



ALGÈBRE Module 1

PAD - Notes de cours

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

September 24, 2008

Table des Matières

1	Espaces vectoriels – Applications linéaires	1
1-1	Espaces vectoriels	3
1-1.1	Approche de la notion d'espace vectoriel	3
1-1.2	Espace vectoriel sur un corps K	4
1-1.3	Exemples	4
1-2	Sous espace vectoriel	7
1-2.1	Définition et propriétés	7
1-2.2	Exemples	7
1-2.3	Vectorialisé d'une famille finie de vecteurs	8
1-2.4	Intersection de deux sous espaces vectoriels	8
1-3	Famille finie génératrice et famille libre	9
1-3.1	Famille génératrice	9
1-3.2	Famille libre	9
1-4	Base d'un espace vectoriel de dimension finie	11
1-4.1	Définitions	11
1-4.2	Propriétés	11
1-5	Sommations sur les sous espaces vectoriels	15
1-6	Applications linéaires	17
1-6.1	Définition et propriétés	17
1-6.2	Exemples	17
1-7	Matrice d'une application linéaire	19
1-7.1	Introduction par un exemple	19
1-7.2	Généralisation	19
1-8	Matrices équivalentes	21
1-8.1	Introduction par un exemple	21
1-9	Image et noyau d'une application linéaire	23
1-9.1	Définitions et propriétés	23
1-9.2	Exemples	23
1-10	Notions de Rang	25
1-10.1	Rang d'une famille de vecteurs	25
1-10.2	Rang d'une application linéaire	26
1-11	Représentations graphiques	29

2	Matrices – Changement de base	33
2-1	Les ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(K)$	35
2-1.1	Introduction	35
2-1.2	L'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes	35
2-2	Le produit matriciel	37
2-2.1	Produits de matrices élémentaires ligne ou colonne	37
2-2.2	Définition du produit matriciel	38
2-2.3	Le produit matriciel et ses interprétations	39
2-3	Composition d'applications et produit matriciel	41
2-3.1	Le cas général	41
2-3.2	Composition d'endomorphismes et produit de matrices carrées	41
2-4	Applications bijectives et matrices carrées inversibles	43
2-4.1	Définitions et propriétés	43
2-4.2	Inversion et produit matriciel dans $\mathcal{GL}_n(K)$	44
2-5	Changements de bases	47
2-5.1	Représentation matricielle d'un changement de base	47
2-5.2	Exploitation concrète sur un exemple	48
2-5.3	Equivalence – Similitude	49
2-6	La transposition des matrices	51
2-6.1	Définition et propriétés	51
2-6.2	Transposition et produit matriciel	51
2-6.3	Transposition et symétrie dans $\mathcal{M}_n(K)$	52
2-6.4	Inversion et transposition dans $\mathcal{GL}_n(K)$	53
2-7	Matrices carrées – Polynômes de matrices	55
2-7.1	Polynômes de matrices et d'endomorphismes	55
2-7.2	Quelques matrices carrées particulières	56
2-8	La trace d'une matrice carrée	57
2-9	Le déterminant de matrices 2×2 et 3×3	59
2-9.1	Déterminant de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	59
2-9.2	Déterminant de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	60
2-10	Le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$	61
2-10.1	Calcul pratique du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$	61
2-10.2	Propriétés	62
2-10.3	Calcul de déterminants – Exemples	62
2-10.4	Déterminant d'un endomorphisme	63
2-10.5	Applications du déterminant	64
2-11	Déterminants et inverses	65
2-11.1	Matrice des cofacteurs et inverse	65
2-11.2	Calcul de l'inverse d'une matrice – Exemple	65
3	Diagonalisation des endomorphismes	67
3-1	Méthode du pivot de GAUSS	69
3-1.1	Exemple	69
3-1.2	Méthode générale	70

