ENSEEIHT 2ième année Sciences du Numérique (LMB)

Contrôle de Graphes - Vendredi 15 janvier 2021 – 08h00 – Riadh DHAOU, Gentian JAKLLARI

(Aucun document n'est autorisé à part une feuille A4)

Durée : 1 heure 30 - Nombre de pages : 2 pages

Exercice 1 : Connexité et graphes réguliers

Soit G un graphe non-orienté simple d'ordre *2p*. On support que le degré de chaque sommet est au moins égal à p.

Q1) Démontrer que ce graphe est connexe.

Un graphe G_R est dit régulier s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. On s'intéresse dans cet exercice aux graphes réguliers dont les sommets sont de degré 3.

Q2) Que dire du nombre de sommets d'un tel graphe G_R? Existe-t-il un graphe simple, d'ordre 7, dont la suite des degrés est (3, 3 ,3 ,3 ,3 ,3 ,3) ?

Q3) Démontrer que, $\forall p \geq 2$, il existe un graphe régulier d'ordre *2p* dont les sommets sont de degré 3.

Exercice 2 : Dominos et Parcours de graphes

Un domino est une pièce rectangulaire contenant un certain nombre de points (i) près d'une extrémité, et un certain nombre de points (j) près de l'autre extrémité. Appelons le domino de type [i, j].

Q1) Est-il possible de disposer 10 dominos, types [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 4], [3, 5], [4, 5], de bout-en-bout et que le nombre de points sur les extrémités en contact des dominos adjacents est toujours égal?

Q2) Répétez la question ci-dessus dans le cas plus général, quand il y a $\binom{n}{2}$ dominos avec ($n \geq 2$), avec toutes les combinaisons types [i, j] possibles avec $1 \leq i \leq j \leq n$.

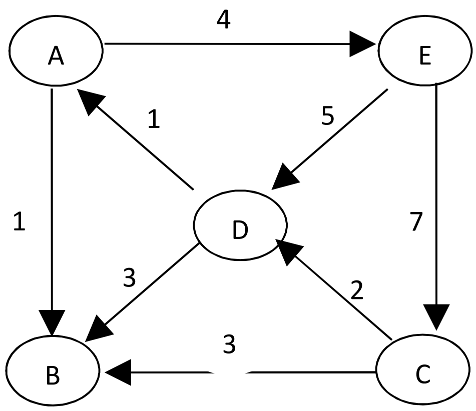
Exercice 3 : Coloration de Graphes

Un graphe non orienté G a une largeur w si les sommets peuvent être disposés dans une séquence v_1, v_2, v_3, . . . , v_n de telle sorte que chaque sommet v_i est relié par une arête au maximum aux w sommets précédents. (Le sommet v_j précède v_i si $j<i$.) Utilisez le raisonnement par récurrence pour prouver que tout graphe dont la largeur est au maximum w est (w + 1) - colorable.

Exercice 4 : Plus courts chemins et arbres couvrants

Utiliser l'algorithme de ***Dijkstra*** pour obtenir tous les plus courts chemins en partant du sommet A

Q1) Donner l'arbre des plus courts chemins, en partant du sommet A, pour le graphe suivant :



Q2) Soit G' un graphe non orienté obtenu à partir du graphe G en remplaçant les arcs par des arêtes.

Donner un arbre couvrant de poids minimal pour ce graphe G' et déterminer son poids. Cet arbre est-il unique ?