Examen avec documents

Sujet d'Examen

Décembre 2020

Respecter les consignes de concision et rester précis !

Durée 1h30

1 Problème du naufragé (12 pts | 2 pages max)

Perdu en mer. On reprend le même exemple que celui du naufragé vu en cours, avec un background Gaussien, donné par l'estimation a priori $x_b = (u_b, v_b)$, et la matrice de variance-covariance d'erreur $B = \sigma_b^2 I_2$, I_2 étant la matrice identité d'ordre 2. On suppose donnés deux scalaires fixes a_u et a_v tels que $a_u^2 + a_v^2 = 1$. On suppose que l'on observe une combinaison linéaire $a_u u + a_v v$ des positions u et v et que l'erreur de mesure ε_o associée est Gaussienne de moyenne nulle, d'écart type σ_o, décorrélée de l'erreur de background. On obtient ainsi l'équation d'observation $y = a_u u + a_v v + \varepsilon_o$.

1. On suppose $a_u = 1$ et $a_v = 0$
   (a) En vous servant de vos notes de cours, recopier du cours l'estimation (MAP) de la position du Naufragé et la matrice de covariance associée en fonction des données du problème.
   (b) En vous servant de la question précédente, donner la densité conditionnée $p(u, v \,|\, y)$.
2. Soit $a = [a_u, b_v]$ quelconque tel que $a_u^2 + a_v^2 = 1$.
   (a) Calculer à nouveau le MAP dans ce cas général et la matrice des variances-covariances associée. On pourra montrer que $(\sigma_b^{-2}\, I + \sigma_o^{-2} a a^T)^{-1} = \sigma_b^2\, I - \frac{\sigma_b^4}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} a a^T$.
   (b) Donner la densité conditionnée $p(u, v \,|\, y)$.
3. Soit z une variable aléatoire de densité Gaussienne de moyenne

$$\begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix} + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \begin{pmatrix} a_b \\ a_b \end{pmatrix} (y - a_u u_b - a_v v_b)$$

   et de matrice des variances covariances $\sigma_b^2\, I - \frac{\sigma_b^4}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} a a^T$. Soit $\underline{a}$ un vecteur tel que $\underline{a}^T a = 0$.
   (a) Donner la densité des variables aléatoires $a^T z$ et $\underline{a}^T z$. Interprêter ces résultats.
   (b) Faire les passages à la limites usuels (σ_o et σ_b tendent chacun à leur tour vers $+\infty$).

2 Filtre ETKF (4 pts | 1 page max)

$H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $y \in \mathbb{R}^m$. Soit $x_1 = (I_n + H^T H)^{-1} H^T y$ et $x_2 = H^T (I_m + H H^T)^{-1} y$.

1. Démontrer en vous appuyant sur la formule de Sherman-Morrison que $x_1 = x_2$. Par rapport à m et n, dans quel cas utilise-t-on l'une ou l'autre des deux formules ?
2. On considère le filtre ETKF en grande dimension (n et m sont grands).
   (a) Partant d'une factorisation $B = AA^T$, où $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times N}$, expliquez l'osbtacle que cherche à contourner l'algorithme ETKF. Quelles sont les attentes sur la position de N par rapport à n et m pour que l'algorithme soit intéressant ?
   (b) La formule présentée en cours est $x^* = x_b + Az$, avec $z = A^T H^T (R + HAA^T H^T)^{-1} (y - Hx_b)$. Ecrire z comme solution d'un problème d'optimisation.
   (c) La formule de z n'est pas nécessairement optimale pour N petit. Améliorer la formule. Cette nouvelle formule peut-elle à son tour se ramener à un problème d'optimisation ?

3 Corrélation de mesures. (4 pts | 1 page max)

On cherche à estimer une température t. On dispose d'un a priori Gaussien $\mathcal{N}(t_b, \sigma_b)$ et d'une mesure directe M1 de celle-ci, $y_1 = t + \varepsilon_o$, avec ε_o de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_o^2)$ décorrélée de l'erreur d'a priori.

1. Donner une estimation de la température à partir de ces deux informations (M1 et l'a priori).
2. On "rajoute" une mesure M2, $y_2 = 2t + 2\varepsilon_o$. Que donne l'arsenal de techniques vue en cours sur ce problème (M1, M2 et a priori) ?
3. On introduit une erreur fictive ε_2 de loi $\mathcal{N}(0, \delta^2)$ décorélée de ε_o et de l'erreur de background. On désigne par M3 la mesure $y_3 = 2t + 2\varepsilon_o + \varepsilon_2$. Que donne l'arsenal de techniques vue en cours sur ce problème (M1, M3 et a priori) ? Passer à la limite $\delta \to 0$, et conclure.