

Sistemas Nebulosos

Regras e Raciocínio Nebuloso

Cristiano Leite de Castro

Adaptação de material didático do Prof. André Paim Lemos (DELT)

Mecanismo de Inferência Nebulosa

- Temperatura = 75°C – Pressão: 2 Psi

SE Temperatura é BAIXA E Pressão é ALTA ENTÃO Vazão é ALTA

SE Temperatura é MEDIA E Pressão é MEDIA ENTÃO Vazão é BAIXA

SE Temperatura é ALTA E Pressão é BAIXA ENTÃO Vazão é BAIXA

Vazão = ?

Mecanismo de Inferência Nebulosa

Temperatura = 75°

**SE Temperatura é ALTA
ENTÃO Vazão aumenta**



Vazão = ?

**R1 \Rightarrow Relação simples
(um conjunto nebuloso)**

**R2 \Rightarrow Relação de Implicação
 $A \rightarrow B$**

**Composição das Relações
R1 o R2**

Variável Linguística

- **Variável numérica**: assume valor numérico (temperatura = 75°C)
- **Variável linguística**: assume **valor linguístico** (jovem, velho, alto, baixo, gordo, magro, quente, frio, etc).
- *Valor linguístico é um conjunto nebuloso*

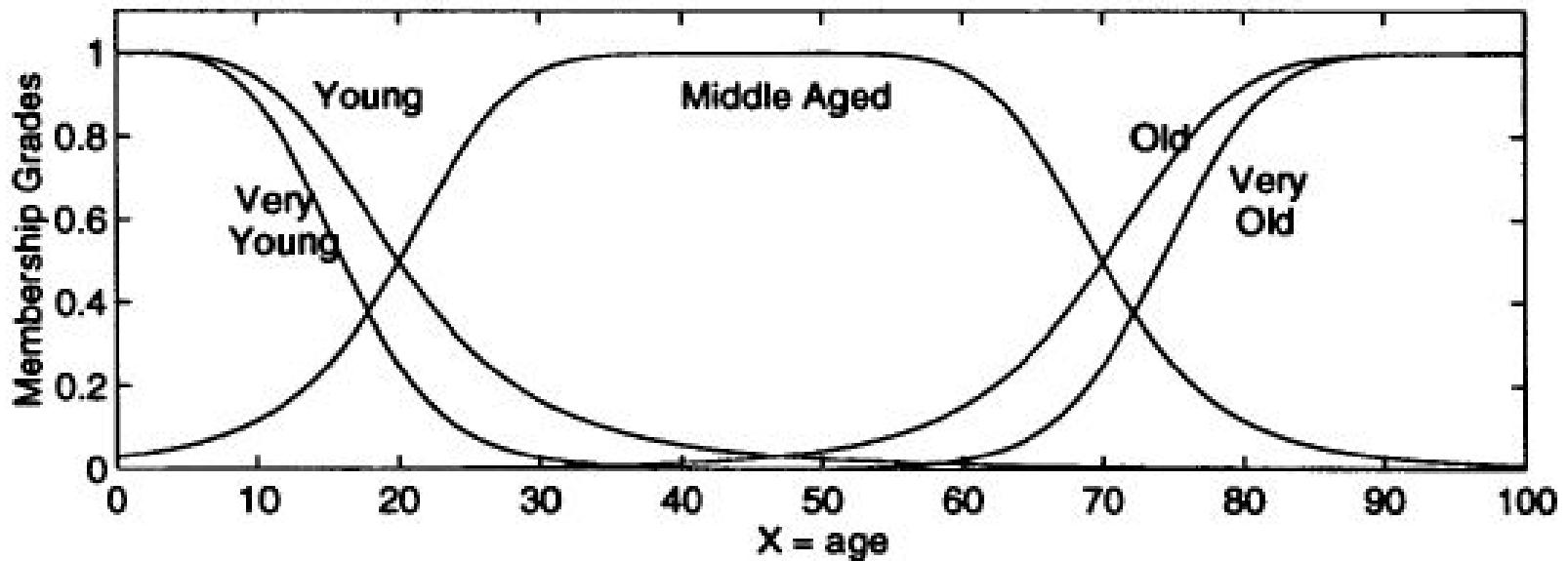
Variável Linguística

- Uma variável linguística é definida por:
 - x : nome da variável
 - $T(x)$: conjunto de termos
 - valores linguísticos ou termos linguísticos
 - X : universo de discurso
 - G : regra sintática
 - responsável por gerar os termos de $T(x)$
 - M : regra semântica
 - responsável por associar cada valor linguístico A com um significado $M(A)$
 - significado = conjunto nebuloso

Variável Linguística

- Exemplo:
 - $X \in [0,100]$
 - $x = \text{idade}$
 - $T(x) = \{\text{novo}, \text{muito novo}, \text{não tão novo}, \text{meia idade}, \text{não meia idade}, \text{velho}, \text{muito velho}, \text{não tão velho}, \text{mais ou menos velho}, \text{extremamente velho}\}$
 - M = define $\mu(x)$ para cada valor linguístico
 - Termos primários: novo, meia-idade, velho
 - Negações : não
 - Modificadores: muito, mais ou menos, extremamente, etc.

Variável Linguística



Funções de Pertinência para os valores linguísticos.

