UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Sistemas Nebulosos

Introdução e Conjuntos Nebulosos

Cristiano Leite de Castro

Adaptação de material didático do Prof. André Paim Lemos (DELT)

Cronograma

- Ver Cronograma Atualizado no Moodle.

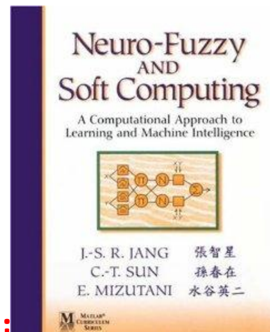
Avaliaçoes

- Prova = 30
- Lista de Exercícios = 5
- Trabalho Prático 1 = 15
- Trabalho Prático 2 = 20
- Trabalho Prático 3 = 30

Total = 100

Como Estudar?

- Jyh-Shing Roger Jang and Chuen-Tsai Sun. 1996. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.



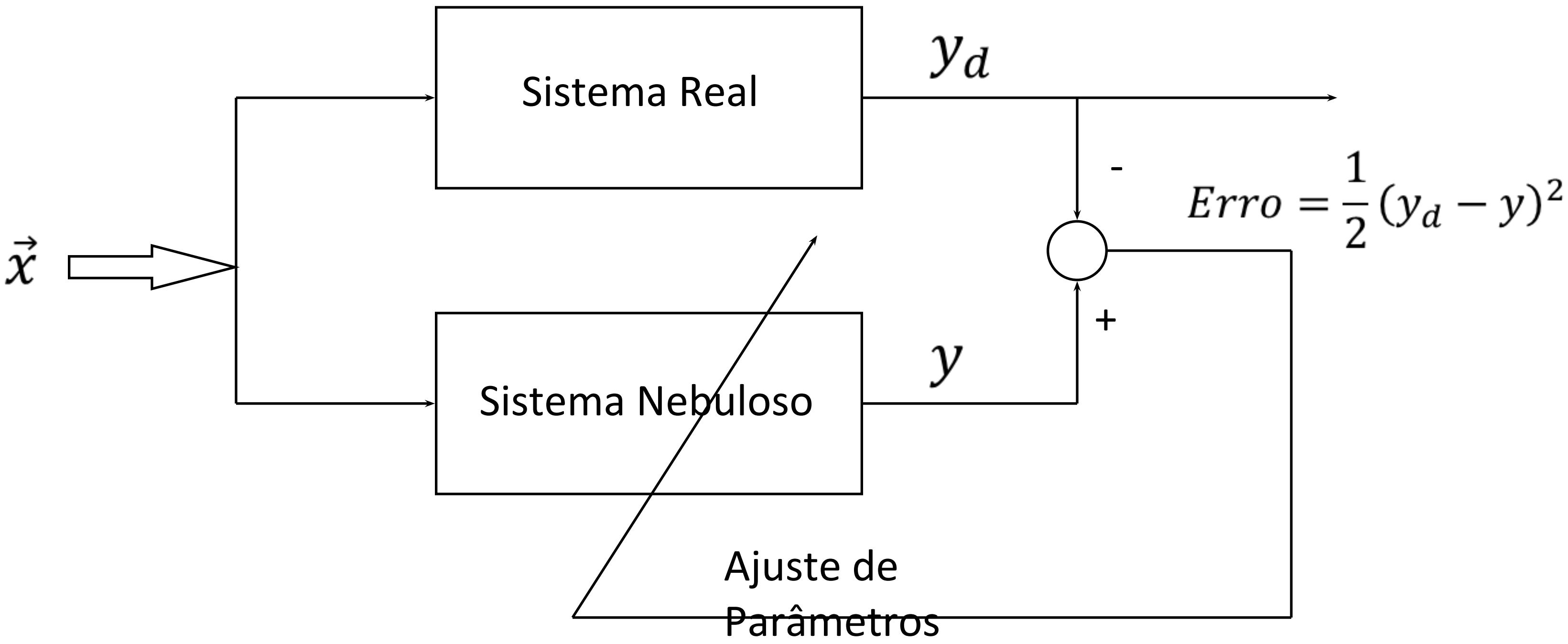
- Notas de Aula (Slides) disponíveis no Moodle.
- Notas de Aula Prof. Von Zuben – FEEC – Unicamp (Moodle).
- Outras referências (complementares):
  - Witold Pedrycz and Fernando Gomide. 2007. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press.
  - George J. Klir and Bo Yuan. 1994. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

Sistema Nebuloso

- Mapeamento não-linear de um vetor de entrada em uma saída escalar capaz de incorporar tanto conhecimento objetivo quanto conhecimento subjetivo.
  - conhecimento objetivo = modelo matematico (leis físicas que regem o sistema a ser modelado).
  - conhecimento subjetivo = especialista, regras linguísticas.

- Permite capturar informações imprecisas em linguagem natural e convertê-las para formato numérico.

Sistema Nebuloso Adaptativo



- Base de Regras:

Se x_1 é A_1 e x_2 é B_1 então y é C_1
Se x_1 é A_2 e x_2 é B_2 então y é C_2
...
Se x_1 é A_m e x_1 é B_m então y é C_m

- Conjunto de Dados:

$\{\vec{x}^k, {y_d}^k\}\ para\ k = 1 \ldots N$

Regras Nebulosas

- se temperatura é muito quente e pressão é baixa então gire v um pouco para direita.

- Conceitos importantes:
  - variáveis linguísticas (temperatura, pressão, v, etc.)
  - quantificadores (muito, um pouco, etc.)
  - conexões lógicas (e, ou, etc.)
  - rótulos línguisticos = conjuntos nebulosos (quente, baixa, direita, etc.)

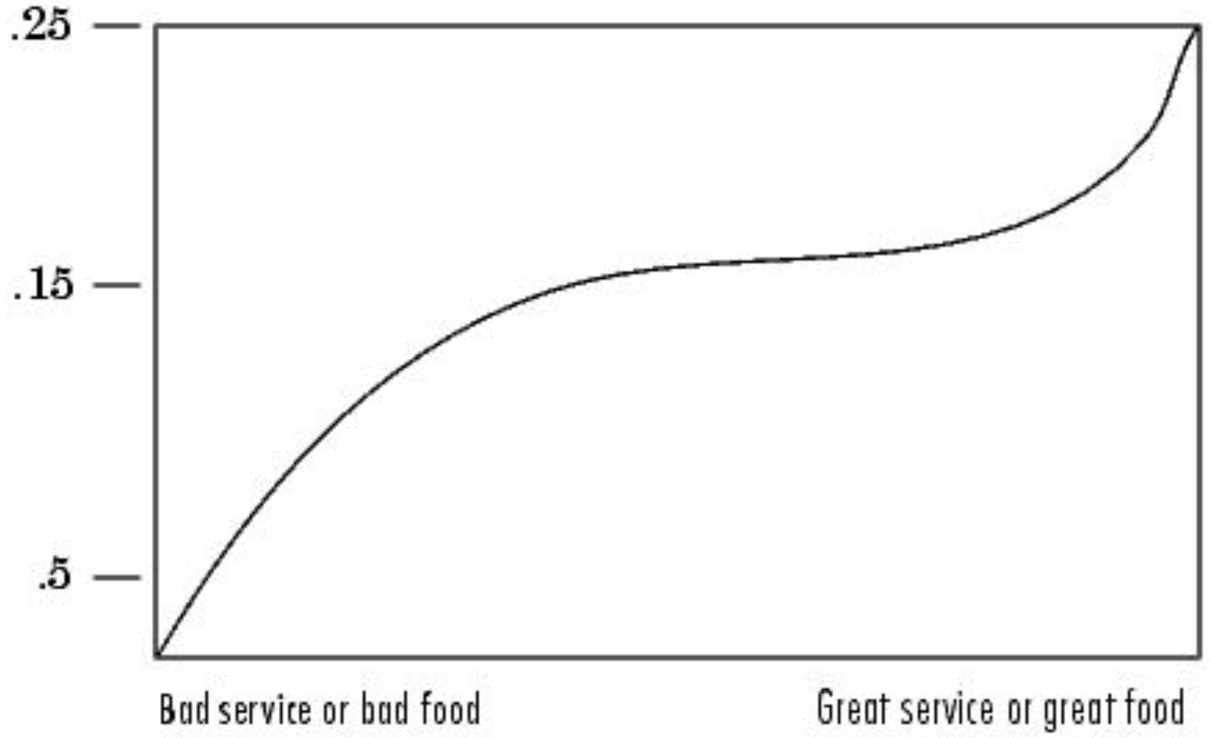
Exemplo

- *Tipping Problem*:

  – Given a number between 0 and 10 that represents the quality of service at a restaurant (where 10 is excellent), and another number between 0 and 10 that represents the quality of the food at that restaurant (again, 10 is excellent), what should the tip be?

Exemplo

- *Tipping Problem*: (true system)



Modelagem Nebulosa

- *Golden Rules* of Tipping: (Especialista)

1. If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.
2. If the service is good, then tip is average.
3. If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.

– Assume that an average tip is 15%, a generous tip is 25%, and a cheap tip is 5%.

Mapeamento Entrada-Saida

- Para o problema da gorjeta:

INPUT: service is 5.09 and food is 5.05

If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.

If the service is good, then tip is average.

If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.

OUTPUT: tip value?

Mapeamento Entrada-Saida

- Para o problema da gorjeta:

INPUT: service is 5.09 and food is 5.05

If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.

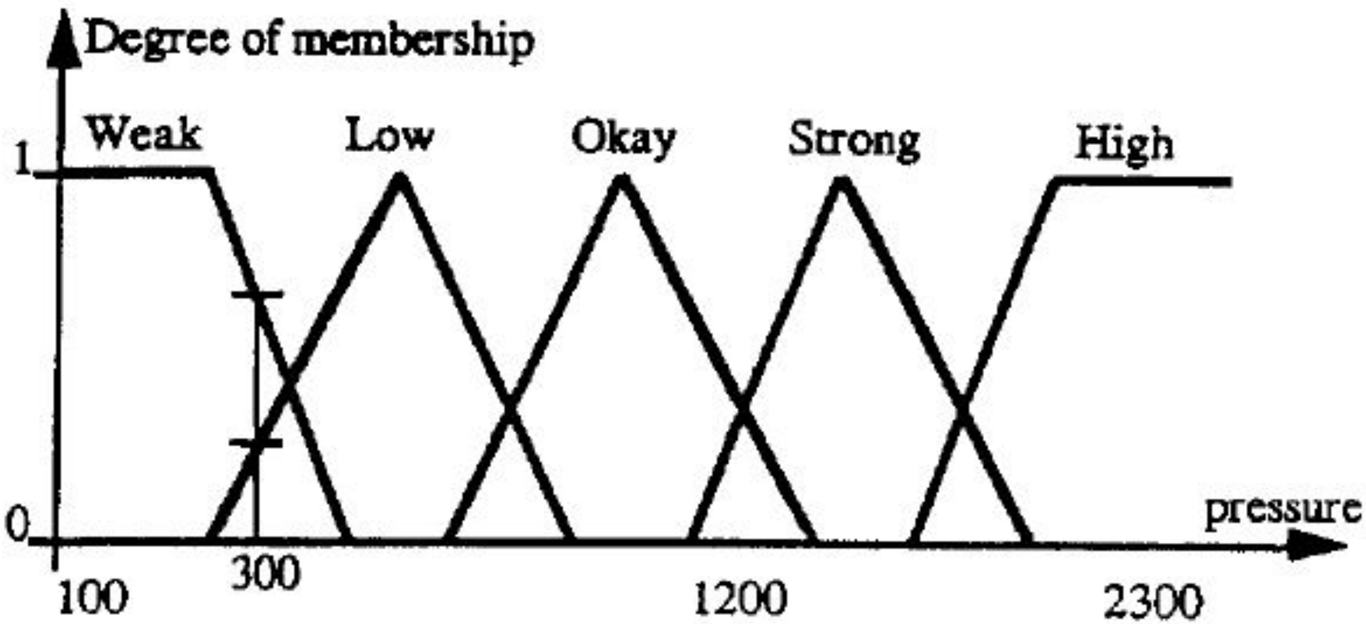
If the service is good, then tip is average.

If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.

OUTPUT: tip value?

COMO É CALCULADO?

