

# Dividir e Conquistar em Árvores

Heavy Light Decomposition

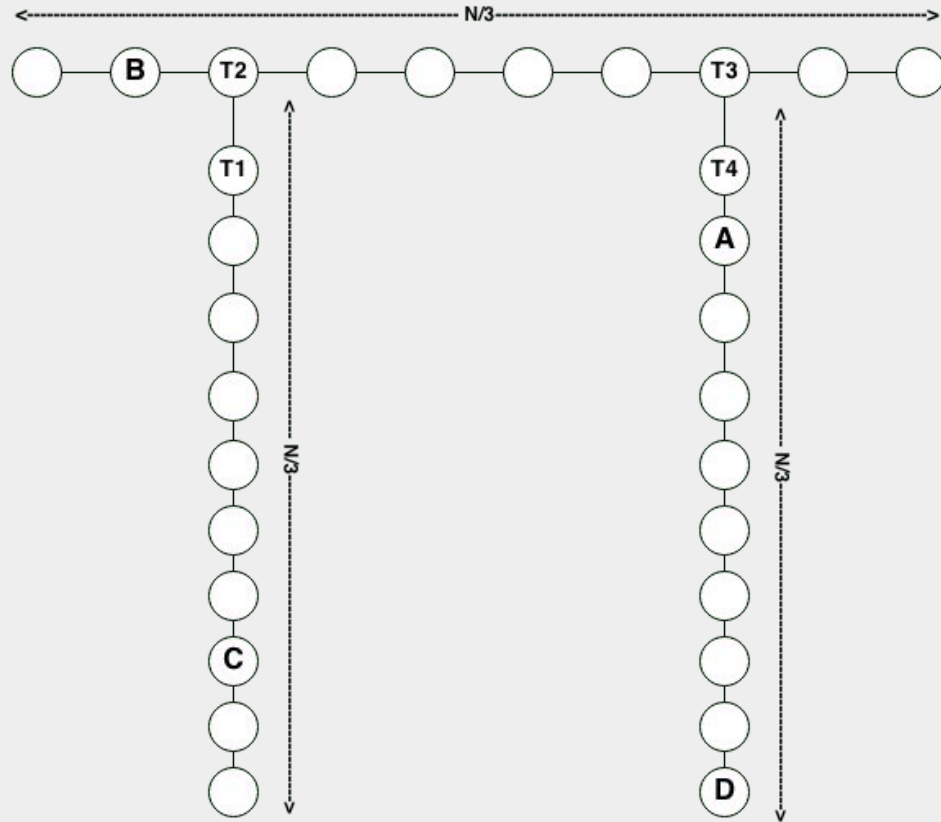
# Problema

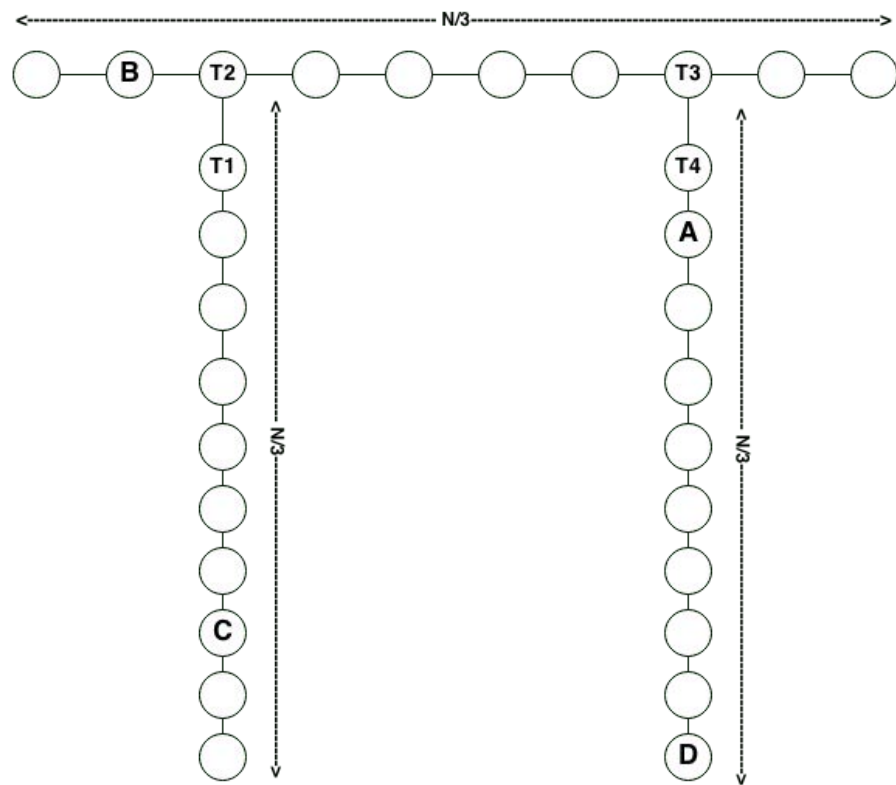
Tem-se um grafo conexo  $G=(V,E)$  tal que  $|E|=|V|-1$  e perguntas do tipo  $Q(S,D)$ .

