA sobre o valor $\mathcal{L}$. Obtendo este valor, pode-se

criar qualquer outra colisão neste esquema de hash, mesmo sem sermos capazes de obter a chave privada d.

O modo de obter $C(\mathcal{L})^d$ é à partir das equações acima. Temos inicialmente que:

$$r'/r \equiv C(\mathcal{L})^{d(\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m'))} \pmod{n}$$

Como e é primo e maior que qualquer valor retornado por $\mathcal{H}$, então $mdc(e, \mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')) = 1$. E portanto, usando o Algoritmo Estendido de Euclides, podemos obter valores α e β tais que $\alpha(\mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m')) + \beta e = 1$.

Elevando os dois lados da equação acima por α ficamos com:

$$(r'/r)^\alpha \equiv C(\mathcal{L})^{d(\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m'))\alpha} \pmod{n}$$

E multiplicando por $C(\mathcal{L})^{d\beta e}$:

$$(r'/r)^\alpha C(\mathcal{L})^{d\beta e} \equiv C(\mathcal{L})^{d(\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m'))\alpha+d\beta e} \pmod{n}$$

Pela propriedade do RSA, elevar um valor à d e depois à e temos a identidade do valor no lado esquerdo da equação. E pela propriedade de α e β que escolhemos, no lado direito da equação podemos simplificar a combinação linear destes valores no expoente por 1. Portanto extraímos assim o valor que queríamos:

$$(r'/r)^\alpha C(\mathcal{L})^\beta \mod n = C(\mathcal{L})^d$$

3.3 Propriedades

Resistência a Colisão: Sim, assumindo que não é possível forjar uma assinatura RSA, que o valor de $\mathcal{L}$ nunca foi utilizado antes de modo que alguma colisão tenha sido obtida e que as funções hash C e $\mathcal{H}$ atendem às propriedades esperadas de hashes criptográficas.

Ocultação de Mensagem: Sim, pois foi definida uma função **IForge**.

Livre de Exposição de Chave: Sim. Expor uma colisão não expõe a chave privada, apenas uma assinatura RSA sobre $\mathcal{L}$, o qual assumimos que é um valor único que não é reaproveitado.

Cálculo de Primeira Pré-Imagem: Não.

3.4 Construção Baseada em Assinatura Boneh-Lynn-Shacham (Zhang) [8]

Seja G_1 e G_2 dois grupos (cuja operação será escrita aqui na notação multiplicativa) nos quais dado um gerador g e valores g^x e g^y, é difícil computar g^{xy} (Problema Computacional Diffie-Hellman). E seja e uma função que associa dois elementos do primeiro grupo a um elemento do segundo tal que $e(g^a, g^b) = e(g, g)^{ab}$ e $e(g, g) \neq 1$.

Qundo temos um grupo onde tais operações existem, temos um grupo de Lacuna Diffie-Hellman, onde é difícil resolver o Problema Computacional Diffie-Hellman descrito acima, mas onde é fácil de resolver sua variante de decisão, o Problema de Decisão Diffie-Hellman. Ele consiste em responder se dados quatro valores pertencentes a um grupo (g, g^x, g^y e G^z) temos que $xy = z$.

Resolver tal problema de decisão torna-se fácil em tais grupos porque isso é equivalente a responder se $e(g, g^z) = e(g^x, g^y)$.

Como consequência de sua definição, a função de emparelhamento bilinear tem também as seguintes propriedades:

- $e(pr, q) = e(p, q)e(r, q)$
- $e(a^b, c) = e(a, c^b)$

As duas propriedades acima e a dificuldade do Problema Computacional Diffie-Hellman é o que garante que a construção desta seção funcione.

3.5 Funções

KeyGen: Dado um grupo multiplicativo que é um grupo de Lacuna Diffie-Hellman, escolha um valor inteiro s como chave privada e um valor g^s pertencente ao grupo como chave pública.

Hash: Assim como no esquema anterior, assuma que a função de hash recebe um parâmetro único $\mathcal{L}$ e que existem duas funções hash criptográficas comuns que são usadas: C e $\mathcal{H}$.

O hash camaleão é calculado pela fórmula:

$$Hash(\mathcal{L}, m, r) = e(r, g)e(C(m)^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, g^s)$$

PreImage: Não está presente neste esquema.