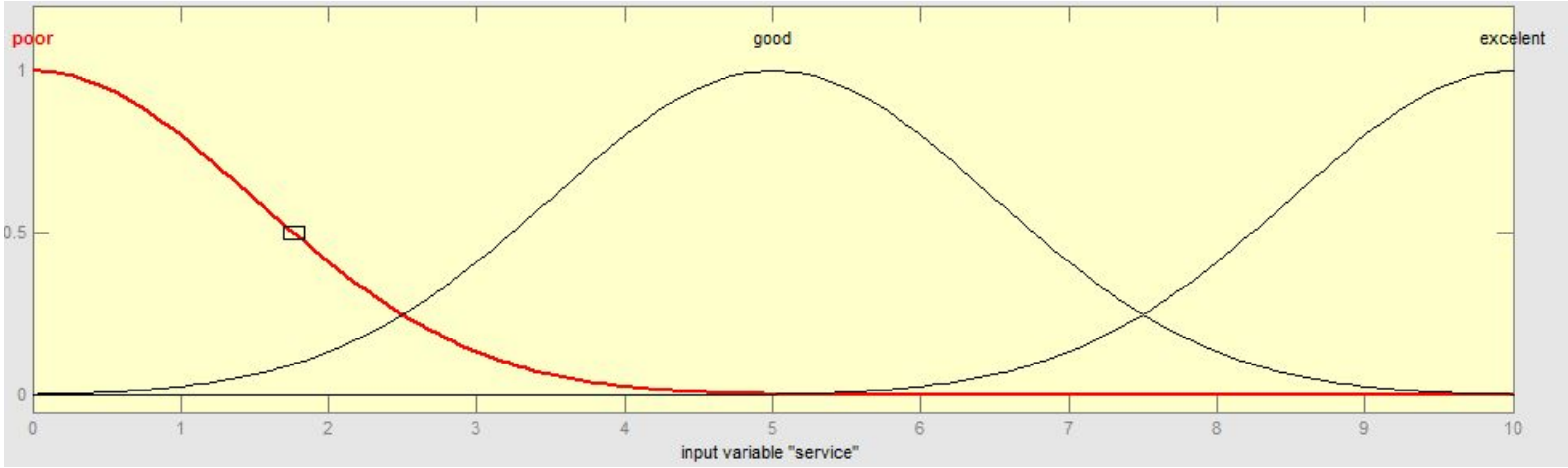
Variáveis Linguísticas



Variáveis Linguísticas

- Para o problema da Gorjeta:

1. If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.
2. If the service is good, then tip is average.
3. If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.



Problema com Dicotomia

- Conjuntos Ordinários
  - Elementos são divididos em dois grupos distintos
    - MEMBROS = pertencem ao conjunto
    - NÃO-MEMBROS = não pertencem ao conjunto
  - Exemplos:
    - Números primos
    - Capitais do Brasil

Problema com Dicotomia

- Realidade existem situações como:

Grandes cidades do Brasil

Números próximos de 10

Pessoas Altas

- Dificuldade em definir esses conjuntos utilizando conjuntos ordinários

Problema com Dicotomia

One seed does not constitute a pile nor two nor three… from the other side everybody will agree that 100 million seeds constitute a pile. What therefore is the appropriate limit? Can we say that 325 647 seeds don't constitute a pile but 325 648 do?

Borel, 1950

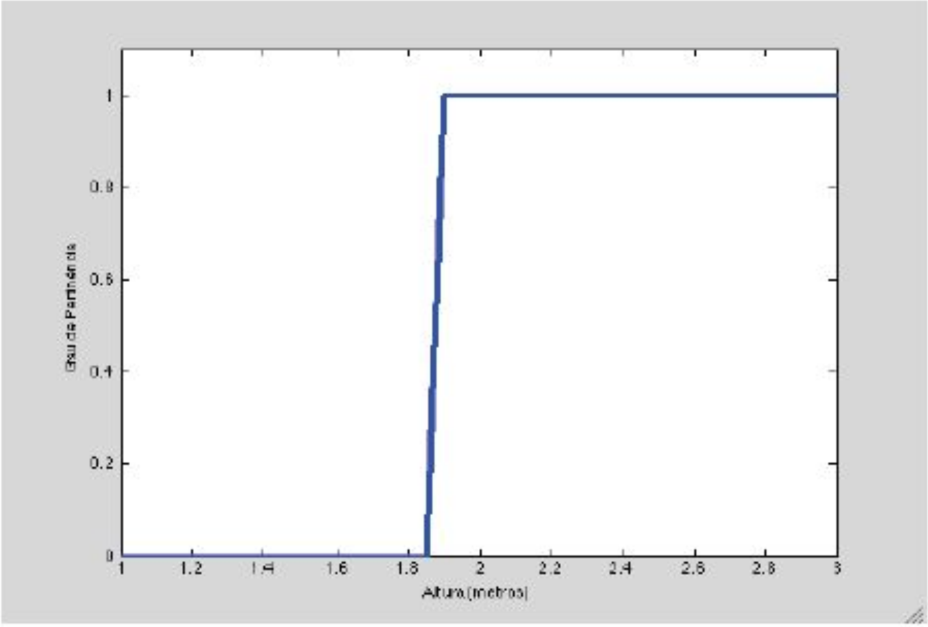
Conjuntos Nebulosos

- Conjuntos Nebulosos
  - Cada elemente possui um grau de pertinência ao conjunto entre [0,1]
  - Estende os conjuntos ordinários
    - Grau pertinência é 0 ou 1
  - Grau de pertinência = medida de similaridade entre o elemento e o conjunto

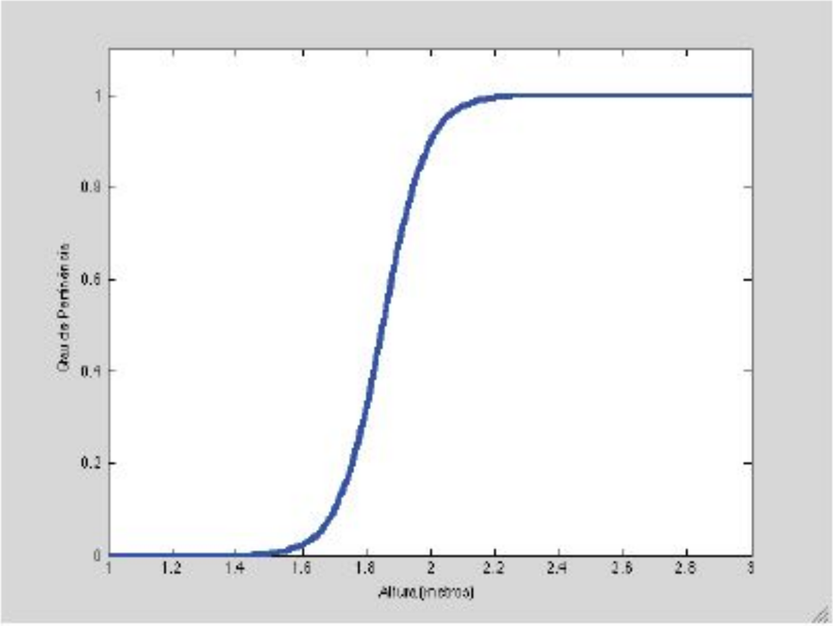
Conjuntos Ordinários x Nebulosos

- *Pessoas Altas*

Conjunto Ordinário



Conjunto Nebuloso



Logica Nebulosa

- Lógica
  - Ciência que tem por objetivo o estudo das leis do raciocínio

1. Todos homens são mortais
2. Sócrates é um homem
3. Sócrates é mortal

Logica Nebulosa

- Lógica Nebulosa
  - Ciência que se preocupa com os princípios formais do raciocínio aproximado
  - Procura modelar os modos imprecisos do raciocínio que tem um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões

Inferencia Nebulosa

- Processo que produz conclusões a partir de um conjunto de regras SE-ENTÃO e FATOS.

- Temperatura = 75°C – Pressão: 2 Psi

SE Temperatura é BAIXA E Pressão é ALTA ENTÃO Vazão é ALTA

SE Temperatura é MEDIA E Pressão é MEDIA ENTÃO Vazão é BAIXA

SE Temperatura é ALTA E Pressão é BAIXA ENTÃO Vazão é BAIXA

Vazão = ?

Inferencia Nebulosa

- Inferência Nebulosa:
  - Para o problema da gorjeta:

INPUT: service is 5.09 and food is 5.05

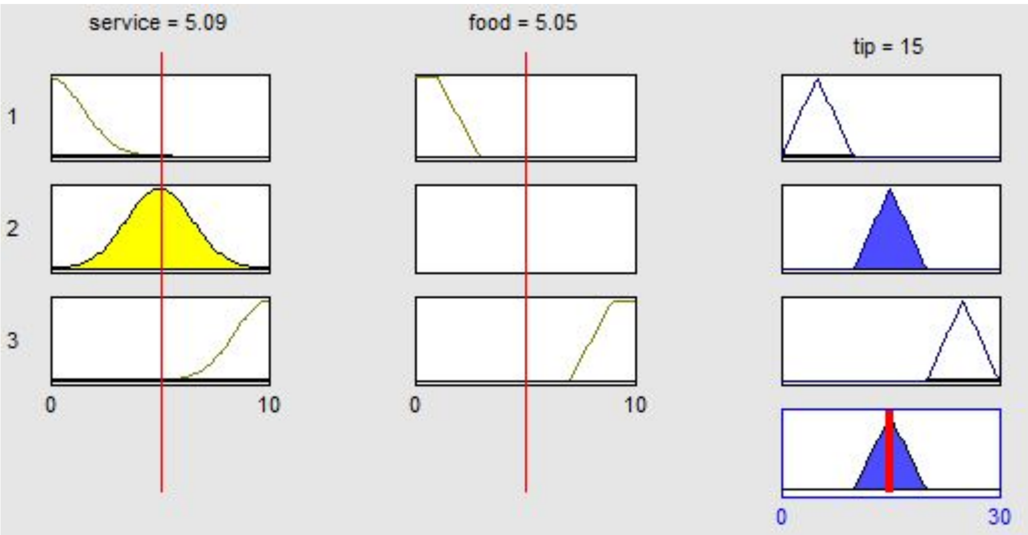
If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.

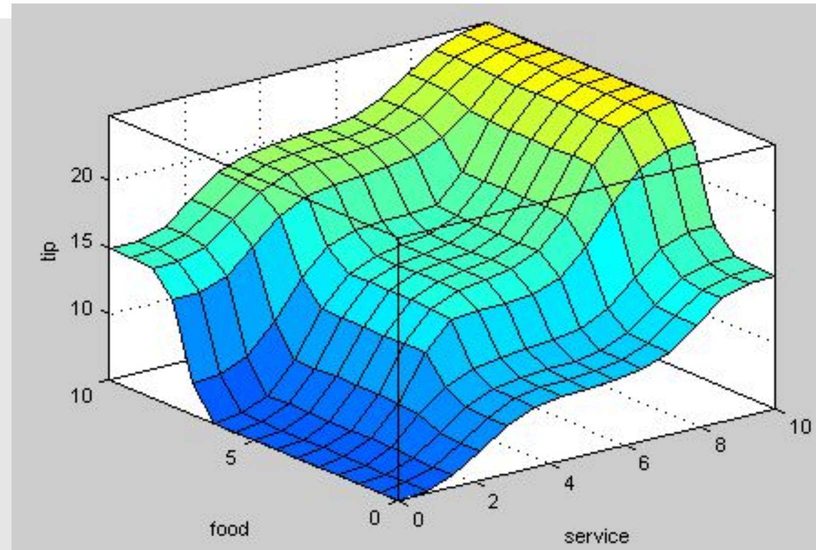
If the service is good, then tip is average.

If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.

OUTPUT: tip?

