Traitement d'ambiguïtés entières dans le système GPS

Serge Gratton *

Mai 2019

1 Introduction

La mesure de phase GPS peut-être utilisée pour les problèmes de localisation précise de balises, de satellites... Or cette mesure de phase n'est connue qu'à un terme près. Ce terme est appelé *ambiguïté réelle*. Des expériences montrent que pour obtenir une bonne précision sur la localisation, le fait que certaines combinaisons linéaires connues des ambiguïtés réelles sont entières doit être exploité. On appelle ces combinaisons linéaires entières des *ambiguïtés entières*.

Deux grandes familles de méthodes permettent de faire apparaître ces ambiguïtés entières :

1. le traitement direct des mesures,
2. le traitement de combinaisons linéaires de mesures, appelées *mesures différenciées*.

Dans ces deux cas, l'algorithme de localisation est confronté à la résolution d'un *problème de moindres carrés mixtes* (en variables réelles et entières) :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p, I \in \mathbb{Z}^n} \|b - Ax - GI\|,$$

où le vecteur entier I est constitué des ambiguïtés entières.

La résolution du problème de moindres carrés linéaires mixtes est un problème difficile pour lequel il n'existe pas de formule, contrairement au problème de moindres carrés linéaires en variables réelles. Plusieurs algorithmes de résolution de ce problème existent mais dans ce projet, nous allons nous intéresser à l'un d'entre eux, qui n'est pas le plus performant, mais qui permet de comprendre les difficultés liées au problème de moindres carrés linéaires mixtes. L'objet de la section 2, est de montrer comment transformer le problème de moindres carrés mixtes en un problème quadratique en nombres entiers, pour lequel il existe des techniques de résolution. En section 3, un algorithme de résolution du problème sur les entiers est implanté. Il sera alors demandé de réaliser des cas tests de validation de l'algorithme de résolution du problème de moindres carrés mixte.

*INPT-ENSEEIHT-IRIT, France. Email : `serge.gratton@enseeiht.fr`

2 Passage du problème de moindres carrés mixtes au problème quadratique en nombres entiers

2.1 Définition :

On appelle problème de Moindres Carrés Linéaires Mixtes (MCLM) le problème de minimisation

$$\text{(MCLM)} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^p, I \in \mathbb{Z}^n} ||b - Ax - GI||.$$

La norme $\|.\|$ est la norme euclidienne définie par $\|e\| = \sqrt{e^T e}$ pour $e \in \mathbb{R}^m$. On suppose de plus $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Le modèle des mesures s'exprime par $Ax + GI$, où GI représente la contribution des ambiguïtés entières au modèle.
Le problème (MCLM) admet toujours au moins une solution. Soit $\widehat{x}$ et $\widehat{I}$ l'une d'entre elles.

2.2 Une caractérisation de la solution des (MCLM)

Dans la suite de ce projet, nous supposons que $p + n \leq m$ et de plus que la matrice $[A, G]$ est de rang $p + n$ qui est le rang maximum. Cette hypothèse garantit notamment que A est de rang p qui est maximum. Donc la matrice $A^T A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est elle même de rang p qui est maximum et est donc inversible. Enfin cette hypothèse garantit l'unicité des solutions $\overline{x}$ et $\overline{I}$ du problème de moindres carrés linéaires en variables réelles

$$\text{(MCL)} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^p, I \in \mathbb{R}^n} ||b - Ax - GI||.$$

Les quantités $\overline{x}$ et $\overline{I}$ sont appelées *solutions réelles* et sont en général différentes de $\widehat{x}$ et $\widehat{I}$.
Cependant, il est possible de montrer que $\widehat{x}$ et $\widehat{I}$ se déduisent de la manière suivante de $\overline{I}$, solution réelle de (MCL) :

i) $\widehat{I}$ est une solution du problème *quadratique en nombres entiers*

$$\text{(QNE)} \quad \min_{I \in \mathbb{Z}^n} (I - \overline{I})^T Q (I - \overline{I}).$$

où Q est la matrice symétrique définie positive définie par $Q = G^T G - G^T A (A^T A)^{-1} A^T G$,

ii) $\widehat{x}$ est obtenu en résolvant le système linéaire

$$A^T A \widehat{x} = A^T b - A^T G \widehat{I}.$$

Vérifiez que si $\widehat{I}$ est connu, la solution $\widehat{x}$ vérifie bien la relation ii) (indication : si $\widehat{I}$ est connu (MCLM) n'est rien d'autre qu'un problème de moindres carrés linéaires en la variable réelle x).