3-2	Autres méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice	71
3-2.1	Utilisation d'un polynôme matriciel	71
3-2.2	Résolution d'un système d'équations	72
3-3	Vecteurs propres et valeurs propres	73
3-3.1	Vecteurs propres et valeurs propres – Espaces propres	73
3-3.2	Exemple	74
3-4	Polynôme caractéristique	75
3-4.1	Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme	75
3-4.2	Recherche des valeurs propres	76
3-4.3	Recherche des vecteurs propres	77
3-5	Diagonalisation des endomorphismes	79
3-5.1	Position du problème	79
3-5.2	Endomorphisme diagonalisable	79
3-5.3	Exemples	80
3-5.4	Propriétés des endomorphismes diagonalisables	81
3-6	Un peu de réflexion	83
3-7	Triangularisation d'un endomorphisme	85
3-7.1	Position du problème	85
3-7.2	Exemple	85
3-8	Décomposition en blocs de JORDAN	87
3-8.1	Introduction sur un exemple	87

Chapitre 3

Diagonalisation des endomorphismes

Ce troisième chapitre comporte aussi deux parties :

1. Vous étudierez des techniques de calcul (il s'agira pour vous de savoir reproduire les méthodes développées dans le cours et illustrées par des exemples) : résolution de systèmes linéaires d'équations, utilisation d'un polynôme matriciel.
2. Il s'agira enfin de déterminer une base dans laquelle la matrice d'une application linéaire particulière (un endomorphisme) soit la plus simple possible. Pour cela, on développera en particulier les notions de vecteurs propres et d'espaces propres.

3-1 Résolution de systèmes d'équations par la méthode du pivot de Gauss

3-1.1 Exemple

Soit à résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues suivant, dans lequel les équations sont numérotées E_1, E_2, E_3 :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 6 & (E_1) \\ 5x - 3y - 8z = -4 & (E_2) \\ 10x - 12y + 5z = 8 & (E_3) \end{cases}.$$

Ceci s'écrit aussi matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & -8 \\ 10 & -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Première étape :

L'une des équations sert de pivot et permet d'éliminer une inconnue dans les équations suivantes. Prenons par exemple la 1^{ère} équation pour pivot, et éliminons la variable x dans les deux autres :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 6 & (\tilde{E}_1 = E_1) \\ -16y - 36z = -38 & (\tilde{E}_2 = 2 \times E_2 - 5 \times E_1) \\ -22y - 15z = -22 & (\tilde{E}_3 = E_3 - 5 \times E_1) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -16 & -36 \\ 0 & -22 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -38 \\ -22 \end{pmatrix}.$$

Deuxième étape :

Reprenons la 1^{ère} étape sur le système formé des équations n'ayant plus que 2 inconnues, \tilde{E}_2 et \tilde{E}_3 , et éliminons la variable y dans la dernière équation en prenant, par exemple, \tilde{E}_2 comme pivot :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 6 & (\tilde{E}_1) \\ -16y - 36z = -38 & (\tilde{E}_2) \\ 552z = 484 & (\tilde{E}_3 = 16 \times \tilde{E}_2 - 22 \times \tilde{E}_1) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -16 & -36 \\ 0 & 0 & 552 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -38 \\ 484 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'il est alors facile de résoudre, en commençant par déterminer la variable z , puis, en remontant, y et enfin x . Enfin, on obtient :

$$x = \frac{233}{12 \times 23}, \quad y = \frac{37}{4 \times 23}, \quad z = \frac{121}{6 \times 23}.$$

3-1.2 Méthode générale

En généralisant la technique développée dans l'exemple précédent, on peut décrire la méthode du pivot de GAUSS de la façon suivante.

- Soit un système ayant n inconnues et n équations. On choisit une équation pour 1^{er} pivot. Des $n - 1$ autres équations, en ne se servant que du pivot, on élimine par combinaison linéaire une des n inconnues.
- Parmi les $n - 1$ équations ainsi obtenues, on choisit un nouveau pivot et on recommence ...
- Au bout de $n - 1$ étapes (ou $n - 1$ pivots/éliminations), on obtient un système triangulaire.

3-2 Autres méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice

3-2.1 Utilisation d'un polynôme matriciel

Soit \mathbf{A} une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(K)$. Il est toujours possible, comme nous le verrons par la suite avec le *polynôme caractéristique d'une matrice* par exemple, de déterminer un polynôme $P \in K[X]$ de degré inférieur ou égal à l'ordre de la matrice \mathbf{A} tel que la matrice $P(\mathbf{A})$ soit égal à la matrice nulle. Ce type de polynôme est appelé **polynôme annulateur** de la matrice \mathbf{A} .

