Processus d'Itô
2020 - 2021

1) Rappel de Proba / th. mesure

$(\Omega, F, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé avec F une tribue / σ-algèbre

$X : (\Omega, F) \xrightarrow{\text{mesurable}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire

on note F_X ou $\sigma(X)$ la plus petite sous-tribue de F telle que $X : (\Omega, F_X) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une fonction mesurable

$\left\{\right.$ **Rappel** : $X : (\Omega, F) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $X^{-1}(O) \in F$.

Exemple : $A \in F$, χ_A est mesurable et χ_A est F_A-mesurable avec $F_A = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ — complémentaire de A dans Ω.

Lemme de Doob - Dynkin

> Soient X et Y deux v.a.
>
> Y est F_X-mesurable ssi $\exists g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tq $Y = g(X)$

Exemple : 1) Y est $\sigma(X_0, X_1, X_2)$-mesurable $\Leftrightarrow \exists g$ tq $Y = g(X_0, X_1, X_2)$

2) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = X^2$ est $\sigma(X)$-mesurable

3) Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique

on définit $F_k = \sigma((X_i)_{i \leq k})$

F_k est une suite $\nearrow$ pour l'inclusion : $F_k \subset F_{k+1} \dots$

② 4) Un processus $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est adapté au processus X signifie que $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_k \in \sigma((X_i)_{i \leq k})$

2| Processus Markovien

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus.

X est un processus Markovien ssi il vérifie la formule de Chapman - Kolmogorov

$$P(X_{t_2} \in dx_{t_2} / X_{t_0} \in dx_{t_0}) = \int P(X_{t_2} \in dx_2 / X_{t_1} \in dx_{t_1}) \cdot P(X_{t_1} \in dx_{t_1} / X_{t_0} \in dx_{t_0}) \, dx_{t_1}$$

$t_0 < t_1 < t_2$

exemple : si X est Markovien

$$P(X_{t_0} \in dx_{t_0} \text{ et } X_{t_1} \in dx_{t_1} \text{ et } X_{t_2} \in dx_{t_2})$$

$$= \underbrace{P(X_{t_2} \in dx_{t_2} / X_{t_1} \in dx_{t_1})}_{\text{est une transition}} \cdot P(X_1 \in dx_{t_1} / X_0 \in dx_{t_0}) \cdot P(X_0 \in dx_{t_0})$$

3| Processus d'Itô

a| Mouvement Brownien

$B = (B_t)_{[0,T]}$ définit comme Markovien de transitions Gaussienne vérifie $B_{t+h} = B_t + \xi \sqrt{h}$, h arbitraire $(h \geq 0)$

$B_0 = 0$, $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{dB_t = \xi \sqrt{dt}}$$

$\Rightarrow$ i) $B_{t+h} - B_t$ est indépendant de B_t

ii) $\operatorname{Var} B_t = t$ et $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

...

③ Pour ω une réalisation, $t \longmapsto B_t(\omega)$ est p.s. Continue

car $\mathbb{E}[\,|B_{t+h} - B_t|^4\,] = 3\,h^2 (\longrightarrow 0)$

th. de continuité de Kolmogorov
X_t admet une version continue ssi
$\exists (\alpha, \beta) > 0$ tq
$\mathbb{E}[\,|X_{t+h} - X_t|^\alpha\,] \leq C\,h^{1+\beta}$

b/ Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô un processus C^0 en temps et qui est un processus Markovien

4] Intégrale stochastique d'Itô :

soit $f = (f_t)_{t \in [0,T]}$ un processus adapté à $B = (B_t)_{[0,T]}$

Brownien.

ie $\forall t,\ f_t \in \sigma((B_s)_{s \leq t})$

et telle que $\mathbb{E}\left[\int_0^T f_t^2\,dt\right] < +\infty \iff$ $\boxed{\text{le processus est d'énergie moyenne fini}}$

Alors on peut montrer que

① $$\boxed{\lim_{\delta t \to 0} \sum_k f_k\,\Delta B_k \equiv I(f) \equiv \int_0^T f_t\,dB_t}$$ existe

note : normalement construction par étape : (1) définition intégrable pour fonctions adaptées, puis (2) passage à classe de fonction plus grande...