UForge: Para obtermos um novo valor r' para um dado m' que tenha mesmo hash que m e r e quando conhecemos a chave privada s é obtido pela fórmula:

$$UForge(\mathcal{L}, s, m, r, m') = \left[\frac{C(m)}{C(m')}^{\mathcal{H}(\mathcal{L})^s} \right] r = r'$$

Isso funciona pois se formos calcular o hash de m' com este r' calculado, o resultado será:

$$\begin{aligned}
Hash(\mathcal{L}, m', r') &= e(r', g)e(C(m')^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, g^s) \\
&= e(\left[\frac{C(m)}{C(m')}^{\mathcal{H}(\mathcal{L})^s} \right] r, g)e(C(m')^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, g^s) \\
&= e(\left[\frac{C(m)}{C(m')}^{\mathcal{H}(\mathcal{L})^s} \right], g)e(r, g)e(C(m')^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, g^s) \\
&= e(\left[\frac{C(m)}{C(m')}^{\mathcal{H}(\mathcal{L})} \right], g^s)e(r, g)e(C(m')^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, g^s) \\
&= e(C(m)^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, g^s)e(r, g) \\
&= Hash(\mathcal{L}, m, r)
\end{aligned} \tag{3}$$

IForge: Não está definida neste esquema. Poderia ser feito se uma forma de isolar $\mathcal{H}(\mathcal{L})^s$ à partir de uma colisão fôsse encontrada.

3.6 Propriedades

Resistência a Colisão: Sim se assumirmos que é difícil forjar um esquema de assinatura Boneh–Lynn–Shacham e que o valor $\mathcal{L}$ não é reaproveitado em diferentes hashes camaleão.

Ocultação de Mensagem: Não, pois uma função **IForge** não foi definida.

Livre de Exposição de Chave: Sim.

Cálculo de Primeira Pré-Imagem: Não.

3.7 Construção Baseada em Emparelhamento Bilinear (Zhang) [8]

Este esquema é proposto no mesmo artigo que o anterior e é uma forma alternativa de construir hash camaleão com emparelhamnento bilinear.

3.8 Funções

KeyGen: Exatamente como no esquema anterior, dado um grupo multiplicativo que é um grupo de Lacuna Diffie-Hellman, escolha um valor inteiro s como chave privada e um valor g^s pertencente ao grupo como chave pública.

Hash: Aqui o método de cálculo da hash se dá pela fórmula:

$$Hash(\mathcal{PK} = g^s, \mathcal{L}, m, r) = e(g, g^{\mathcal{H}(m)})e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, r)^{\mathcal{H}(m)}$$

PreImage: Não. Assim como no caso anterior, seria necessário resolver o problema do logaritmo discreto para implementar esta função.

UForge: Para obtermos um novo valor r' para um dado m' que tenha mesmo hash que m e r e quando conhecemos a chave privada s, aproveitamos as seguintes fórmulas:

$$S_{ID} = g^{\frac{1}{s+\mathcal{H}(\mathcal{L})}}$$

$$UForge(\mathcal{SK} = s, \mathcal{L}, m, r, m') = S_{ID}^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')^{\mathcal{H}(m')}} r^{\mathcal{H}(m)^{-1}} = r'$$

Isso funciona pois se formos calcular o hash de m' com este r' calculado, o resultado será:

$$\begin{aligned}
Hash(\mathcal{PK}, \mathcal{L}, m', r') &= e(g,g)^{\mathcal{H}(m')}e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, r')^{\mathcal{H}(m')} \\
&= e(g,g)^{\mathcal{H}(m')}e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, S_{ID}^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')^{\mathcal{H}(m')^{-1}}} r^{\mathcal{H}(m)})^{\mathcal{H}(m')} \\
&= e(g,g)^{\mathcal{H}(m')}e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, S_{ID}^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')} r^{\mathcal{H}(m)}) \\
&= e(g, g^{\mathcal{H}(m')})e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, g^{\frac{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')}{s+\mathcal{H}(\mathcal{L})}} r^{\mathcal{H}(m)}) \\
&= e(g, g^{\mathcal{H}(m')})e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, g^{\frac{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')}{s+\mathcal{H}(\mathcal{L})}})e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, r^{\mathcal{H}(m)}) \\
&= e(g, g^{\mathcal{H}(m')})e(g, g^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')})e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, r^{\mathcal{H}(m)}) \\
&= e(g, g^{\mathcal{H}(m')}g^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')})e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, r^{\mathcal{H}(m)}) \\
&= e(g,g)^{\mathcal{H}(m)}e(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^s, r)^{\mathcal{H}(m)} \\
&= Hash(\mathcal{PK}, \mathcal{L}, m, r)
\end{aligned} \tag{4}$$

IForge: Não está definida neste esquema. Poderia ser feito se uma forma de isolar $S_{ID} = g^{\frac{1}{s+\mathcal{H}(\mathcal{L})}}$ à partir de uma colisão fôsse encontrada.