Si la matrice \mathbf{A} est de plus inversible, alors il est possible de déterminer un tel polynôme ayant un coefficient constant non nul. En divisant par ce coefficient, on peut alors se ramener au cas d'un polynôme $P \in K[X]$ ayant “1” comme coefficient constant. Notons

$$P_1(X) = 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k X^k$$

un tel polynôme annulateur d'une matrice \mathbf{A} inversible donnée. En exploitant le fait que $P_1(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, on peut alors écrire :

$$\mathbf{I}_n = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{A}^k ,$$

puis en factorisant \mathbf{A} dans la somme, on obtient :

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \left(- \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{A}^{k-1} \right) = \left(- \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{A}^{k-1} \right) \mathbf{A} ,$$

ce qui implique que

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(- \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{A}^{k-1} \right) .$$

Exemple : Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On peut vérifier aisément que $P(X) = X^2 - 4X + 3$ est bien un polynôme annulateur de \mathbf{A} . Ainsi, la matrice

$$-\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{4}{3}\mathbf{I}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

doit correspondre à l'inverse de \mathbf{A} , ce qui se vérifie aussi très facilement.

3-2.2 Résolution d'un système d'équations

Illustrons cette technique directement sur un exemple. Soit à inverser la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons alors le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi un système de la forme $\mathbf{AX} = \mathbf{X}'$. Si \mathbf{A} est inversible, en multipliant de part et d'autre de l'égalité par \mathbf{A}^{-1} , on obtient un système de la forme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}'$.

Il suffit donc d'exprimer (x, y, z) en fonction de (x', y', z') pour identifier dans le système ainsi obtenu les coefficients de la matrice inverse \mathbf{A}^{-1} .

Résolution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2z = x' \\ 3x + y = y' \\ x + y + z = z' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = x' \\ 3x + y = y' \\ 2x - z = y' - z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = x' \\ 3x + y = y' \\ 5x = x' + 2y' - 2z' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = x' - \frac{x' + 2y' - 2z'}{5} \\ y = y' - 3\frac{x' + 2y' - 2z'}{5} \\ x = \frac{x' + 2y' - 2z'}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2x' - y' + z'}{5} \\ y = \frac{-3x' - y' + 6z'}{5} \\ x = \frac{x' + 2y' - 2z'}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

et par conséquent

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-3 Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Dans ce qui suit, le corps K sur lequel sont construits les espaces vectoriels considérés sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3-3.1 Vecteurs propres et valeurs propres – Espaces propres

Définition 3-3.1 Vecteurs propres et valeurs propres

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E . Un vecteur $\mathbf{u} \in E$ est appelé **vecteur propre** de f si et seulement si : \mathbf{u} est non nul, et il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$.

Le scalaire λ est alors appelé **valeur propre** de f associée au vecteur propre \mathbf{u} .

Remarques :

- Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur propre est aussi vecteur propre.
- Si l'endomorphisme f n'est pas injectif, alors il admet un noyau et tout vecteur non nul dans $\text{Ker } f$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.
- Par contre, le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre !

Définition 3-3.2 On appelle **SPECTRE** d'un endomorphisme f , l'ensemble des valeurs propres de f .

Définition 3-3.3 Espaces propres

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f . On appelle **ESPACE PROPRE** de f associé à λ , l'ensemble

$$V_f(\lambda) = \{\mathbf{u} \in E, f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}\}.$$

Cas particulier : on appelle **direction propre** tout sous espace vectoriel de dimension 1 engendré par un seul vecteur propre.

Proposition 3-3.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Tout espace propre de f est un **sous-espace vectoriel** de E .

La particularité de ces sous-espaces vectoriels est d'être **invariants** par transformation avec l'endomorphisme f , c'est à dire que

$$f(V_f(\lambda)) = V_f(\lambda).$$

Ceci est aussi vrai pour toute direction propre, qui est effectivement "conservée" par transformation avec f , et par conséquent, tout sous-espace vectoriel d'un espace propre $V_f(\lambda)$ de l'endomorphisme f est aussi invariant par f .

