Examen – Théorie des graphes

Session 1, jeudi 17 janvier 2019

Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite

Durée : 1h30

▷ **Exercice 1.** (5 points)Transport de produits chimiques
On désire transporter par train 6 produits chimiques. Les produits chimiques suivant ne peuvent être transportés dans un même wagon : P_1 et P_2, P_1 et P_4, P_2 et P_3, P_2 et P_5, P_3 et P_4, P_5 et P_6. On désire connaître le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport.

1.1. Modélisez le problème sous la forme d'un graphe.

1.2. À quelle quantité ce nombre de wagons correspond-elle ? et quelle est cette quantité ?

▷ **Exercice 2.** (5 points)
On s'intéresse aux graphes 3 réguliers.

2.1. Construire de tels graphes ayant 4 sommets, ayant 6 sommets.

2.2. Montrer qu'il n'existe pas de graphes 3-réguliers ayant un nombre impair de sommets.

▷ **Exercice 3.** (4 points)
Soit $G = (V, E)$ un arbre ayant au moins 2 sommets. Montrer que l'arbre admet au moins 2 feuilles , c'est-à-dire qu'il y a au moins deux sommets de degré 1.

▷ **Exercice 4.** (6 points)
On note $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graphe simple orienté, $G = (V, E)$ le graphe non orienté induit et J la matrice d'incidence sommet-arc du graphe orienté.

4.1. On suppose qu'il existe dans G un cycle élémentaire. Montrer que les vecteurs colonnes de J correspondant aux arcs de ce cycle sont linéairement dépendants.

4.2. On suppose que les vecteurs colonnes de J sont linéairement dépendants.

1. Montrer qu'il existe une sous matrice de A de J telle que dans le graphe orienté correspondant les degrés des sommets sont tous supérieurs ou égaux à 2.
2. En déduire que le graphe simple G contient un cycle.

4.3. Démontrer le

Théorème 0.1. *Soit $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graphe orienté. Le graphe non orienté induit $G = (V, E)$ est une forêt si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice d'incidence sommet-arc du graphe orienté sont linéairement indépendants.*