3.9 Propriedades

Resistência a Colisão: Sim se assumirmos que é difícil calcular o logaritmo discreto e obter o valor s da chave privada e que $\mathcal{L}$ não é reaproveitado em diferentes hashes camaleão.

Ocultação de Mensagem: Não, pois uma função **IForge** não foi definida.

Livre de Exposição de Chave: Sim.

Cálculo de Primeira Pré-Imagem: Não.

3.10 Construção Baseada em Logaritmo Discreto de Chen (Chen) [4]

O primeiro método baseado em logaritmo discreto proposto por Krawczyk tinha o grave problema de exposição de chaves. Este método foi criado precisamente para ser livre deste problema. Assim como o método anterior, ele requer que utilizemos um Grupo de Lacuna Diffie-Hellman. Nas construções anteriores, a principal vantagem de se utilizar tal grupo estava mais nas propriedades convenientes da função de emparelhamento bilinear. Neste método, o objetivo de usar tais grupos está realmente em explorar a vantagem de resolver o Problema de Decisão Diffie-Hellman como um teste de sanidade para o valor de r.

3.11 Funções

KeyGen: A chave pública é um valor $y = g^x$ senfo g um gerador. A chave privada é o valor x.

Hash: Neste esquema, podemos considerar o valor de r como sendo uma tupla na seguinte forma:

$$r = (g^a, y^a)$$

Com ele calculamos o hash camaleão de acordo com a fórmula:

$$Hash(\mathcal{PK} = y, \mathcal{L}, m, r) = (g\mathcal{L})^m y^a$$

Notar que o primeiro valor da tupla não é usado diretamente no cálculo da hash. Ele é usado para checar se realmente temos um valor de r válido que deve ser aceito. Para isso, basta verificarmos se g, y, g^a e y^a formam uma Tupla Diffie-Hellman $((\lg y)(\lg g^a) = (\lg y^a))$.

PreImage: Não definida.

UForge: Sendo o valor de r uma tupla, ela pode ser obtida com:

$$UForge(\mathcal{SK} = x, \mathcal{L}, m, r = (g^a, y^a), m') = \left(g^a (g\mathcal{L})^{\frac{m-m'}{x}}, y^a (g\mathcal{L})^{m-m'}\right) = (g^{a'}, y^{a'}) = r'$$

Pode-se verificar que este valor é o correto, pois se o usarmos para o cálculo de uma hash obteremos:

$$\begin{aligned} Hash(\mathcal{PK}, \mathcal{L}, m', r') &= (g\mathcal{L})^{m'} y^{a'} \\ &= (g\mathcal{L})^{m'} y^{a} (g\mathcal{L})^{m-m'} \\ &= (g\mathcal{L})^{m} y^{a} \\ &= Hash(\mathcal{PK}, \mathcal{L}, m, r) \end{aligned} \tag{5}$$

IForge: Tendo-se uma colisão, podemos extrair o valor $T = (g\mathcal{L})^{x^{-1}}$ graças ao primeiro valor da tupla r e r':

$$T = (g\mathcal{L})^{x^{-1}} = \left(\frac{g^a}{g^{a'}}\right)^{(m-m')^{-1}}$$

Com este valor, pode-se obter uma função **IForge** escolhendo qualquer valor m'' e à partir dele calculando um novo r'':

$$IForge(\mathcal{PK} = g^x, \mathcal{L}, m, r = (g^a, y^a), m', r' = (g^{a'}, y^{a'})) = (m'', r'' = (g^a T^{m-m''}, y^a (g\mathcal{L})^{m-m''}))$$

Isso também pode ser usado para demonstrar a segurança deste esquema. No artigo em que ele é proposto, prova-se que obter um valor $g^{a^{-1}}$ dado g e g^a é tão difícil quanto resolver o Problema Computacional Diffie-Hellman. Sendo assim, encontrar uma colisão sem o uso da chave privada neste esquema é também tão difícil quanto resolver uma instância do Problema Computacional Diffie-Hellman.

3.12 Propriedades

Resistência a Colisão: Sim se assumirmos que é difícil resolver o Problema COmputacional Diffie-Hellman.
Ocultação de Mensagem: Sim.
Livre de Exposição de Chave: Sim.
Cálculo de Primeira Pré-Imagem: Não.

