TD 1 – Contraintes : égalités, inégalités

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\left((x_1-1)^2 + x_2^2\right) \\ x \in \mathbf{R}^2 \\ -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{cases}$$

paramétré par β dans $\mathbf{R}$.

1.1. Représenter graphiquement la contrainte et les équipotentielles associées au critère.

1.2. Déterminer les valeurs du paramètre pour lesquelles $x = (0,0)$ est un minimum local.

▷ **Exercice 2.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x \in \mathbf{R}^3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

2.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

2.2. Caractériser la solution.

2.3. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $Az = b$ si et seulement si (x_1, x_2, x_3) est solution d'un problème d'optimisation quadratique à contraintes linéaires à préciser.

▷ **Exercice 3.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \in \mathbf{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

avec a fixé dans $\mathbf{R}^n$.

3.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

3.2. Caractériser la solution.

▷ **Exercice 4.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbf{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

4.1. Le point $x = (1,1,-1)$ est-il solution locale ? Globale ?

4.2. Donner l'ensemble des solutions locales, puis l'ensemble des solutions globales.

▷ **Exercice 5.** Déterminer parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface fixée celui de volume maximal.

▷ **Exercice 6.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \in \mathbf{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec $a = (1, \ldots, 1)$.

6.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

6.2. Caractériser la solution.

▷ **Exercice 7.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i/(1 + x_i) \\ x \in \mathbf{R}^n \\ (b|x) = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où a et b sont des vecteurs fixés de $(\mathbf{R}_+^*)^n$.

7.1. Montrer qu'on a existence et unicité et que la solution est caractérisée par la CN1.

Complexe → **7.2.** Quel est le nombre maximal de contraintes actives à la solution ? En déduire une caractérisation de la solution.

7.3. On prend $a = b = (1, \ldots, 1)$. Déterminer l'ensemble des contraintes actives et calculer la solution.

Opti
TD1.1

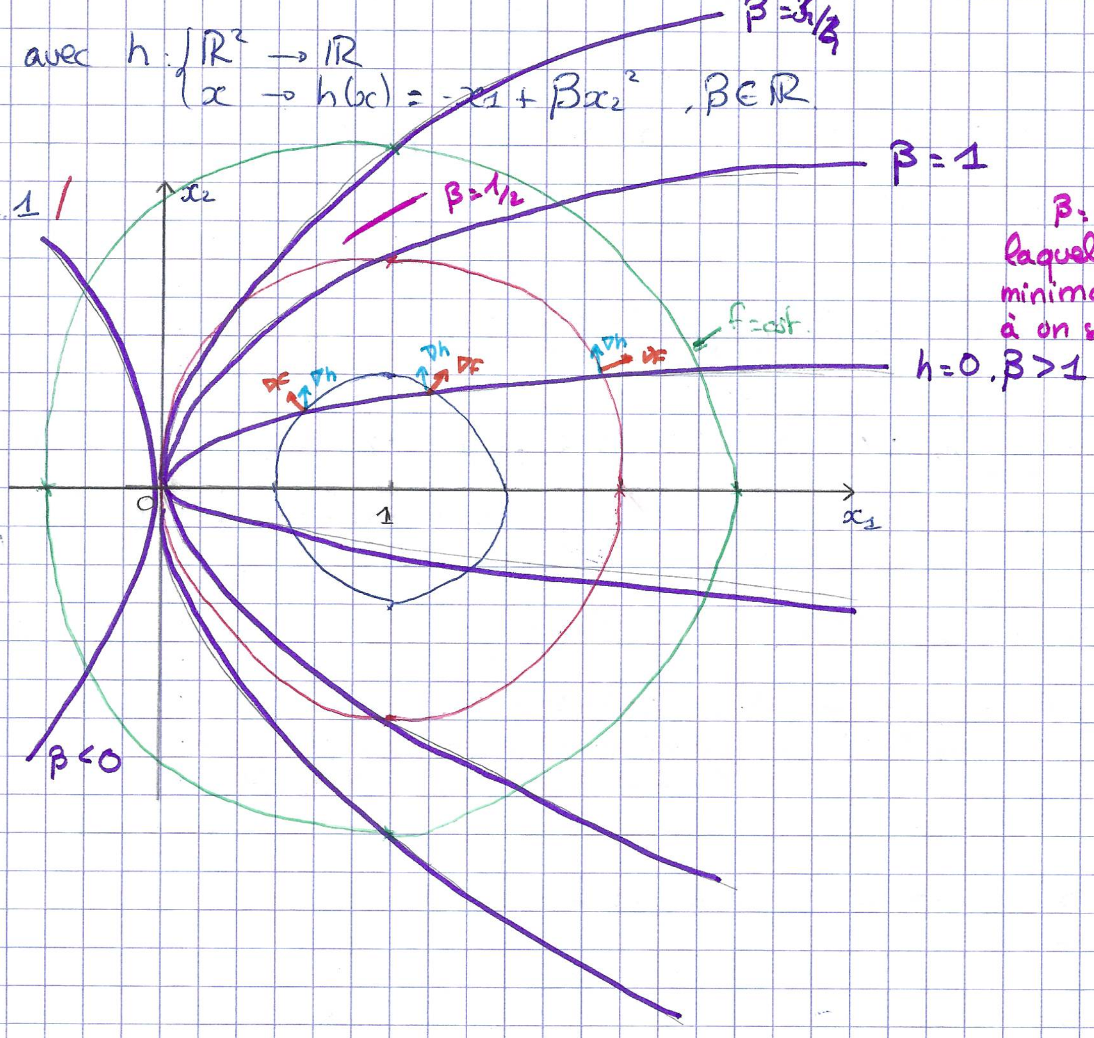
Contraintes : egalités, inégalités.

