Examen avec documents

Sujet d'Examen

Décembre 2022

Privilégier les réponses courtes et rigoureuses

1 Problème du naufragé (10 pts | 2 pages max)

Perdu en mer. On reprend le même exemple que celui du naufragé vu en cours, avec un background Gaussien, donné par l'estimation a priori $x_b = (u_b, v_b)$, et la matrice de variance-covariance d'erreur $B = \sigma_b^2 I_2$, I_2 étant la matrice identité d'ordre 2. On suppose données deux variables aléatoires Gaussiennes ϵ_1 et ϵ_2, de moyenne nulle, d'écart type σ_o, indépendantes entre elles, et indépendantes de l'erreur de background. On pose $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$.

1. On suppose que l'on observe *directement* en même temps que le background, la somme et la différence des positions u et v et que les erreurs de mesures associées sont respectivement ϵ_1 et ϵ_2. On obtient ainsi 2 mesures notées y_1 et y_2.
   (a) Montrer que les hypothèses ci-dessous mènent à l'équation d'observation
   $$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \epsilon$$
   où le vecteur aléatoire $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$ suit une distribution Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma_o^2 I_2$.
   (b) Donner alors une estimation de (u, v) en prenant en compte l'a priori et l'équation d'observation.
2. Soit $\delta > 0$. On suppose que, comme précédemment, l'on observe somme et différence des positions u et v mais que les erreurs de mesures associées sont respectivement $\eta_1 = \epsilon_1$ et $\eta_2 = \epsilon_1 + \delta \cdot \epsilon_2$.
   (a) Montrer que l'équation d'observation prend alors la forme
   $$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \Gamma \cdot \epsilon,$$
   où Γ est une matrice que vous préciserez.
   (b) Identifier par rapport au cours, la matrice d'observation H et le vecteur des observations y, et **la matrice** R.
   (c) Donner alors une estimation de (u, v) en prenant en compte l'a priori et l'équation d'observation en fonction de δ.
   (d) On prend $\sigma_o = \sigma_b = 1$ pour simplifier. Etudier la limite de l'estimation de la matrice de covaviance associée obtenue à la question (2c) lorsque δ tend vers 0 (que vaut en particulier le rang de cette matrice à cette limite ?). Donner une interprétation de ce résultat.

le pb de lissage : calculer $p(x_0, x_1, x_2 | y_0)$

2 Filtrage de Kalman (variantes) (10 pts | 2 pages max)

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} x_0 = x_b + \epsilon_{-1}, & e_{-1} \sim \mathcal{N}(0, B) \\ y_0 = Hx_0 + b + e_2, & e_2 \sim \mathcal{N}(0, R) \\ x_1 = x_0 + dt \cdot Gu + dt \cdot e_3, & e_3 \sim \mathcal{N}(0, Q) \\ x_2 = x_1 + dt \cdot Gu + dt \cdot e_4, & e_4 \sim \mathcal{N}(0, Q) \end{cases}$$

où les vecteurs x_b, b et u, ainsi que les matrices B, Q, R, G sont déterministes connus à l'avance, et les erreurs (e_i) sont mutuellement indépendantes.

a. Proposer une situation précise, où l'on pourrait être amené à rencontrer ces 4 équations. Préciser le rôle joué par u dans ce cas pratique.

b. Expliquer la différence entre ce problème de filtrage et celui vu en cours. Rappeler la différence entre le problème de filtrage et celui du lissage *sur cet exemple*.

c. Écrire l'algorithme de Kalman (propagation, assimilation) permettant de résoudre ce problème d'estimation.

d. Justifier mathématiquement les formules du c.. Dans le but de ne pas allonger inutilement votre exposé, vous indiquerez ce qu'il vaut changer au développmement du cours et n'expliciterez que les nouveaux résultats à établir (1 page max).