4 Construção Baseada em Diffie-Hellman [1]

4.1 Funções

KeyGen: Em um grupo que é de Lacuna Diffie-Hellman, escolha um gerador g e como chave pública um elemento $y = g^x$, sendo o inteiro x a chave privada.
Hash: Use a seguinte função para o cálculo de hash:

$$Hash(\mathcal{L}, m, r) = g^{\mathcal{H}(m)} (g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})} y)^r$$

O valor pode ser conferido rapidamente observando que $(g^r, yg^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}, Hash(\mathcal{L}, m, r)/g^{\mathcal{H}(m)})$ é uma Tripla Diffie-Hellman.
PreImage: Não definida.
UForge: A pode ser obtida baseando-se na seguinte equação:

$$g^{r'} = g^r g^{\frac{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')}{x+\mathcal{H}(\mathcal{L})}}$$

E isso permite obter o valor r' desejado:

$$UForge(\mathcal{SK} = x, \mathcal{L}, m, r, m') = r + \frac{\mathcal{H}(m) - \mathcal{H}(m')}{x + \mathcal{H}(\mathcal{L})} = r'$$

Isso funciona, pois:

$$\begin{aligned}
Hash(\mathcal{L}, m', r') &= g^{\mathcal{H}(m')}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}y)^{r'} \\
&= g^{\mathcal{H}(m')}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}y)^{r+\frac{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')}{x+\mathcal{H}(\mathcal{L})}} \\
&= g^{\mathcal{H}(m')}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}y)^{r}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}y)^{\frac{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')}{x+\mathcal{H}(\mathcal{L})}} \\
&= g^{\mathcal{H}(m')}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^{x})^{r}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^{x})^{\frac{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')}{x+\mathcal{H}(\mathcal{L})}} \\
&= g^{\mathcal{H}(m')}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^{x})^{r}g^{\frac{(x+\mathcal{H}(\mathcal{L}))(\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m'))}{x+\mathcal{H}(\mathcal{L})}} \\
&= g^{\mathcal{H}(m')}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^{x})^{r}g^{\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')} \\
&= g^{\mathcal{H}(m)}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}g^{x})^{r} \\
&= g^{\mathcal{H}(m)}(g^{\mathcal{H}(\mathcal{L})}y)^{r} \\
&= Hash(\mathcal{L}, m, r)
\end{aligned} \tag{6}$$

IForge: Tendo-se acesso à uma colisão, pode-se usar as fórmulas anteriores para extrair o valor $g^{\frac{1}{x+\mathcal{H}(m)}}$:

$$\left(\frac{g^{r'}}{g^{r}}\right)^{[\mathcal{H}(m)-\mathcal{H}(m')]^{-1}} = g^{\frac{1}{x+\mathcal{H}(m)}}$$

Com este valor, mesmo sem conhecermos o valor de x podemos calcular um valor correspondente de r'' para qualquer novo m'' sem precisarmos conhecer a chave privada x.

4.2 Propriedades

Resistência a Colisão: Sim. O artigo que propõe o esquema argumenta que mesmo quando conhecemos vários valores diferentes para $g^{\frac{1}{x+\mathcal{H}(m)}}$ em diferentes valores de $\mathcal{L}$ isso não enfraquece o esquema, usando como referência algo demonstrado em outro artigo.

Ocultação de Mensagem: Sim.

Livre de Exposição de Chave: Sim.

Cálculo de Primeira Pré-Imagem: Não.

5 Construção Baseada em Criptossistema de Pallier (Ateniese e Medeiros) [1]

Essa construção se baseia na propriedade demonstrada por Paillier [7] de que a função abaixo, para qualquer $h \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$, $a \in \mathbb{Z}_n$, $b \in \mathbb{Z}_{n^2}^*$ é uma função de permutação com trapdoor:

$$f(a, b) = h^a q b^n \mod n^2$$

Ou seja, ela pode ser invertida por qualquer um que conheça um segredo associado à função (no caso, os fatores de n) e além disso ela é uma função de permutação.

5.1 Funções

KeyGen: Escolha dois primos grandes p e q como chave privada. E a multiplicação deles $n = pq$ é a chave pública.