② $\boxed{\int_0^T f_t\,dB_t \text{ est l'intégrale d'Itô de } f \text{ contre } B.}$

5] Caractérisation des processus d'Itô : (à énergie moyenne finie)

Tout processus d'Itô s'écrit de la forme

③ $$\boxed{X_t = X_0 + \int_0^t f_s\,ds + \int_0^t g_s\,dB_s}$$

f et g des processus adaptés à B et d'énergie ~~finie~~ moyenne finie.

④ Une diffusion d'Itô est un processus qui vérifie

$$④ \quad \boxed{X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)\,ds + \int_0^t b(X_s)\,dB_s}$$

(a,b) 2 fonctions de carré sommable

quand la définition de l'intégrale stochastique est donnée on peut utiliser une notation différentielle pour simplifier

$$dX_t = a(X_t)\,dt + b(X_t)\,dB_t \qquad \text{pour ④}$$

$$\text{ou } dX_t = f_t\,dt + g_t\,dB_t \qquad \text{pour ③}$$

à noter que $\boxed{\mathbb{E}\left[\int_0^T g_t\,dB_t\right] = 0}$ $\forall g_t$. (adapté et d'énergie moyenne finie)

on dit que $\int_0^t g_s\,dB_s$ est la partie "martingale"

$$dX_t = \underbrace{f_t\,dt}_{\text{partie "déterministe"}} + \underbrace{g_t\,dB_t}_{\text{partie "martingale"}} \equiv \text{semi-martingale}$$

en effet $\boxed{\mathbb{E}[X_t] \equiv \mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E}\left[\int_0^t f_s\,ds\right] + 0}$

$\boxed{\text{\#1 - Seule la partie déterministe contribue à l'espérance}}$

5] Formule d'Itô : $\equiv$ $\boxed{\text{Formule fondamentale du calcul stochastique}}$

Soit $dX_t = \mu_t\,dt + \sigma_t\,dB_t$ un processus d'Itô

avec (μ,σ) 2 processus adapté à $\mathcal{B}$ et d'énergie moyenne finie

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mu_t^2\,dt\right] < +\infty$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma_t^2\,dt\right] < +\infty$$

⑤ on pose $Y_t = f(X_t)$ avec f C^2

Par <u>continuité de</u> f Y_t est un processus d'Itô.

$\Longrightarrow$

$$dY_t = a_t\,dt + b_t\,\underbrace{dB_t}_{\mathcal{O}(\sqrt{dt})}$$

Peut-on exprimer (a, b) ?
développement en $\sqrt{dt}$ à l'ordre dt

$$Y_{t+dt} = f(X_{t+dt}) = f(X_t + dX_t)$$
$$= f(X_t) + f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\,dX_t \cdot dX_t$$

qu'il faut développer à l'ordre dt

or $dX_t \cdot dX_t = (m_t\,dt + \sigma_t\,dB_t)^2$

$$= \sigma_t^2 \underbrace{(\xi\sqrt{dt})^2}_{\substack{dB_t \cdot dB_t \\ \mathcal{O}(dt)}} + 2 m_t \sigma_t \underbrace{dt\,dB_t}_{\substack{dt \cdot dB_t \\ \mathcal{O}(dt^{3/2})}} + m_t^2 \underbrace{dt^2}_{\substack{dt \cdot dt \\ \mathcal{O}(dt^2)}}$$

cf remarque #1 section 5]

or $\boxed{\mathbb{E}[\xi^2 dt] = dt}$

donc la partie déterministe de $dX_t \cdot dX_t$ est $\sigma_t^2\,dt$
la <u>partie martingale</u> est <u>nulle</u>.

$\Longrightarrow$ $\boxed{dX_t \cdot dX_t = \sigma^2\,dt}$

on retient que
$dt \cdot dt = 0$ $\quad o(dt)$
$dt \cdot dB_t = 0$ $\quad o(dt)$
$dB_t \cdot dB_t = dt$

Ainsi

$$Y_{t+dt} = Y_t + f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\,\sigma_t^2\,dt$$

$$\boxed{dY_t = \underbrace{\left[f'(X_t)\,m_t + \frac{\sigma_t^2}{2} f''(X_t)\right]}_{a_t} dt + \underbrace{f'(X_t)\,\sigma_t}_{b_t}\,dB_t}$$

est la formule d'Itô
qu'on retient à partir de $\boxed{dY_t = f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\,dX_t \cdot dX_t}$

⑥ Note : si $Y_t = f(t, X_t)$ avec $f \in C^{1,2}$ on a

$$dY_t = \partial_t f \Big|_{(t,X_t)} dt + \partial_x f(t,X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t,X_t)\, dX_t \cdot dX_t$$

