

ESTATÍSTICA APLICADA À ADMINISTRAÇÃO

Thiago Marzagão¹

¹ marzagao.1@osu.edu

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE PROBABILIDADE

variáveis discretas vs variáveis contínuas

- Exemplos de variáveis discretas:
 - ...quantidade de alunos na sala
 - ...quantas vezes uma moeda cai “cara” em 10 lançamentos
 - ...soma das faces de um dado em 10 lançamentos
- Exemplos de variáveis contínuas:
 - ...tempo decorrido entre dois eventos
 - ...peso
 - ...inflação

variáveis discretas vs variáveis contínuas

- Variável discreta: pode assumir número finito de valores.
- Variável contínua: pode assumir número infinito de valores.

distribuições discretas de probabilidade

- Uma distribuição de probabilidade é uma função, $f(x)$, que nos diz qual a probabilidade de x .
- Exemplo: lançamento de uma moeda.
- $f(\text{cara}) = 1/2$
- $f(\text{coroa}) = 1/2$
- Exemplo: lançamento de um dado.
- $f(1) = 1/6$
- $f(2) = 1/6$
- $f(3) = 1/6$
- $f(4) = 1/6$
- $f(5) = 1/6$
- $f(6) = 1/6$

distribuições discretas de probabilidade

- Toda distribuição de probabilidade é uma função mas nem toda função é uma distribuição de probabilidade.
- Requisitos p/ $f(x)$ ser uma distribuição de probabilidade:
 - $f(x) \geq 0$
 - ... ou seja, a probabilidade de todo x é maior ou igual a zero
 - $\sum f(x) = 1$
 - ... ou seja, a soma de todas as probabilidades deve ser igual a um

a distribuição uniforme

- Distribuição uniforme: $f(x) = 1/n$
- É o caso mais simples.
- Mesma probabilidade p/ todo x .
- Satisfaz as duas condições:
 - P/ todo x a probabilidade é maior ou igual a zero.
 - Soma das probabilidades é igual a um.
- Exemplos de distribuições uniformes:
 - ...lançamento de moeda: $f(x) = \frac{1}{2}$
 - ...lançamento de dado: $f(x) = \frac{1}{6}$
 - (desenhar gráficos no quadro)

a distribuição binomial

- Distribuição binomial: $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$
- O que caracteriza uma distribuição binomial?
- 1) experimento consiste em n ensaios idênticos
- 2) dois resultados são possíveis em cada ensaio
- 3) p é a mesma em todos os ensaios
- 4) os ensaios são independentes
- Exemplo: lançar moeda p/ cima 10 vezes.
- Qual a probabilidade de obter 5 caras?
- $f(5) = ?$
- Distribuição binomial: $f(5) = \binom{10}{5} 0.5^5 (1-0.5)^{10-5}$
- $= 252(0.5^5)(0.5)^{10-5} \approx 0,24$
- (fazer passo a passo no quadro)

a distribuição de Poisson

- Distribuição de Poisson: $f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$
- μ é a média, $e \approx 2,71828\dots$
- O que caracteriza uma distribuição de Poisson?
- 1) probabilidade de ocorrência do evento é a mesma p/ dois intervalos de igual comprimento
- 2) ocorrência ou não ocorrência do evento num intervalo independente da ocorrência ou não ocorrência em outro intervalo
- Obs.: intervalo no precisa ser temporal.
- Exemplo: probabilidade de um dado call center receber 50 chamados na próxima hora, sabendo que a média de chamadas por hora é de 30.
- $f(50) = ?$
- Distribuição de Poisson: $f(50) = \frac{(30^{50})(2,71^{-30})}{50!} \approx 0,0002$

exercício 1

- Os dados a seguir foram coletados contando-se o número de salas de cirurgia em uso no Hospital Geral de Tampa em um período de 20 dias: em três dos dias somente uma sala de cirurgia foi usada; em cinco dos dias, duas foram usadas; em oito dos dias, três foram usadas; e, em quatro dias, todas as quatro salas de cirurgia do hospital foram usadas.
- (a) Use a abordagem de freqüencia relativa para construir a distribuição de probabilidade correspondente ao número de salas de cirurgia em uso em qualquer dia do período.
- (b) Desenhe um gráfico da distribuição de probabilidade.
- (c) Mostre que sua distribuição de probabilidade satisfaz as condições necessárias a uma distribuição discreta de probabilidade válida.
- (Anderson et al, p. 210)