Inferência p/ o *Tipping Problem*





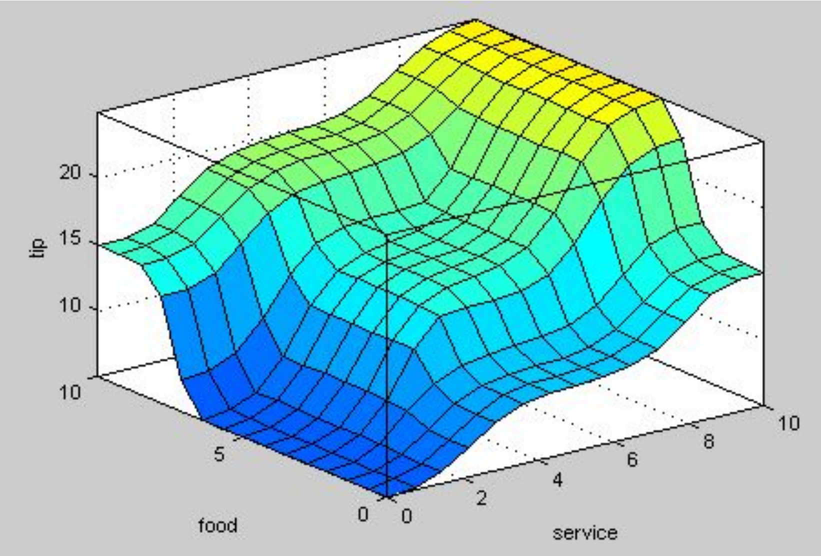
1. If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.
2. If the service is good, then tip is average.
3. If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.

Inferência p/ o *Tipping Problem*

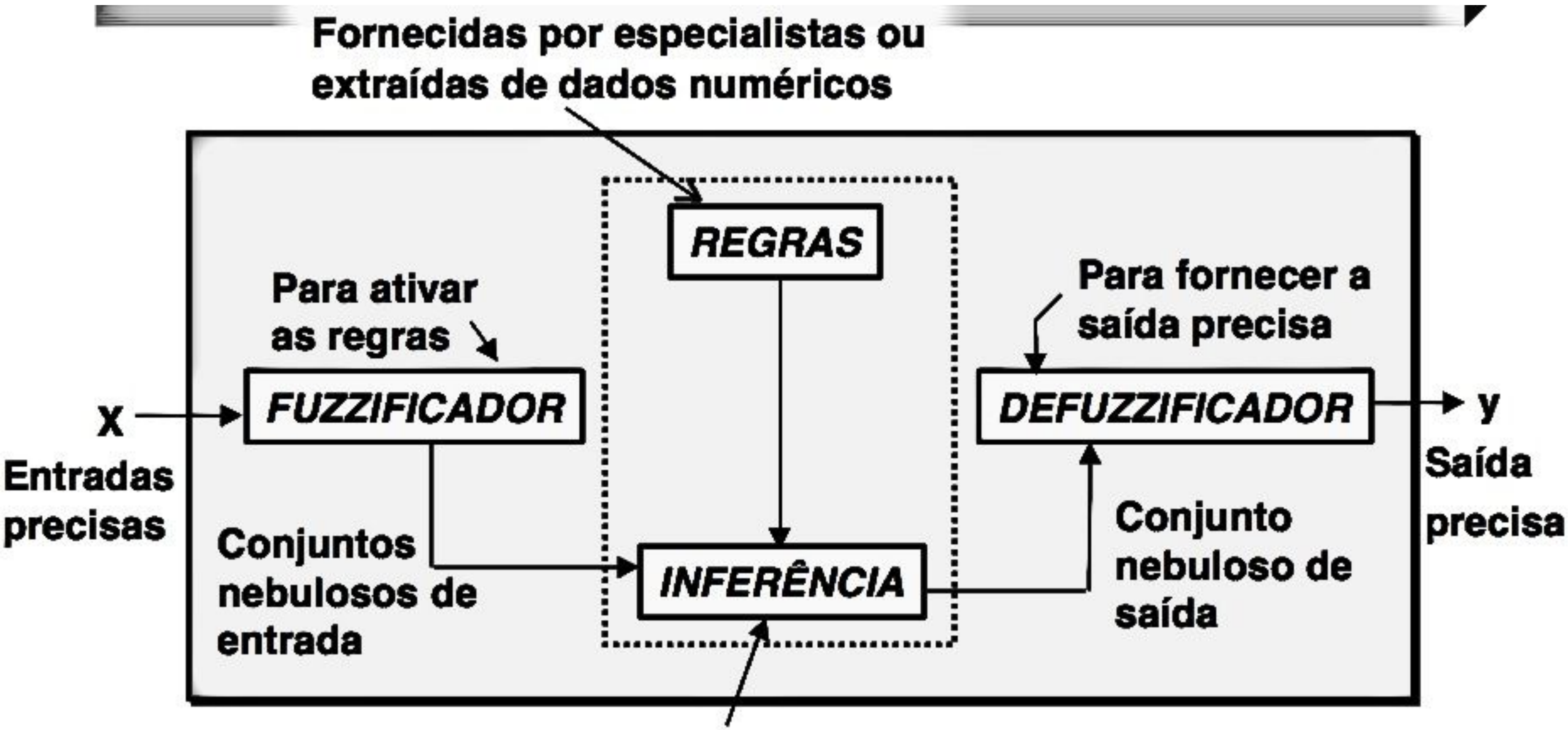
- Ativação das Regras:

	rancid	**N/A**	**delicious**
poor	cheap	cheap	cheap/generous
good	cheap/average	average	average/generous
excelent	cheap/generous	generous	generous

1. If the service is poor or the food is rancid, then tip is cheap.
2. If the service is good, then tip is average.
3. If the service is excellent or the food is delicious, then tip is generous.



Inferência Nebulosa



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

Histórico

- Primeiro artigo
  - L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965

". . . the fact remains that . . . imprecisely defined 'classes' play an important role in human thinking, particularly in the domains of pattern recognition, communication of information and abstraction."

Aplicações

- Controle
  - Controle de aeronave (Rockwell Corp)
  - Operação de metrô de Sendai (Hitachi)
  - Transmissão automática (Nissan, Subaru)
  - Self-Parking car (Tokyo Tech. Univ)
  - Space Shuttle docking (NASA)
- Otimização e Planejamento
  - Operação de elevadores (Hitachi, Fujitech, Mitsubish)
  - Análise do mercado de ações (Yamaich Securities)
- Análise de Sinais
  - Ajuste de imagem de TV (Sony)
  - Reconhecimento de escrita (Sony Palm Top)
  - Foco de câmera de vídeo (Sanyo/Fisher, Cannon)

Revisão de Conjuntos Ordinários

Definição e Representação

- Seja X o espaço de todos os elementos (Universo do discurso) e x um elemento arbitrário de X.

- Um conjunto ordinário $A \subseteq X$, é definido como uma coleção de elementos $\mathrm{x} \in X$, tal que cada x pertence ou não pertence a A.

- Exemplo: $A = \{1,2,5\}$ (Listagem dos membros)

- Função característica: $\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \; ss \; x \in A \\ 0 \; ss \; x \notin A \end{cases}$

Função Característica

- Propriedades:

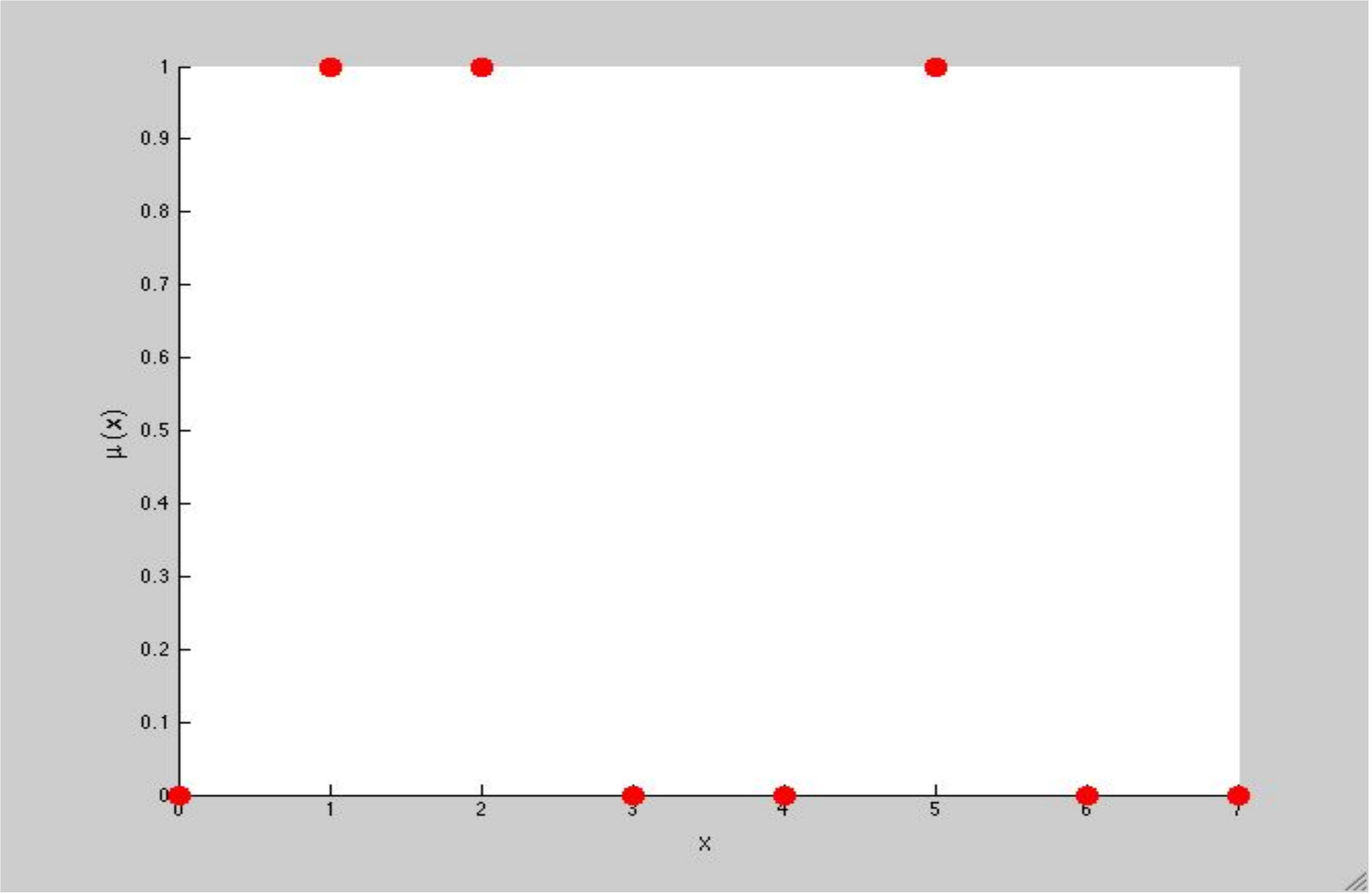
$$\mu_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\mu_X(x) = 1 \;\; e \;\; \mu_\emptyset(x) = 0$$