Onde se  $p(S,D) = \langle S, v_1, \dots, v_n, D \rangle$  é um caminho simples entre  $S$  e  $D$ ,  
 $Q(S,D) = \psi(p(S,D))$ .

Onde  $\psi$  pode ser {menor/maior aresta, menor/maior soma contínua, maior sequência comum referente aos pesos nas arestas/vértices, ...}

Em que complexidade podemos responder perguntas do tipo  $Q(A,B)$ ?



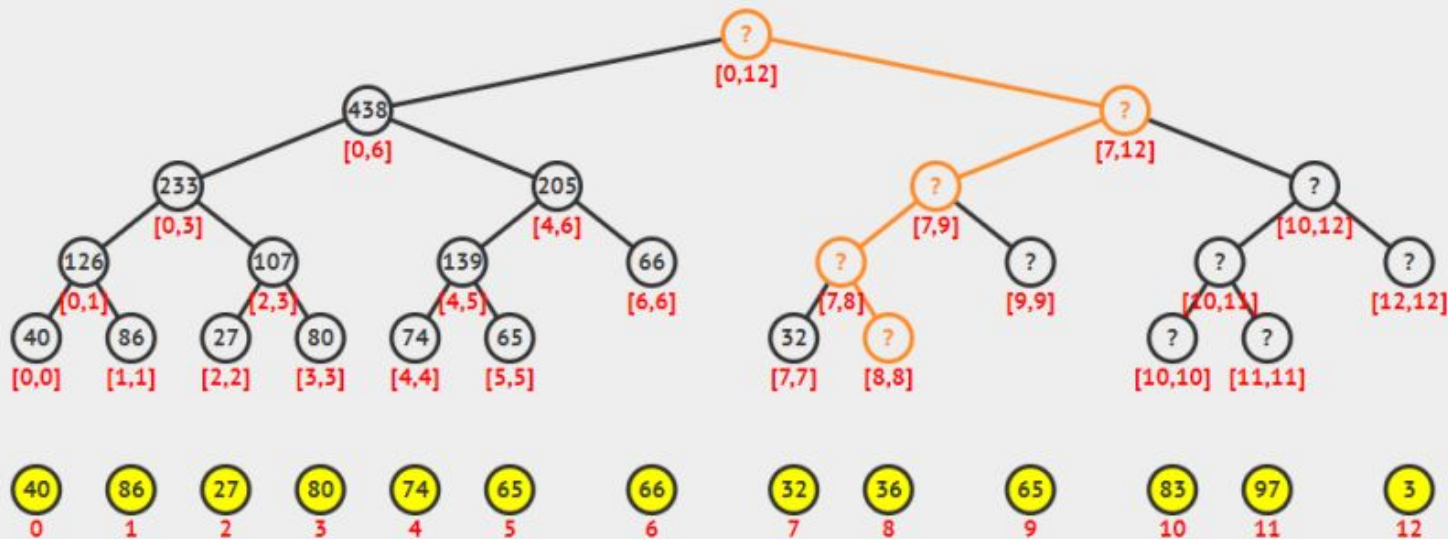


Suponha que temos um algoritmo que percorre  $p(C,D)$  para responder  $Q(C,D)$ .

Uma análise básica de complexidade em  $Q(C, D)$  nos dá que:

1. Visitaremos algo próximo de  $|V|/3$  nós de **C** para **T1**.
2. Visitaremos alguma coisa próxima  $|V|/3$  nós **T2** para **T3**.
3. Visitaremos alguma coisa próxima que  $|V|/3$  de **T4** para **D**.

É fácil ver que esta complexidade é de, pelo menos,  $O(|V|)$ . Tem como melhorar?