Théorème 3-3.1 *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (scalaires dans le corps K), sont p valeurs propres distinctes de f , alors les espaces propres associés $V_f(\lambda_1), V_f(\lambda_2), \dots, V_f(\lambda_p)$, sont en somme directe dans E , c'est à dire que l'union des bases de chacun de ces espaces propres forme une famille libre dans E (mais **attention**, pas forcément génératrice dans E).*

3-3.2 Exemple

Soit, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier rapidement que \mathbf{A} admet deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$, associées aux vecteurs propres $\mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement. Ainsi, le spectre de f est égal à

$$\text{Spectre}(f) = \{2, 3\}.$$

Au passage, on a déterminé les deux sous-espaces propres de f : $V_f(3) = \text{Vect}\{\mathbf{u}\}$ et $V_f(2) = \text{Vect}\{\mathbf{v}\}$, tous deux de dimension 1. On vérifie bien qu'ils sont en somme directe dans \mathbb{R}^2 et, dans ce cas particulier, on a même :

$$\mathbb{R}^2 = V_f(3) \oplus V_f(2),$$

c'est à dire que les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} forment une base de \mathbb{R}^2 .

D'ailleurs, dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, à laquelle on peut associer la matrice de changement de base $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f a pour matrice

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice exprime bien le fait que $f(\mathbf{u}) = 3\mathbf{u}$ et $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$.

A cet égard, on dira que l'endomorphisme f est DIAGONALISABLE dans \mathbb{R}^2 .

3-4 Polynôme caractéristique

Dans ce qui suit, le corps K sur lequel sont construits les espaces vectoriels considérés sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3-4.1 Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E , et soit λ une valeur propre de f . Il existe alors un vecteur propre \mathbf{u} (non nul) tel que $f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ ou encore $(f - \lambda\mathbf{I}_E)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Ainsi, $(f - \lambda\mathbf{I}_E)$ n'est pas injectif, ce qui en dimension finie se traduit par

$$\det(f - \lambda\mathbf{I}_E) = 0.$$

Si on note $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ la matrice de l'endomorphisme f dans une base $\{\mathbf{e}_j\}$ de E , ceci s'écrit aussi

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

la valeur de ce déterminant étant indépendante du choix de la base puisque le déterminant est invariant par transformation de similitude.

Définition 3-4.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension n , et soit f un endomorphisme de E . On appelle **POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE** de f , le polynôme

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda\mathbf{I}_E).$$

Ce polynôme est indépendant de la base de la base choisie dans laquelle on exprime le déterminant, et il est de degré n en λ .

Proposition 3-4.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E , et soit P_f le **POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE** de f .

- L'ensemble des **RACINES** de P_f , quand elles existent, constitue le **SPECTRE** de f .
- Pour toute racine λ de P_f ($\lambda \in K$), le sous espace propre associé correspond à : $V_f(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda\mathbf{I}_E)$.

On a aussi le résultat suivant :

Proposition 3-4.2 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E . Si λ est une valeur propre de f , racine de multiplicité m du polynôme caractéristique P_f de f , alors :

$$1 \leq \dim V_f(\lambda) \leq m.$$

Enfin, il faut noter le résultat fondamental suivant :

Théorème 3-4.1 *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E , et soit P_f le POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE de f . Alors P_f est un **polynôme annulateur** de f , c'est à dire que $P_f(f)$ est égal à l'endomorphisme nul de E et que, pour toute représentation matricielle \mathbf{A} de f dans une base donnée de E ,*

$$P_f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_{\mathcal{M}_n(K)}.$$

3-4.2 Recherche des valeurs propres

Pour rechercher les valeurs propres d'un endomorphisme, il suffit d'écrire son polynôme caractéristique et d'en déterminer les racines.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} : \quad \left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } 2.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} : \quad \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} : \quad \left| \begin{array}{ccc} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{array} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{array} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ ou } 1.$$

Remarque : On peut d'ores et déjà noter que l'existence des valeurs propres d'un endomorphisme dépend du corps de référence K . Dans le 2^{ème} exemple ci dessus, il faut explicitement se placer dans \mathbb{C} pour pouvoir déterminer les racines du polynôme caractéristique en question. Il peut donc se faire, si le corps de référence est \mathbb{R} , qu'un endomorphisme n'ait pas de valeurs propres, ou que certaines des racines de son polynôme caractéristique ne puissent être exploitées comme valeurs propres.