Exercice 1 :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\left((x_1 - 1)^2 + x_2^2\right) \\ x \in \mathcal{C} = h^{-1}(\{0\}) \end{cases}$$

avec $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ x \to h(x) = -x_1 + \beta x_2^2 \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$

1.1 /



β = 1/2 condition pour laquelle on passe de deux minima et un maximum à un seul minimum.

1.2 / Determiner les extrema locaux et globaux en fonction de β.

existence : f : - $\mathcal{C}^0$
- coercive sur $\mathcal{C}$ fermé (car h $\mathcal{C}^0$) non vide ($0_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{C}$)

→ Donc (P) admet une solution.

On pose $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, \lambda) \mapsto L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$

- f, h $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
- $\nabla h(x) = (-1, 2\beta x_2) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$ donc

$\boxed{HQC(x)}$ vérifié $\forall x \in \mathbb{R}^2$

↳ Hypothèse de qualification des contraintes

CNI : Si x^* min alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 = \left(x_1^* - (1 + \lambda^*), x_2^*(1 + 2\lambda^*\beta)\right) \quad \text{Or } \nabla L(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0 = h(x^*) = -x_1^* + \beta x_2^{*2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, \lambda) = (0, 0, -1) \overset{\text{def}}{=} (x_0, \lambda_0)$.

ou

$\beta \geq \frac{1}{2}$ et $(x, \lambda) = \left(\frac{2\beta - 1}{2\beta}, \pm\sqrt{\frac{2\beta-1}{2\beta^2}}, -\frac{1}{2\beta} \right)$

$\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} (x_-, \lambda_-) \\ (x_+, \lambda_+) \end{cases}$.

Rq : pour $\beta = \frac{1}{2}$, $(x_0, \lambda_0) = (x_-, \lambda_-) = (x_+, \lambda_+)$.

Donc pour $\beta > \frac{1}{2}$, on a 3 points critiques et pour $\beta \leq \frac{1}{2}$ on a 1 point critique.

Vérifions l'optimalité des points critiques

Cas $\beta \leq 1/2$: on a 1 unique point critique $x_0 = (0,0)$

comme le système admet une unique solution, x_0 est le minimum (global).

