UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Sistemas Nebulosos

Relações Nebulosas

Cristiano Leite de Castro

Adaptação de material didático do Prof. André Paim Lemos (DELT)

Relação Binária

- Produto Cartesiano

$$U \times V = \{(x,y) | x \in U \;\; e \;\; y \in V\}$$

- Relação binária R(U,V)

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in R(x,y) \\ 0 \;\; caso \;\; contrario \end{cases}$$

$$R \subseteq U \times V$$

Relação Binária

- Exemplo:
  - R(U,V) : x é divisível por y
    - U = {10, 15, 20}
    - V = {2, 3, 5}

R (U,V) = {(10,2), (10,5), (15,3), (15,5), (20,2), (20,5)}

Relação Binária

- Conjuntos ordinários
  - Tupla (elemento) pertence ou não a relação

  - R(U,V) : x é divisível por y
    - U = {10, 15, 20}
    - V = {2, 3, 5}

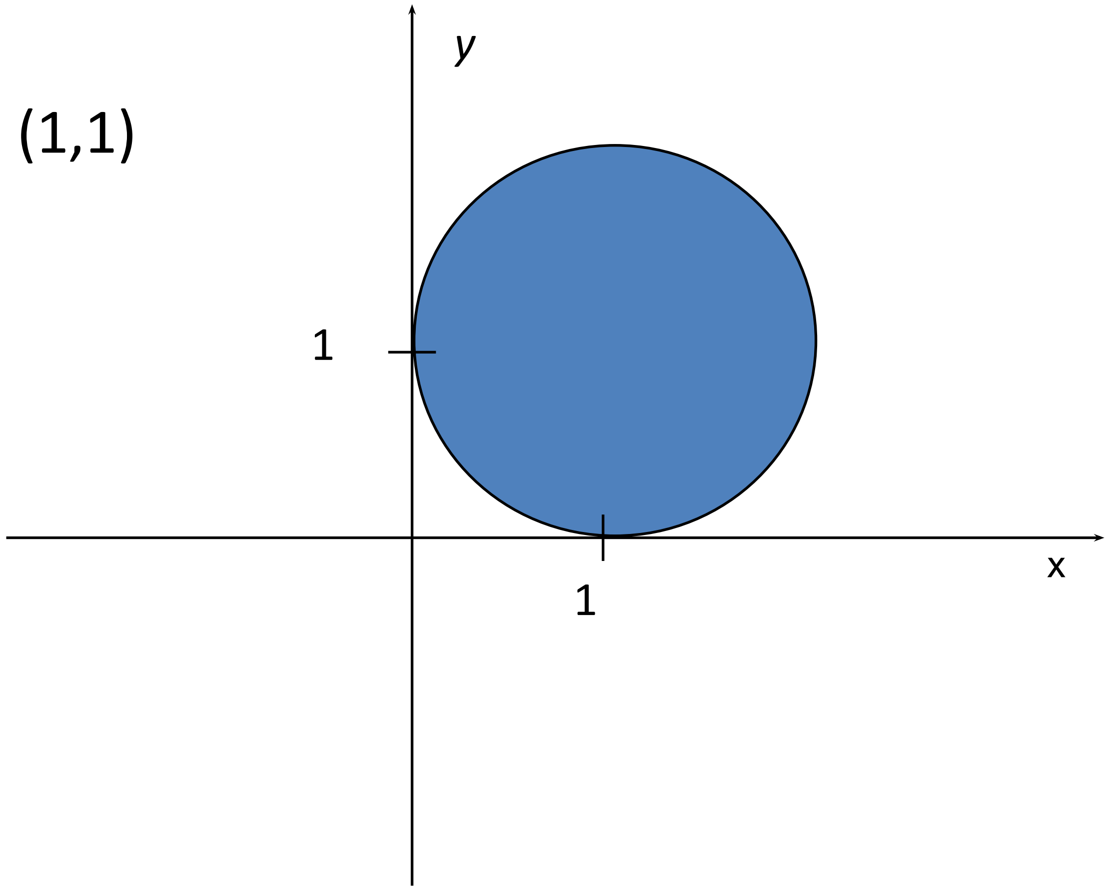
$$(10, 2) \in R \qquad\qquad (10, 3) \notin R$$

Relação Binária

$$R : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq r^2$$

Centro = (1,1)

Raio = r



Relação Nebulosa

- Representa o *grau* de presença ou ausência de associação (interação) entre os elementos de dois ou mais conjuntos nebulosos.

