Examen de Modélisation Géométrique

Module d'analyse numérique
1 feuille recto-verso manuscrite autorisée
1 heure 30

16 Mai 2019

Les quatre exercices sont indépendants et de longueur et difficulté différente. Lisez l'ensemble du sujet avant de commencer.

1 Paramétriques et implicites

Donner un exemple de fonction (domaine de définition et expression) qui modélise une :

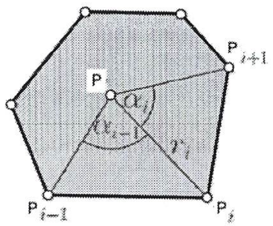
1. courbe implicite du plan,
2. courbe paramétrique interpolante dans l'espace (en 3D),
3. surface paramétrique en 3D (de préférence non fonctionelle) approximante.

2 Coordonnées barycentriques généralisées

On propose de définir les coordonnées barycentriques d'un point P par rapport à un ensemble de points P_i, $i = 0 \ldots n$ formant un polygone convexe. On définit les coordonnées de P par rapport à P_i par:

$$c_i = \frac{w_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i} \text{ avec } w_i = \frac{tan(\alpha_{i-1}/2) + tan(\alpha_i/2)}{r_i}.$$

Elles sont appelées *mean value coordinates.*



1. Montrer que les points définis par
$$P = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i$$
sont dans l'enveloppe convexe des points P_i.
2. Est-ce que P reste dans l'enveloppe convexe si les points P_i sont en 3D ?
3. Montrer que lorsque $P \in [P_i, P_{i+1}]$ alors les coordonnées c_i et c_{i+1} sont les coordonnées barycentriques classiques.

3 Courbes de Hermite

Une courbe de Hermite paramétrique est une courbe polynomiale P interpolant deux points donnés A et B en 0 et 1, dont on définit la tangente en chacun de ces points, par deux vecteurs v_A et v_B.

1. Quel est le degré de la courbe de Hermite ainsi définie ?
2. Déterminer les points de contrôle P_i de la courbe en fonction de A, B, v_A et v_B. Vous pouvez utiliser l'expression de la dérivée en 0 et 1 en fonction des points de contrôle.
3. Montrer que si la courbe ainsi définie est de degré 2, alors $p(0, 0, 1.5)$ et $p(1, 1, -0.5)$, où p est la floraison du polynôme P, sont confondus (c'est à dire $p(0, 0, 1.5) = p(1, 1, -0.5)$) -on pourra montrer que ce point est le 2e point de contrôle du polygone de Bézier de degré 2.
4. Si P est de degré 2, quelle est alors la condition sur A, B, v_A et v_B ?

4 Courbe et Surface interpolante

On peut définir une courbe interpolante par un schéma de subdivision dit 'à 4 points' avec l'algorithme suivant: on définit un pas de subdivision pour un polygone fermé en **ajoutant** entre deux points consécutifs P_i et P_{i+1} un nouveau point $P_{i+0.5}$ barycentre des points $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ avec ces mêmes coefficients $(-1/16, 9/16, 9/16, -1/16)$ (on considère la liste des points circulaires si on ne veut pas perdre de points au bord.)

1. On admet que l'algorithme de subdivision converge. Justifiez pourquoi cet algorithme converge vers une courbe interpolant les points du polygone de contrôle de départ.
2. Donnez le pseudo code d'un algorithme de subdivision prenant en paramètre une liste de points et un nombre de pas i et générant une approximation de la courbe interpolante fermée.
3. Expliquer comment généraliser cet algorithme pour obtenir des surfaces interpolantes.