Donnez un algorithme permettant de résoudre (QNE) dans le cas où Q est une matrice diagonale.

3 Un algorithme de résolution de (QNE) par une recherche directe

Comme il n'existe pas en général de formule explicite pour la solution du problème (QNE), les algorithmes de résolution sont des algorithme de parcourt d'entiers pour trouver les valeurs de $\widehat{I}$ minimisant la fonction quadratique. Donc ces algorithmes vont s'attacher à estimer le plus finement possible a priori un sous ensemble borné C de $\mathbb{Z}^n$, à l'intérieur duquel la recherche à proprement parler est menée, et dans lequel se trouve bien sûr la solution $\widehat{I}$.

3.1 Statégie de détermination de l'espace de recherche

Dans cette section nous allons envisager plusieurs stratégies de détermination de l'espace de recherche C. Le but est d'obtenir un espace de recherche C qui contienne le moins possible d'entiers, et qui contienne la solution $\widehat{I}$, de manière a ce que le parcourt de C puisse être réalisé rapidement.
Dans la suite de ce projet, on désigne par *round* la fonction qui associe à un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $round(x)$ dont les n composantes sont les arrondis au plus proche des composantes de x. De plus on définit la fonction ϕ par $\phi(I) = (I - \overline{I})^T Q (I - \overline{I})$

Soit $\chi = \phi(round(\overline{I}))$ et

$$C(\chi) = \{I \in \mathbb{Z}^n \text{ et } \phi(I) \leq \chi\}.$$

Montrez que $\widehat{I}$ est solution du problème suivant :

$$(\text{QNE}(\chi)) \quad \min_{I \in C(\chi)} \phi(I).$$

Soit $J \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\chi_1 = \phi(J) \leq \phi(round(\overline{I}))$. Expliquez pourquoi il est plus intéressant de recherchez la solution de (QNE) sur $C(\chi_1)$ que sur $C(\chi)$.

L'algorithme que nous nous proposons de programmer est un algorithme de parcourt systématique de tous les éléments I de $C(\chi)$ à la recherche de ceux qui minimisent $\phi(I)$. Dans la suite de cette section, nous décrivons l'algorithme de parcourt pour $n = 3$, et non pas pour n quelconque, ceci afin de ne pas avoir de notations trop lourdes.

3.1.1 Première étape : décomposition de Cholesky de Q

Dans cette étape on recherche la matrice triangulaire R à élément diagonaux positifs telle que $R^T R = Q$. L'existence et l'unicité de cette décomposition proviennent du fait que Q est, sous nos hypothèses, symmétrique définie positive. Cette décomposition de Q se fait en utilisant la commande matlab `R=chol(Q)`. Pour $n = 3$, on a alors

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} \text{ et } R^T R = Q.$$

Nous notons $I = (i_1, i_2, i_3)^T$, et $\overline{I} = (\overline{\imath}_1, \overline{\imath}_2, \overline{\imath}_3)^T$. Alors, $(I - \overline{I})^T Q (I - \overline{I}) = (I - \overline{I})^T R^T R (I - \overline{I}) = \|R(I - \overline{I})\|^2$.

3.1.2 Parcourt des éléments de $C(\chi)$

En utilisant le facteur de Cholesky R de Q et la définition de la norme euclidienne $\|.\|$, l'appartenance de I à $C(\chi)$ s'écrit

$$\begin{array}{r}(r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2+\\(r_{22}(i_2-\bar{\imath}_2)+r_{23}(i_3-\bar{\imath}_3))^2+\\(r_{11}(i_1-\bar{\imath}_1)+r_{12}(i_2-\bar{\imath}_2)+r_{13}(i_3-\bar{\imath}_3))^2\leq\chi.\end{array}$$

Notons $\lfloor x \rfloor$ (resp. $\lceil x \rceil$) l'entier immédiatement inférieur (resp. supérieur) au réel x. On commence alors par déterminer les entiers g_3 et d_3 tels que si pour tout entier i_3 on ait

$$i_3 \in [g_3\ d_3]\cap\mathbb{Z} \Longleftrightarrow (r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2\leq\chi.$$

On trouve $g_3=\lceil -sqrt(\chi)/r_3+\bar{\imath}_3\rceil$ et $d_3=\lfloor sqrt(\chi)/r_{33}+\bar{\imath}_3\rfloor$.