- Exemplos:
  - x é bem maior que y
  - y é muito próximo de x
  - SE x é alto ENTÃO y é baixo

Relação Nebulosa

- Relação binária nebulosa é um conjunto nebuloso definido no espaço cartesiano *UxV*

$$R(U,V) = \{(x,y), \mu_R(x,y) | (x,y) \in U \times V\}$$

- Conjuntos ordinários : $\mu_R(x,y) \in \{0,1\}$
- Conjuntos nebulosos : $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

Se a relação é definida no espaço $\mathrm{U} \times V$ *então* $\mu_R(.)$ é uma Função de Pertinência Bi-dimensional

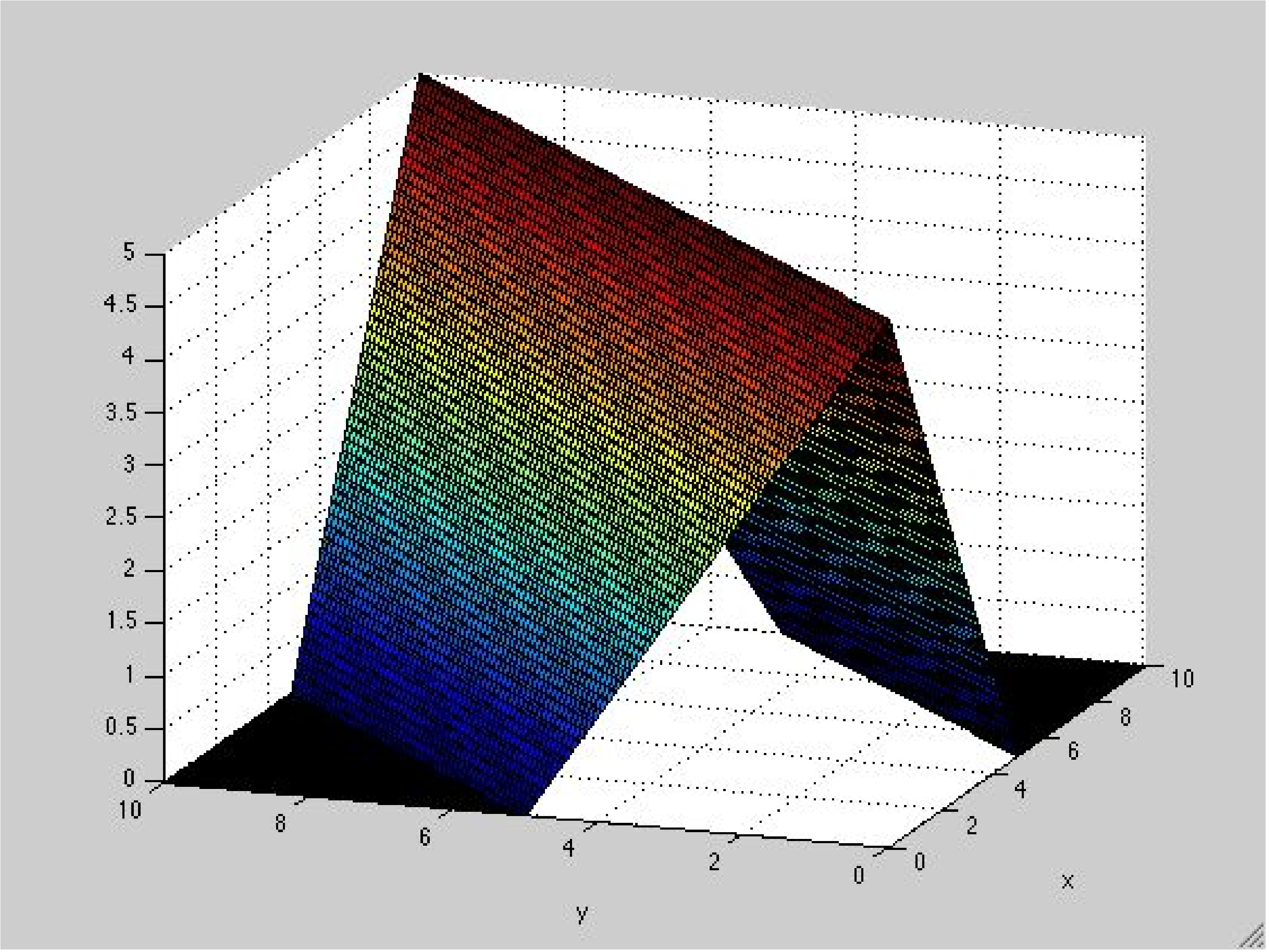
Relação Nebulosa

- Exemplo

  - Sejam U e V números reais
  - R(x,y) : “x é próximo de y”