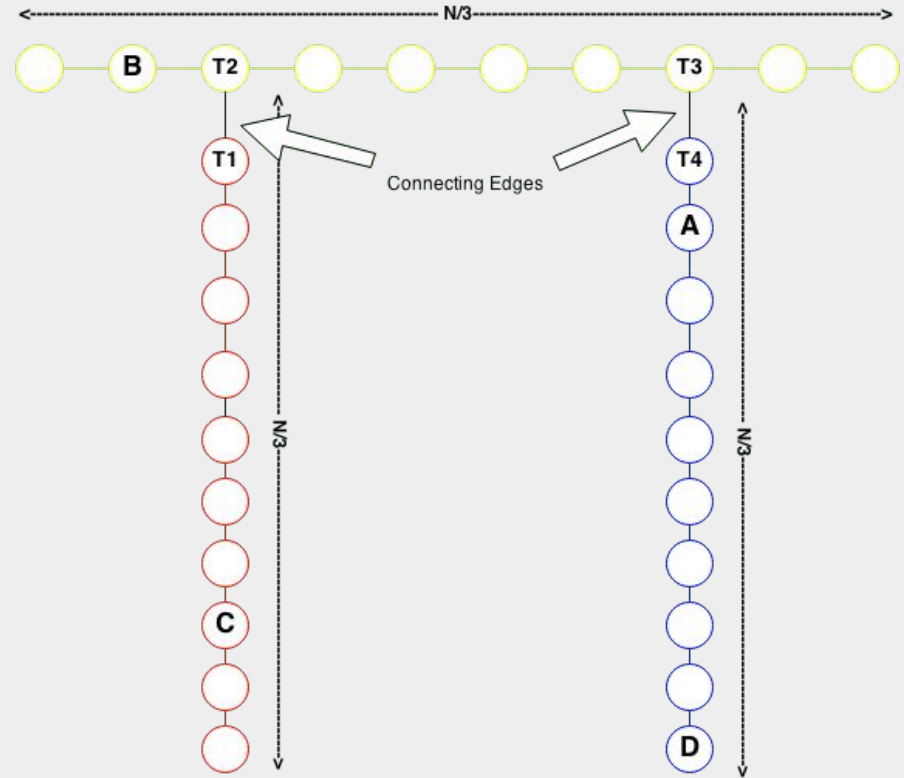


Se fosse um array  $A$ , podíamos usar uma **Segment Tree** para fazer operações deste tipo em  $O(\lg |A|)$ .

- Será possível reduzir esta árvore a um array?
- Se não for, será possível dividi-la em vários arrays?

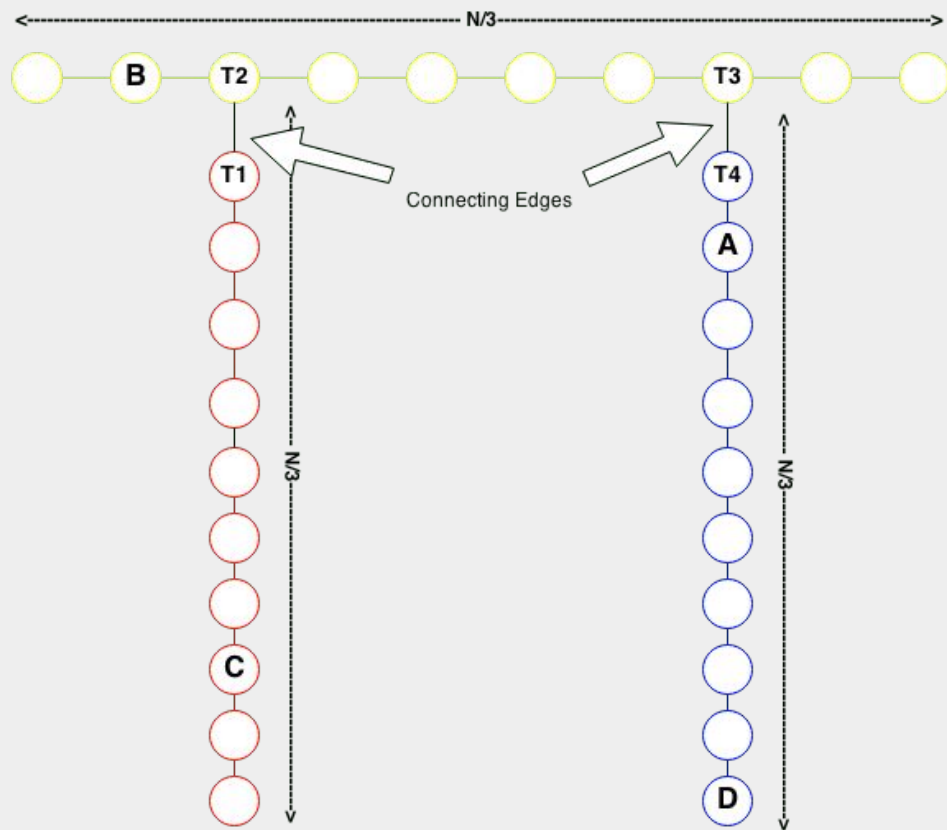
# Gambiarra

Se nós quebrarmos a árvore em três cadeias de correntes, podemos considerar cada cadeia como um problema independente e assim usar uma **Segment Tree** para cada cadeia.

