

# Equations aux dérivées partielles

## Chap 1 : Introduction et principes de la méthode des différences finies

Joseph GERGAUD, Serge GRATTON, Ehouarn SIMON

18 octobre 2021

# Outline

## 1.1. Introduction

## 1.2. Exemples d'EDP et éléments de classification

## 1.3. Principes de la méthode

### 1.3.1. Cas d'un domaine non carré

## Objectifs

Pouvoir **comprendre, prédire, optimiser le comportement de systèmes complexes**, tels que ceux issus de la physique, la chimie, l'économie, etc..

- Prévoir le futur (météo, climat, évolution des marchés, ...);
- Systèmes difficilement accessibles à l'observation (astrophysique, océan, physique quantique, ...);
- Réduire les coûts de prototypage (ingénierie).

## Modélisation

Les **modélisations** de ces problèmes font intervenir des équations différentielles ordinaires (EDO), mais aussi des équations aux dérivées partielles (EDP), à savoir des équations pluri-dimensionnelles.

### Exemple 1.1.1.

- EDO :  $\frac{du}{dt}(t) = f(t, u(t))$ ;
- EDP :  $f(x, t, u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \dots) = 0$

Etapas :

**1- Modélisation :**

- ▷ Mise en équations du problème  $\Rightarrow$  équations aux dérivées partielles ;

**2- Analyse du modèle :**

- ▷ Existence, unicité de la solution dans des espaces à définir ;

**3- Discrétisation du problème :**

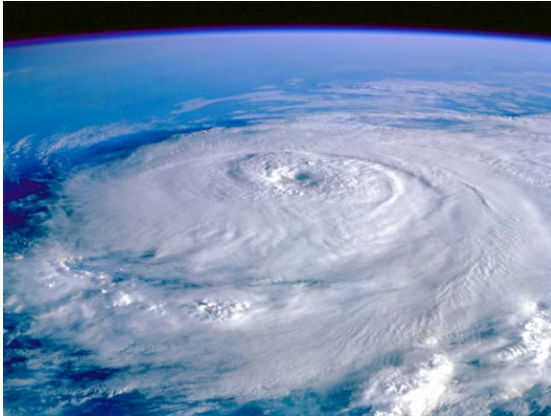
- ▷ Passage de la dimension infinie à la dimension finie ; étude de la "perte" d'information ;

**4- Résolution du problème discret :**

- ▷ Numérique, analyse du comportement de la solution numérique.

**Remarque 1.1.1.** Ce cours ne s'intéressera qu'aux **étapes 3 et 4**.

Prévoir l'évolution de l'atmosphère à des horizons et échelles multiples



▷ Variables pronostiques (vent, température, humidité, pression, hydrométéores, etc...).

## Equations de Navier-Stokes (fluide incompressible)

- Conservation de la masse

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

- Equations du mouvement

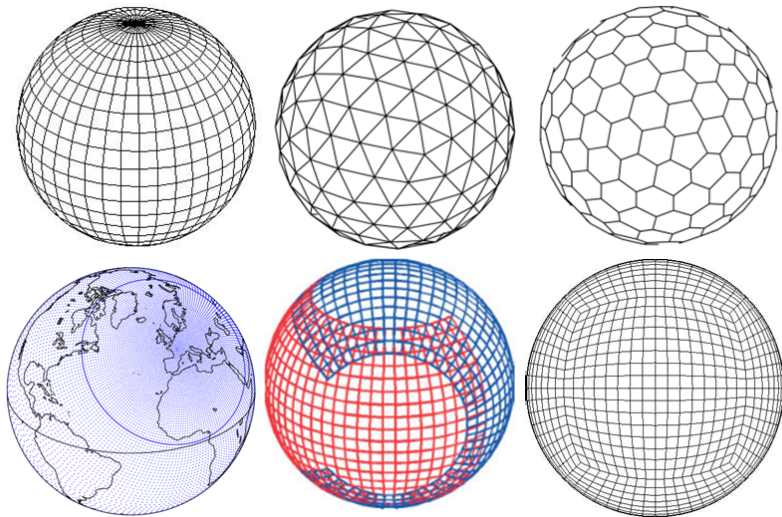
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0$$

avec  $\mathbf{u}$  le champs de vitesse,  $p$  la pression,  $\rho$  la densité du fluide, et  $\nu$  la viscosité cinématique.