$$\mu_R(x, y) = max\{(5 - |x - y|)/5, 0\}$$

Relação Nebulosa



Relação Nebulosa

- U = V = {10,40,80,100,300}
- R(x,y) : “x é muito maior que y”

$\mu_R(x,y) =$

X/Y	10	40	80	100	300
10	0	0	0	0	0
40	0,4	0	0	0	0
80	0,8	0,2	0	0	0
100	1,0	0,6	0,2	0	0
300	1,0	0,8	0,4	0,2	0

Relação Nebulosa

- operações, união, intercessão, complemento também podem ser utilizadas em relações nebulosas

$$\mu_{R\cap S}(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \mu_S(x,y)$$

$$\mu_{R\underset{\cup}{\cancel{\cap}}S}(x,y) = \mu_R(x,y) \vee \mu_S(x,y)$$

- o operador é aplicado elemento a elemento.

$\wedge$ = t-norma
$\vee$ = s-norma

Relação Nebulosa

- Exemplo:
  - U = {2,12} e V={1,7,13}
  - Relações:
    - "u é próximo de v"
    - "u é muito menor que v"

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_m(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Relação Nebulosa

- “u é próximo de v” e “u é muito menor que v”

$$\mu_{p\cap m}(u,v) = \mu_p(u,v) \wedge \mu_m(u,v)$$

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_m(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{p\cap m}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Relação Nebulosa

- “u é próximo de v” ou “u é muito menor de v”

$$\mu_{p\cup m}(u,v) = \mu_p(u,v) \vee \mu_m(u,v)$$

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_m(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{p\cup m}(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Relação Nebulosa

Example 5.2

Let R be a fuzzy relation between the two sets X = {New York City, Paris} and Y = {Beijing, New York City, London}, which represents the relational concept "very far." This relation can be written in list notation as

$$R(X, Y) = 1/\text{NYC, Beijing} + 0/\text{NYC, NYC} + .6/\text{NYC, London} + .9/\text{Paris, Beijing} + .7/\text{Paris, NYC} + .3/\text{Paris, London}.$$

This relation can also be represented by the following two-dimensional membership array (matrix):

	NYC	*Paris*
Beijing	1	.9
NYC	0	.7
London	.6	.3

Composição de Relações Nebulosas

- "u é próximo de v" definida em U x V (U= {2,12} e V={1,7,13})

$$\mu_p(u, v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

- "v é muito maior que w" definida em V x W (W={4,8})