Concentração e Dilatação de Valores Linguísticos

- Seja A um valor linguístico caracterizado por um conjunto nebuloso
- A^k é uma versão modificada de A

$$A^k = \int_X [\mu_A(x)]^k / x$$

Concentração e Dilatação de Valores Linguísticos

- Concentração: Ex: “muito A”

$$CON(A) = A^2$$

- Dilatação: Ex: “mais ou menos A”

$$DIL(A) = A^{0.5}$$

- Concentração : muito
- Dilatação : mais ou menos

Negação, Conjunção, Disjunção de Valores Linguísticos

- A negação e os conectivos E e OU podem ser interpretados como:

$$NOT(A) = \neg A = \int_X [1 - \mu_A(x)]/x$$

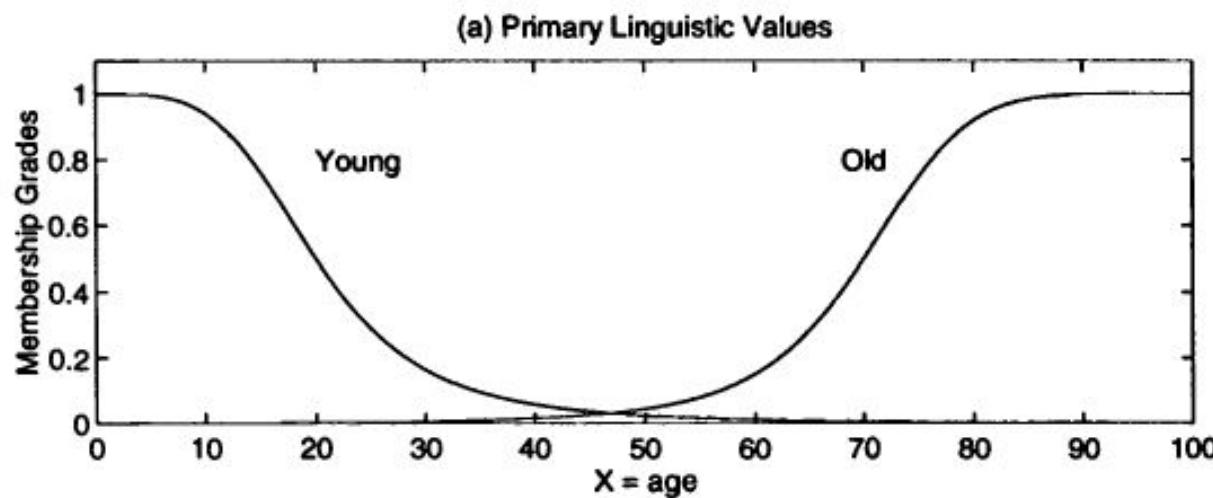
$$A \text{ } E \text{ } B = A \cap B = \int_X [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)]/x$$

$$A \text{ } OU \text{ } B = A \cup B = \int_X [\mu_A(x) \vee \mu_B(x)]/x$$

Manipulação de Variáveis Linguísticas

$$\mu_{novo}(x) = bell(x, 20, 2, 0)$$

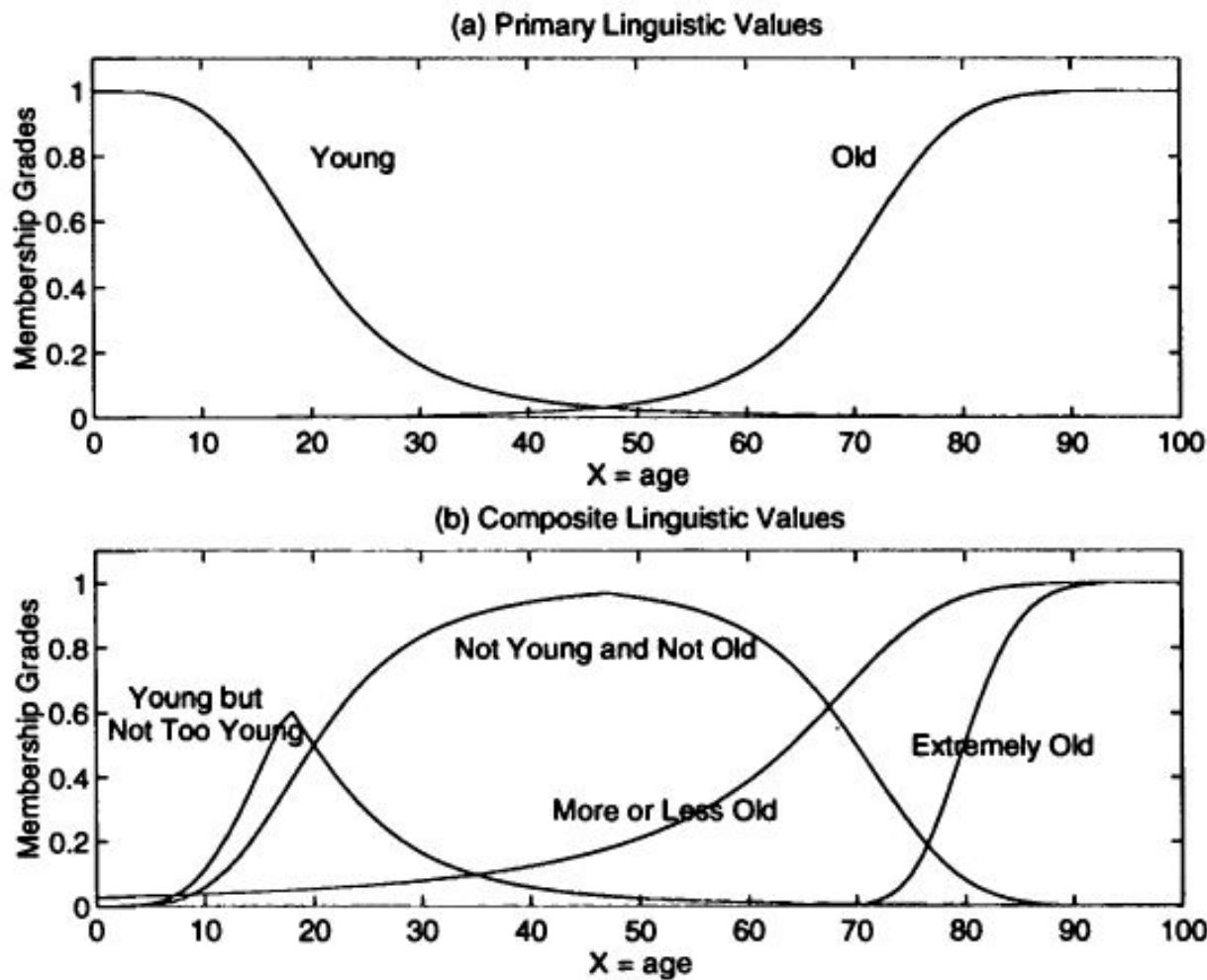
$$\mu_{velho}(x) = bell(x, 30, 3, 100)$$