HQC vérifiée : $T_L(\mathcal{C}, x) = T(\mathcal{C}, x)$

CS : ↳ Contraintes linéaires
→ $\nabla h_i(x)$ (gradient linéairement indépendant)
↳ si 1 seul : ne pas être nul.

Cas $\beta > \frac{1}{2}$: On a 3 points critiques.

* $f(x_0) = \frac{1}{2}$

* $f(x_-) = f(x_+) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\beta - 1}{2\beta} - 1 \right)^2 + \left(\pm\sqrt{\frac{2\beta - 1}{2\beta^2}} \right)^2 \right) = \frac{4\beta - 1}{8\beta^2}$

or $\frac{4\beta - 1}{8\beta^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\beta - 1 < 4\beta^2$

$\Leftrightarrow 0 < 4\beta^2 - 4\beta + 1$

$\Leftrightarrow 0 < (2\beta - 1)^2$

$\Rightarrow x_-$ et x_+ sont les 2 minima globaux

Quid de x_0 ? (pour $\beta > 1/2$)

Opti
TD1.2

$T_L(\mathcal{C}, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla h(x_0) \mid d) = 0\}$
$= d_1$

$$\nabla_{xx} L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2\lambda\beta \end{pmatrix}$$

Soit $d \in T_L(\mathcal{C}, x_0)$, $\boxed{d \neq 0}$ $d = (0, d_2)$ $d_2 \neq 0$

CN2 / CS2 : En un point critique
h et f $\mathcal{C}^2$
HQC vérifiée.

$$(\nabla_{xx} L(x_0, \lambda_0) d \mid d) = d_2^2 (1 - 2\beta) < 0$$

$\underset{CS2}{\Rightarrow}$ x_0 est un max local. (si signe strict maxi/min local).

Exercice 2 :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2 \\ x \in \mathcal{C} = h_1^{-1}(\{0\}) \cap h_2^{-1}(\{0\}) \end{cases}$$

avec $h_1 \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ x \to h_1(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 \end{cases}$

$h_2 \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ x \to h_2(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 2 \end{cases}$

2.1/
- f $\mathcal{C}^0$ et coercive sur $\mathcal{C}$ fermé non vide ($(1, 0, -3) \in \mathcal{C}$) $\Rightarrow$ existence
- f strictement convexe ($f''(x) = 2I_3 > 0$) sur $\mathcal{C}$ convexe $\Rightarrow$ unicité

2.2/ On pose $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, \lambda) \to L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda \mid h(x))$

$h = (h_1, h_2)$

- f h $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$
- HQC(x) vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}^3$ car h linéaire
- Donc : x^* min de (P) $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^2$
  CN1 = CNS car (P) convexe
  tq $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$
  $D_\lambda L(x^*, \lambda^*) = h(x^*) = 0$

Or $\nabla L(x, \lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$Az = b \quad z = (x, \lambda)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}$, C^T, C, 0

$\Rightarrow z^* = A^{-1} b$ avec $z^* = (x^*, \lambda^*)$

2.3/ On note $A = \begin{pmatrix} \bar{A} & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} > 0 \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ d \end{pmatrix}$

car ses vp sont 3, $3 \pm \sqrt{3}$

car est à diagonale dominante

Posons : $(P) = \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} Q(x) = \frac{1}{2} x^T \bar{A} x - \bar{b}^T x \\ h(x) = Cx - d = 0 \end{cases}$

- On note $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
  $(x, \lambda) \longmapsto \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + (\lambda | h(x))$
  $= \frac{1}{2} x^T \bar{A} x - \bar{b}^T x + (\lambda | Cx - d)$

- $\nabla^2 f(x) = \dots > 0$ donc f (strictement) convexe sur l'ensemble des contraintes $h = 0$ convexe donc $\boxed{CN1 = CNS}$

- $\underline{CN1}$ = Si x^* est solution alors $\exists \lambda^*$ tq $\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A}x + C^T \lambda - \bar{b} = 0 \\ Cx - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Az = b.$

Exercice 3 :

$(P) : \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \|x - a\|^2, \quad a \in \mathbb{R}^n \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$

(si les contraintes sont perturbées par un ε, alors si $\varepsilon > 0$ on a tj des sol, mais si $\varepsilon < 0$, on se retrouve avec aucune solution)

3.1/ ⓐ existence : f $\mathcal{C}^0$ coercive sur l'espace des contraintes $\boxed{\mathcal{C} = \mathbb{R}e_n}$ fermé non vide donc (P) admet une solution.