3-4.3 Recherche des vecteurs propres

Après avoir déterminé les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f , on peut passer à la recherche des vecteurs propres de f . Pour chaque valeur propre λ , on détermine une base du sous espace vectoriel $V_f(\lambda)$ en résolvant le système linéaire :

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = \mathbf{0},$$

\mathbf{A} étant la représentation matricielle de f dans une base donnée. La résolution de ce système nous donnera alors les coordonnées dans cette même base des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ .

Exemple : Reprenons le dernier exemple de la section précédente, dans lequel on avait déterminé deux racines réelles du polynôme caractéristique, $\lambda = 6$ et $\lambda = 1$. Calculons les vecteurs propres associés :

$$\begin{aligned} \lambda = 6 : \quad \begin{pmatrix} 1-6 & 0 & -2 \\ 2 & 3-6 & 4 \\ 3 & 3 & 4-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x & -2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z & = 0 \\ 3x + 3y - 2z & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2z & = 0 \\ 8x + 3y & = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda = 1 : \quad \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -2 \\ 2 & 3-1 & 4 \\ 3 & 3 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} & -2z = 0 \\ 2x + 2y + 4z & = 0 \\ 3x + 3y + 3z & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z & = 0 \\ x + y & = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les deux sous-espaces propres, $V_f(6)$ et $V_f(1)$, sont tous deux de dimension 1, et engendrés respectivement par les vecteurs $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : Dans cet exemple, la réunion des bases de $V_f(6)$ et $V_f(1)$ n'engendre pas \mathbb{R}^3 en entier, mais seulement un sous espace vectoriel de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 . On ne pourra donc pas introduire de changement de base qui permettrait de DIAGONALISER l'endomorphisme f .

3-5 Diagonalisation des endomorphismes

3-5.1 Position du problème

Prenons l'exemple d'une symétrie plane dans \mathbb{R}^3 . Si on choisit une base du plan de symétrie, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , complétée par le vecteur orthogonal au plan

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

pour former une base de \mathbb{R}^3 , alors, dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, cette symétrie aura pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est diagonale.

La question qui se pose est de savoir si, pour un endomorphisme f de E , E étant un espace de dimension finie, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est **diagonale**. On dira, dans ces conditions, que f est **DIAGONALISABLE**.

Nous verrons que cela dépend du corps K sur lequel est construit l'espace vectoriel E : $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

3-5.2 Endomorphisme diagonalisable

Définition 3-5.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E . On dit que f est **DIAGONALISABLE** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exemple : Dans l'exemple du § 3-3.2, on a pu en effet vérifier que l'endomorphisme f associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans \mathbb{R}^2 .

Théorème 3-5.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Théorème 3-5.2 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si E est somme directe d'espaces propres de f .

En exploitant le théorème 3-3.1, on a aussi :

Proposition 3-5.1 *Soit E un K -espace vectoriel de dimension n . Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$), sont les p valeurs propres distinctes d'un endomorphisme f de E , alors f est diagonalisable dans E si et seulement si*

$$E = \bigoplus_{j=1}^p V_f(\lambda_j) \quad \text{ou encore} \quad \dim E = \sum_{j=1}^p \dim V_f(\lambda_j).$$

Théorème 3-5.3 (Théorème fondamental)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :

1. *son polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$ est **scindé** dans le corps K de référence (c'est à dire que $P_f(\lambda)$ est factorisable en facteurs du 1^{er} degré à coefficients dans K)*
2. *pour chaque valeur propre λ_j de multiplicité m_j , on a $\dim V_f(\lambda_j) = m_j$.*

Remarques :

- Dans \mathbb{C} , la condition 1 est automatiquement vérifiée.
- Si f est diagonalisable, la restriction de f à chacun de ses sous espaces propres est soit l'application nulle, si la valeur propre correspondante est nulle, soit une homothétie de rapport égal à la valeur propre correspondante.
- Un cas particulier important car assez fréquent est le suivant : Soit E un K -espace vectoriel de dimension n . Si un endomorphisme f de E a n valeurs propres distinctes (chacune de multiplicité 1) alors cet endomorphisme est diagonalisable.

3-5.3 Exemples

1. Soit f l'endomorphisme dans \mathbb{R}^3 , de matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme

caractéristique, $P_f(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, n'est pas scindé dans \mathbb{R} et f n'est donc pas diagonalisable dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

Par contre, $P_f(\lambda)$ est scindé sur \mathbb{C} , et possède trois racines simples ($\lambda = 1$, et $\lambda = \pm i$) et on peut donc dire que f est diagonalisable dans le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 (qui contient \mathbb{R}^3). Cependant, pour mettre f sous forme diagonale dans \mathbb{C}^3 , il faut utiliser un changement de base à coefficients dans \mathbb{C} et non dans \mathbb{R} .