exercício 1 - resolução

- (a) Use a abordagem de freqüencia relativa para construir a distribuição de probabilidade correspondente ao número de salas de cirurgia em uso em qualquer dia do período.
- $f(1) = 3/20$
- $f(2) = 5/20$
- $f(3) = 8/20$
- $f(4) = 4/20$
- (b) Desenhe um gráfico da distribuição de probabilidade.
- (Desenhar no quadro - x é no eixo x, $f(x)$ no eixo y)
- (c) Mostre que sua distribuição de probabilidade satisfaz as condições necessárias a uma distribuição discreta de probabilidade válida.
- $f(1) \geq 0, f(2) \geq 0, f(3) \geq 0, f(4) \geq 0$
- $3/20 + 5/20 + 8/20 + 4/20 = 20/20 = 1$

exercício 2

- (Ex. 9 em Anderson et al, p. 210)

exercício 2

9. Para as pessoas desempregadas nos Estados Unidos, a média dos meses de desemprego no final de dezembro de 2009 era de aproximadamente sete meses (*Bureau of Labor Statistics*, janeiro de 2010). Suponha que os dados a seguir se referem a uma região específica no interior do Estado de Nova York. Os valores na primeira coluna mostram o número de meses em desemprego e os valores na segunda coluna representam o número correspondente de pessoas desempregadas.

Período de desemprego (em meses)	Número de desempregados
1	1.029
2	1.686
3	2.269
4	2.675
5	3.487
6	4.652
7	4.145
8	3.587
9	2.325
10	1.120

Digamos que x seja uma variável aleatória indicando o número de meses que uma pessoa está desempregada.

- Use os dados para desenvolver uma distribuição de probabilidade para x .
 - Mostre que sua distribuição de probabilidade satisfaz as condições para uma distribuição discreta de probabilidade válida.
 - Qual é a probabilidade de que uma pessoa esteja desempregada por dois meses ou menos?
 - Qual é a probabilidade de que uma pessoa esteja desempregada por mais de dois meses?
10. As distribuições de frequências relatadas no exercício 1 mostram a distribuição de frequências das pessoas desempregadas por mais de dois meses?

exercício 3

- (Ex. 10 em Anderson et al, pp. 210-211)

exercício 3

10. As distribuições de frequências relativas percentuais das pontuações sobre a satisfação no trabalho referentes a uma amostra de executivos seniores de sistemas de informação e gerentes

exercício 3

intermediários de sistemas de informação são apresentadas a seguir. As pontuações variam de 1 (muito insatisfeito) a 5 (muito satisfeito).

Pontuação quanto à satisfação no trabalho	Executivos seniores de SI (%)	Gerentes intermediários de SI(%)
1	5	4
2	9	10
3	3	12
4	42	46
5	41	28

- Desenvolva uma distribuição de probabilidade referente à pontuação da satisfação de um executivo sênior no trabalho.
- Desenvolva uma distribuição de probabilidade referente à pontuação da satisfação de um gerente intermediário no trabalho.
- Qual é a probabilidade de um executivo sênior registrar uma pontuação de satisfação no trabalho igual a 4 ou 5?
- Qual é a probabilidade de um gerente intermediário estar muito satisfeito?
- Compare a satisfação global no trabalho dos executivos seniores e dos gerentes intermediários.

exercício 4

- (Ex. 11 em Anderson et al, p. 211)

exercício 4

11. Um técnico faz manutenção de máquinas de postagem em empresas na região de Phoenix. Dependendo do tipo de defeito, uma visita técnica pode demandar 1, 2, 3 ou 4 horas. Os diferentes tipos de defeito ocorrem aproximadamente na mesma frequência.
- Desenvolva uma distribuição de probabilidade para a duração de uma visita técnica.
 - Desenhe um gráfico da distribuição de probabilidade.
 - Mostre que sua distribuição de probabilidade satisfaz as condições necessárias a uma função de probabilidade discreta.
 - Qual é a probabilidade de a visita técnica demandar três horas?
 - Uma visita técnica acabou de chegar, mas o tipo de defeito é desconhecido. São 15 horas e o técnico habitualmente deixa o trabalho às 17 horas. Qual é a probabilidade de o técnico precisar trabalhar em hora extra para consertar a máquina ainda hoje?