### Remarque 1.1.2.

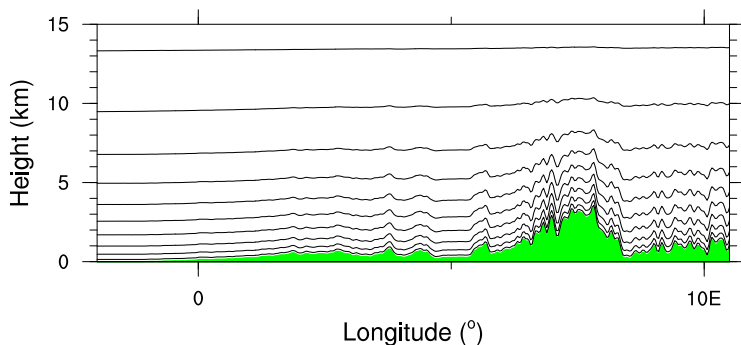
- Le problème de l'existence et unicité de la solution de ce système d'équations reste ouvert en 3 dimensions pour des temps long.
- Expressions analytiques d'éventuelles solutions inconnues.

Exemples de grilles horizontales..



## Exemples de gilles verticales à Météo-France : et la topographie ?

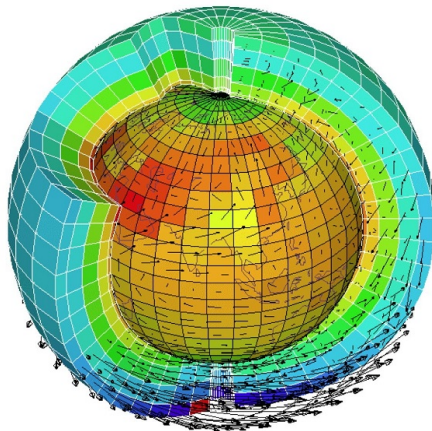
Coordonnée hybride : suit le terrain près du sol, puis se relaxe vers des niveaux pression.

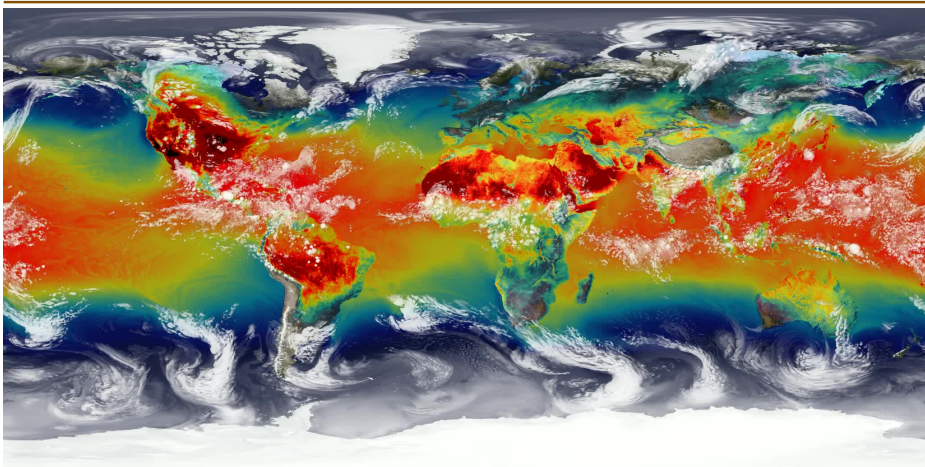




## Météorologie opérationnelle

- La prévision numérique du temps fournit des résultats bruts à post-traiter et à expertiser.
- 
- ▷ Grâce aux équations de la physique, le modèle **propage les variables** de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$ .
  - ▷ Quid de la **qualité** de la solution numérique ?





Température de surface (couleur)  
et rayonnement IR au sommet de l'atmosphère (blanc)

Source : <https://svs.gsfc.nasa.gov>

# Outline

## 1.1. Introduction

## 1.2. Exemples d'EDP et éléments de classification

## 1.3. Principes de la méthode

### 1.3.1. Cas d'un domaine non carré

- Le domaine, variable  $x$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , en pratique,  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Nous ferons l'hypothèse que la frontière de cet ouvert  $\partial\Omega = \Gamma$  est lipschitzienne. Cela signifie essentiellement que  $\Gamma$  est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne et que  $\Omega$  est situé d'un même coté par rapport à cette frontière.



