

Lista de Exercícios de Computabilidade (INF1015 e INF2218) 2016-2

Prof. Edward Hermann Haeusler

29 de Setembro de 2016

1 Questões gerais sobre funções recursivas e primitivas recursivas

1. Prove que as seguintes funções são primitivas recursivas:

(a) $f(x, y, k) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}} \Big\} k - \text{vezes}$

(b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é primo} \\ 1 & x \text{ é composto} \end{cases}$

(c) $\max(x, y, z) = \text{o maior de } x, y \text{ e } z.$

(d) $\text{raizquadint}(x) = \text{a raiz quadrada de } x \text{ truncada.}$

Opcional $\text{caminho}(x) = y$, onde x em binário representa a matriz de adjacências de um grafo G_x e y é 1 ou 0 conforme exista um ciclo hamiltoniano no Grafo G_x .

2. Para os itens 1a e 1d acima, mostre programas imperativos na linguagem LP também.
3. Mostre que se f e g são primitivas recursivas, então $f^g(x) = f(x)^g(x)$ também é primitiva recursiva.
4. Mostre que se f e g são primitivas recursivas e $h : N \times N \rightarrow N$ é primitiva recursiva então $h(f, g)$ definida como $h(f, g)(x) = h(f(x), g(x))$ é primitiva recursiva também.
5. Mostre que é possível enumerar efetivamente todas as funções primitivas recursivas. Isto é, prove que existe um algoritmo que tendo por entrada um número natural n tenha por saída uma expressão sintática de uma função primitivamente recursiva. Toda função recursiva primitiva recursiva possui uma expressão sintática (código) que é gerado pelo algoritmo. Obviamente o algoritmo pode gerar duas expressões para a mesma função primitiva recursiva.
6. No item acima, o que ficaria diferente se em vez de funções primitivas recursivas o algoritmo tivesse que gerar funções parcialmente recursivas. Faça o mesmo com respeito a enumeração efetiva de máquinas de Turing.

7. É possível enumerar efetivamente as funções recursivas ?? Isto é, somente as funções parcialmente recursivas que são totais. *Dica: Lembre-se da prova (via diagonalização) que mostra que existem funções computáveis que não são primitivas recursivas.* (opcional)
8. É possível enumerar efetivamente as funções primitivas recursivas sem repeti-las ?? Isto é, para cada função primitiva recursiva o algoritmo gera uma e somente uma das expressões sintáticas que a represente.
9. Responda a pergunta acima no caso das funções serem parcialmente recursivas. (opcional)
10. Suponha que M_1 e M_2 são, respectivamente, as implementações mais eficientes (em tempo) para as funções (totais) recursivas f_1 e f_2 . A máquina de Turing $M_1; M_2$ (sequenciamento de M_1 com M_2) é necessariamente a implementação mais eficiente para $f_2 \circ f_1$?? Exiba contra-exemplo ou prove a asserção.
11. Suponha uma máquina de Turing M que computa uma função total $f : N \rightarrow N$. Suponha que M é a implementação mais eficiente em tempo para f . Mostre que existe uma função recursiva total g cuja a implementação mais eficiente M_g (uma máquina de Turing) consome mais tempo que M para todas as entradas.
12. A mesma questão acima levando em conta a memória utilizada no processamento (quantidade de células distintas utilizadas durante a computação da MT).