2. Soit l'endomorphisme dans \mathbb{R}^2 de matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $P_{\mathbf{B}}(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, qui est bien scindé dans \mathbb{R} , et le sous-espace propre associé est

$$V_{\mathbf{B}}(1) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme il n'y a pas d'autre vecteur propre linéairement indépendant de celui-ci qui soit associé à la valeur propre 1, le sous-espace propre $V_{\mathbf{B}}(1)$ n'est que de dimension 1 et la condition 2 n'est pas vérifiée. En conclusion \mathbf{B} n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R}^2 .

Pour les mêmes raisons, il ne le serait pas non plus dans \mathbb{C}^2 .

Remarque : Pour savoir si un endomorphisme f est diagonalisable, il suffit de déterminer ses valeurs propres, leur multiplicité, et le rang de $(f - \lambda \mathbf{I}_E)$ pour chaque valeur propre.

Exemple : Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\lambda = 1$. $\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ si $a = 2$, et 2 si $a \neq 2$. Que conclure?

Réponse : 1 est valeur propre double de \mathbf{A} , donc pour que \mathbf{A} soit diagonalisable, il faut que la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre 1 soit 2.

D'après le théorème du rang, il faut donc que $\text{rang}(f - \mathbf{I}_E) = 1$, ce qui n'est réalisé que pour $a = 2$. De plus, la valeur propre 3 étant simple, la dimension de son espace propre est obligatoirement 1 (en effet : $1 \leq \dim V_f(3) \leq 1 = \text{multiplicité de la valeur propre 3}$).

En conclusion : si $a = 2$, \mathbf{A} est diagonalisable, sinon elle ne l'est pas.

3-5.4 Propriétés des endomorphismes diagonalisables

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n ($K = \mathbb{R}$, ou bien \mathbb{C}). Soit f un endomorphisme diagonalisable de E . Notons \mathbf{A} la matrice de f dans une base donnée de E , et \mathbf{P} une matrice de changement de base dans E telle que la matrice de f dans la nouvelle base soit diagonale. Notons enfin $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_i)$ la représentation matricielle de f dans cette base. Avec ces notations, on a donc

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P},$$

relation de similitude qui lie les deux représentations matricielles du même endomorphisme f .

L'intérêt des endomorphismes diagonalisables est qu'ils présentent bon nombre de propriétés. Citons en quelques unes :

- La transposée de f est aussi un endomorphisme diagonalisable. En effet, la matrice \mathbf{A}^T représente la transposée de f dans une base de E , et on a :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-T}.$$

On voit donc que \mathbf{A}^T est aussi semblable à la même matrice diagonale \mathbf{D} , donc que la transposée de f est diagonalisable.

De plus, on peut noter aussi que le spectre de f et de sa transposée sont égaux, ou bien encore, que \mathbf{A} et \mathbf{A}^T ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

- La trace d'une matrice étant invariante par transformation de similitude, on a donc $\text{trace}(f) = \text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{D})$, et par conséquent, la trace d'une matrice diagonalisable est égale à la somme de ses valeurs propres (multiplicité incluse) :

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

- Si de plus f est inversible, alors son inverse est aussi diagonalisable. En effet, aucune des valeurs propres de f n'étant nulle, l'inverse de la matrice diagonale \mathbf{D} est bien défini, et on a :

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}.$$

De plus, on peut noter que f et f^{-1} sont diagonalisables dans une même base de E , puisque la matrice de changement de base dans la relation de similitude qui lie \mathbf{D}^{-1} et \mathbf{A}^{-1} reste la même que celle qui lie \mathbf{D} et \mathbf{A} . On peut aussi vérifier que f et f^{-1} partagent en fait les mêmes espaces propres. Par contre, les valeurs propres de f^{-1} sont données par l'inverse des valeurs propres de f .