Manipulação de Variáveis Linguísticas

- Mais ou menos velho = DIL(velho)
- Não novo e não velho = $\neg \text{novo} \cap \neg \text{velho}$
- Novo **mas** não muito novo = novo $\cap \neg \text{CON(novo)}$
- Extremamente velho = CON(CON(CON(velho)))

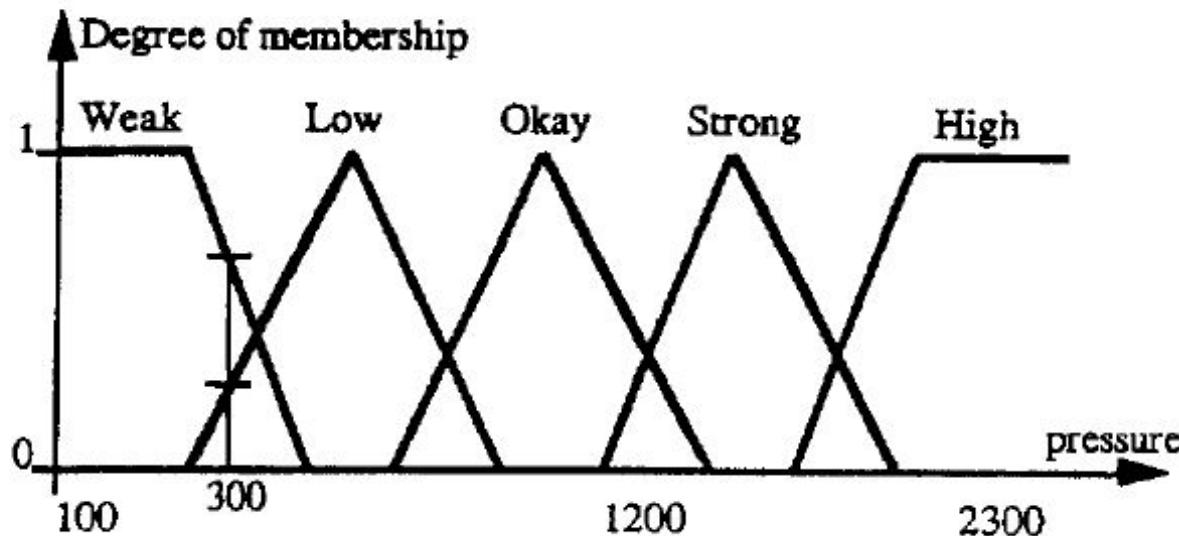
Manipulação de Variáveis Linguísticas



Proposição Nebulosa

- **Proposição Nebulosa:** atribuição de um valor lingüístico a uma variável lingüística.
 - Exemplo:

A pressão é alta



Regra Nebulosa

- Regra SE-ENTÃO nebulosa:

$$\text{SE } x \text{ é A ENTÃO } y \text{ é B} \quad A \rightarrow B$$

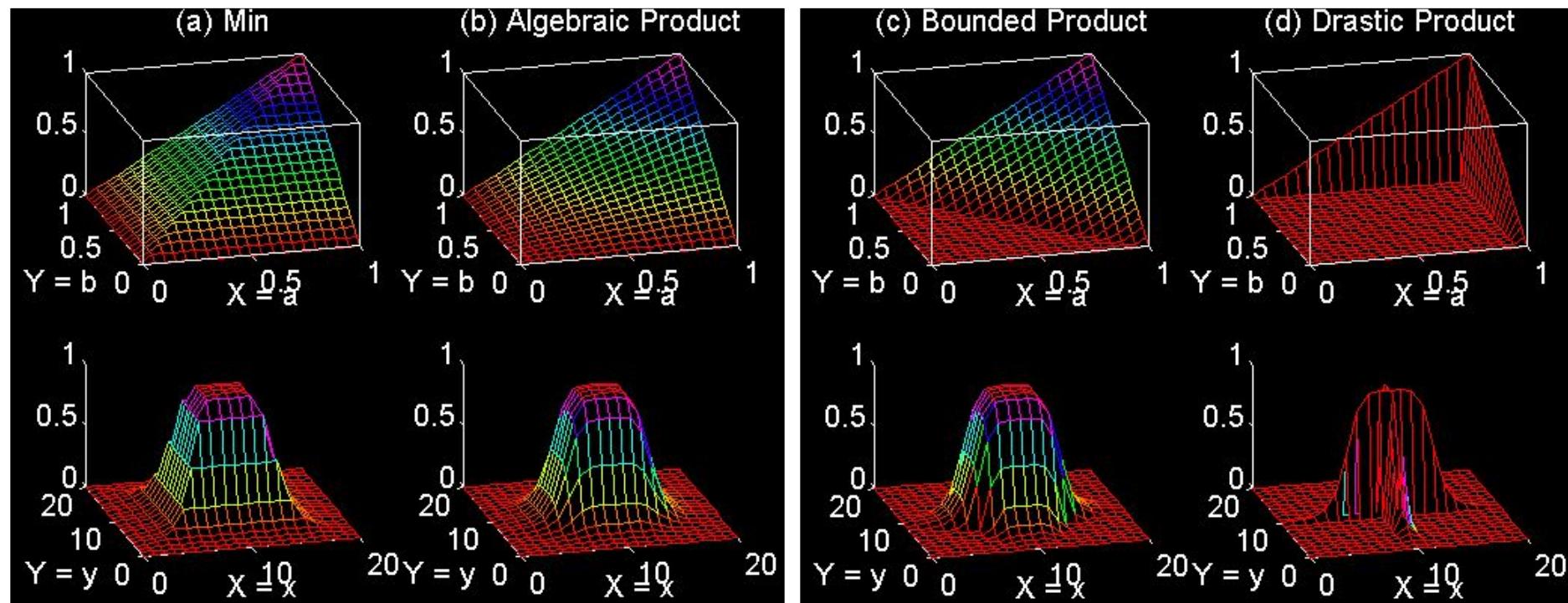
- A e B são valores linguísticos definidos por $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ em X e Y
- “x é A” = antecedente da regra
- “y é B” = consequente da regra
- $A \rightarrow B$ é uma relação fuzzy binária (R) definida no espaço $X \times Y$:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = f(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