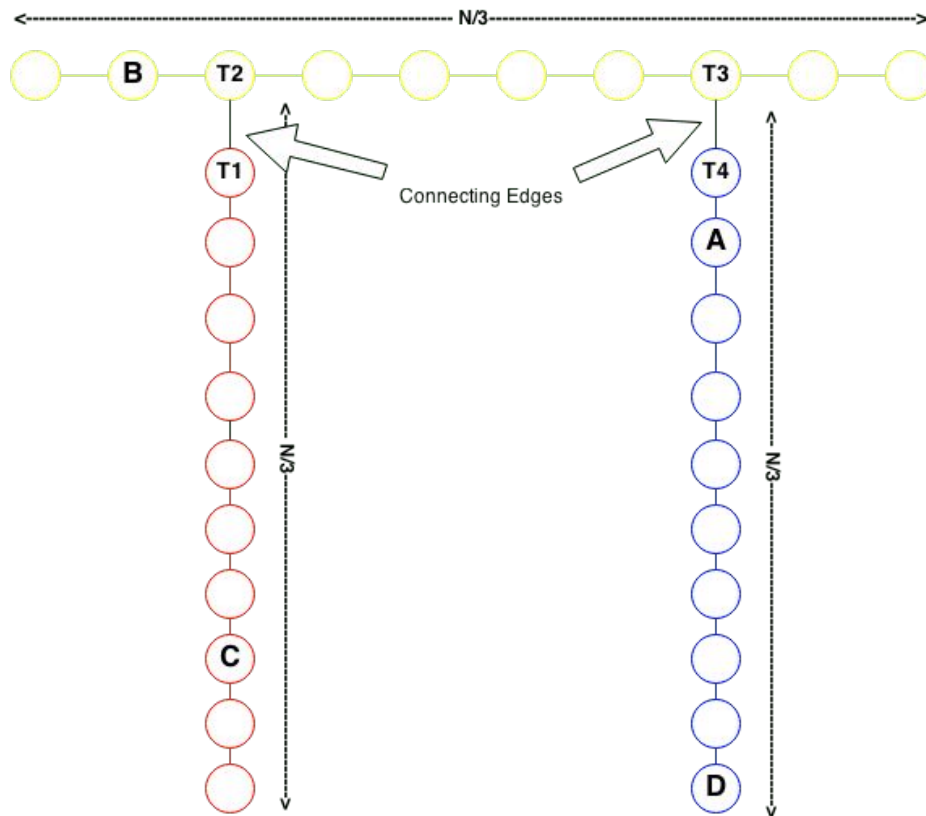


Sendo assim, vamos analisar a complexidade de  $Q(C,D)$ .

1. A árvore continuará tendo  $|V|$  nós, mas está decomposta em **3** cadeias cada uma de tamanho  $O(|V|/3)=O(|V|)$ .
2. C e T1 estão na mesma corrente, logo  $T(Q(C,T1)) = O(\log |V|)$ .
3. T2 e T3 estão na mesma corrente, logo  $T(Q(T2,T3)) = O(\log |V|)$ .
4. T4 e D estão na mesma corrente, logo  $T(Q(T4,D)) = O(\log |V|)$ .





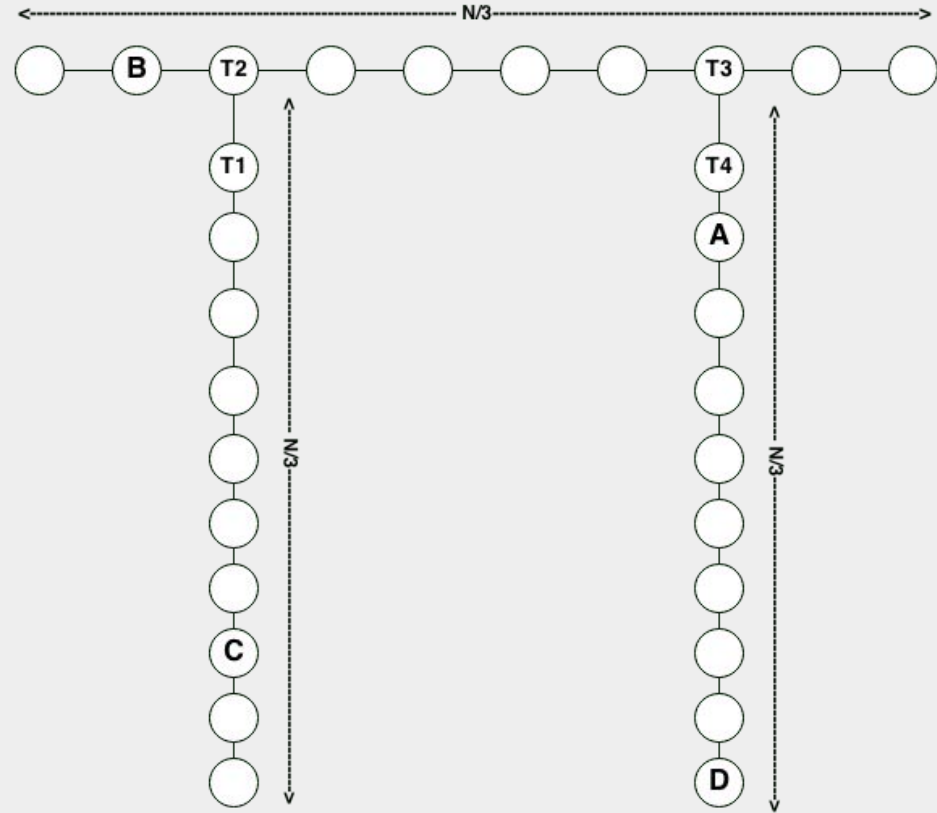


Agora, a complexidade é...