<u>Exemple</u> : Calcul de l'intégrale de $\int_0^t B_s\, dB_s$

on propose $Y_t = f(B_t)$ avec $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad f'(x) = x$, $f''(x) = 1$

la formule d'Itô conduit à

$$dY_t = f'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\, dt$$
$$= B_t\, dB_t + \frac{1}{2} dt$$

ainsi

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t B_s\, dB_s + \frac{t}{2}$$

soit

$$\int_0^t B_s\, dB_s = Y_t - Y_0 - \frac{t}{2}$$
$$= \frac{B_t^2}{2} - 0 - \frac{t}{2}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}}$$

<u>Remarque</u> : $\mathbb{E}\left[\int_0^t B_s\, dB_s\right] = 0$ car c'est la <u>partie martingale</u>

or justement $\mathbb{E}\left[\frac{B_t^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[B_t^2] = \frac{1}{2} t$

tel que $\mathbb{E}\left[\frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}\right] = 0$ on retrouve bien que $\mathbb{E}[\ ] = 0$.

<u>Exercice</u> Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t \qquad \mu \text{ et } \sigma \text{ sont des constantes}$$

Posons $Y_t = f(t, B_t)$ avec $f(t,x) = e^{at + bB_t}$ $\quad (a,b)$ constante

1) Utiliser la formule d'Itô

2) Identifier (a,b) pour que $dY_t \equiv dX_t$

3) déduire $X_t(\omega) = \ldots$

7) Dynamique des observables

Soit f_0 une observable ie une bornée

et ① $\boxed{dX_t = m(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t}$ une diffusion d'Itô

on définit un flot sur l'espace des observables par

$$\boxed{f(t,x) \equiv \mathbb{E}\left[f_0(X_t^x)\right]}$$

où X_t^x est solution de ① issue de $X_0^x(\omega) = x \quad \forall \omega$.
ie $X_0^x = x$

Attention : Pour vérifier que cela définit bien un flot il est nécessaire d'introduire des notions non vues cette année (Espérance conditionnelle) $\Rightarrow$ on admet que cela définisse un flot !

i) $f(t,x)$ est différentiable en temps

si $f_0 \in C^2$ d'après formule d'Itô

$$\begin{aligned}
f(t+dt,x) &= \mathbb{E}\left[f_0(X_{t+dt}^x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f_0(X_t^x + dX_t^x)\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[f_0(X_t^x)\right]}_{\equiv} + \mathbb{E}\left[f_0'(X_t^x)\,dX_t^x + \tfrac{1}{2} f_0''(X_t^x)\,dX_t^x\cdot dX_t^x\right] \\
&= f(t,x) + \mathbb{E}\left[m(X_t^x) f_0'(X_t^x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(X_t^x) f_0''(X_t^x)\right] dt + 0
\end{aligned}$$

espérance partie martingale

d'où

$$\boxed{\begin{aligned}
&\partial_t f(t,x) = \mathbb{E}\left[(\mathcal{L} f_0)(X_t^x)\right] \\
&\text{avec } \mathcal{L} f_0 \equiv m\,\partial_x f_0 + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \partial_x^2 f_0
\end{aligned}}$$

ii) on admet que ce résultat conduit à

$$\boxed{\partial_t f = \mathcal{L} f}$$

(th de Kolmogorov Backward)

Comme pour cas déterministe on se rappelle que dyn. des observable est rétrograde !

$$\boxed{\mathcal{L} \equiv m\,\partial_x + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2}$$

8] Dynamique des mesures

on déduit que avec $\mathbb{P}_t(A) \equiv \mathbb{E}[\chi_A(X_t^x)]$

on a

$$\boxed{\partial_t p = \mathcal{L}^* p}$$

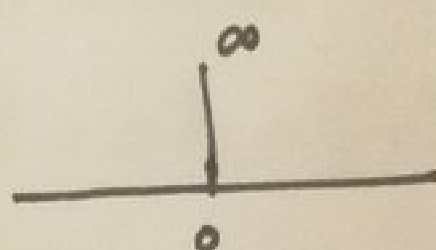
avec $$\boxed{\mathcal{L}^* p = -\partial_x(mp) + \frac{1}{2}\partial_x^2(\sigma^2 p)}$$

10] Exemple

10.1] Dynamique des mesures pour un Brownien.