$f(\cdot)$ = transforma $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ em $\mu_R(x, y)$

Regra Nebulosa

$$R = A \rightarrow B = A \times B = \int \mu_A(x) \star \mu_B(x) |(x, y)$$



Operadores T-norma

Raciocínio Nebuloso

- Também conhecido como Raciocínio aproximado;

*Processo de **inferência** que produz conclusões a partir de um **conjunto de regras SE-ENTÃO e fatos.***

Raciocínio Nebuloso

- **Modus Ponens Generalizado**

premise 1 (fact):

x is A' ,

premise 2 (rule):

if x is A then y is B,

consequence (conclusion): y is B' ,

- Onde A' é proximo de A e B' é próximo de B
 - A' , A, B' e B são conjuntos nebulosos
- Também conhecido como
 - Raciocínio Aproximado ou Raciocínio Nebuloso

Raciocínio Nebuloso

- **Modus Ponens Generalizado**

$$\frac{\begin{array}{l} \text{premise 1 (fact): } x \text{ is } A', \\ \text{premise 2 (rule): } \text{if } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B, \end{array}}{\text{consequence (conclusion): } y \text{ is } B',}$$

- regra composicional de inferencia:

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B).$$

- Composição max-min de relações nebulosas:

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)] \\ &= \vee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y)],\end{aligned}$$

Raciocínio Nebuloso

- **Caso 1:** uma regra e um antecedente (entrada)

Regra: SE x é A ENTÃO y é B

Fato: x é A'

Conclusão: y é B'

Regra SE-ENTÃO : Relação nebulosa ($X \times Y$)

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)] \\ &= \vee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y)],\end{aligned}$$

Raciocínio Nebuloso

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= [\vee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \wedge \mu_B(y) \\ &= w \wedge \mu_B(y).\end{aligned}$$

w é chamado de grau de ativação da regra.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)] \\ &= \vee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y)],\end{aligned}$$

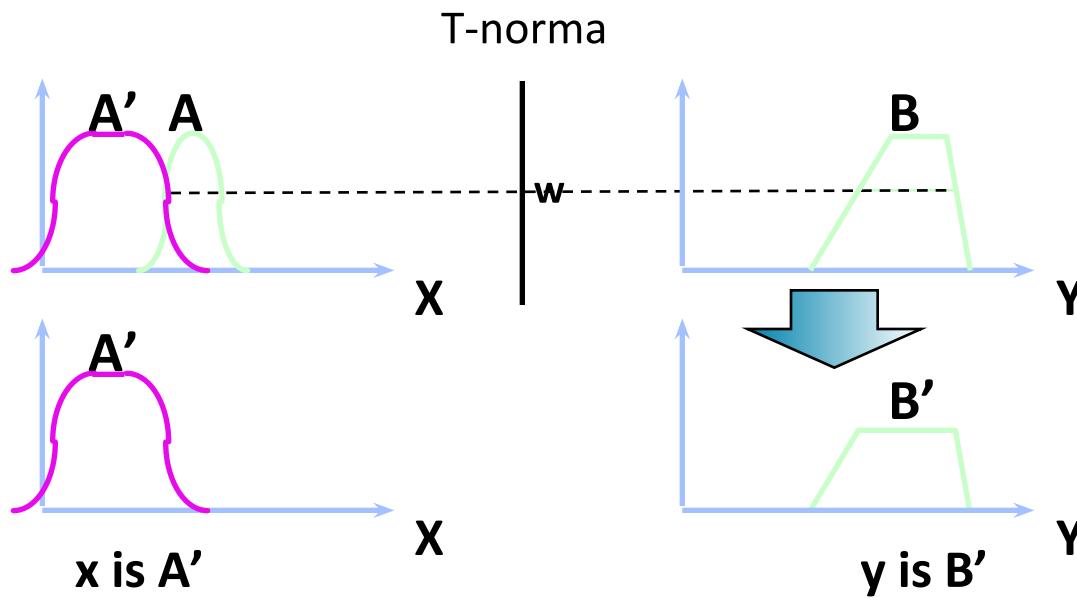
$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \vee_x [\mu_{A'}(y) \wedge \mu_R(x, y)] \\ &= \vee_x [\mu_{A'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \\ &= \vee_x [\mu_{A'}(y) \wedge \mu_A(x)] \wedge \mu_B(y)\end{aligned}$$

Raciocínio Nebuloso

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= [\vee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \wedge \mu_B(y) \\ &= w \wedge \mu_B(y).\end{aligned}$$

w é chamado de grau de ativação da regra.