X : Conjunto Universo ou Universo de Discurso
$\emptyset$: Conjunto Vazio

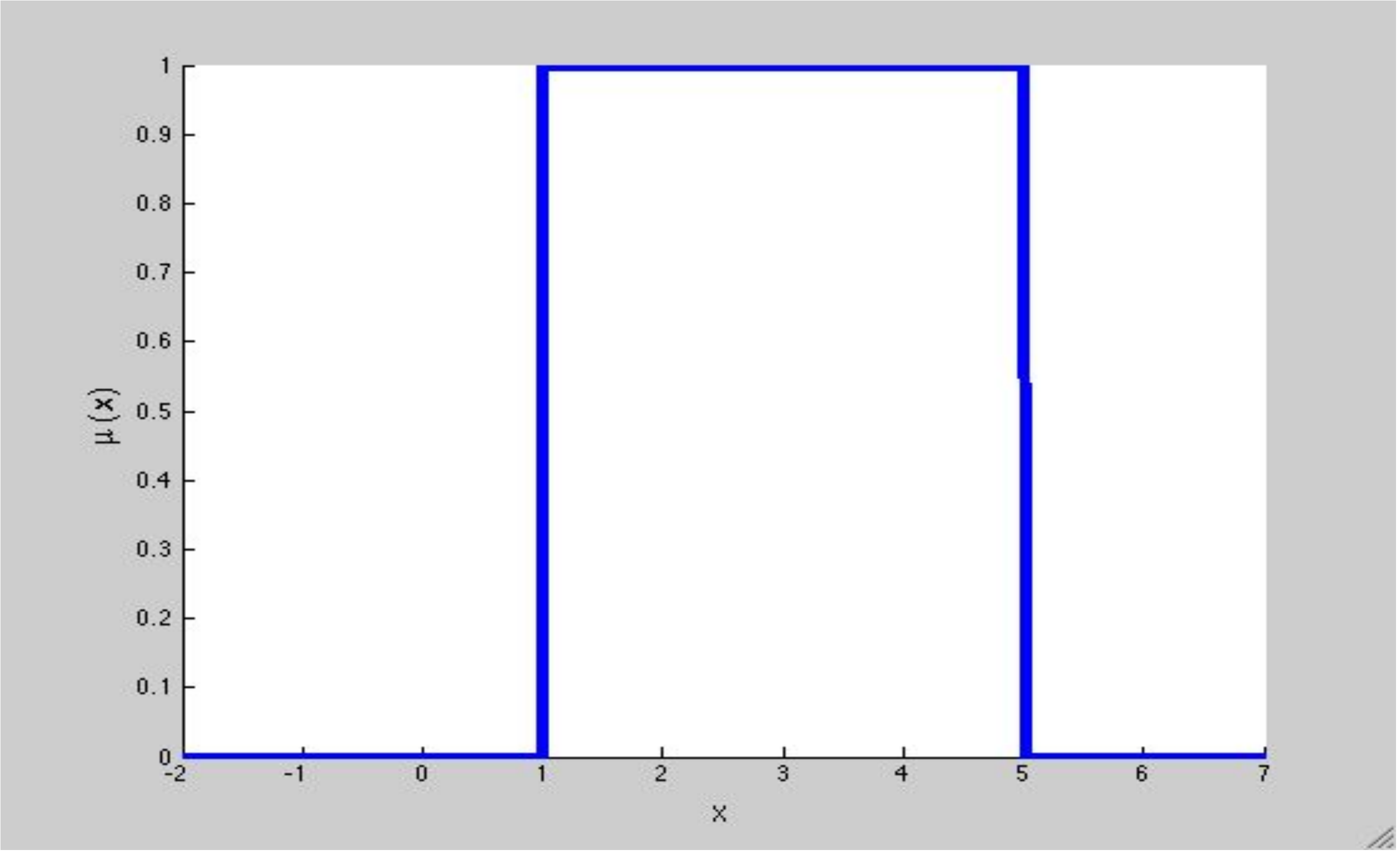
Função Característica

$$A = \{1, 2, 5\}$$



Função Característica

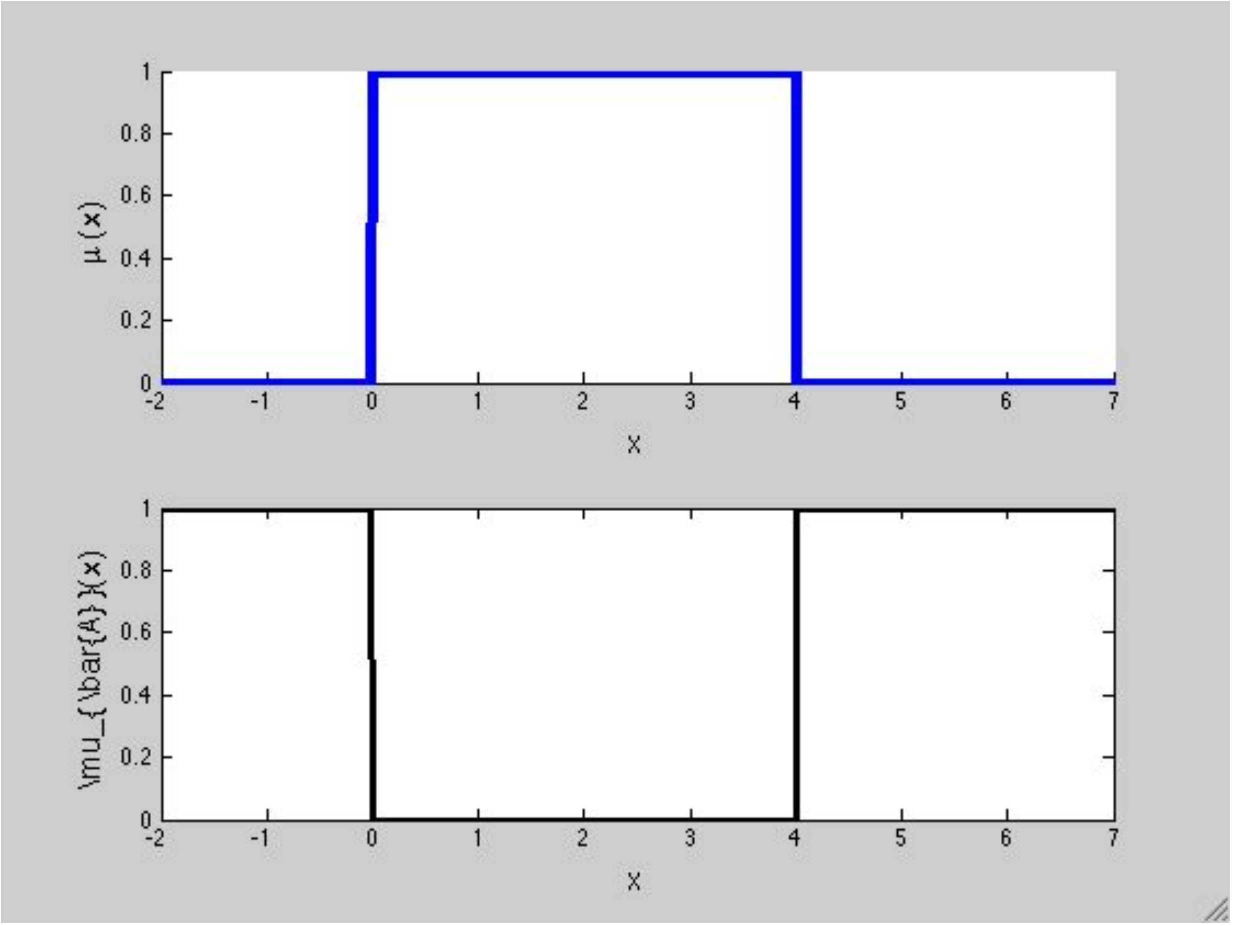
$$A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$$



Complemento

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\}$$

$$A = \{x | 0 < x < 4\}$$



União

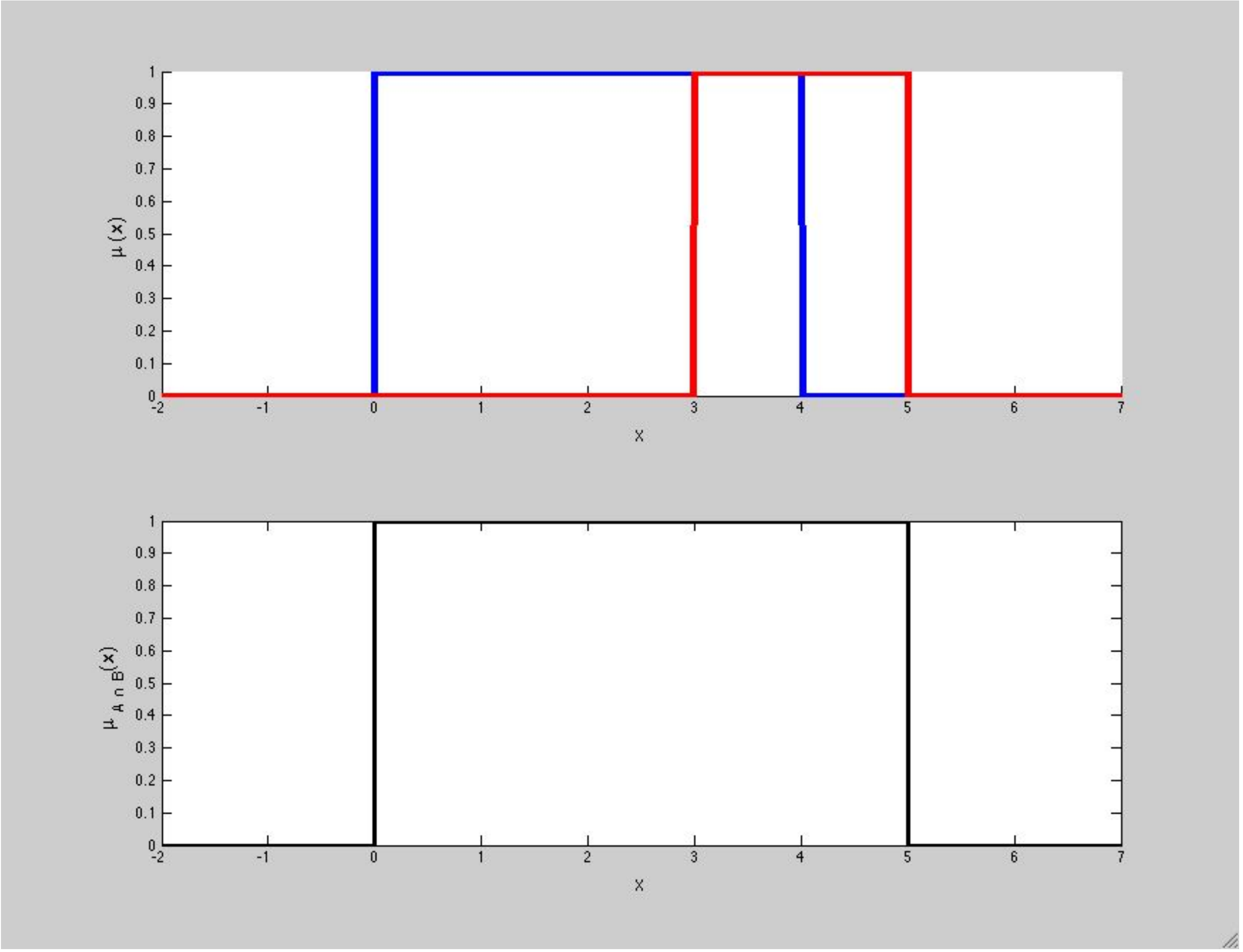
$$A \cup B = \{x | x \in A \;\; ou \;\; x \in B\}$$

- Pode ser generalizado para *n* conjuntos

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \text{para algum i} \in I\}$$

União

$$A = \{x|0 \leq x \leq 4\} \;\; B = \{x|3 \leq x \leq 5\}$$



Intersecção

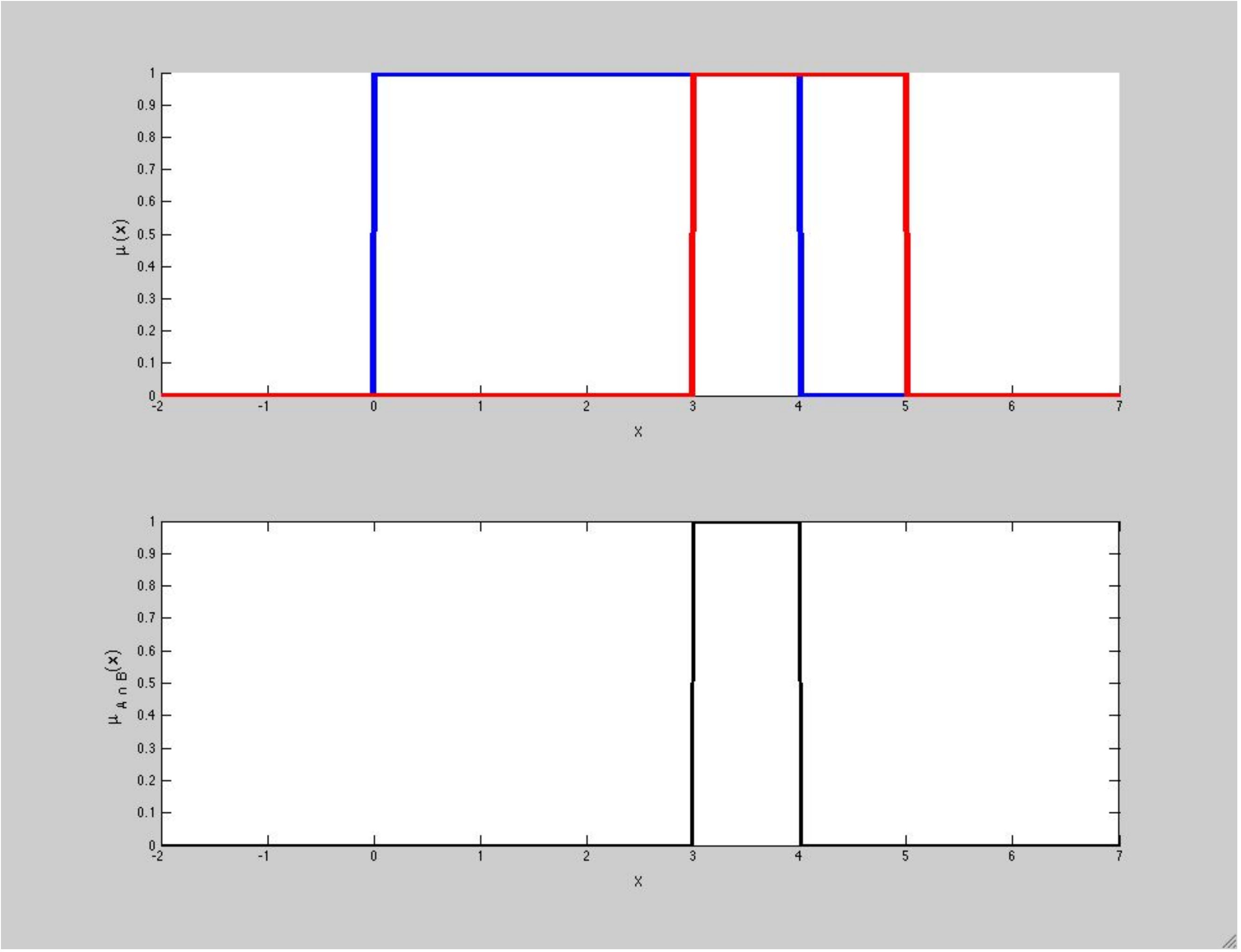
$$A \cap B = \{x | x \in A \ \ e \ \ x \in B\}$$