- Enfin, le déterminant d'un endomorphisme étant indépendant du choix de la base, on en déduit que :

$$\det(f) = \det \mathbf{A} = \det \mathbf{D} = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

et que le polynôme caractéristique de f est donné par le produit de monômes suivant :

$$P_f(\mu) = \det(f - \mu \mathbf{I}_E) = \det(\mathbf{D} - \mu \mathbf{I}_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \mu).$$

3-6 Un peu de réflexion, pour voir si les notions précédentes ont été assimilées

- Une matrice \mathbf{A}_1 réelle, de taille $(2, 2)$, a pour valeurs propres 1 et 3. Que dire de \mathbf{A}_1 ?
- Une matrice \mathbf{A}_2 réelle, de taille $(3, 3)$, a pour valeurs propres 1 et 3, l'espace propre associé à 3 étant de dimension 2. Que dire de \mathbf{A}_2 ?
- Une matrice \mathbf{A}_3 est de déterminant nul. Que dire de \mathbf{A}_3 ?
- Toute matrice réelle a-t-elle des valeurs propres? Toute matrice complexe a-t-elle des valeurs propres?
- Si une matrice \mathbf{A} est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, que peut on dire de ses valeurs propres?
- Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont-elles nécessairement semblables?
- Une matrice \mathbf{A}_4 réelle, de taille $(4, 4)$, a pour valeurs propres 1 et 3, les espaces propres associés étant de dimension 1. Que dire de \mathbf{A}_4 ?
- Une matrice \mathbf{A}_5 réelle, de taille $(3, 3)$, a pour valeurs propres 1 et 3, les espaces propres associés étant de dimension 1. Que dire de \mathbf{A}_5 ?
- Une matrice \mathbf{A}_6 réelle, de taille $(4, 4)$, a pour valeurs propres 1 et 3, les espaces propres associés étant de dimension 2. Que dire de \mathbf{A}_6 ?
- Quel est l'autre nom de l'espace propre associé à la valeur propre 0?
- Soit f un endomorphisme diagonalisable dans un espace vectoriel E de dimension n . On note

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda^{n-k}.$$

Exprimer α_1 et α_n en fonction des valeurs propres de f .

- Donner des matrices correspondant aux cas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_6$.

- La figure suivante représente graphiquement l'image d'un vecteur quelconque \mathbf{u} de \mathbb{R}^3 par un endomorphisme diagonalisable de \mathbb{R}^3 . Les espaces propres sont P et D associés respectivement aux valeurs propres 2 et -1 . Le vecteur \mathbf{u} se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur \mathbf{U} de D et d'un vecteur \mathbf{V} de P

Quelle pourrait être la matrice de cet endomorphisme dans une base bien choisie ?

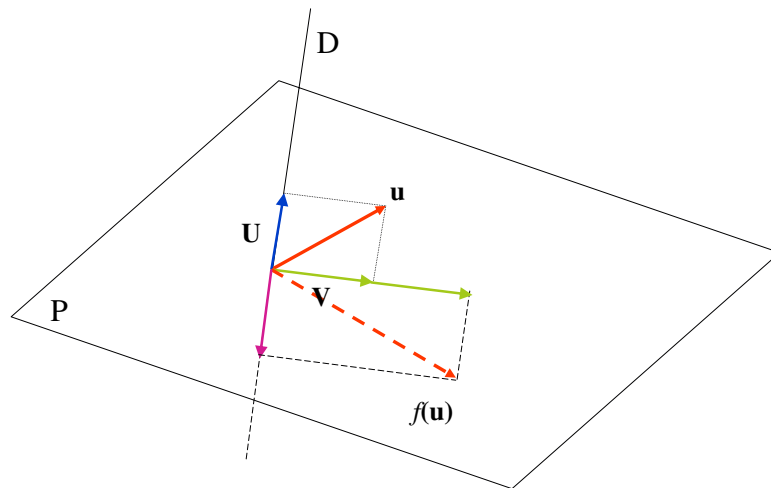


Figure 3-6.1: Endomorphisme diagonalisable dans \mathbb{R}^3

3-7 Triangularisation d'un endomorphisme

Dans ce qui suit, le corps K sur lequel sont construits les espaces vectoriels considérés sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3-7.1 Position du problème

Pour qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E soit diagonalisable, il faut en fait vérifier des hypothèses très strictes, et à cet égard, bon nombre d'endomorphismes ne sont en effet pas diagonalisables. Cependant, en relâchant quelque peu ces hypothèses, nous pouvons quand même trouver des bases dans lesquelles un endomorphisme f donnée admet une certaine structure, comme les structures triangulaires par exemple. L'objectif ici est de résumer quand cela est possible.

