Filtrage Stochastique
HPC-BigDATA
2019-2020

Consignes

- Durée du test: 1h50.
- **Document autorisé: 1 feuille avec synthèse du cours**
- Le sujet est **recto-verso** et le barême est indiqué par sous-section

---

1 Partie filtrage

1.1 Interprétation des équations du filtre de Kalman (5 points)

Les équations du filtre de Kalman prennent la forme

$$\begin{cases} \text{Analyse:} \\ x_q^a = x_q^f + \mathbf{K}_q(y_q^o - \mathbf{H}x_q^f), \text{ où } \mathbf{K}_q = \mathbf{P}_q^f\mathbf{H}_q^T(\mathbf{H}_q\mathbf{P}^f\mathbf{H}_q^T + \mathbf{R}_q)^{-1} \\ \mathbf{P}_q^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_q\mathbf{H}_q)\mathbf{P}_q^f \\ \text{Prévision:} \\ x_{q+1}^f = \mathbf{M}_{q+1\leftarrow q}x_q^a, \\ \mathbf{P}_q^f = \mathbf{M}_{q+1\leftarrow q}\mathbf{P}_q^a\mathbf{M}_{q+1\leftarrow q}^T. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1. : *Quelle est l'interprétation probabiliste de ces équations ?*

Question 2. : *De quelle formule probabilisite l'équation d'analyse dérive-t-elle ?*

1.2 Gaussienne en grande dimension (3 points)

On s'intéresse au vecteur aléatoire $X = (X_i)_{i\in[0,n]}$ suivant la loi normale centré (de moyenne 0) et de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}_n$, notée $\mathcal{N}(0, \sigma^2\mathbf{I}_n)$, en dimension n.

Question 3. : *Exprimez $\mathbb{E}\left[Z^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[Z^4\right]$ pour Z une variable alétoire suivant un loi Gaussienne centrée et de variance σ^2, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (indication: vous pourrez utiliser la formule de Wick pour répondre.), puis déduire la variance de Z^2.*

Question 4. : *Utilisez le théorème de la limite centrale, puis le développement limité*

$$(1+h)^{1/2} \underset{h\ll 1}{=} 1 + \frac{1}{2}h + o(h)$$

pour exprimer la loi de la norme $||X||$ du vecteur X, avec $||X|| = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}$ (quand n est grand). (Indication: on rappelle que si Y suit une loi Gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors on peut écrire $Y = m + \sigma Z$ avec Z une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.)

Question 5. : *Déduire une interprétation géométrique de la répartition des vecteurs $X(\omega_i)$ correspondant à des réalisations iid ω_i du vecteur X.*

Solution:
$\mathbb{E}[Z^2] = \sigma^2$ ***et*** $\mathbb{E}[Z^4] = 3\mathbb{E}[Z^2]^2 = 3\sigma^4$ ***(Formule de Wick). La variance de*** Z^2 ***est donc*** $V(Z^2) = \mathbb{E}[Z^4] - \mathbb{E}[Z^2]^2 = 2\sigma^4$***. Ainsi*** $\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 \sim \mathcal{N}(1, 2\sigma^4/n)$***, tel que*** $\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 = \sigma^2 + \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}}Z$***. Le carré de la norme vérife donc*** $||X||^2 = n\sigma^2 + \sigma^2\sqrt{2n}Z$***, tel que la norme vérifie*** $||X|| = (n\sigma^2 + \sigma^2\sqrt{2n}Z)^{1/2} = \sqrt{n}\sigma\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}Z\right)^{1/2} = \sigma n^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}Z + o(1/\sqrt{n})\right) = \sigma n^{1/2} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}Z + o(1)$***. Conclusion:***

$$|X| \sim \mathcal{N}\left(\sigma\sqrt{n}, \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

♣

2 Calcul stochastique

Dans la suite de l'énoncé, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé et B un processus Brownien de filtration canonique $(\mathcal{F}_t)$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s, s \leq t\})$.

2.1 Formule d'Itô (5 points)

Question 6. : *Soit un processus d'Itô $dX_t(\omega) = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dB_t(\omega)$ (où a, b sont des fonctions $\mathcal{V} = \cap_{t\geq 0}\mathcal{V}(0,t)$) et $Y_t = f(t, X_t)$ où f est $C^{1,2}$, démontrez la formule d'Itô permettant d'exprimer la formulation différentielle dY_t de Y_t, puis exprimez la formulation intégrale de Y_t. Vous donnerez l'expression condensée utilisant l'opérateur $\bullet$ vu en cours, puis l'expression sous forme de processus d'Itô.*

