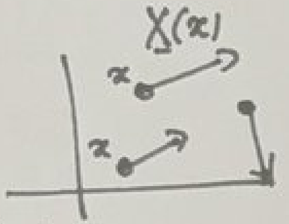
II] Prévision déterministe

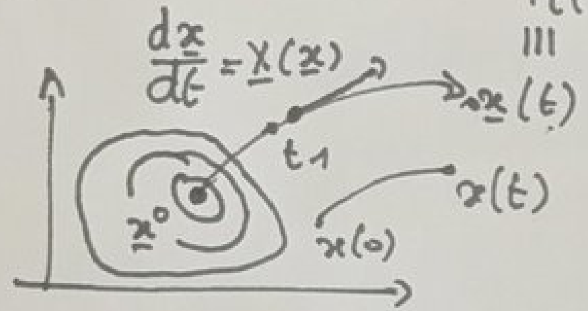
$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\mathcal{M}}(\underline{x})} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{X}(\underline{x})}$$



$\varphi_t(x^0)$

$\equiv$



$x \in \mathbb{R}^n$

Programme

1. Dynamique des observables

↓

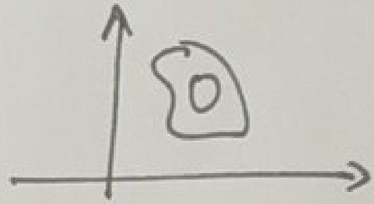
2. Dynamique des mesures

↑

mesure de proba !

27-11-1

observable ≡ une fonction bornée



$f : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

Notion de flot associé à une dynamique

(1) $\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{X}(\underline{x})}$ ≡ ODE → nye : système ~~détermin~~ Déterministe

Existence et Unicité de la solution

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad x(0) \longmapsto x(t) \text{ solution de (1)} \end{array}}$$

$t \in \mathbb{R}^+$ $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ application indexées

$\varphi_0 = ?$ $\varphi_0(x) = x$

$$\boxed{\varphi_0 = Id}$$

$$\boxed{\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}}$$

(2) $\boxed{(\varphi_t)}$ est un semi-groupe

est un flot

Dynamique des observables

$f_0 \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\boxed{f(t, x_0) = f_0[\varphi_t(x_0)]}$$

Pour x_0 fixe

$\boxed{F_t}$

$$\frac{dF_t}{dt} = df_0\left[\frac{d\varphi_t(x_0)}{dt}\right]$$

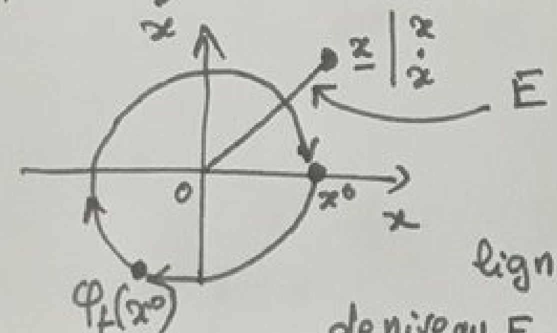
f_0 est C^1

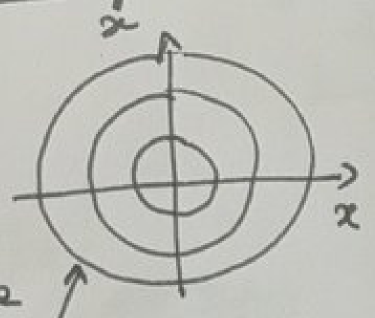
$$\boxed{\frac{dF_t}{dt} = \underline{X}(\cancel{x}\varphi_t(x_0)) \cdot \nabla f_0\, \varphi_t(x_0)}$$

avec $\boxed{\frac{d\varphi_t(x_0)}{dt} = \underline{X}[\varphi_t(x_0)]}$

Ex: $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \longrightarrow \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ application linéaire

observable $\boxed{E(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2}$ (énergie totale)





ligne de niveau E

$$E_t = E(\dot{x}(t), x(t)) \equiv E[\varphi_t(x^0)]$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2(t)\right]$$