$$\mu_{mm}(v, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

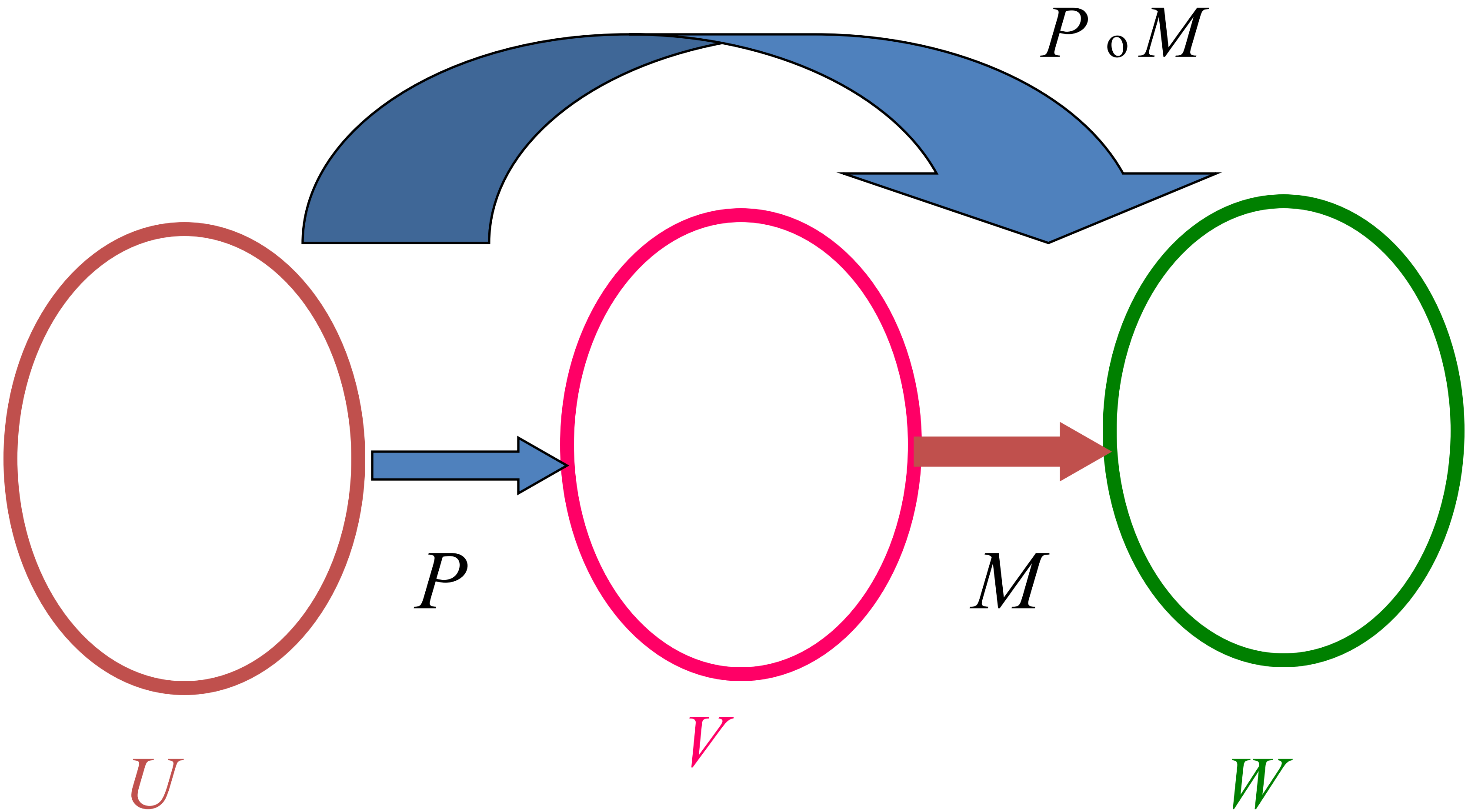
Composição de Relações Nebulosas

- A proposição
  - "u é próximo de v e v é muito maior que w"
- Composição de duas relações nebulosas

$$R(U,W) = P(U,V) \circ M(V,W)$$

- *R(U,W)* é definida em U x W

Composição de Relações Nebulosas



Composição de Relações Nebulosas

- Composição Max-Min:

$$\mu_{P \circ M}(u,w) = \left\{(u,w), max_v\left[\min(\mu_p(u,v), \mu_M(v,w)\right] \right\}$$

$\wedge$ = min
$\vee$ = max

Composição de Relações Nebulosas

- “u é próximo de v e v é muito maior que w”

$$\mu_p(u,v) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 7 & 13 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

$$\mu_{mm}(v,w) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 8 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 7 \\ 13 \end{matrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu_{p \circ mm} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 8 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

Composicão de Relações Nebulosas

- similar a uma multiplicação de matrizes
  - Porém tratar multiplicação como mínimo e adição como máximo

- Exemplo:

$$\mu_{p \circ mm}(1,1) = max(min(0.9,0),$$
$$min(0.4,0.6), min(0.1,1)) = 0.4$$

Composição de Relações Nebulosas

- Composição Max-Produto

$$P \circ M(u,w) = \vee[\mu_P(u,v)\mu_M(v,w)]$$

- Composição Max-Estrela (★=t-norma)

$$P \circ M(u,w) = \vee[\mu_P(u,v) \star \mu_M(v,w)]$$

Propriedades de Relações Nebulosas

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

$$\boxed{R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)}$$

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

$$S \subseteq T \implies R \circ S \subset R \circ T$$

Leitura Recomendada

- Capítulo 3 do Livro - Seção 3.2.2.
  - Jyh-Shing Roger Jang and Chuen-Tsai Sun. 1996. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.