FIGURE 1 –  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$  sont possibles, mais non  $\Omega_2$ .

- Équation

$$f(t, x, u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \dots) = 0$$

**Exemple 1.2.1.** Equation de la chaleur 2D

Trouver  $u$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+, \quad \text{"Conditions aux limites"} \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \quad \text{"Conditions initiales"} \end{array} \right.$$

**Exemple 1.2.2.** Équation d'advection linéaire 1D

Trouver  $u$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+, \quad \text{"Conditions aux limites"} \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \quad \text{"Conditions initiales"} \end{array} \right.$$

**Définition 1.2.1 – Ordre d'une EDP**

On appelle ordre d'une EDP, l'ordre le plus élevé des dérivées présentes dans l'équation.

**Exemple 1.2.3.** Les EDP présentes dans les exemples 1.2.1 et 1.2.2 sont respectivement d'ordre 2 et 1.

**Définition 1.2.2 – Conditions aux limites "classiques"**

- **Dirichlet** : la valeur de  $u(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$  ;
- **Neumann** : la valeur de  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$ , avec  $\nu$  normale sortante à  $\Gamma$  en  $x$  ;
- **Cauchy** : les valeurs de  $u(x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  sont données  $\forall x \in \Gamma$  ;
- **Robin** : la valeur de  $\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions définies sur  $\Gamma$  ;

## Définition 1.2.3 – Classification des EDP d'ordre 2

Soit une EDP linéaire d'ordre 2 sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et d'inconnue  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle peut s'écrire :

$$\forall z \in \Omega \quad \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{j,i}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i}(z) + \sum_{i=1}^d f_i(z) \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) + g(z)u(z) = h(z),$$

avec par convention  $\forall z \in \Omega \quad a_{j,i}(z) = a_{i,j}(z) \in \mathbb{R}$ ,  $(f_i(z))_{i=1:d} \in \mathbb{R}^d$ , et  $(g(z), h(z)) \in \mathbb{R}^2$ . On note  $A(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $[A(z)]_{i,j} = a_{i,j}(z)$ . L'EDP est dite :

- **Elliptique** en  $z \in \Omega$  si la matrice  $A(z)$  n'admet que des valeurs propres non nulles toutes de même signe ;
- **Hyperbolique** en  $z \in \Omega$  si la matrice  $A(z)$  admet  $d - 1$  valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre non nulle de signe opposé.
- **Parabolique** en  $z \in \Omega$  si la matrice  $A(z)$  admet  $d - 1$  valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre nulle.

**Remarque 1.2.1.** Les composantes de  $z$  renvoient aussi bien aux dimensions spatiales que temporelles.

- **Elliptique** : modèle stationnaire (thermique, électrostatique, membrane élastique, écoulement potentiel).

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ + \text{ conditions aux limites} \end{cases}$$

- **Hyperbolique** : modèle instationnaire (propagation d'ondes, électromagnétisme, élastodynamique).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{ conditions aux limites} + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

- **Parabolique** : modèle instationnaire (diffusion thermique, chimique, neutronique, fluide visqueux incompressible).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{ conditions aux limites} + \text{ condition initiale} \end{cases}$$



# Outline

## 1.1. Introduction

## 1.2. Exemples d'EDP et éléments de classification

## 1.3. Principes de la méthode

### 1.3.1. Cas d'un domaine non carré

On se place en 1D :  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et on suppose " $u$  suffisamment régulière".

## Rappels

- $u$  est dérivable en  $x \in \mathbb{R}$  si  $\exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} := u'(x)$  ;

- Développement de Taylor-Lagrange

On suppose  $u \in \mathcal{C}^{n+1}$  sur le segment  $[x, x+h]$ . Alors

$$\exists \xi_h \in ]x, x+h[ \text{ t.q. } u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^n \frac{h^i}{i!} u^{(i)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} u^{(n+1)}(\xi_h)$$

**Remarque 1.3.1.** L'utilisation du développement de Taylor-Lagrange de la fonction  $u$  à différents ordres  $n$  sera à la base de l'approximation des dérivées de  $u$  en un point particulier.

## Approximations de la dérivée d'ordre 1

**Proposition 1.3.1 – Une approximation décentrée**

On suppose  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^2$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Il vient

$$\exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in ]0, h_0] \quad \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 1.