Representação Gráfica:



Raciocínio Nebuloso

- **Caso 2:** uma regra, múltiplos antecedentes

Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

Interpretação da regra

$$A \times B \rightarrow C$$

$$R_m(A, B, C) = (A \times B) \times C = \int_{X \times Y \times Z} \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z) / (x, y, z).$$

Raciocínio Nebuloso

- **Caso 2:** uma regra, múltiplos antecedentes

Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

Resultado

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \rightarrow C)$$

Raciocínio Nebuloso

- **Caso 2:** uma regra, múltiplos antecedentes

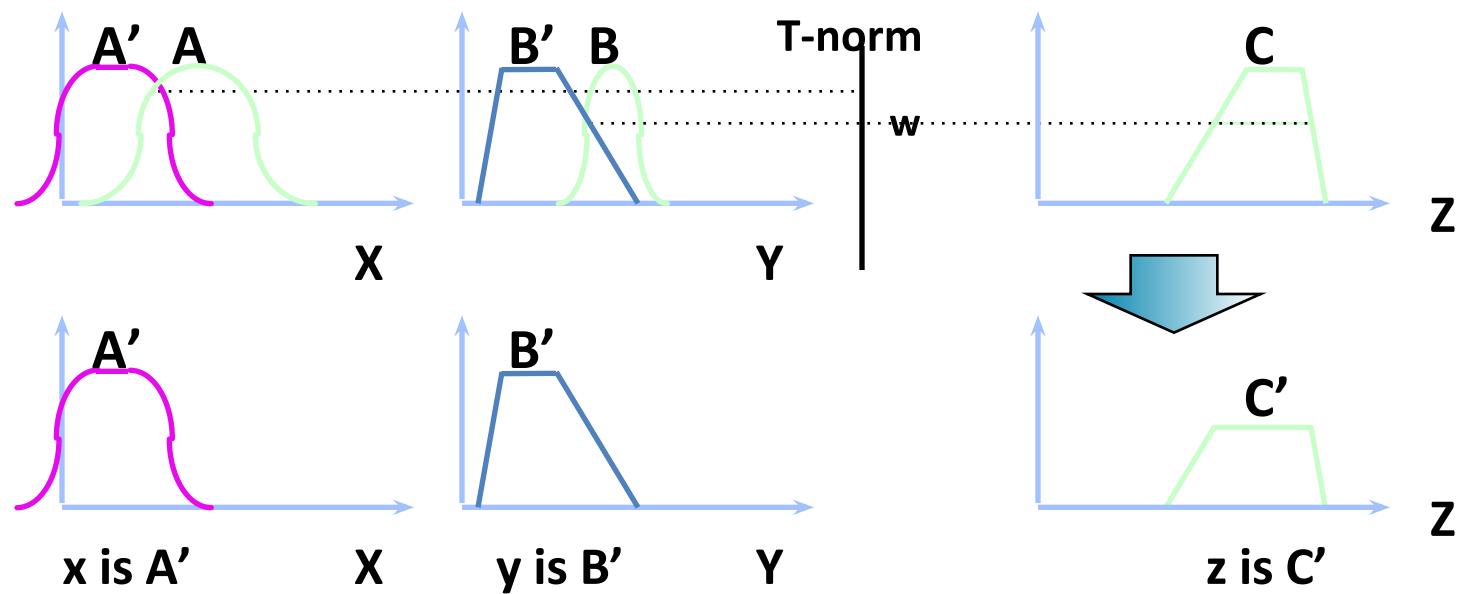
Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(z) &= \vee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \\ &= \vee_{x,y} \{ [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \} \wedge \mu_C(z) \\ &= \underbrace{\{\vee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)]\}}_{w_1} \wedge \underbrace{\{\vee_y [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)]\}}_{w_2} \wedge \mu_C(z) \\ &= \underbrace{(w_1 \wedge w_2)}_{\text{firing strength}} \wedge \mu_C(z),\end{aligned}$$

Raciocínio Nebuloso



Raciocínio Nebuloso

- **Caso 3:** Múltiplas regras com múltiplos antecedentes:

Regra 1: Se x é A_1 e y é B_1 Então z é C_1

Regra 2: Se x é A_2 e y é B_2 Então z é C_2

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

Raciocínio Nebuloso

- **Caso 3:** múltiplas regras com múltiplos antecedentes:

Regra 1: Se x é A_1 e y é B_1 Então z é C_1

Regra 2: Se x é A_2 e y é B_2 Então z é C_2

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

$$\begin{aligned} C' &= (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2) \\ &= [(A' \times B') \circ R_1] \cup [(A' \times B') \circ R_2] \\ &= C'_1 \cup C'_2, \end{aligned}$$

Raciocínio Nebuloso

- **Caso 3:** múltiplas regras com múltiplos antecedentes:

Regra 1: Se x é A_1 e y é B_1 Então z é C_1

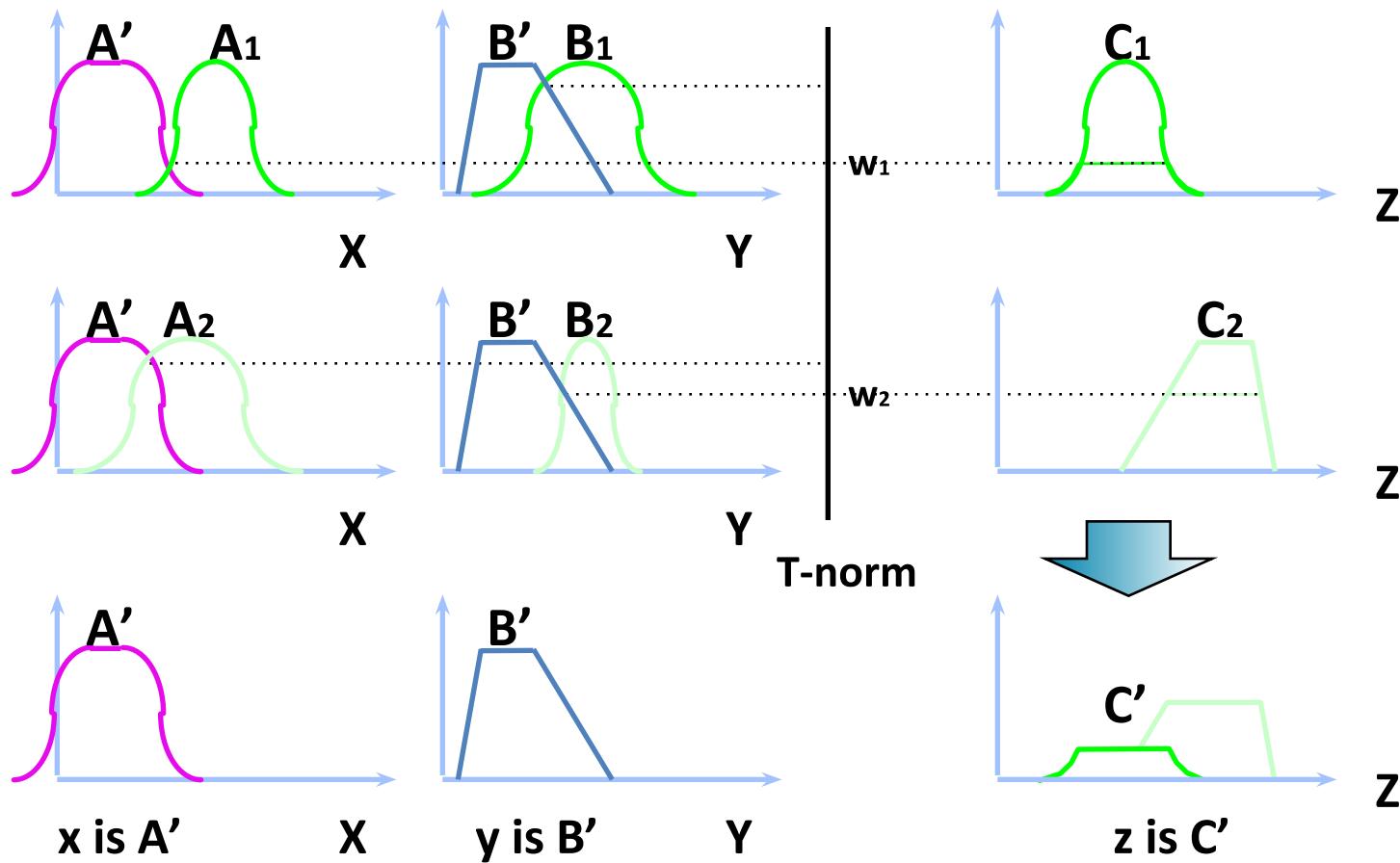
Regra 2: Se x é A_2 e y é B_2 Então z é C_2

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

$$\begin{aligned} \mu_{C'}(z) = & \left\{ [\vee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_1}(x))] \wedge [\vee_y (\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_1}(y))] \wedge \mu_{C_1}(z) \right\} \vee \\ & \frac{\text{_____ } w_{A1} \text{ _____}}{w_1} \frac{\text{_____ } w_{B1} \text{ _____}}{w_2} \\ & \left\{ [\vee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_2}(x))] \wedge [\vee_y (\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_2}(y))] \wedge \mu_{C_2}(z) \right\}. \end{aligned}$$

Raciocínio Nebuloso



Raciocínio Nebuloso - Sumário

- **Passo1:** compare os fatos com os antecedentes das regras para determinar os **graus de compatibilidade** com relação a cada antecedente: (deve ser feito para cada regra j)

$$w_{Aj} = V_x(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{Aj}(x)) \quad w_{Bj} = V_y(\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{Bj}(y))$$

- **Passo2:** combine os graus de compatibilidade com relação a cada antecedente usando os operadores *T-Norma* ou *S-Norma* para formar o **grau de ativação** que indica o quanto a parte do antecedente da regra (w_j) é satisfeita: (deve ser feito para cada regra j)

$$w_j = w_{A'} \wedge w_{B'} \text{ (grau de ativação)}$$

Raciocínio Nebuloso - Sumário

- **Passo 3:** aplique o grau de ativação (w_j) ao consequente de uma regra para gerar uma **função de pertinência induzida** ou qualificada: (deve ser feito para cada regra j)

$$w_j \wedge \mu_{Cj}(z) = \mu_{C'_j}(z)$$

- **Passo 4:** caso exista mais de uma regra (ex: regras j e k), agregue todos os componentes qualificados para obter uma **saída geral** (função de pertinência geral);

$$\mu_{C'_j}(z) \vee \mu_{C'_k}(z) = \mu_C(z)$$

Exercício 1

- Considere o sistema nebuloso composto pelas seguintes regras:

Se x é A_1 então y é C_1

Se x é A_2 então y é C_2

onde:

$$A_1 = \text{trapmf}(x, [3,4,5,6]); \quad A_2 = \text{trapmf}(x, [6,6.5,7,7.5]);$$

$$C_1 = \text{trimf}(y, [3,4,5]); \quad C_2 = \text{trimf}(y, [4,5,6]);$$

Dado o fato x é A' , onde A' é dada por:

$$A' = \text{trimf}(x, [5,6,7]);$$

Obtenha a conclusão C' e esboce graficamente o processo de raciocínio nebuloso no MatLab.
Utilize os operadores produto como T-norma e máximo como S-norma.