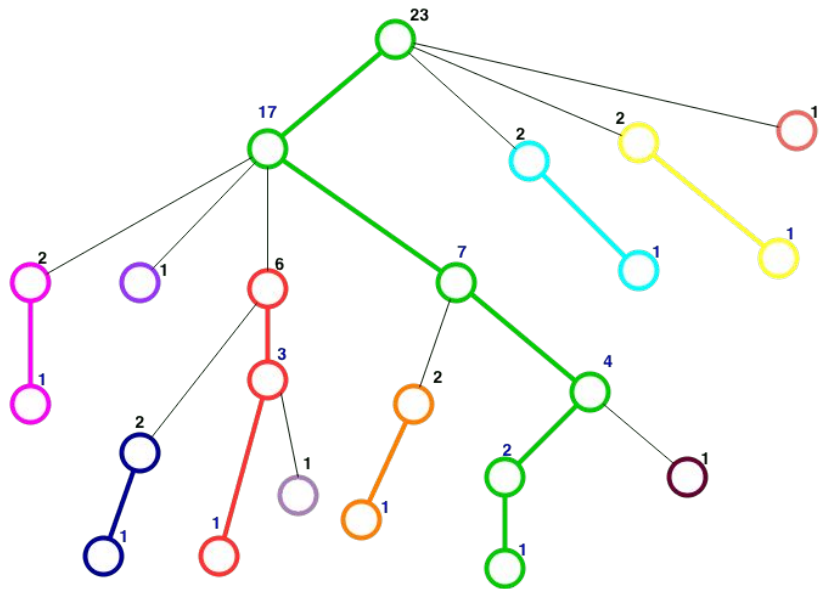
$$T(Q(C, D)) = T(Q(C, T1)) + T(Q(T2, T3)) + T(Q(T4, D)) = O(\log|V|) + O(\log|V|) + O(\log|V|) = O(\log|V|)$$

Infelizmente, a árvore do exemplo é muito especial, possui apenas dois nós cujo grau é maior que 2, **T2** e **T3**. Portanto, nós fizemos uma decomposição manual simples para alcançar melhor complexidade.

Uma possível decomposição genérica é a decomposição por arestas leves/pesadas, conhecida como **HLD**, Heavy Light Decomposition.