Hash: Assumindo que $\mathcal{H}$ é uma função hash criptográfica que tem como codomínio valores em $\mathbb{Z}^*_{n^2}$, que o nossa mensagem m foi previamente transformada por alguma função hash com codomínio em $\mathbb{Z}^*_n$ e que $r = (r_1, r_2)$, nossa função de hash camaleão é:

$$Hash(\mathcal{L}, m, (r_1, r_2)) = (1 + mn)\mathcal{H}(\mathcal{L})^{r_1} r_2^n \pmod{n^2}$$

PreImage: Essa função torna-se possível graças à função de permutação com trapdoor (f) associada aos criptossistemas de Paillier. Primeiro escolhemos a função f específica para $h = \mathcal{H}(\mathcal{L})$. Com ajuda dela, obtemos a primeira pré-imagem da seguinte maneira:

$$PreImage(\mathcal{SK}, m', C) = f^{-1}(C(1 - m'n)) = (r'_1, r'_2)$$

Isso funciona, pois geramos valores r'_1 e r'_2 tais que:

$$\begin{aligned} f(r'_1, r'_2) &= C(1 - m'n) \\ \mathcal{H}(\mathcal{L})^{r'_1} r_2'^n &\equiv C(1 - m'n) \pmod{n^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Então se passarmos os valores m', r'_1 e r'_2 para a função de hash camaleão, obtemos:

$$\begin{aligned} Hash(\mathcal{L}, m', (r'_1, r'_2)) &\equiv (1 + m'n)\mathcal{H}(\mathcal{L})^{r'_1} r_2'^n \pmod{n^2} \\ &\equiv (1 + m'n)C(1 - m'n) \pmod{n^2} \\ &\equiv C(1^2 + m'^2 n^2) \pmod{n^2} \\ &\equiv C \pmod{n^2} \end{aligned} \tag{8}$$

UForge: Como temos uma função qu calcula a primeira pré-imagem, a função $UForge$, que calcuma uma segunda pré-imagem é trivialmente definida bastando usar a função $PreImage$ e passar para ela o valor de $Hash(\mathcal{L}, m, (r_1, r_2))$.

IForge:
TODO

6 Construção Baseada em Assinatura de Schnorr (Wei Gao) [5]

Esta construção, embora tenha sido obtida pelo seu autor modificando um esquema de assinatura de Schnorr, é bastante semelhante à construção já vista na seção 9 (Construção baseada em Diffie Hellman), com a diferença de que o

valor r é um par (r_1, r_2) e com os expoentes posicionados de maneira diferente, mas equivalente.

Mas uma diferença importante é que com ela sabe-se como calcular a primeira pré-imagem do hash camaleão de posse do *trapdoor*.

6.1 Funções

KeyGen: Em um grupo G de ordem prima q, com gerador g, onde calcular o logaritmo discreto é difícil, escolha um inteiro x como chave privada e um valor $y = g^x$ como chave pública.

Hash: O cálculo do hash camaleão é feito com a ajuda de um hash criptográfico convencional $\mathcal{H}$ e com $r = (r_1, r_2)$:

$$Hash(\mathcal{PK}, \mathcal{L}, m, (r_1, r_2)) = g^m (g^{r_1} y^{\mathcal{H}(\mathcal{L})})^{r_2}$$

PreImage: Dado o hash camaleão C e uma mensagem m, podemos obter valores (r_1, r_2)

TODO

7 Conclusão

TODO

Referências

[1] Giuseppe Ateniese and Breno de Medeiros. On the key exposure problem in chameleon hashes. In Carlo Blundo and Stelvio Cimato, editors, *Security in Communication Networks*, pages 165–179, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Berlin Heidelberg.

[2] Mihir Bellare and Todor Ristov. Hash functions from sigma protocols and improvements to vsh. In Josef Pieprzyk, editor, *Advances in Cryptology - ASIACRYPT 2008*, pages 125–142, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer Berlin Heidelberg.

[3] David Cash, Dennis Hofheinz, Eike Kiltz, and Chris Peikert. Bonsai trees, or how to delegate a lattice basis. volume 2010, pages 523–552, 01 2010.

[4] Xiaofeng Chen, Fangguo Zhang, and Kwangjo Kim. Chameleon hashing without key exposure. volume 3225, pages 87–98, 01 2004.

[5] Wei Gao, Fei Li, and Xueli Wang. Chameleon hash without key exposure based on schnorr signature. *Computer Standards & Interfaces*, 31(2):282 – 285, 2009.

[6] Hugo Krawczyk and Tal Rabin. Chameleon hashing and signatures, 1997.

[7] Pascal Paillier. Public-key cryptosystems based on composite degree residuosity classes. In Jacques Stern, editor, *Advances in Cryptology — EUROCRYPT '99*, pages 223–238, Berlin, Heidelberg, 1999. Springer Berlin Heidelberg.

[8] Fangguo Zhang, Reihaneh Safavi-Naini, and Willy Susilo. Id-based chameleon hashes from bilinear pairings. *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2003:208, 01 2003.