► Soit  $h \in ]0, h_0]$ .  $u$  étant  $\mathcal{C}^2$  sur  $[x, x+h]$ , il vient par développement de Taylor - Lagrange  $\exists \xi_h \in ]x, x+h[$  t.q.  $u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(\xi_h)$ .  
D'où

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

avec  $C = \frac{1}{2} \sup_{y \in [x, x+h_0]} |u^{(2)}(y)|$ . ■

■ **Remarque 1.3.2.** La constante  $C$  est indépendante du pas  $h$  choisi.

## Approximations de la dérivée d'ordre 1

**Proposition 1.3.2 – Une approximation centrée**

On suppose  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^3$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Il vient

$$\exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in ]0, h_0] \quad \left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

► cf TD. ■

**Remarque 1.3.3.** La précision de l'approximation va dépendre de la régularité de la solution : plus la solution est régulière, plus on pourra espérer construire une approximation d'ordre élevée.

## Approximations de la dérivée d'ordre 2

**Proposition 1.3.3 – Une approximation centrée**

On suppose  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^4$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Il vient

$$\exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in ]0, h_0] \quad \left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u^{(2)}(x) \right| \leq Ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

► cf TD.

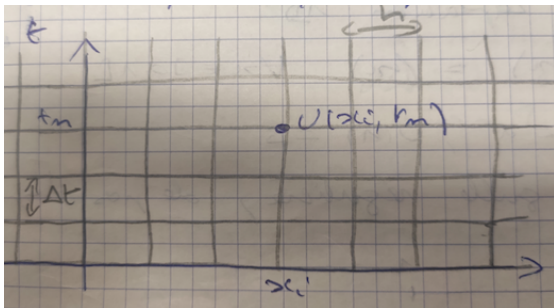
**Définition 1.3.4 – Ordre de consistance d'une approximation**

Une approximation de  $u^{(k)}(x)$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , est dite consistante à l'ordre  $p$ , s'il existe une constante positive et indépendante du pas  $h$ , notée  $C$ , telle que l'erreur d'approximation est majorée par  $Ch^p$  :

$$|\text{Approx}(u, x, h) - u^{(k)}(x)| \leq Ch^p.$$

## Idées

Supposons un problème spatio-temporel  $1D \times 1D$ . Soit le maillage régulier, de pas d'espace  $h$  et de pas de temps  $\Delta t$  :



avec  $\forall i \in \mathbb{N} \ x_i = ih$ , et  $\forall n \in \mathbb{N} \ t_n = n\Delta t$ .

On cherche une approximation  $u_h$  de la solution  $u$  en les points du maillage :

$$[u_h]_i^n := u_i^n \approx u(x_i, t_n).$$

## Idées

Ceci nous conduit à approcher les dérivées par **différences finies**.

**Exemple 1.3.1.** Dérivées partielles d'ordre 1

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t},$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t},$
- etc..

**Exemple 1.3.2.** Dérivées partielles d'ordre 2

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2},$
- etc..

**Remarque 1.3.4.**

Il n'y a pas unicité du schéma d'approximation. Néanmoins, ceux-ci auront des propriétés d'approximation différentes.

## Laplacien 1D

Trouver  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1])$  telle que

$$\begin{cases} -u^{(2)}(x) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[ \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

Soit une grille régulière  $(x_i)_{i \in \llbracket 0 : N+1 \rrbracket}$  de  $[0, 1]$ , de pas d'espace  $h : \forall i \in \llbracket 0 : N+1 \rrbracket, x_i = ih$ .  
On cherche  $(u_i)_{i \in \llbracket 0 : N+1 \rrbracket} \in \mathbb{R}^{N+2}$  approximant la solution  $u$  de l'EDP en les nœuds du maillage :

$$\forall i \in \llbracket 0 : N+1 \rrbracket, u_i \approx u(x_i).$$

**Conditions aux limites :**  $u(0) = \alpha$  et  $u(1) = \beta$  donnent  $u_0 = \alpha$  et  $u_{N+1} = \beta$ .

**Intérieur du domaine :** on s'intéresse à  $u_h := (u_i)_{i \in \llbracket 1 : N \rrbracket} \in \mathbb{R}^N$ . Avec l'approximation

$$u^{(2)}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

il vient,

$$\forall i \in \llbracket 1 : N \rrbracket, -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i).$$



## Laplacien 1D

Ceci conduit à la résolution du système linéaire

$$A_h u_h = b_h$$

avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

## Questions

- 1- Le système admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?
- 2- Quelle est la précision de la méthode ? La discrétisation devient-elle exacte quand  $h \rightarrow 0$  ? Les composantes de  $u_h$  convergent-elles vers la solution évaluée en les nœuds du maillage quand  $h \rightarrow 0$  ?