$$= \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)$$

$$= 0$$

$$\boxed{f(t, x) = f_0[\varphi_t(x)]}$$

$(\Phi_t \cdot f_0)(x) =$

$$\boxed{\partial_t f = \mathcal{L}_X(f)}$$

$$\mathcal{L}_X(f) \equiv \underline{X} \cdot \nabla f$$

dérivée de Lie

$\Phi_t \equiv$ flot sur les observables

flot $\Leftrightarrow$ dynamique

$\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{X}(x)} \longleftrightarrow \varphi_t(x) \quad \begin{cases} \varphi_0 = I_d \\ \varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \dots \end{cases}$$

dynamique — flot

observable

$$\boxed{\partial_t f = \mathcal{L}_X(f)} \longleftrightarrow \Phi_t$$

opérateur linéaire

flot sur l'espace des observable

$$\boxed{\Phi_t \cdot f_0 \equiv f_0[\varphi_t(x)]}$$

$$\begin{cases} \Phi_0 = I_d \\ \Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} \end{cases}$$

Ex: $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0}$

dynamique non linéaire

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{X}(\underline{x}) \quad \text{avec } \underline{x} = \begin{vmatrix} x \\ \dot{x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \iff \underline{X}(\underline{x}) = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ -\omega^2 \sin(x) \end{vmatrix}$$

d'où $\mathcal{L}_X(f) = \underline{X} \cdot \nabla f$ pour $\underline{x} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$

$$= X_1 \cdot \partial_{x_1} f + X_2 \cdot \partial_{x_2} f$$

ici $\boxed{\mathcal{L}_X(f) = (\dot{x}) \cdot \partial_x f + (-\omega^2 \sin x)\, \partial_{\dot{x}} f}$

$$\mathcal{L}_X(f_1 + \lambda f_2) = X \cdot \nabla(f_1 + \lambda f_2)$$

$$= X \cdot \nabla f_1 + \lambda X \cdot \nabla f_2$$

$$= \mathcal{L}_X(f_1) + \lambda \mathcal{L}_X(f_2)$$

$$\partial_t f = \mathcal{L}_X(f) \qquad \left(\longleftrightarrow \quad \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \longrightarrow \boxed{\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t}\,\underline{x}(0)} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f(t,x) = e^{\mathcal{L}_X t} f(0,x)}$$

$$\boxed{\underline{x}(t) = \varphi_t(\underline{x}(0))}$$

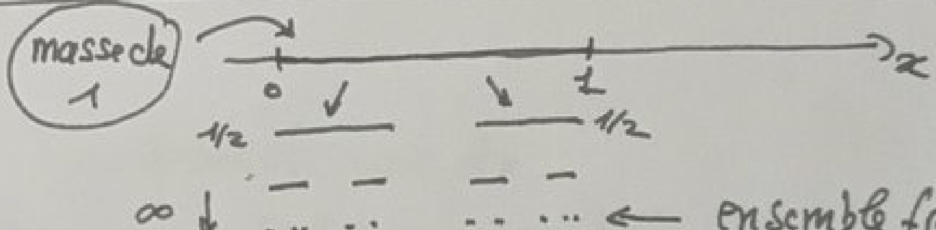
$$\boxed{\varphi_t = e^{\underline{\underline{A}}t}}$$

Expression du flot dans l'espace des observable

② Dynamique des mesures

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{X}(\underline{x})$$

ligne de contour de la densité $p_0(x)$



← ensemble fractal

$\nu(dx) \propto dx^{\alpha}$ ← α non entier

hyp. la condition initiale est une distribution !

$$\cancel{P_0(x)\,dx}\quad P_0(dx) = p_0(x)\,dx$$

$$\nu(f) = \int f\,\nu(dx)$$

$$P(X \in dx) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}\, dx$$

gaussienne

mesure de Lebesgue

$$\boxed{\mathbb{E}_{P_0}[f(t,x)] = \mathbb{E}_{P_t}[f_0]} \longrightarrow \cancel{\frac{dP}{dt}=\dots} \quad \boxed{\partial_t P = \mathcal{L}_x^* P}$$

évolution temporelle de ~~des~~ la mesure P_0.