- Também pode ser generalizado para *n* conjuntos

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \text{para todo i} \in I\}$$

Intersecção

$$A = \{x | 0 \leq x \leq 4\} \quad B = \{x | 3 \leq x \leq 5\}$$



Propriedades

$$A \cup B \implies \mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$A \cap B \implies \mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A x$$

Exercício:

- Utilizando a função característica, prove a seguinte propriedade dos conjuntos clássicos:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Propriedades

Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativity	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Absorption by X and $\varnothing$	$A \cup X = X$
	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Identity	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap X = A$
Law of contradiction	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Law of excluded middle	$A \cup \overline{A} = X$
De Morgan's laws	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Produto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, e), (1, i), (1, o), (1, u),$$
$$(2, a), (2, e), (2, i), (2, o), (2, u), \}$$

Partição

- Conjuntos A e B são disjuntos se

$$A \cap B = \emptyset$$

- Partição = família de subconjuntos de A

$$\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A\}$$

  – Tal que

$$A_i \cap A_j = \emptyset; \forall i, j \in I, i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = A$$

Partição

U = Conjunto dos Automóveis do Brasil

- Possíveis partições:

Conjuntos Nebulosos

Definição

- Seja X uma coleção de objetos denotados genericamente por x.
- Um conjunto *Fuzzy* $A \subseteq X,$ é definido como uma coleção de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

onde $\mu_A(x)$ é a função de pertinência para o conjunto A.

Função de Pertinência

- pode assumir qualquer valor no intervalo entre 0 e 1;
- fornece o grau de similaridade entre o elemento e conceito (*rótulo linguístico*) expresso pelo conjunto;
- pode ser vista como uma generalização da Função Característica para conjuntos clássicos;
- permite modelar a imprecisão;
  - Notações:

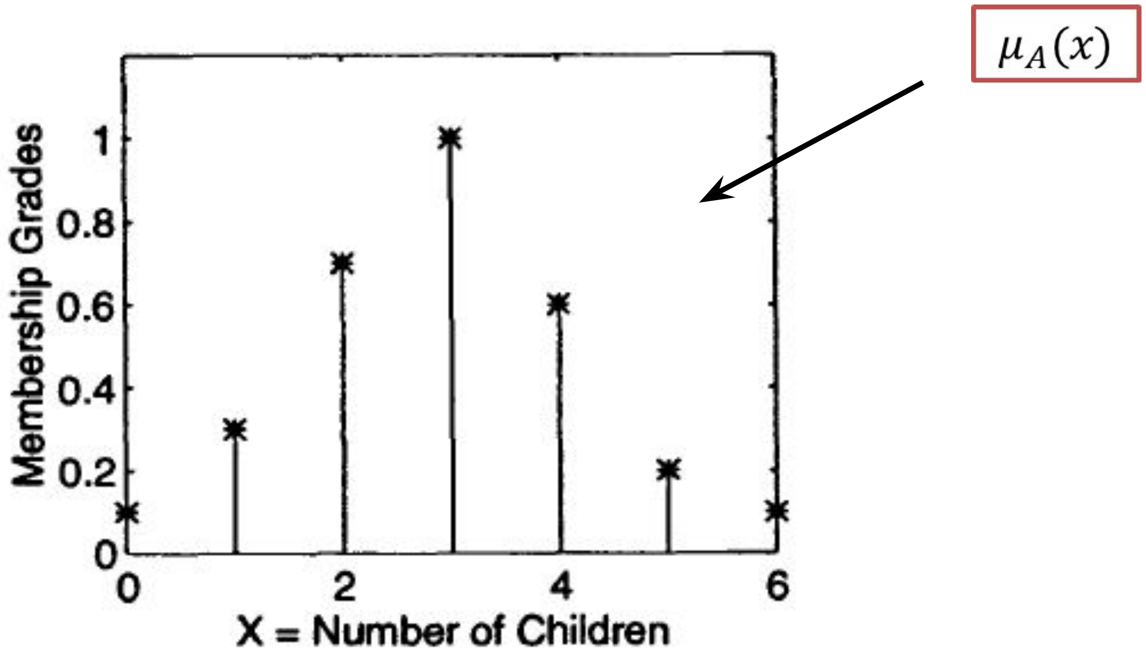
$$\mu_A : X \to [0, 1] \qquad A : X \to [0, 1]$$

(alternativa, encontrada em alguns livros)

Exemplo: Conjunto Discreto

Seja $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, o número de filhos que uma família pode ter. O conjunto nebuloso discreto A="número sensato de filhos" pode ser descrito como:

$$A = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\}.$$



Notação Alternativa

- Se X é discreto:

$$A = \sum_{x \in X} \mu_A(x_i)/x_i$$

- Exemplo:
  - Seja X = {Brasilia, Contagem, Fortaleza, Varginha, Vitoria}. O conjunto A = “cidades próximas de Belo Horizonte” pode ser descrito por:

$$A = 0.1/Fortaleza + 0.3/Brasilia + 0.6/Vitoria + 0.8/Varginha + 1/Contagem$$

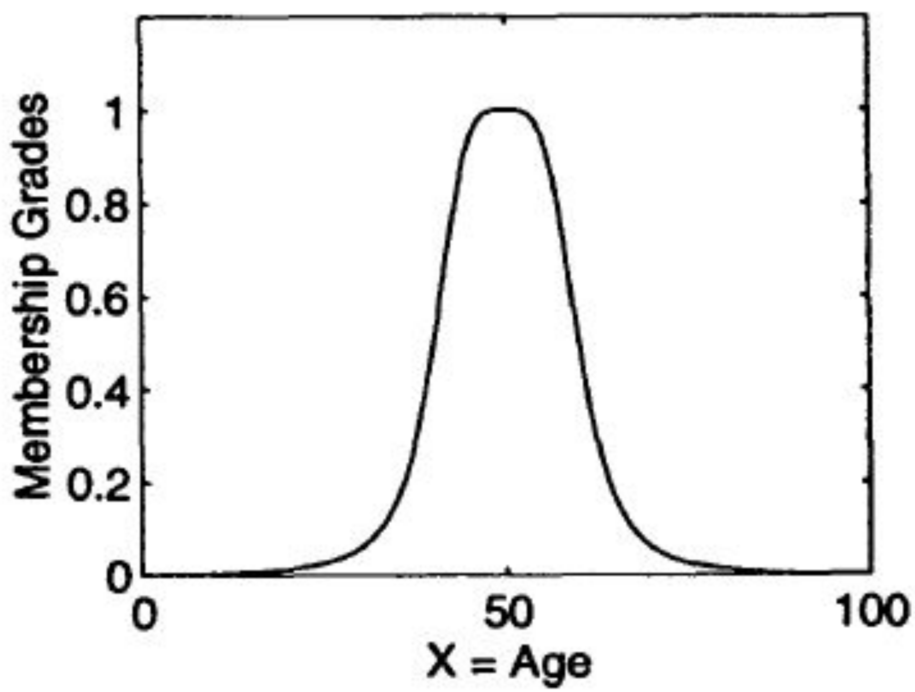
Exemplo: Conjunto Contínuo

Seja $X = R^{+}$, o conjunto de possíveis idades. Então, o conjunto nebuloso contínuo A = "ao redor de 50 anos" pode ser descrito como:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

onde:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^4}$$



Notação Alternativa

- Se X (universo) é contínuo

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

- Exemplo:
  - Seja $X = R^+$, o conjunto de possíveis idades. Então o conjunto *A* = “ao redor de 50 anos” pode ser expresso como :

$$A = \int_{R^+} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4} \Big/ x$$

Observações:

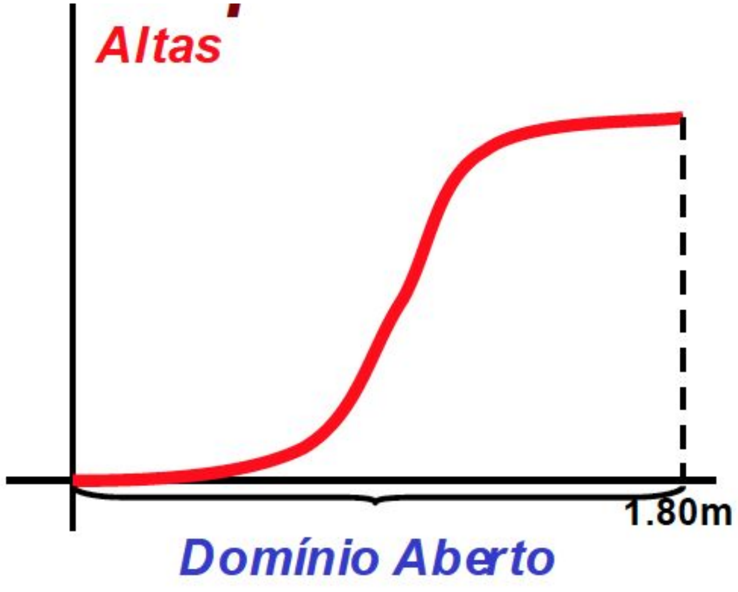
- A definição de um conjunto *Fuzzy* depende da:
  1. identificação de *X* (universo do discurso) ;
  2. especificação de uma função de pertinência;

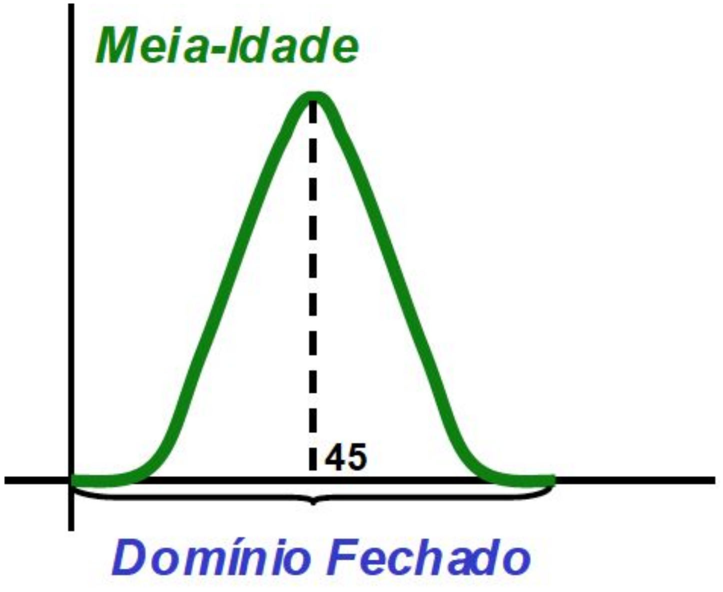
- Note que a especificação das funções de pertinência é subjetiva;

- Tal subjetividade advém das diferenças individuais em perceber ou expressar conceitos abstratos.