ⓑ unicité : On a $f'(x).v = (x - a | v)$
$f''(x)(v, v) = (v | v) = \|v\|^2 > 0$ si $v \neq 0$

Rq $\nabla^2 f(x) = I_n > 0$

$\Rightarrow f$ strictement convexe sur $\mathcal{C}$ convexe donc (P) a au plus une solution.

Ophi
TD1.3

ⓐ + ⓑ $\Rightarrow$ (P) admet une unique solution.

3.2/ • f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}$
• f convexe sur $\mathcal{C}$ convexe donc CN1 = CNS
• $\boxed{\text{HQC vérifiée ?}}$ (on n'a pas de CS)
$\hookrightarrow T_L = T$?

HQC doit être vérifiée en la solution, mais on ne la connaît pas. Or la solution doit être dans $\mathcal{C}$ l'espace des contraintes.

a) $T_L(\mathcal{C}, x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla h(x)|d) = 0\}$ avec $h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$
$= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i d_i = 0\}$.

donc pour $x \in \mathcal{C}$, $T_L(\mathcal{C}, x) = \mathbb{R}^n$
(car $x_i = 0\ \forall i \in [\![1, n-1]\!]$)

b) Calculons $T(\mathcal{C}, x)$ pour $x \in \mathcal{C}$

$d \in T(\mathcal{C}, x) \Leftrightarrow \exists (x_k)$ dans $\mathcal{C}$, $x_k = x + \alpha_k d_k$ $\quad \alpha_k > 0$
$\alpha_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, $d_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} d$

or $x_k \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + \alpha_k d_{k,i})^2 = 0$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_k^2 d_{k,i}^2) = 0$ car $x_i = 0\ \forall i \in [\![1, n-1]\!]$
$\Leftrightarrow d_{k,i} = 0\ \forall i \in [\![1, n-1]\!]$ car $\alpha_k \neq 0$.

donc $T(\mathcal{C}, x) \subset \boxed{\mathbb{R}e_n}$ pour $x \in \mathcal{C}$
donc $T(\mathcal{C}, x) \neq T_L(\mathcal{C}, x)$
donc HQC(x) pour $x \in \mathcal{C}$ n'est pas vérifiée

Nouvelle formulation de (P) :

$$(P') \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ h(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \end{cases} \qquad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$

f, h $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}e_n$
HQC vérifiée car contraintes linéaires.
CN1 = CNS : pb convexe

On note $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.
$(x, \lambda) \mapsto L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda|h$
$= \frac{1}{2}\|x - a\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x$

$$\text{CN1} \begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + h'(x)^T \lambda = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_i - a_i + \lambda_i = 0 \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!] \\ x_n - a_n = 0 \\ x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

La solution est $x^* = (0, \dots, 0, a_n)$ avec $\lambda^* = (a_1, \dots, a_{n-1})$
comme multiplicateur de Lagrange associé

Exercice 4 :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 = h(x) \end{cases}$$

4.1) HQC vérifiée : car contraintes linéaires.

f, h $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}$

$\bar{x} = (1, 1, -1) \in \mathcal{C}$

On note $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, \lambda) \to \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + (\lambda | h(x))$

CN1 : si x^* sol alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ tq $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$
$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x_1 + 6x_2x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_2 + 6x_1x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_3 + 6x_1x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

On pose $\bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$ donc $\bar{x}$ vérifie la CN1

CN2 : ... $\mathcal{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})(d, d) \geq 0 \quad \forall d \in T_c(\mathcal{C}, \bar{x})$?