# Generalização da Gambiarra

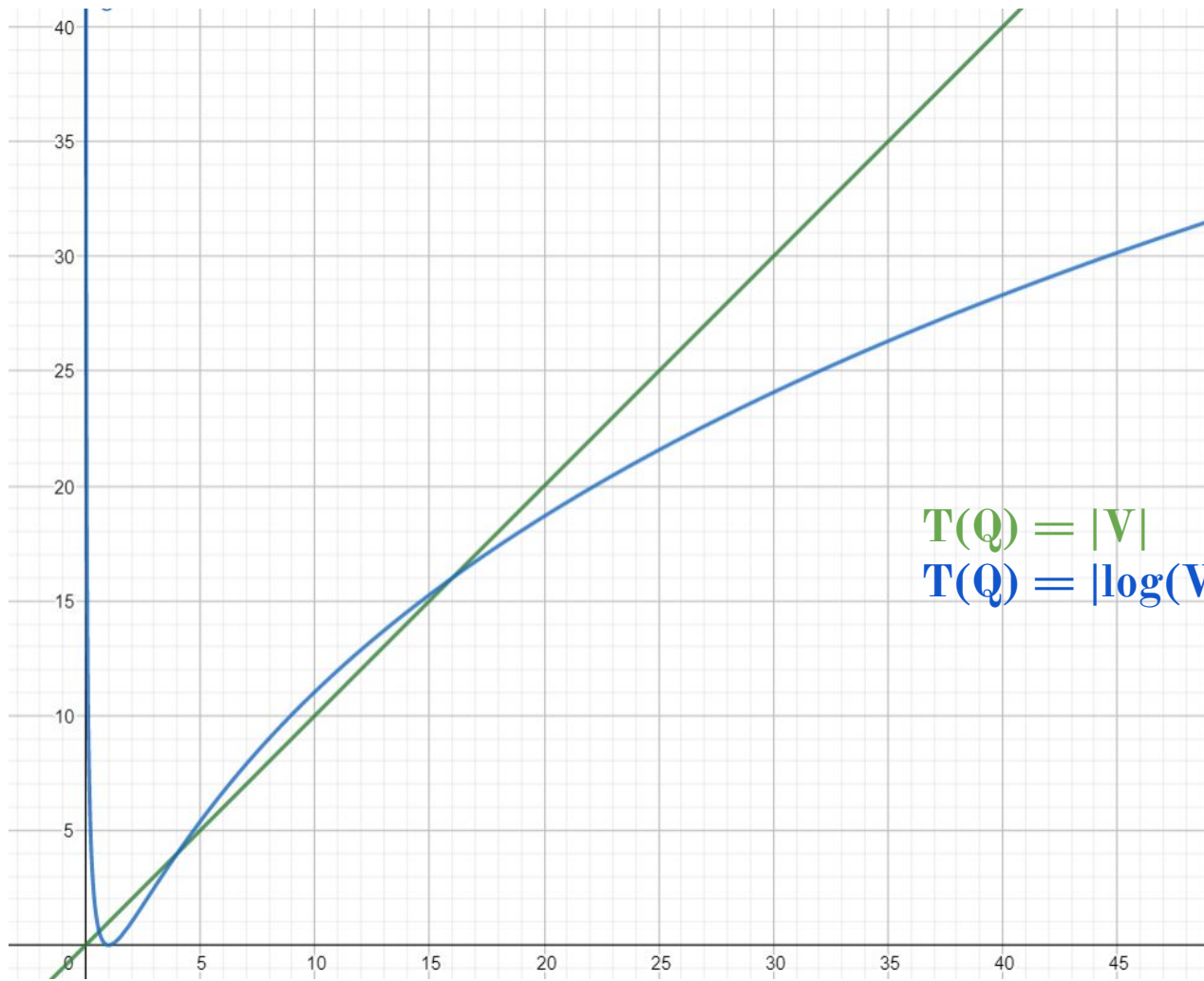


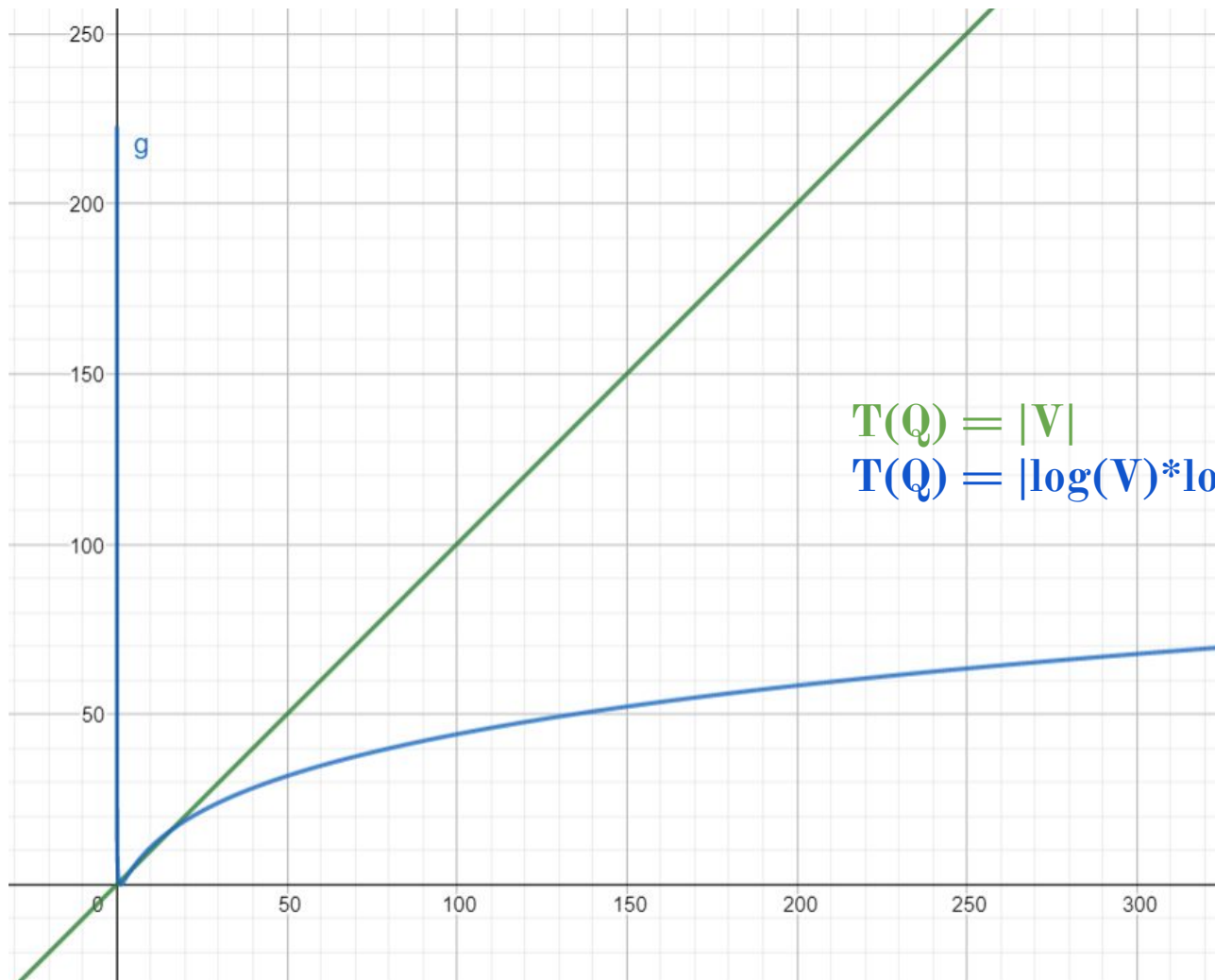
“Dividir uma árvore em **cadeias de correntes** (sequências de nós) onde **nenhuma cadeia intercepta a outra** (não possuem nós em comum). Esta divisão deve ser feita de tal maneira que para mover de qualquer nó para raiz, deve se passar através de  $O(\log|V|)$  correntes.”