Exercício 2

- Considere o sistema nebuloso, com variáveis discretas, composto pelas seguintes regras:

Se x é A_1 então y é B_1

Se x é A_2 então y é B_2

onde:

$$A_1 = 0.2/x1 + 0.4/x2 + 0.5/x3; \quad A_2 = 1/x1 + 1/x2 + 0.3/x3;$$

$$B_1 = 0.1/y1 + 0.3/y2; \quad B_2 = 0.6/y1 + 0.2/y2;$$

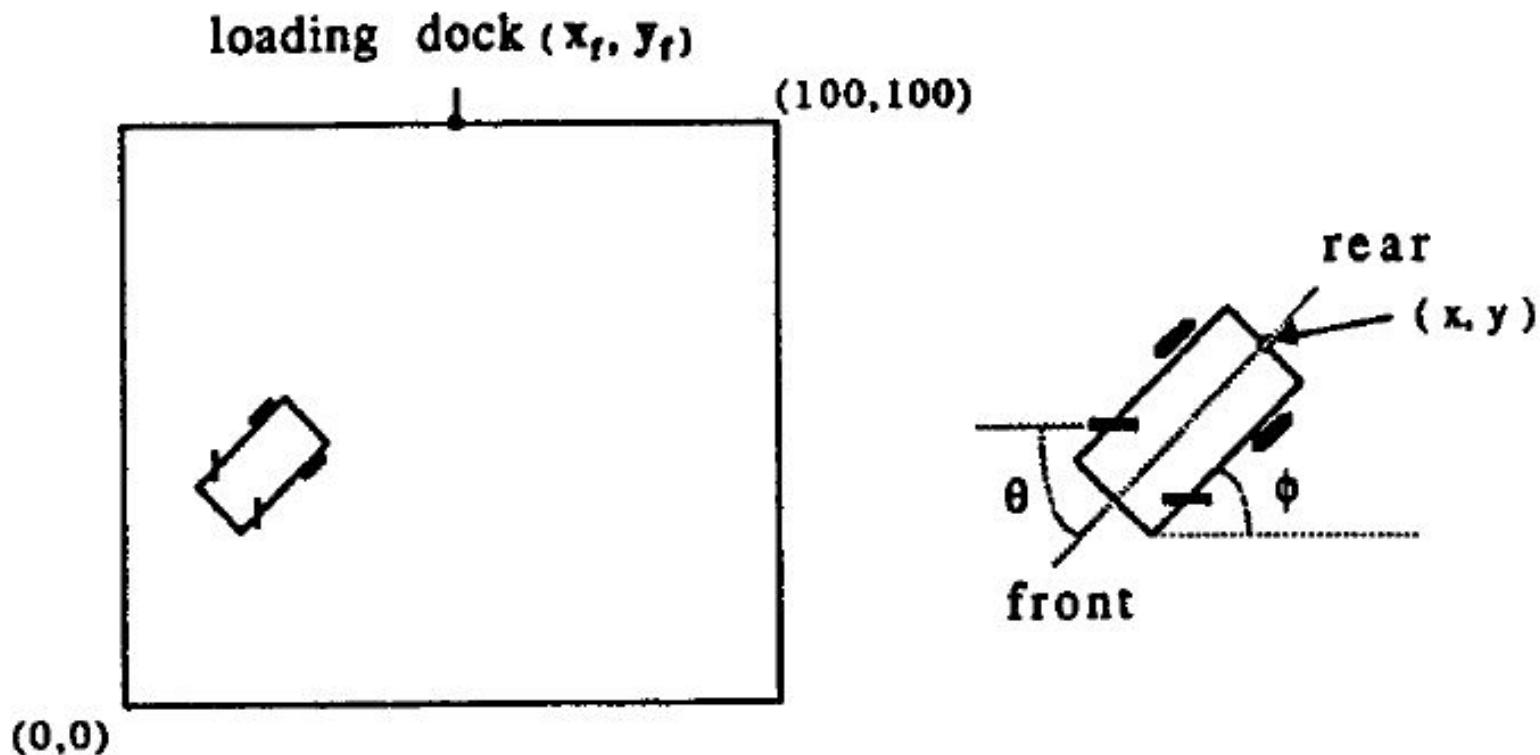
Dado o fato x é A' , onde A' é dada por:

$$A' = 0/x1 + 1/x2 + 0/x3;$$

Obtenha analiticamente conclusão B' através do processo de raciocínio nebuloso. Utilize os operadores produto como T-norma e máximo como S-norma.