$(\nabla^2_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}) d | d) \geq 0 \quad \forall d \in T_c(\mathcal{C}, \bar{x})$?

$d = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}^*$

Exercice 6.

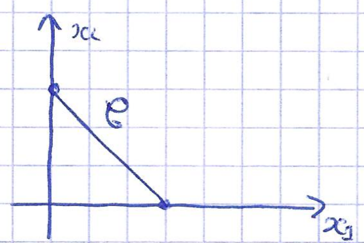
$$(P) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|x - a\|^2 \\ x \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\mathcal{C} = h^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}_-)$ avec

$h(x) = (a|x) - 1$ et $g(x) = -x$.

$a = (1 \dots 1)$.

6.1) $n = 2$



(a) existence :

* $\mathcal{C}$ fermé car $h, g \in \mathcal{C}^0$ et $\{0\}$, $\mathbb{R}_-$ fermés.
* $\mathcal{C}$ borné car $\forall i$, $0 \leq x_i \leq 1$.

$\Rightarrow$ f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{C}$ compact non vide donc (P) admet une solution. (ou coercive)

(b) unicité : * $\mathcal{C}$ convexe car h affine et g convexe
f strictement convexe car $f''(x) \not\Rightarrow \nabla^2 f(x) = I_n > 0$ sur $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ (P) admet au plus une solution

Opti
TD1.4

a + b $\Rightarrow$ (P) a une unique solution.

6.2 (P) est convexe donc "CN1 = CNS"

} Puisque (P) a une unique solution, alors la CN1 aussi

- f, g, h $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$
- HQC vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}^n$ car h et g affines.

HQC : f° affines ou gradient lin. indep

$\Rightarrow$ Si x^* est solution, alors $\exists (\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$, $p = 1$ $m = n$

multiplicateur pr les contraintes d'$\leq$

multiplicateur pour les contraintes d'$=$

$$\text{tq} \begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = (x-a) + \lambda a - \mu = 0 \\ h(x^*) = (a|x^*) - 1 = 0 \\ g(x^*) \leq 0 \\ \mu^* \geq 0 \\ (\mu^* | g(x^*)) = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Condition de complémentarité

$$\text{avec } \mathcal{L} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda, \mu) \longmapsto \frac{1}{2}\|x-a\|^2 + \lambda((a|x) - 1) - (\mu|x) \end{cases}$$

} $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + (\lambda | h(x)) - (\mu|x)$

Rappel dérivées :

$\frac{1}{2}\|x-a\|^2 \longrightarrow (x-a)$

$\lambda(a|x) \longrightarrow \lambda a$

$(\mu|x) \longrightarrow \mu$

(On omet $*$).

- Puisque $(a|x) = 1$ et $x \geq 0$, $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$ tq $x_{i_0} > 0$ $\overline{(g_{i_0}(x) < 0)}$

contrainte non saturante, elle ne sert à rien donc multiplicateur associé nul.

Donc $\mu_{i_0} = 0$ et on a $\lambda = 1 - x_{i_0}$.

- Supposons $\exists x_i = 0$

D'après $\nabla_x \mathcal{L} = 0$, on a $\underset{x_i}{0} - 1 + \lambda = \mu_i = -x_{i_0} < 0$ ce qui est impossible donc $x_i \neq 0$.

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$, $\mu_i = 0$ et donc $x_i = 1 - \lambda = x_{i_0}$

$\Rightarrow \forall i$, $x_i = \frac{1}{n}$ (car $(a|x) = 1 \Rightarrow n x_{i_0} = 1$).

$\Rightarrow (x^*, \lambda^*, \mu^*) = \left(\frac{a}{n}, 1 - \frac{1}{n}, 0_{\mathbb{R}^n}\right)$ est l'unique solution de la CN1 et comme (P) convexe, x^* est le min global.