Puis pour tout entier $i_3\in[g_3\ d_3]$, on détermine les entiers $g_2(i_3)$ et $d_2(i_3)$ tels que

$$i_2\in[g_2(i_3)\ d_2(i_3)]\cap\mathbb{Z}\Longleftrightarrow (r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2+(r_{22}(i_2-\bar{\imath}_2)+r_{23}(i_3-\bar{\imath}_3))^2\leq\chi.$$

Si $\chi\leq(r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2$, il n'y a pas de $g_2(i_3)$ et $d_2(i_3)$ qui conviennent. Dans le cas contraire, on trouve, $g_2(i_3)=\lceil -sqrt(\chi-(r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2)/r_{22}+\bar{\imath}_2-r_{23}(i_3-\bar{\imath}_3)/r_{22}\rceil$ et $d_2(i_3)=\lfloor sqrt(\chi-(r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2)/r_{22}+\bar{\imath}_2-r_{23}(i_3-\bar{\imath}_3)/r_{22}\rfloor$.

Enfin pour tout entier $i_3\in[g_3\ d_3]$, $i_2\in[g_2(i_3)\ d_2(i_3)]$ on détermine les entiers $g_1(i_3,i_2)$ et $d_1(i_3,i_2)$ tels que

$$i_1\in[g_1(i_3,i_2)\ d_1(i_3,i_2)]\cap\mathbb{Z}\Longleftrightarrow \begin{array}{l}(r_{33}(i_3-\bar{\imath}_3))^2+(r_{22}(i_2-\bar{\imath}_2)+r_{23}(i_3-\bar{\imath}_3))^2+\\(r_{13}(i_1-\bar{\imath}_1)+r_{12}(i_2-\bar{\imath}_2)+r_{13}(i_3-\bar{\imath}_3))^2\leq\chi.\end{array}$$

Déterminez les entiers $g_1(i_3,i_2)$ et $d_1(i_3,i_2)$.

On en déduit l'algorithme suivant de recherche d'un minimum de $\phi(i)$ par un parcourt de $C(\chi)$, que vous programmerez en Matlab :

```
minimum=chi
pour i_3 dans [g_3  d_3]
    si g_2(i_3) et d_2(i_3) existent, alors
       pour i2 dans [g_2(i_3)  d_2(i_3)]
          si g_1(i_3,i_2) et d_1(i_3,i_2) existent, alors
             pour i1 dans [g_1(i_3,i_2)  d_1(i_3,i_2)]
                minimum= min{minimum,phi(i_1,i_2,i_3)}
             fin pour
          fin si
       fin pour
    fin si
fin pour
```

Vous validerez votre programme en utilisant des cas-tests de validation. L'un d'entre eux devra traiter le cas où Q est une matrice diagonale. Vous calculerez aussi la solution du

(QNE) pour

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{I} = \begin{pmatrix} .1 \\ .2 \\ .3 \end{pmatrix}.$$

Calculez dans ce cas $\phi(I)$ pour $I = (0, 1, 0)^T$ et $I = (1, -1, 1)^T$. Y a-t-il unicité de la solution pour le problème (QNE) en général ?

4 Algorithme de résolution du problème (MCLM)

Il est demandé de réaliser une implantation de l'algorithme étudié à la Section 3 pour traiter le cas ou n est quelconque. La Section 2 vous permettra alors de programmer un algorithme de résolution général de (MCML).
Vous résolverez le problème suivant (MCML) donné par les matrices A, G, b suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} -151.66 \\ 96.534 \\ -253.27 \\ -1202.7 \end{pmatrix}.$$