**Définition 1.3.5 – Norme matricielle subordonnée**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^N$ . On pose

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

$$\|\cdot\|$$

ainsi définie est une norme sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , appelée norme matricielle subordonnée.

**Proposition 1.3.6 – Quelques propriétés**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^N$ . Sa norme matricielle subordonnée vérifie :

- $\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$  ;
- $\forall (x, A) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  ;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Exemple 1.3.3.**

Soit  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie sur  $\mathbb{R}^N$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1:N \rrbracket} |x_i|$ . Sa norme matricielle subordonnée est définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|A\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1:N \rrbracket} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|$$

**Remarque 1.3.5.**

Pour l'étude des EDP, nous privilégierons des normes discrètes du type

$$\forall p > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_p = \left( h \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Elles renvoient à des discrétisations de normes définies sur des espaces fonctionnels ( $L_p$ ).

**Définition 1.3.7 – Norme  $\|\cdot\|_h$** 

On pose  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\|x\|_h = \sqrt{h \sum_{i=1}^N x_i^2}$ .  $\|\cdot\|_h$ , ainsi définie, est une norme sur  $\mathbb{R}^N$ .

De plus, sa norme matricielle subordonnée est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|A\|_h = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

avec  $\rho$  le rayon spectral d'une matrice.

**Proposition 1.3.8 – Propriété**

On a  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\|x\|_h \leq \|x\|_\infty$ .

Rappelons le système linéaire obtenu :

$$A_h u_h = b_h$$

avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout  $u_h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} h^2 u_h^T A_h u_h &= 2u_1^2 - u_1 u_2 - u_2 u_1 + 2u_2^2 - u_2 u_3 - \dots - u_{N-1} u_N + 2u_N^2 \\ &= u_1^2 + (u_1 - u_2)^2 + \dots + (u_{N-1} - u_N)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

En conclusion le système admet une unique solution.

Soit  $u$  la solution de l'EDP (que l'on suppose exister et unique) alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, N\}$ .

$$-u''(x_i) - f(x_i) = 0.$$

### Définition 1.3.9 – Erreur de consistance

L'erreur de consistance du schéma numérique  $A_h u_h = b_h$  est

$$\xi_h(u) = A_h(\pi_h(u)) - b_h$$

où  $\pi_h(u) = (u(x_1), \dots, u(x_N))^T$ .

Cette erreur est ici

$$\begin{aligned} \xi_h(u)_i &= -\frac{u(x_{i-1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} - f(x_i) \\ &= -\frac{u(x_{i-1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + u''(x_i) - u''(x_i) - f(x_i) \\ &= u''(x_i) - \frac{u(x_{i-1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \\ &= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 \|\xi_u(u)\|_\infty &= \max_i |\xi_h(u)_i| \\
 &= \max_i \left| \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i) \right| \\
 &\leq \left( \frac{1}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)| \right) h^2 \\
 &\leq Ch^2
 \end{aligned}$$

avec  $C \geq 0$  constante indépendante de  $h$ . On dit que le schéma numérique est constant d'ordre 2 pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Montrons maintenant la convergence. On a

$$\begin{aligned}
 A_h u_h &= b_h \\
 A_h(\pi_h(u)) &= b_h + \xi_h(u)
 \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 u_h - \pi_h(u) &= A^{-1}(\xi_h(u)) \\
 \Rightarrow \|u_h - \pi_h(u)\|_\infty &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|\xi_h(u)\|_\infty \\
 &\leq \frac{C}{8} h^2.
 \end{aligned}$$

D'où la convergence.