Avant tout, il faut déjà remarquer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure. En effet, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes (il suffit pour cela de passer de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n\}$ à la base $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_{n-2}, \dots, \mathbf{e}_1\}$). Le problème se résume donc à déterminer si une matrice carrée \mathbf{A} donnée est semblable à une matrice triangulaire supérieure ou non. Si c'est le cas, on dira alors que \mathbf{A} est TRIANGULARISABLE.

Définition 3-7.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E . On dit que f est TRIANGULARISABLE si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Le résultat fondamental sur les endomorphismes triangularisables est donné par le théorème suivant :

Théorème 3-7.1 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans le corps K .

Conséquence importante : Si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme est triangularisable, ou encore toute matrice carrée \mathbf{A} est triangularisable.

3-7.2 Exemple

Soit f l'endomorphisme de matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et de polynôme caractéristique

$P_f(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$. D'après le théorème ci-dessus, \mathbf{A} est triangularisable dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} . Il existe donc une base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dans laquelle la matrice de f est de la

forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond donc à

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 1 \mathbf{v}_1 + 0 \mathbf{v}_2 + 0 \mathbf{v}_3, \\ f(\mathbf{v}_2) &= a \mathbf{v}_1 + 1 \mathbf{v}_2 + 0 \mathbf{v}_3, \\ f(\mathbf{v}_3) &= b \mathbf{v}_1 + c \mathbf{v}_2 - 2 \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

On peut prendre, en particulier, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ vecteurs propres de f . Ceci est en effet possible, puisque pour toute racine du polynôme caractéristique, il existe au moins un vecteur propre associé, et cela permet de fixer b et c comme nuls dans la matrice ci-dessus. Si on cherche, de manière plus complète, à déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -2 , on trouve deux espaces de dimension 1 seulement, engendrés respectivement par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour répondre à la question, il nous reste donc à déterminer \mathbf{v}_2 et a tels que $f(\mathbf{v}_2) = a \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} -5x - 2z &= 2a \\ 5x + y + 2z &= -5a. \end{cases}$$

En choisissant $a = 1$, on obtient

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus alors qu'à vérifier que

$$\left\{ \mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est bien une base (en effet le déterminant de cette famille de vecteurs est non nul)

Nous avons donc construit une base dans laquelle l'endomorphisme f , initialement représenté dans la base canonique par la matrice \mathbf{A} , aura une matrice triangulaire supérieure.

3-8 Décomposition en blocs de JORDAN

3-8.1 Introduction sur un exemple

Soit f l'endomorphisme de matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de polynôme caractéristique

$P_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \lambda^2$. D'après le théorème 3-7.1, \mathbf{A} est triangularisable dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} . Sachant de plus que pour toute racine du polynôme caractéristique, les espaces propres associés sont au moins de dimension 1, il existe donc une base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond donc à

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{v}_2) = a \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_3) = \vec{0}, \quad f(\mathbf{v}_4) = b \mathbf{v}_1 + c \mathbf{v}_2 + d \mathbf{v}_3.$$

Si on cherche à déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 0, on trouve deux espaces de dimension 1 seulement, engendrés respectivement par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reste donc à déterminer \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_4 tels que $f(\mathbf{v}_2) = a \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ et $f(\mathbf{v}_4) = b \mathbf{v}_1 + c \mathbf{v}_2 + d \mathbf{v}_3$. On résout (il s'agit de déterminer une solution, mais pas toutes), et on peut prendre, par exemple,

$$a = 1 \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$c = 2, \quad d = -2, \quad b = 4, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Un autre choix possible aurait pu être

$$b = c = 0, d = 1, \text{ et } \tilde{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour finir, notons que

$$\text{dans } \left\{ \mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \text{ la matrice s'écrit } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{et dans } \left\{ \mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{v}}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ la matrice s'écrit } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière forme porte un nom particulier :

Il s'agit de LA DÉCOMPOSITION EN BLOCS DE JORDAN d'un endomorphisme triangulaire (mais que nous ne développerons pas plus en détail ici).