Programme test 2020-2021

Ⓐ

Filtrage stochastique

1. Savoir énoncer les étapes d'analyse et de prévision dans le cadre du filtrage non-linéaire (Formule de Bayes)
2. Savoir démontrer les équations du filtre de Kalman dans le cas linéaire - Gaussien
3. dans les équations du filtre de Kalman : savoir identifier les équations de l'analyse versus équation de la prévision et savoir donner l'interprétation probabiliste des 2 étapes
4. Savoir explique l'effet d'un réseau d'observation sur l'incertitude, avec présence d'un écoulement $\equiv$ TP (cas périodique !)

Dynamique des observables & mesures cadre déterministe

1. Savoir énoncer les grandes étapes permettant d'obtenir la dynamique des mesures de proba
   1) dynamique
   2) flot
   3) flot sur observable $\Rightarrow$ dynamique sur observable
   4) flot sur mesure $\Rightarrow$ dynamique sur mesure

   Avec le formalisme tel qu'introduit en cours

2. Savoir mettre en oeuvre le formalisme dans cas simple
   - (a) identifier la dynamique sous la forme $\frac{dx}{dt} = \underline{X}(\underline{x})$
   - (b) déduire $\mathcal{L}$
   - (c) déduire $\mathcal{L}^*$
   - (d) savoir étudier mesure limite $p^\infty(x) = \lim_{t \to \infty} p(t,x)$ à partir de $\mathcal{L}^* p^\infty = 0$

Cadre stochastique

1. Savoir définir un Brownien à partir de $B_{t+dt} = B_t + \xi \sqrt{dt}$
2. Savoir définir un processus Markovien
3. Savoir définir un processus d'Itô (markovien + C^0)

(B)

④ Savoir définir ce qu'est une intégrale stochastique au sens d'Itô

$$\lim_{\delta t \to 0} \sum f_q \Delta B_q = \int_0^T f_t \, dB_t$$

Pour processus $f = (f_t)_{[0,T]}$ adapté à $B = (B_t)_{[0,T]}$ Brownien

<u>et</u> de énergie ~~finie~~ moyenne finie $\mathbb{E}\left[\int_0^T f_t^2 dt\right] < +\infty$.

⑤ Savoir <u>démontrer la formule d'Itô</u> pour

$$Y_t = f(t, X_t) \quad f \in C^{1,2} \text{ différentiable}$$

⑥ Déduire la dynamique des observables associée à une diffusion d'Itô : $dX_t = m(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$

(m et σ Lipschitzienne et de carré sommable)

en identifiant $\mathcal{L} = m\partial_x + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2$ à partir de la formule d'Itô

⑦ Déduire la dynamique des mesures $\partial_t P = \mathcal{L}^* P$ et utiliser cette dynamique pour caractériser les distributions limite $P^\infty(x) = \lim_{t \to \infty} P(t,x)$. Via $\mathcal{L}^* P^\infty = 0$

$\Rightarrow$ Voir exemple dynamique stochastique avec flot gradient