$$f(t,x) = f_0[\varphi_t(x)]$$

$f_t = \Phi_t \cdot f_0 \iff \partial_t f = \mathcal{L}_x(f)$ dont la solution formelle est $f(t,x) = e^{\mathcal{L}_x t} f_0(x)$

$$\mathbb{E}_{P_0}[f(t,x)] = \int f(t,x)\, P_0(dx)$$

$$= \int \left(e^{\mathcal{L}_x t} f_0\right)(x)\, P_0(dx)$$

hyp. de densité wrt dx

$P_0(dx) = p_0(x)\,dx$

$$= \int \left(e^{\mathcal{L}_x t} f_0\right)(x)\, p_0(x)\,dx$$

$$= \int \left(e^{\mathcal{L}_x t} f_0\right) \cdot p_0 \, dx$$

$$\langle e^{\mathcal{L}_x} f_0 \mid p_0 \rangle = \langle f_0 \mid (e^{\mathcal{L}_x})^* p_0 \rangle$$

$$Ax \mid y = x \mid A^* y$$

Adjoint

$$= \int f_0 \underbrace{\left(\left(e^{\mathcal{L}_x^* t}\right) p_0\right) dx}_{P_t \quad dx}$$

avec $\left(e^{\mathcal{L}_x t}\right)^* = e^{\mathcal{L}_x^* t} \longrightarrow \boxed{P_t = e^{\mathcal{L}_x^* t} P_0} \longleftrightarrow \boxed{\partial_t P_t = \mathcal{L}_x^* P}$

TM :

① Synthèse

② Exprimer $\mathcal{L}_X^*$ pour le cas de l'oscillateur $\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0$ (non lin.)

Dynamique

$\frac{dx}{dt} = X(x)$ $\longleftrightarrow$ flot

$x \in \mathbb{R}^n$

* Revenir sur lien caractérisation des probabilités et formulation faible

$$P_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{au sens faible}}}{=} P_2 \iff \forall f \; \mathbb{E}_{P_1}[f] = \mathbb{E}_{P_2}[f]$$

* dynamique du cas ensembliste
* Formalisme Markovien et extension cas déterministe → sto.

Synthèse: dynamique des observables

objet espace	Dynamique		Flot
configuration dim $<+\infty$	$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{X}(\underline{x})$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$	① $\longrightarrow$ ②	$\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $x(0) \longmapsto x(t)$ est un flot $\begin{cases} \varphi_0 = Id \\ \varphi_{t+h} = \varphi_t \circ \varphi_h = \varphi_h \circ \varphi_t \end{cases}$ (semi-groupe) ② $\downarrow$
observable dim $= \infty$	Pour $f_0 \in C^1$ ... $\boxed{\partial_t f = \mathcal{L}_X f}$ avec $\boxed{\mathcal{L}_X(f) = \underline{X} \cdot \nabla f}$ soit $\boxed{f_t = e^{\mathcal{L}_X t} f_0}$ ⑤ $\downarrow$	⑤ $\longleftarrow$ ③	③ Soit $f_0 \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\boxed{f(t,x) \equiv f_0[\varphi_t(x)]}$ $\Downarrow$ $\boxed{f_t = \Phi_t \cdot f_0}$ est un flot! car $\begin{cases} \Phi_0 = Id \\ \Phi_{t+h} = \Phi_t \circ \Phi_h = .. \end{cases}$ ③ $\downarrow$
mesure dim $= \infty$	⑥ Pour P_0 à densité $P_0(dx) = p_0(x)dx$ $\boxed{\partial_t p = \mathcal{L}_X^* p}$ $\boxed{p_t = e^{\mathcal{L}_X^* t} p_0}$ avec $\boxed{\mathcal{L}_X^* \text{ adjoint de } \mathcal{L}_X}$		④ Soit P_0 une mesure on définit P_t comme $\boxed{\mathbb{E}_{P_t}[f_0] \equiv \mathbb{E}_{P_0}[f_t]}$ $\Downarrow$ $\boxed{P_t = \Phi_t^* \cdot P_0}$ est un flot car $\begin{cases} \Phi_0^* = Id \\ \Phi_{t+h}^* = \Phi_t^* \circ \Phi_h^* = .. \end{cases}$

① dynamique (EDO)

$\Downarrow$ $(\Uparrow ?)$

② φ flot dans espace des configurations

$\Downarrow$ $(\Uparrow ?)$

③ Φ flot dans espace des observables

$\Downarrow$ $(\Uparrow ?)$

④ Φ^* flot dans espace des mesures

$\Rightarrow$ ⑤ dynamique espace des observables C^1

$\Rightarrow$ ⑥ dynamique espace des mesures à densité wrt mesure de Lebesgue