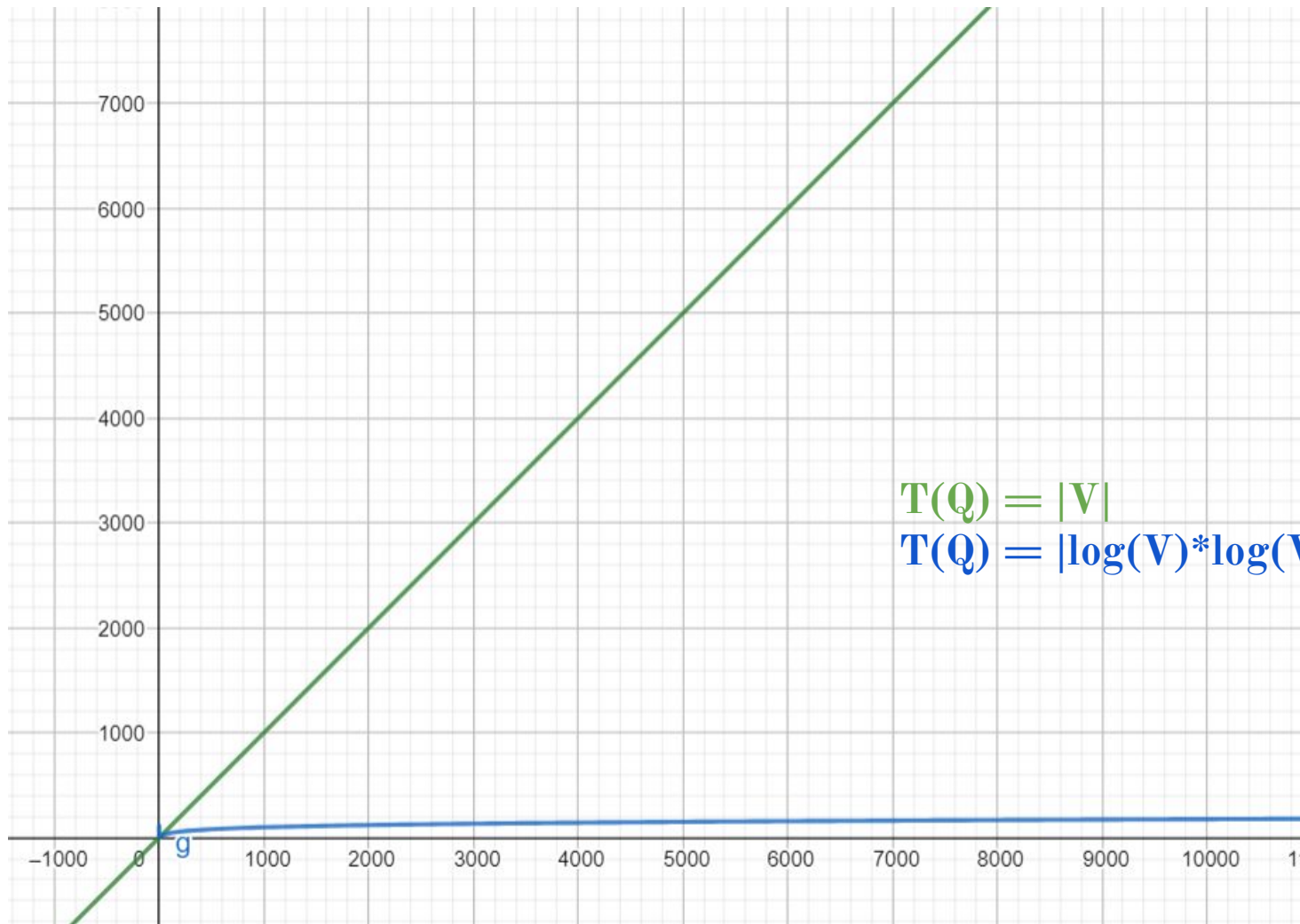
O que muda, agora?

- Qualquer caminho pode ser quebrado em pelo menos dois caminhos.
- Nós assumimos que podemos quebrar a árvore de forma que teremos  $O(\log |V|)$  correntes para mover de qualquer nó para outro.
- Se dividimos a árvore em  $O(\log |V|)$  correntes, teremos no máximo,  $p(S,T)$  dividido em, no máximo,  $O(\log |V|)$  caminhos.
- Nós já sabemos que perguntas do tipo  $Q(S,T)$  pode ser respondida em cada corrente em  $O(\log |V|)$ , e existem no máximo  $O(\log |V|)$  correntes por caminho, teremos, no total  $O(\log |V|) * O(\log |V|) = O(\log^2 |V|)$  de complexidade por query.