$B = (B_t)$ $B_0 = 0$

donc $p_0 = \delta(x)$



avec $Y_t = f_0(B_t)$ la formule d'Itô s'écrie

$$dY_t = f_0'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2} f_0''(B_t)\,dB_t \cdot dB_t$$
$$= f_0'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2} f_0''(B_t)\,dt$$

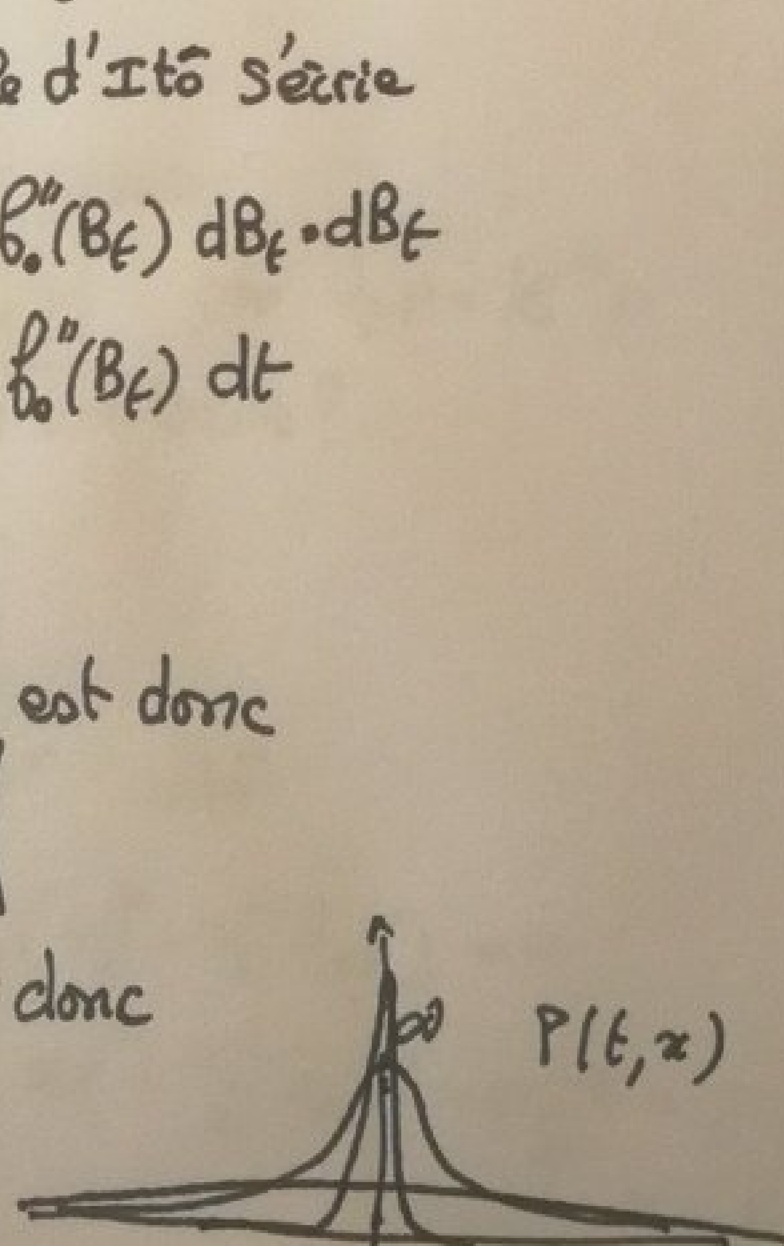
on a donc $$\boxed{\mathcal{L}f \equiv \frac{1}{2}\partial_x^2 f}$$