Domínio

- universo total de valores possíveis para os elementos do conjunto (X)

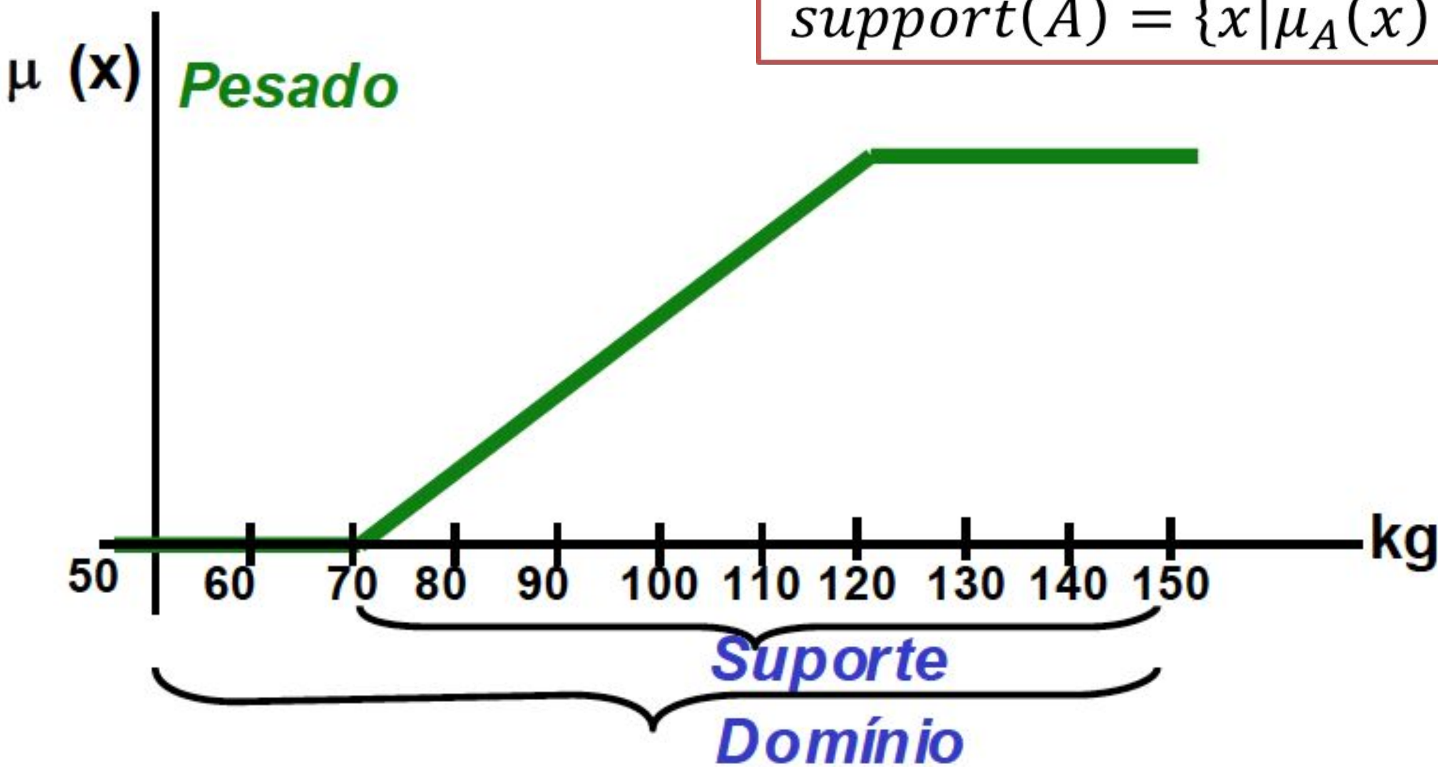




Suporte

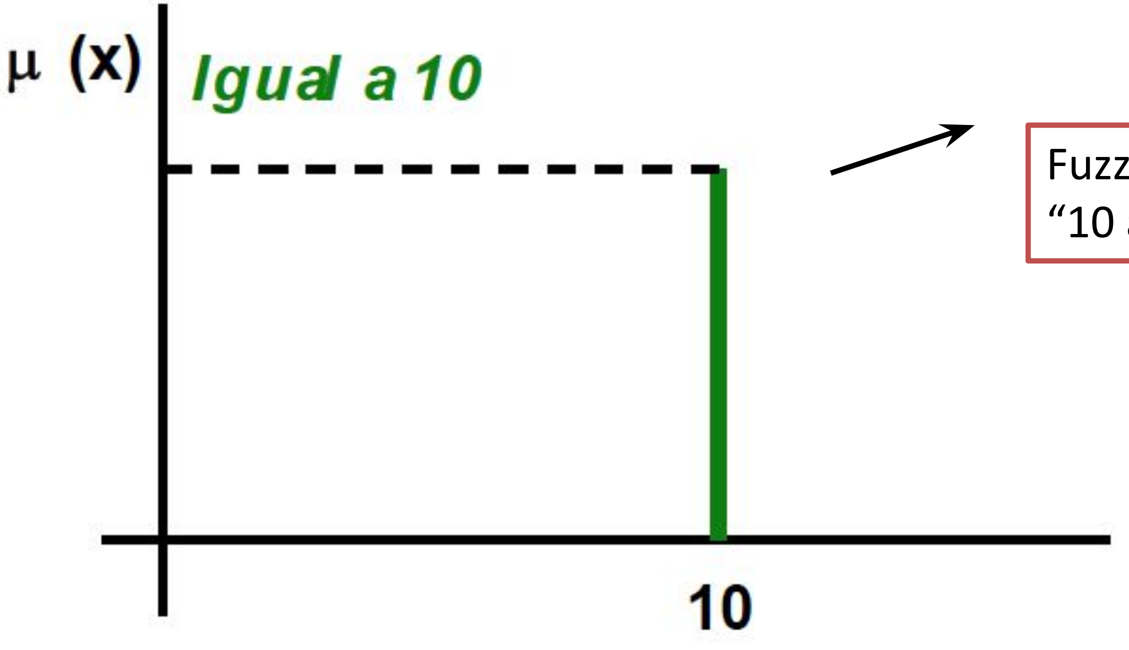
- Subconjunto dos elementos que possuem valor de pertinência maior que 0, isto é

$$\boxed{support(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}}$$



Conjunto Nebuloso *Singleton*

- conjunto cujo suporte é um único ponto em *X*, com valor de pertinência igual a 1.



Fuzzy singleton set:
“10 anos de idade”

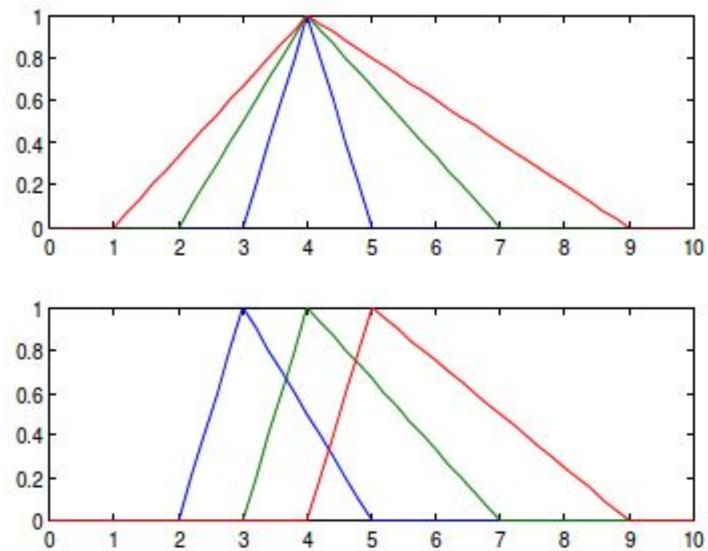
Funções de Pertinência mais utilizadas

Triangular

$$\mu(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

$a < b < c$

```
x = (0:0.2:10)';
y1 = trimf(x, [3 4 5]);
y2 = trimf(x, [2 4 7]);
y3 = trimf(x, [1 4 9]);
subplot(211), plot(x, [y1 y2 y3]);
y1 = trimf(x, [2 3 5]);
y2 = trimf(x, [3 4 7]);
y3 = trimf(x, [4 5 9]);
subplot(212), plot(x, [y1 y2 y3]);
set(gcf, 'name', 'trimf', 'numbertitle', 'off');
```

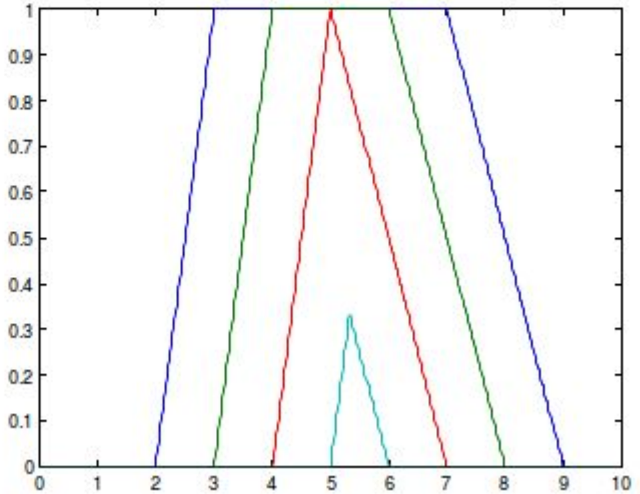


Trapezoidal

$$\mu(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{c-x}{c-b}, & c \leq x \leq d \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

$$a < b \leq c < d$$

```
x = (0:0.1:10)';
y1 = trapmf(x, [2 3 7 9]);
y2 = trapmf(x, [3 4 6 8]);
y3 = trapmf(x, [4 5 5 7]);
y4 = trapmf(x, [5 6 4 6]);
plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
set(gcf, 'name', 'trapmf','numbertitle', 'off');
```

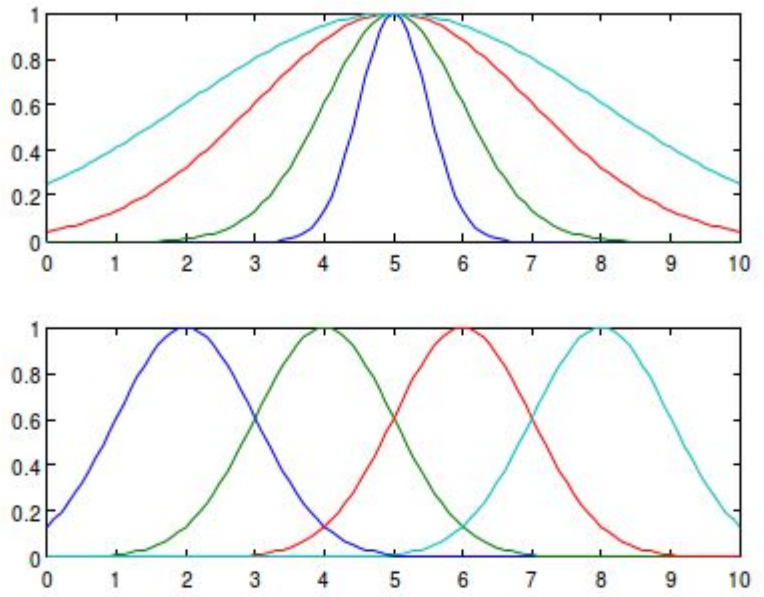


Gaussiana

$$\mu(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

c representa o centro
σ representa a largura

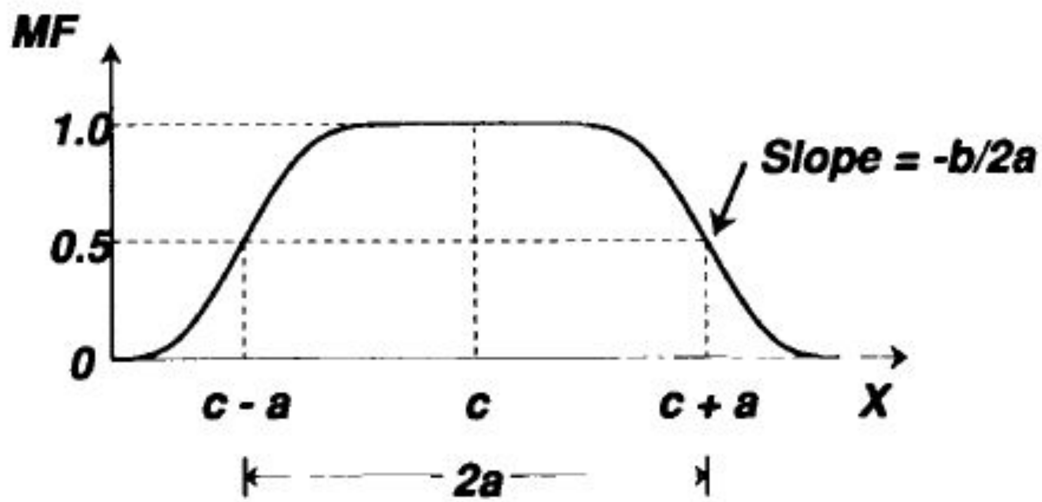
```
x = (0:0.1:10)';
y1 = gaussmf(x, [0.5 5]);
y2 = gaussmf(x, [1 5]);
y3 = gaussmf(x, [2 5]);
y4 = gaussmf(x, [3 5]);
subplot(211); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
y1 = gaussmf(x, [1 2]);
y2 = gaussmf(x, [1 4]);
y3 = gaussmf(x, [1 6]);
y4 = gaussmf(x, [1 8]);
subplot(212); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
set(gcf, 'name', 'gaussmf', 'numbertitle','off');
```



