Examen avec documents

Sujet d'Examen

Janvier 2020

Respecter les consignes de concision et rester précis !

Durée 1h30

1 Oubli du background (7 pts | 1,5 page max)

Soit $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang m et $y \in \mathbb{R}^m$. On note $(B_\sigma)_{\sigma>0}$ une famille de matrices symétriques définies positives.

Soit $\|.\|$ une norme de matrice induite par une norme vectorielle notée aussi $\|.\|$. On rappelle que cela implique que pour tout produit cohérent de matrices, on a $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, et que pour tout vecteur x, $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$,

On pose $x(\sigma) = \left(B_\sigma^{-1} + H^T H\right)^{-1} H^T y$ et $x^\star = \left(H^T H\right)^{-1} H^T y$. On dit que la famille (B_σ) est *oublieuse du background* (OB) si

$$\lim_{\sigma\to+\infty} x(\sigma) = x^\star$$

1. Replacer ce problème dans le cadre statistique vu en cours et donner une interprétation de la propriété (OB).
2. On se place dans le cas $m = n = 2$.
   (a) Montrer que la famille définie par $B_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est (OB).
   (b) Soient $b_1 \geq 0$ et $b_2 \geq 0$ et $B_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. A quelles condions sur b_1 et b_2 cette famille est-elle (OB) ?
3. Intermède matriciel. On admet que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice inversible, et la matrice X vérifie $\|A^{-1}\|\|X\| < 1/2$, alors

$$\| (A+X)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\|X\|}{1 - \|A^{-1}\|\|X\|} \tag{1}$$

   (a) Vérifier dans le cas scalaire ($n = 1$) le bien fondé de la relation (1).
   (b) On suppose que la famille$(B_\sigma)_{\sigma>0}$ vérifie $\lim_{\sigma\to+\infty} \|B_\sigma^{-1}\| = 0$. Montrer qu'alors la famille est (OB).
   (c) Utiliser les résultats de (3b) pour vérifier votre réponse à (2a) et (2b).

2 Problème du naufragé (7 pts | 1,5 page max)

Perdu en mer. On reprend le même exemple que celui du naufragé vu en cours, avec un background Gaussien, donné par l'estimation a priori $x_b = (u_b, v_b)$, et la matrice de variance-covariance d'erreur $B = \sigma_b^2 I_2$, I_2 étant la matrice identité d'ordre 2. On suppose données deux variables aléatoires Gaussiennes ϵ_1 et ϵ_2, de moyenne nulle, d'écart type σ_o, indépendantes entre elles, et indépendantes de l'erreur de background. On pose $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$.

1. On suppose que l'on observe *directement* les positions u et v et que les erreurs de mesures associées sont respectivement ϵ_1 et ϵ_2. On obtient ainsi 2 mesures de u et v notées $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$.

(a) Montrer que les hypothèses ci-dessous mènent à l'équation d'observation

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \epsilon$$

où le vecteur aléatoire $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$ suit une distribution Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma_o^2 I_2$.

(b) Identifier par rapport au cours, la matrice d'observation H et le vecteur des observations y. Donner alors une estimation de (u, v) en prenant en compte l'a priori et l'équation d'observation.

2. Soit $\delta > 0$. On suppose que, comme précédemment, l'on observe directement les positions u et v mais que les erreurs de mesures associées sont respectivement $\eta_1 = \epsilon_1$ et $\eta_2 = \epsilon_1 + \delta \cdot \epsilon_2$.

(a) Montrer que l'équation d'observation prend alors la forme

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \Gamma \cdot \epsilon,$$

où Γ est une matrice triangulaire que vous préciserez.

(b) Identifier par rapport au cours, la matrice d'observation H et le vecteur des observations y, et **la matrice** R. On pourra à cet effet vérifier que $E[\eta_1\eta_1] = \sigma_o^2$, $E[\eta_1\eta_2] = \sigma_o^2$ et $E[\eta_2\eta_2] = \sigma_o^2(1 + \delta^2)$.

(c) Donner alors une estimation de (u, v) en prenant en compte l'a priori et l'équation d'observation en fonction de δ.

(d) Etudier la limite de l'estimation obtenue à la question (2c) lorsque δ tend vers 0, puis vers $+\infty$. Donner une interprétation statistique de ces résultats.

3 Restitution de cours. SMW (6 pts | 1 page max)

$H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $y \in \mathbb{R}^m$. Soit $x_1 = (I_n + H^T H)^{-1} H^T y$ et $x_2 = H^T (I_m + H H^T)^{-1} y$.

1. Démontrer en vous appuyant sur le cours que $x_1 = x_2$. Par rapport à m et n, dans quel cas utilise-t-on l'une ou l'autre des deux formules ?
2. Trouver, par analogie avec le 4D-Var vu en cours, un problème d'optimisation dont x_1 est solution et qui est basé sur un maximum de vraisemblance Gaussien.
3. Expliquer le principe de la méthode du gradient conjugué pour calculer x_1 (espace de Krylov, fonction cout) et son interprétation statistique en terme de vraisemblance.
4. Dans le cadre du calcul de x_2, décrire mathématiquement un algorithme itératif qui possède aussi de bonnes propriétés de monotonie de la vraisemblance.