Soit  $f$  donnée et continue sur  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \\ u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- On définit une grille sur  $\Omega$  :
  - $x_{i_1} = i_1 * h_1$ , avec  $h_1 = 1/(N_1 + 1)$ ;
  - $x_{i_2} = i_2 * h_2$ , avec  $h_2 = 1/(N_2 + 1)$ .
- On note  $u_{i_1, i_2}$  une approximation de  $u(x_{i_1}, x_{i_2})$ .
- On approxime les dérivées secondes en les nœuds du maillage par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \approx \frac{u_{i_1+1, i_2} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1-1, i_2}}{h_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \approx \frac{u_{i_1, i_2+1} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1, i_2-1}}{h_2^2}.$$



On a donc les  $N_1 \times N_2$  inconnues  $(u_{i_1, i_2})$ , pour  $i_1 \in \{1, \dots, N_1\}$  et  $i_2 \in \{1, \dots, N_2\}$  vérifient les  $N_1 \times N_2$  équations

$$-\frac{u_{i_1-1, i_2} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1+1, i_2}}{h_1^2} - \frac{u_{i_1, i_2-1} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1, i_2+1}}{h_2^2} = f(x_{i_1, 1}, x_{i_2, 2}), \quad (1)$$

pour  $i_1 = 1, \dots, N_1$  et  $i_2 = 1, \dots, N_2$ ,

avec  $u_{i_1, i_2} = 0$  si  $i_1 \in \{0, N_1 + 1\}$  ou  $i_2 \in \{0, N_2 + 1\}$  (conditions aux limites).

Ce schéma s'appelle usuellement le schéma à 5 points du laplacien :

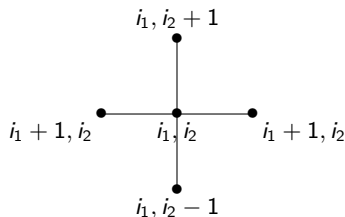


FIGURE 2 – *Stencil pour le laplacien, schéma à 5 points.*

On pose  $b_1 = \frac{1}{h_1^2}$ ,  $b_2 = \frac{1}{h_2^2}$  et  $a = 2(b_1 + b_2)$ , le système 1 s'écrit alors  $C_h u_h = b_h$

( $h = \max(h_1, h_2)$ ) avec  $u_h = (u_{1,1} \quad \dots \quad u_{1,N_2} \quad u_{2,1} \quad \dots \quad u_{2,N_2} \quad \dots \quad u_{N_1,N_2})^T$ ,

$$C_h = \begin{pmatrix} A & D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ D & A & D & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & D & A & D \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D & A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -b_1 & a & -b_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -b_1 & a & -b_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -b_1 & a \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -b_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_{1,1}) \\ \vdots \\ f(x_{N_1,1}, x_{N_2,2}) \end{pmatrix}$$

On démontre alors, comme pour le cas 1D que la matrice  $C_h$  est symétrique, définie positive et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|C_h\|_\infty \leq C$ . On en déduit alors que le schéma est consistant d'ordre 2 et convergent.

Que fait-on dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert borné du type de la figure 3

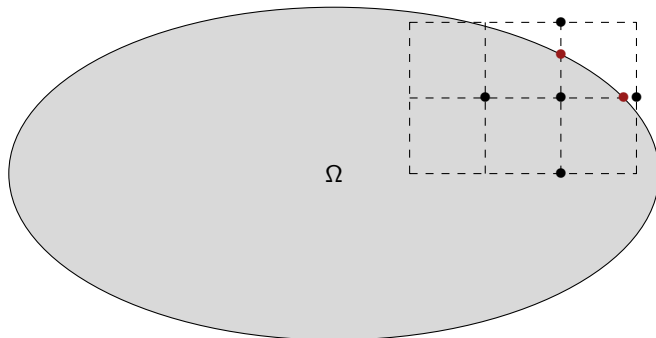


FIGURE 3 – Ouvert  $\Omega$  et modification du stencil pour les points proche de la frontière.

Dans ce cas le maillage ne tombe pas sur  $\Gamma = \partial\Omega$  en général. On a alors 2 stratégies :

- On applique la condition aux limite aux points proche de la frontière  $\Gamma$  ;
- On modifie le schéma à 5 points pour le laplacien afin que les points du maillage tombe sur la frontière (voir la figure 3)

Ce cours se base notamment sur les éléments suivants :

- B. Lucquin, Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Mathématiques à l'Université, Eds. Ellipses.
- Images et animation fournies par B. Ménétrier.