Sino Generalizada

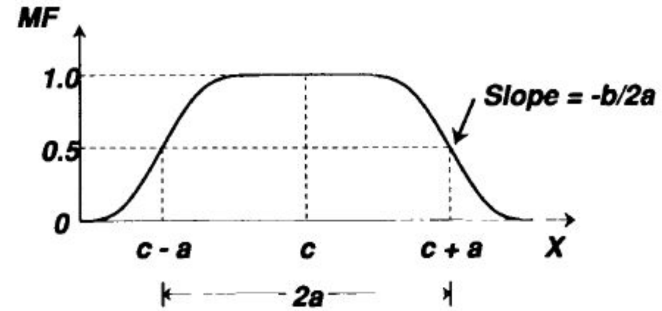
$$\mu(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

c representa o centro
a representa a largura
b representa a inclinação dos *crossover points*

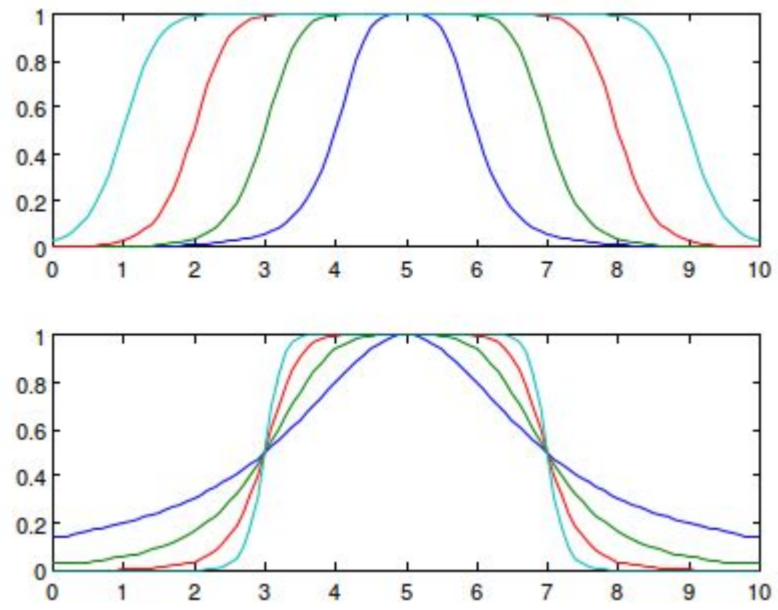


Sino Generalizada

$$\mu(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}$$




```
x = (0:0.1:10)';
y1 = gbellmf(x, [1 2 5]);
y2 = gbellmf(x, [2 4 5]);
y3 = gbellmf(x, [3 6 5]);
y4 = gbellmf(x, [4 8 5]);
subplot(211); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
y1 = gbellmf(x, [2 1 5]);
y2 = gbellmf(x, [2 2 5]);
y3 = gbellmf(x, [2 4 5]);
y4 = gbellmf(x, [2 8 5]);
subplot(212); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
set(gcf, 'name', 'gbellmf', 'numbertitle', 'off')
```

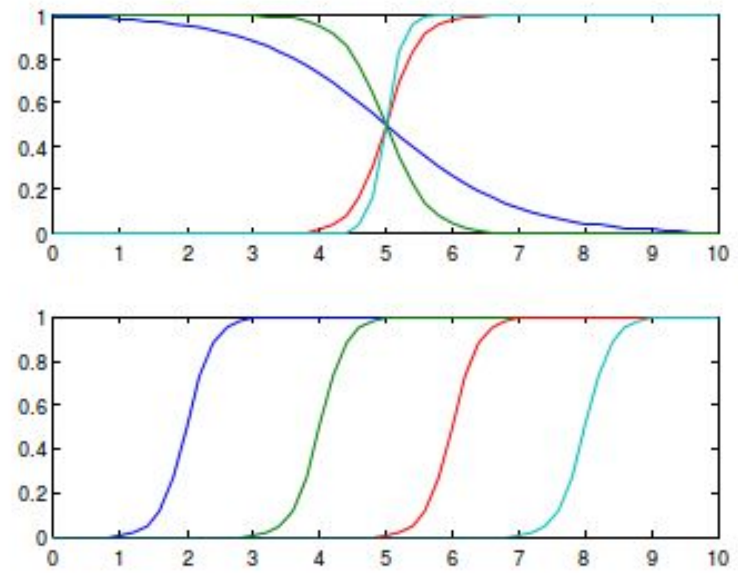


Sigmoidal

$$\mu(x;a,c) = \frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

a controla a inclinação no crossover point $x = c$
$a > 0$ então ela é aberta para direita
$a < 0$ então ela é aberta para esquerda

```
x = (0:0.2:10)';
y1 = sigmf(x, [-1 5]);
y2 = sigmf(x, [-3 5]);
y3 = sigmf(x, [4 5]);
y4 = sigmf(x, [8 5]);
subplot(211); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
y1 = sigmf(x, [5 2]);
y2 = sigmf(x, [5 4]);
y3 = sigmf(x, [5 6]);
y4 = sigmf(x, [5 8]);
subplot(212); plot(x, [y1 y2 y3 y4]);
set(gcf, 'name', 'sigmf', 'numbertitle', 'off');
```



Operadores Fuzzy

Operadores de Zadeh

- Complemento:

$$\bar{A} = X - A \iff \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

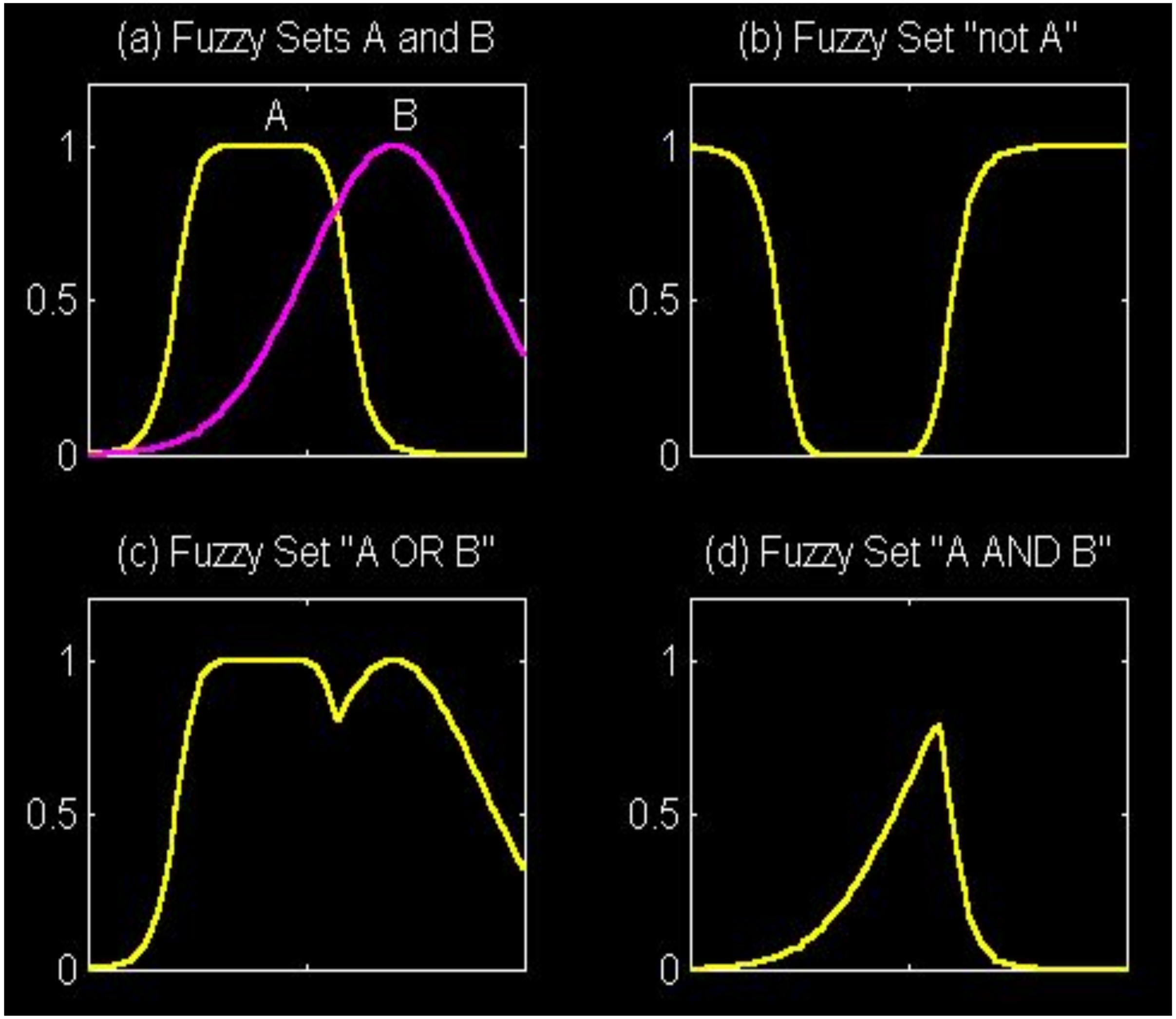
- União

$$A \cup B \iff \mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- Intersecção

$$A \cap B \iff \mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Operadores de Zadeh



Operadores *Fuzzy*

- Os operadores clássicos de união, intersecção e complemento foram propostos por *Zadeh* em seu artigo original;
- No entanto, ao longo dos anos, outros tipos de operadores de complemento, união e intersecção com propriedades específicas têm sido propostas na literatura;
- Tais operadores devem seguir um conjunto de requisitos básicos (axiomas) para que sua correspondência aos operadores de conjuntos ordinários seja válida.