exercício 5

- (Ex. 12 em Anderson et al, p. 211)

exercício 5

12. As duas maiores fornecedoras de comunicações a cabo são Comcast Cable Communications, com 21,5 milhões de assinantes, e Time Warner Cable, com 11,0 milhões de assinantes (*The New York Times Almanac*, 2007). Suponha que a administração da Time Warner Cable avalie subjetivamente uma distribuição de probabilidade para o número de novos assinantes no próximo ano, no Estado de Nova York, como se segue.

x	$f(x)$
100.000	0,10
200.000	0,20
300.000	0,25
400.000	0,30
500.000	0,10
600.000	0,05

- Esta é uma distribuição de probabilidade válida? Explique.
- Qual é a probabilidade de que a Time Warner venha a obter mais de 400.000 novos assinantes?
- Qual é a probabilidade de que a Time Warner venha a obter mais de 200.000 novos assinantes?

exercício 6

- (Ex. 28 em Anderson et al, p. 226)

exercício 6

28. Uma pesquisa de opinião realizada pela Harris Interactive para a InterContinental Hotels & Resorts perguntou aos entrevistados: “Ao realizar viagens internacionais, você se aventura sozinho para conhecer a cultura local ou se fixa com seu grupo de viagem aos itinerários turísticos?”. A pesquisa descobriu que 23% dos entrevistados se prendem ao seu grupo turístico (*USA Today*, 21 de janeiro de 2004).
- Em uma amostra de seis viajantes internacionais, qual é a probabilidade de dois se prenderem ao seu próprio grupo turístico?
 - Em uma amostra de seis viajantes internacionais, qual é a probabilidade de pelo menos duas pessoas se prenderem ao seu próprio grupo turístico?
 - Em uma amostra de dez viajantes internacionais, qual é a probabilidade de nenhum se prender ao seu próprio grupo turístico?

exercício 6 - resolução

- a)
- $\binom{6}{2}(0,23)^2(0,77)^4$
- $= \frac{6!}{2!(6-2)!}(0,23)^2(0,77)^4$
- $\approx 0,2789$
- b)
- $\binom{6}{2}(0,23)^2(0,77)^4$
- $+ \binom{6}{3}(0,23)^3(0,77)^3$
- $+ \binom{6}{4}(0,23)^4(0,77)^2$
- $+ \binom{6}{5}(0,23)^5(0,77)^1$
- $+ \binom{6}{6}(0,23)^6(0,77)^6$
- $\approx 0,4181$
- c)
- $\binom{10}{10}(0,23)^0(0,77)^{10} \approx 0,073$

exercício 7

- (Ex. 29 em Anderson et al, p. 226)

exercício 7

29. Em São Francisco, 30% dos trabalhadores utilizam transporte público diariamente (*USA Today*, 21 de dezembro de 2005).
- Em uma amostra com 10 trabalhadores, qual é a probabilidade de que exatamente 3 trabalhadores utilizem transporte público diariamente?
 - Em uma amostra com 10 trabalhadores, qual é a probabilidade de que pelo menos 3 trabalhadores utilizem transporte público diariamente?
30. Quando uma máquina

exercício 8

- (Ex. 33 - até c - em Anderson et al, p. 227)

exercício 8

33. Doze dos 20 principais finalistas no PGA Championship de 2009, na Hazeltine National Golf Club, em Chaska, Minnesota, utilizaram uma bola de golfe da marca Titleist (site da Golf BallTest, 12 de novembro de 2009). Suponha que esses resultados sejam representativos para a probabilidade de um jogador do PGA Tour selecionado aleatoriamente utilizar uma bola de golfe da marca Titleist. Para uma amostra de 15 jogadores faça os seguintes cálculos.
- Calcule a probabilidade de que exatamente 10 dos 15 jogadores do PGA Tour utilizem uma bola de golfe Titleist.
 - Calcule a probabilidade de que mais de 10 dos jogadores do PGA Tour utilizem uma bola de golfe Titleist.
 - Para uma amostra de 15 jogadores do PGA Tour, calcule o número esperado de jogadores que utilizam uma bola de golfe Titleist.
 - Para uma amostra de 15 jogadores do PGA Tour, calcule a variância e o desvio padrão do número de jogadores que utilizam uma bola de golfe Titleist.