Exemplo de Aplicação

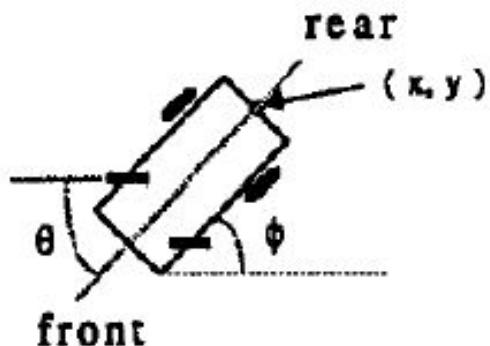
- Controle:



Exemplo de Aplicação

- Variáveis do Problema:
- ϕ = angulo do carro em relação ao eixo horizontal: $[0, 360]$
- x = posição do carro em relação ao eixo horizontal: $[0, 100]$
- θ = sinal angular de direção para correção do carro: $[-30, 30]$

Exemplo de Aplicação



$$\begin{aligned}\phi &: [0, 360] \\ x &: [0, 100] \\ \theta &: [-30, 30]\end{aligned}$$

Angle ϕ

RB: Right Below
RU: Right Upper
RV: Right Vertical
VE: Vertical
LV: Left Vertical
LU: Left Upper
LB: Left Below

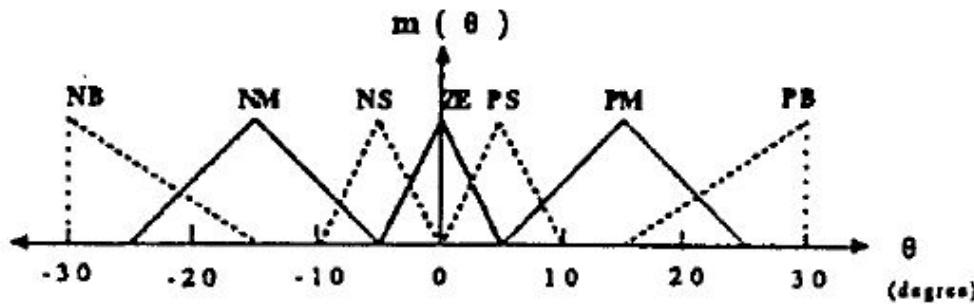
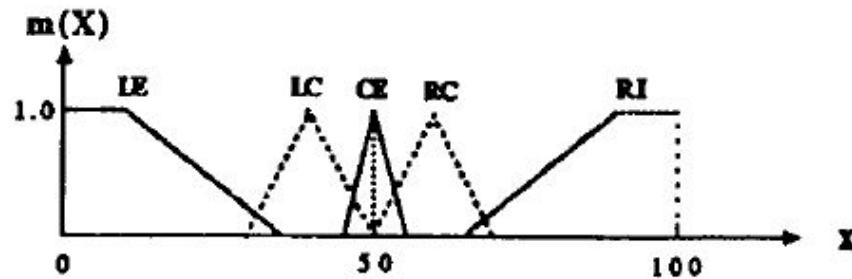
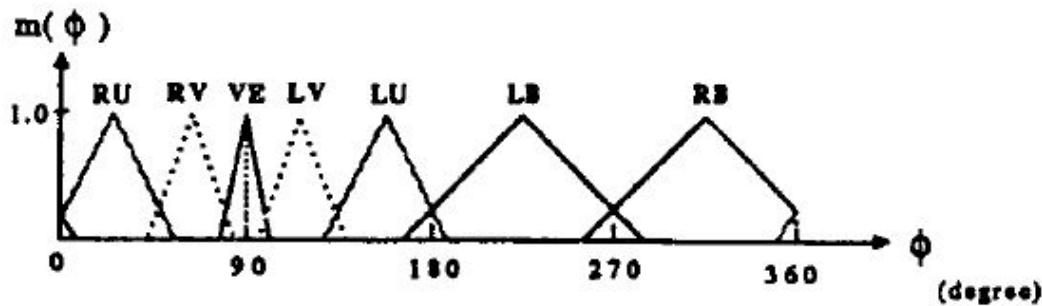
x-position x

LE: Left
LC: Left Center
CE: Center
RC: Right Center
RI: Right

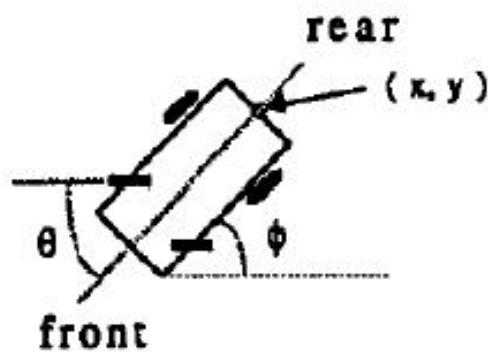
Steering signal θ

NB: Negative Big
NM: Negative Medium
NS: Negative Small
ZE: Zero
PS: Positive Small
PM: Positive Medium
PB: Positive Big

Exemplo de Aplicação



Exemplo de Aplicação



		x-position (X)				
		LE	LC	CE	EC	RE
angle (ϕ)	RB	0 PB	1 PB	2 PM	3 NB	4 NB
	RU	5 ZE	6 PS	7 PM	8 PB	9 PB
	RV	10 NB	11 NM	12 PS	13 PM	14 PB
	VE	15 NB	16 NM	17 ZE	18 PM	19 PB
	LV	20 NB	21 NM	22 NS	23 PM	24 PB
	LU	25 NB	26 NB	27 NM	28 NS	29 ZE
	LB	30 PB	31 PB	32 NM	33 NB	34 NB

*IF x-position x is Left AND angle ϕ is Right Below,
THEN steering signal θ is Positive Big.*

Leitura Recomendada

- Capítulo 3 do Livro - Seções 3.3 e 3.4.
 - Jyh-Shing Roger Jang and Chuen-Tsai Sun. 1996. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