la dynamique des observables est donc

$$\boxed{\partial_t f = \frac{1}{2}\partial_x^2 f}$$

La dynamique des mesures est donc

$$\boxed{\partial_t p = \frac{1}{2}\partial_x^2 p}$$



(5) <u>10.2)</u> <u>Processus à flot gradient stochastique</u>

Soit $dX_t = -X_t\,dt + \sigma\,dB_t$ avec $\sigma > 0$

de la forme $dX_t = m(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$

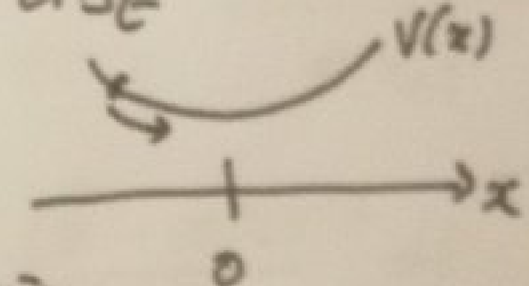
avec $m(X_t) = -X_t$

$\sigma(X_t) = \sigma$

est une dynamique de type flot gradient

$$dX_t = -\nabla V(X_t)\,dt + \sigma\,dB_t$$

avec $V(x) = \dfrac{x^2}{2}$



la dynamique des observables est donnée par

$$\partial_t f = \mathcal{L} f \quad \text{où } \mathcal{L} = m\,\partial_x + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2$$

soit $\mathcal{L} \equiv -x\,\partial_x + \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_x^2$

d'où on déduit la dynamique des mesures

$$\boxed{\partial_t p = \partial_x(x p) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 p} \iff \partial_t p = \mathcal{L}^* p$$

que vaut la distribution p^∞ si elle existe ?

$$\boxed{p^\infty(x) = \lim_{t\to\infty} p(t,x)}$$

donc $\partial_t p^\infty = 0 = \mathcal{L}^* p^\infty$ d'où

$$\mathcal{L}^* p^\infty = 0 \iff \partial_x\left(x p^\infty + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x p^\infty\right) = 0$$

$$\iff x p^\infty + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x p^\infty = c^{te} = 0$$

pas de flux de proba en $\pm\infty \Rightarrow c^{te} = 0$

d'où $\dfrac{1}{p^\infty}\partial_x p^\infty = -\dfrac{2x}{\sigma^2}$

$$\Rightarrow \ln p^\infty = -\frac{x^2}{\sigma^2} + c^{te} \Rightarrow \boxed{p^\infty(x) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}$$

est une gaussienne de moyenne 0 et variance $\dfrac{\sigma^2}{2}$.

normalisation

(10)

10.3| Probabilité d'un chemin / intégrale de Chemin

$$dX_t = m(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$$

or $dB_t = \xi\sqrt{dt}$ d'où

$$\frac{1}{\sigma(X_t)}\left[dX_t - m(X_t)\,dt\right] = \xi\sqrt{dt}$$

d'où

$$P(X_{t+dt}/X_t) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\,dt}\left(\frac{dX_t - m(X_t)\,dt}{\sigma(X_t)}\right)^2\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}-m(x)}{\sigma(x)}\right)^2 dt\right]$$

or $P(X_0, X_{dt}, X_{2dt}, \dots) = P(X_{ndt}/X_{(n-1)dt}) \cdots P(X_{dt}/X_0)\,P(X_0)$

d'où

$$① \quad \boxed{P([x]_{[0;T]}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\dot{x}-m(x)}{\sigma(x)}\right)^2 dt\right) P(X_0)}$$

dans cette notation $x(t)$ désigne un chemin C^1 mais les trajectoire de X_t ne sont pas C^1

Pour autant

les "trajectoires" qui contribuent à l'intégrale ① sont celles qui sont proches de trajectoire "classique" (C^1)

Application en assimilation de données : La formulation Continue d'un 4DVar est donnée par :

$$P(x_{[0:T]}/y_{[0;T]}) \propto P(y_{[0:T]}/x_{[0;T]})\,P(x[0,T])$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \|y_t - Hx_t\|^2_{R_t^{-1}}\,dt\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\dot{x}-m(x)}{\sigma(x)}\right)^2 dt\right)$$

$$P(X_0).$$

11 Conclusion

$$P\left(x_{[0:T]} / y_{[0:T]}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} J[x]\right)$$

avec $J[x] \equiv \int_0^T \left(\frac{\dot{x} - m(x)}{\sigma(x)} \right)^2 dt + \int_0^T \| y_t - H x_t \|^2_{R_t^{-1}} dt$

fonctionnelle

$+ \| x - x^b \|^2_{B^{-1}}$

écriture en dim n.

en n-dimension cela s'écrit $\| \dot{\underline{x}} - \underline{m}(\underline{x}) \|^2_{\underline{\underline{Q}}^{-1}}$ avec $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{\underline{\sigma}}^T$

$J[x] =$ "erreur modèle" + "rappel aux obs" + "rappel à l'ébauche".

$\int_0^T \cdots \quad + \int \cdots \quad + \| x - x^b \|^2_{B^{-1}}$