2.2 Théorème de représentation des L^2 (4 points)

Soit $T > 0$. Le théorème de représentation des $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ énonce que pour $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, il existe une unique $f \in \mathcal{V}(0, T)$ telle que

$$F(\omega) = \mathbb{E}[F] + \int_0^T f_s(\omega)dB_s(\omega). \tag{2}$$

Question 7. : *Soit $F = e^{B_T}$, exprimez la fonction f associée à la représentation des $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ (Indication: utilisez la formule d'Itô appliquée à $F_t = e^{B_t}$. Par ailleurs, on rappelle que la fonction génératrice d'une loi normale centrée réduite $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ est donnée par $\mathbb{E}\left[e^{tZ}\right] = e^{t^2/2}$.)*

Solution:
On pose $F_t = f(B_t) = e^{B_t}$***, l'application de la formule d'Itô conduit à*** $dF_t = \partial_x f dB_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 f dB_t \bullet dB_t = e^{B_t}dB_t + \frac{1}{2}e^{B_t}dt$***. Ainsi, la formulation intégralle du processus est donnée par***

$$F_T = F_0 + \int_0^T \frac{1}{2}e^{B_t}dt + \int_0^T e^{B_t}dB_t,$$

Pour obtenir la représentation, il suffit de calculer l'espérance de cette expressions, soit en calculant

$$\mathbb{E}\left[F_T\right] = \frac{1}{2}\int_0^T \mathbb{E}\left[e^{B_t}\right]dt + \mathbb{E}\left[F_0\right]$$

soit en calculant directement

$$\mathbb{E}\left[F_T\right] = \mathbb{E}\left[e^{B_T}\right].$$

Pour illustrer, nous allons réaliser les deux calculs. Premier calcul: il faut exprimer $\mathbb{E}\left[e^{B_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\sqrt{t}Z}\right] = \phi_Z(\sqrt{t})$ ***où*** Z ***est une loi normale centrée réduite et où on reconnaît l'expression de la fonction caractéristique, qu'il faut donc calculer.***

$$\mathbb{E}\left[e^{tZ}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{tz}e^{-z^2/2}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{t^2/2}e^{-(z-t)^2/2}dz = e^{t^2/2}\mathbb{E}\left[Z\right] = e^{t^2/2}. \qquad (3)$$

Ainsi, $\mathbb{E}\left[e^{B_t}\right] = \phi_Z(\sqrt{t}) = e^{t/2}$ ***Par ailleur,*** $\mathbb{E}\left[F_0\right] = 1$***, ainsi,*** $\mathbb{E}\left[F_T\right] = \frac{1}{2}\int_0^T \mathbb{E}\left[e^{B_t}\right]dt + \mathbb{E}\left[F_0\right] = 1 + \frac{1}{2}\int_0^T e^{t/2}dt = 1 + \left[e^{t/2}\right]_0^T = e^{T/2}$***. Où l'on trouve que*** $\mathbb{E}\left[F_T\right] = e^{T/2}$***, bilan***

$$F = e^{T/2} + \int_0^T e^{B_t}dB_t.$$

L'autre approche par $\mathbb{E}\left[F_T\right] = \mathbb{E}\left[e^{B_T}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\sqrt{T}Z}\right] = \phi_Z(\sqrt{T}) = e^{T/2}$ ***permet de retrouver la même conclusion (heureusement..).*** ♣

2.3 Résolution numérique d'une EDS (3 points)

Pour résoudre résoudre numériquement l'EDS

$$dX_t = m(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

avec une convergence forte d'ordre 1, Milstein (1974) propose le schéma

$$Y_{q+1} = Y_q + m(Y_q)\Delta t + \sigma(Y_q)\Delta B_q + \frac{1}{2}\sigma(Y_q)\sigma'(Y_q)\left(\Delta B_q^2 - \Delta t\right) \qquad (4)$$

En 1984, Platen propose la modification suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_q^* & = & Y_q + \sigma(Y_q)\sqrt{\Delta t}, \\ Y_{q+1} & = & Y_q + m(Y_q)\Delta t + \sigma(Y_q)\Delta B_q + \frac{1}{2}\left(\sigma(Y_q^*) - \sigma(Y_q)\right)\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\left(\Delta B_q^2 - \Delta t\right) \end{array}\right. \qquad (5)$$

Question 8. : *Qu'appelle-t-on l'ordre de convergence forte ? Quelle différence avec la convergence faible ?*

Question 9. : *Montrez que la modification apportée par Platen permet bien de retrouver le schéma de Milstein.*

Solution:

$$\sigma(Y_q^*) = \sigma\left(Y_q + \sigma(Y_q)\sqrt{\Delta t}\right) = \sigma(Y_q) + \sigma'(Y_q)\sigma(Y_q)\sqrt{\Delta t}$$

d'où il vient que

$$\frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\left(\sigma(Y^*) - \sigma(Y_q)\right) = \frac{1}{2}\sigma'(Y_q)\sigma(Y_q).$$

cqfd ♣

Question 10. : *Quel est l'avantage de la modification proposée par Platen ?*