Complemento Nebuloso

- Função $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$ que calcula o complemento de uma função de pertinência:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = N(\mu_A(x))$$

- Exemplo:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Complemento Nebuloso

- O Operador Complemento segue os seguintes axiomas:

Axioma n1: $N(0) = 1 \text{ e } N(1) = 0$ (limite)

Axioma n2: $N(a) \geq N(b) \text{ se } a \leq b$ (monotonicidade)

Axioma n3: $N(a) \text{ é contínua}$ (opcional)

Axioma n4: $N(N(a)) = a$ (opcional)

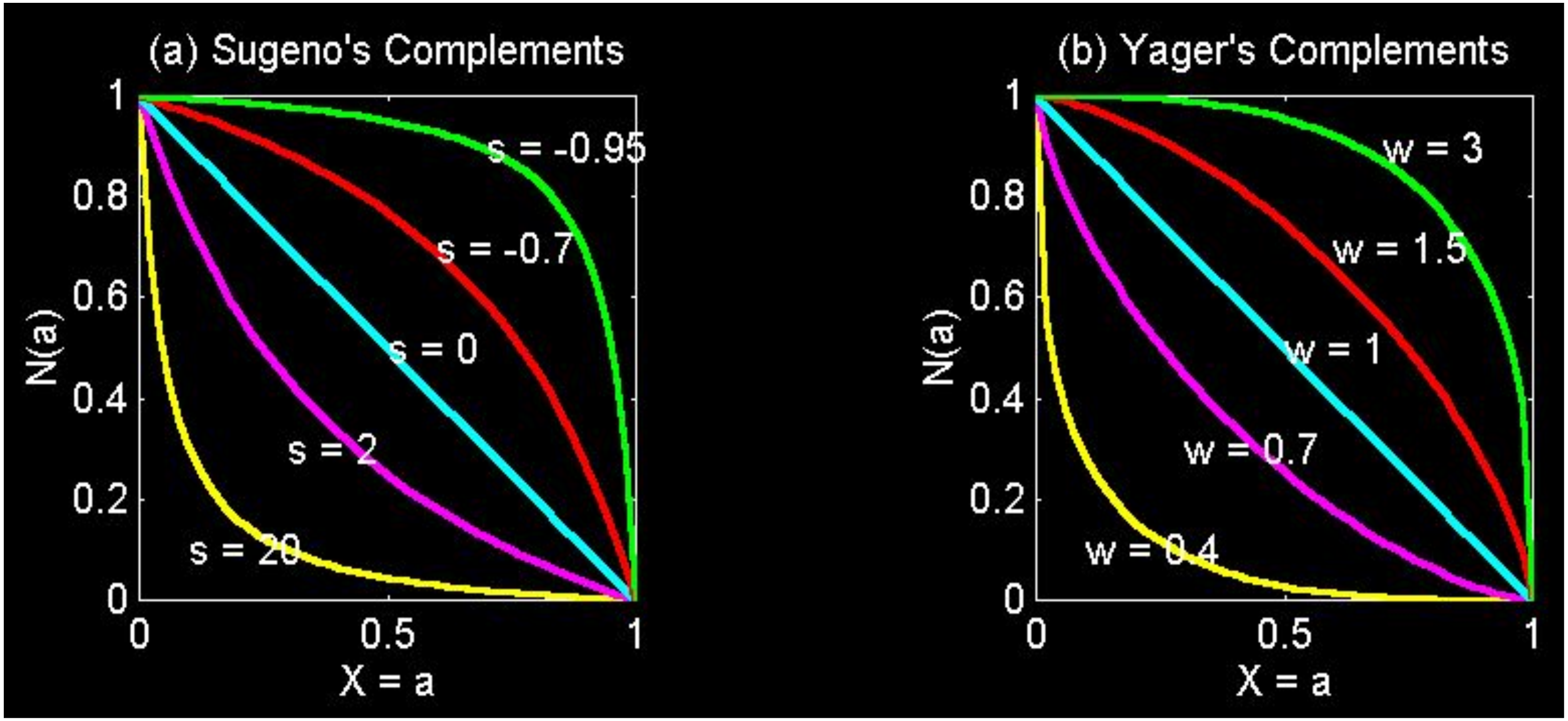
Exemplos de Operadores de Complemento

Zadeh: $N(a) = 1 - a$

Sugeno: $N(a) = \dfrac{1-a}{1+sa} \quad s \in (-1, \infty)$

Yager: $N(a) = (1 - a^w)^{1/w} \quad w \in (0, \infty)$

Exemplos de Operadores de Complemento



Exercício

- Prove que o complemento de Sugeno atende aos axiomas n1, n2 e n4:

$$N(a) = \frac{1-a}{1+sa} \quad s \in (-1, \infty)$$

$$N(0) = 1 \text{ e } N(1) = 0$$ (N1)

$$N(a) \geq N(b) \text{ se } a \leq b$$ (N2)

$$N(N(a)) = a$$ (N4)

União Nebulosa

- Função $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que agrega duas funções de pertinência:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$= \mu_A(x) \mathbin{\tilde{\mp}} \mu_B(x)$$

- Geralmente denominada s-norma (ou t-conorma)

União Nebulosa

Axioma s1: $S(0,0) = 0 \;\; S(a,0) = S(0,a) = a$ (limite)

Axioma s2: $S(a,b) \leq S(c,d) \;\; se \;\; a \leq c \;\; e \;\; b \leq d$ (monotonicidade)

Axioma s3: $S(a,b) = S(b,a)$ (comutatividade)

Axioma s4: $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$ (associatividade)

União Nebulosa

Axioma s5: $S(a)$ é contínua (opcional)

Axioma s6: $S(a, a) = a$ (opcional)

Um operador s-norma deve atender os axiomas s1 a s4.

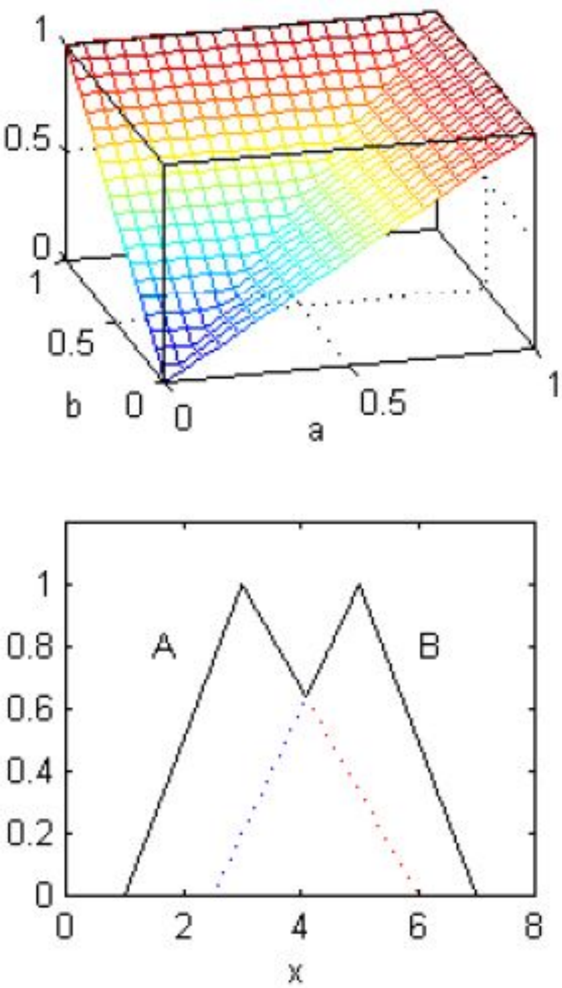
Exemplos de s-normas

Máximo (s1-s6): $S(a,b) = max(a,b)$

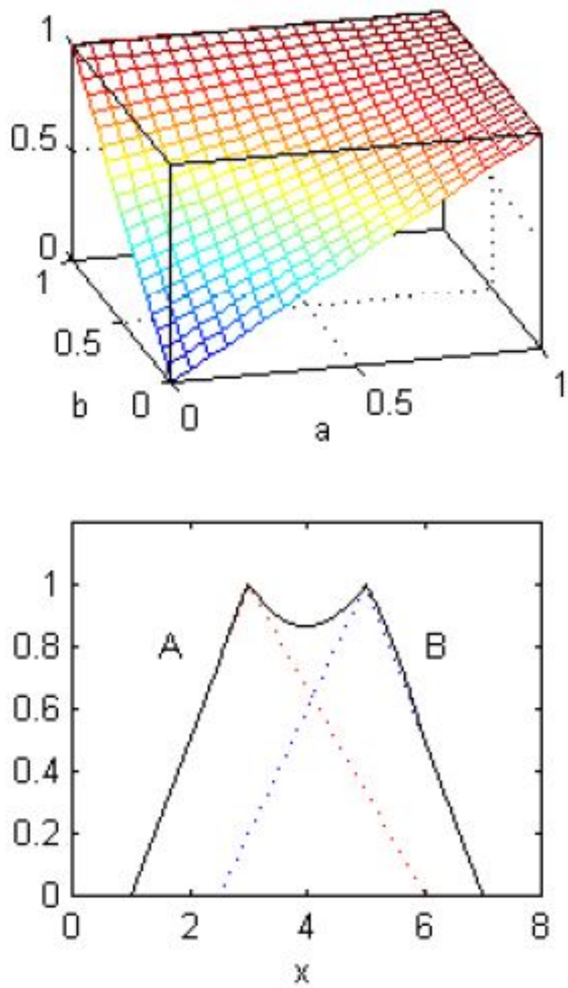
Soma Probabilística (s1-s5): $S(a,b) = a + b - ab$

Exemplos de s-normas

Máximo



Soma Probabilística



Intersecção Nebulosa

- Função $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que agrega duas funções de pertinência:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$= \mu_A(x) \;\tilde{*}\; \mu_B(x)$$

- Geralmente denominada t-norma (norma triangular)

Intersecção Nebulosa

Axioma t1: $T(0,0) = 0, \;\; T(a,1) = T(1,a) = a$ (limite)

Axioma t2: $T(a,b) \leq T(c,d) \;\; se \;\; a \leq c \;\; e \;\; b \leq d$ (monotonicidade)

Axioma t3: $T(a,b) = T(b,a)$ (comutatividade)

Axioma t4: $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ (associatividade)

Intersecção Nebulosa

Axioma t5: $T(a)$ é contínua (opcional)

Axioma t6: $T(a, a) = a$ (opcional)

Um operador t-norma deve *atender os axiomas t1-t4.*

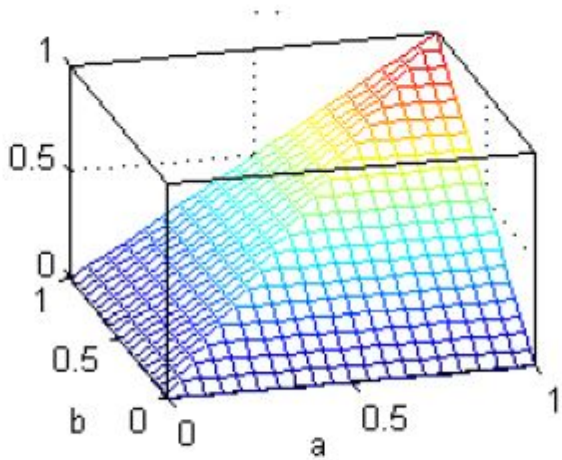
Exemplos de t-normas

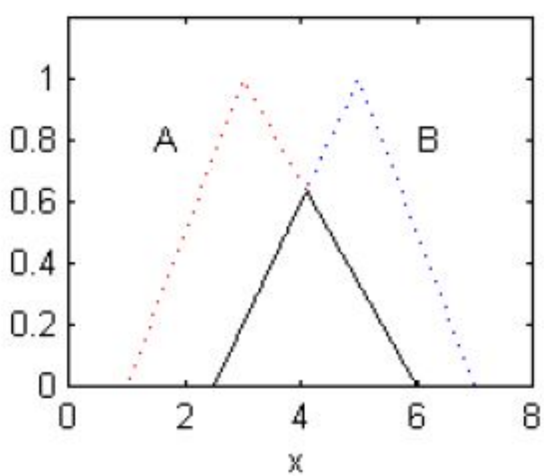
Mínimo (t1-t6): $$T(a,b) = min(a,b)$$

Produto (t1-t5): $$T(a,b) = ab$$

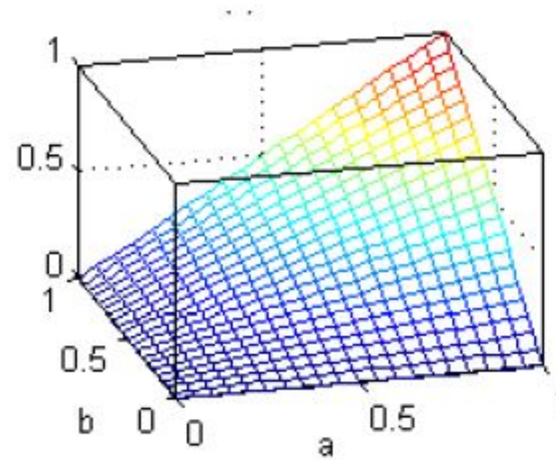
Exemplos de t-normas

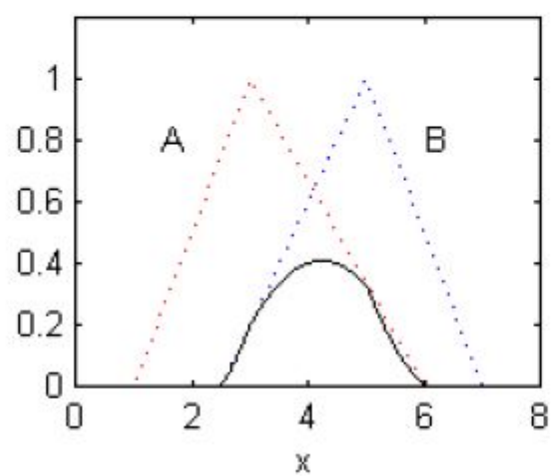
Mínimo





Produto





Leitura Recomendada

- Capítulos 1 e 2
  - Jyh-Shing Roger Jang and Chuen-Tsai Sun. 1996. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.