Reduzimos de  $O(|V|)$  para  $O(\log^2 |V|)$ .







$$T(Q) = |V|$$

$$T(Q) = |\log(V) * \log(V)|$$



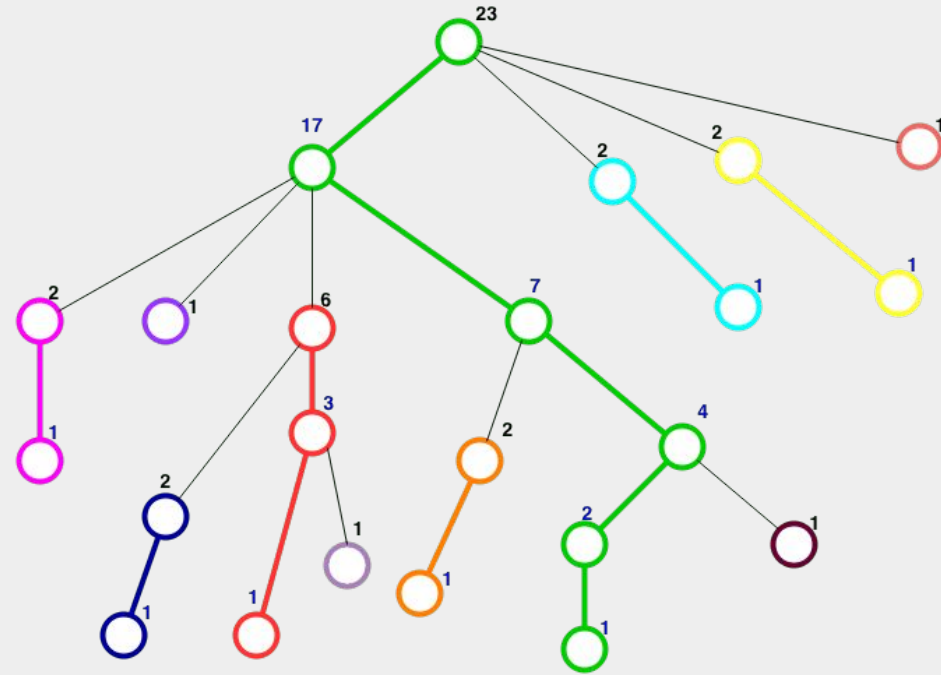
# Algoritmo

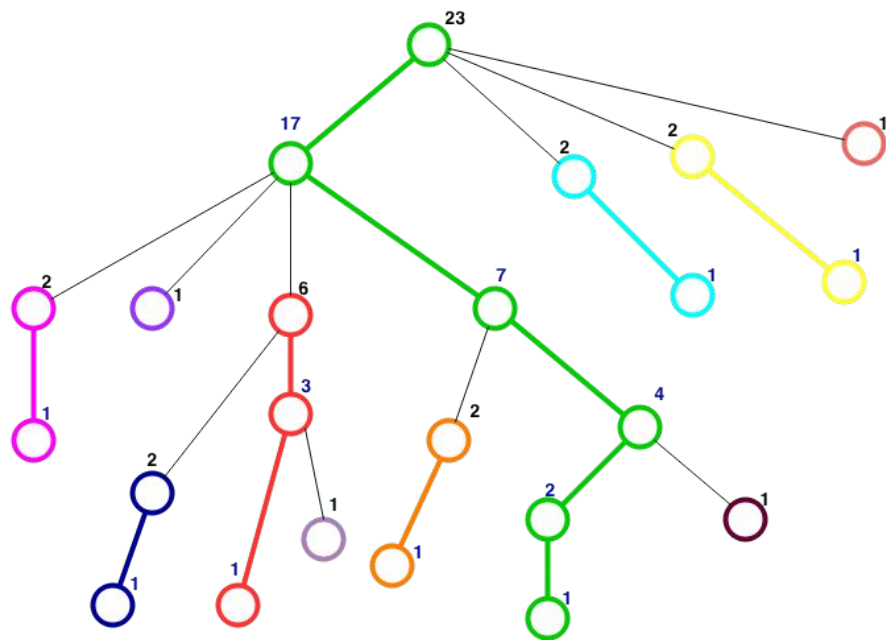


## Método Decomposição será:

1. Comece da raiz, vá para seu filho especial, vá novamente para o filho especial do filho especial escolhido recursivamente até que se encontre uma folha. Esta é a corrente que passa pela raiz.
2. Faça os mesmos para os nós não especiais, considerando cada um como a raiz de uma outra árvore.

Fim





Para resolver um problema usando **HLD**, precisamos responder comumente as seguintes perguntas:

1. Dado um nó, qual corrente ele pertence?
2. Dado um nó, qual é a posição deste nó na corrente que ele pertence?
3. Dado uma corrente, quem é sua cabeça (raiz da subárvore) ?
4. Dado uma corrente, qual é o seu tamanho?

Continua

# Exercícios

(★ Aplicação direta) <https://www.codechef.com/problems/RRTREE>

(★ Aplicação direta) <https://www.codechef.com/problems/DGCD>

(★★ Segment-Tree deve ser persistente) (<https://www.codechef.com/problems/QUERY>)

(★★ Grafo é uma quase-árvore) <https://www.codechef.com/problems/QTREE>

(★★★ Perguntas envolvem subcaminhos) <https://www.codechef.com/problems/GERALD2>

(★★★ Perguntas envolvem subcaminhos) <https://www.codechef.com/problems/MONOPLOY>

**Nota: Todos os problemas do Codechef possuem editoriais.**