exercício 9

- (Ex. 34 em Anderson et al, p. 227)

exercício 9

34. Um Estudo da População Atual do The Census Bureau mostra que 28% dos indivíduos, com idade de 25 ou mais, concluíram quatro anos de faculdade (*The New York Times Almanac, 2006*). Para uma amostra de 15 indivíduos, com idade de 25 ou mais, responda às seguintes questões:
- Qual é a probabilidade de que quatro indivíduos tenham concluído quatro anos de faculdade?
 - Qual é a probabilidade de que três indivíduos ou mais tenham concluído quatro anos de faculdade?

exercício 10

- (Ex. 35 em Anderson et al, p. 227)

exercício 10

35. Uma universidade descobriu que 20% dos seus estudantes desistem sem concluir o curso introdutório de estatística. Considere que 20 estudantes tenham se matriculado para o curso.
- Calcule a probabilidade de dois ou menos desistirem.
 - Calcule a probabilidade de exatamente quatro desistirem.
 - Calcule a probabilidade de mais de três desistirem.
 - Calcule o número esperado de desistências.

exercício 11

- (Ex. 36 em Anderson et al, p. 227)

exercício 11

36. De acordo com um estudo conduzido pela TD Ameritrade, um de cada quatro investidores têm fundos negociados na Bolsa de Valores, em seus portfólios (*USA Today*, 11 de janeiro de 2007). Considere uma amostra de 20 investidores.

- Calcule a probabilidade de que exatamente quatro investidores tenham fundos negociados na Bolsa de Valores, em seus portfólios.
- Calcule a probabilidade de que pelo menos dois dos investidores tenham fundos negociados na Bolsa de Valores, em seus portfólios.
- Se descobrisse que exatamente 12 dos investidores têm fundos negociados na Bolsa de Valores em seus portfólios, você duvidaria da exatidão dos resultados desse estudo?
- Calcule o número esperado de investidores que têm fundos negociados na Bolsa de Valores, em seus portfólios.

exercício 12

- (Ex. 40 - até b - em Anderson et al, p. 231)

exercício 12

40. Chamadas telefônicas são recebidas à taxa de 48 por hora no balcão de reservas da Regional Airways.
- Calcule a probabilidade de receberem três chamadas em um intervalo de tempo de cinco minutos.
 - Calcule a probabilidade de receberem exatamente dez chamadas em 15 minutos.
 - Suponha não haver nenhuma chamada em espera no momento. Se o recepcionista demora cinco minutos para completar a chamada atual, quantas ligações você acha que permanecerão em espera nesse tempo? Qual é a probabilidade de não haver nenhuma ligação em espera?
 - Se nenhuma chamada está em processamento no momento, qual é a probabilidade de o recepcionista ter três minutos de descanso sem ser interrompido?

exercício 12 - resolução

- a)
- $48 \text{ chamadas/hora} = 4 \text{ chamadas/5 minutos}$
- $f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$
- $f(3) = \frac{(4)^3 (2,71)^{-4}}{3!}$
- $\approx 0,1953$
- b)
- $48 \text{ chamadas/hora} = 12 \text{ chamadas/15 minutos}$
- $f(10) = \frac{(12)^{10} (2,71)^{-12}}{10!}$
- $\approx 0,1048$

exercício 13

- (Ex. 42 em Anderson et al, p. 231)

exercício 13

42. Os estabelecimentos da Bed & Breakfast (B&B) registraram a estada de mais de 50 milhões de hóspedes todos os anos. Os atrativos mostrados no site da Bed and Breakfast Inns of North America, o qual tem uma média de aproximadamente sete visitas por minuto, possibilitam a muitos estabelecimentos da B&B atraírem hóspedes (*Time*, setembro de 2001).
- Calcule a probabilidade de não haver nenhuma visita ao site no período de um minuto.
 - Calcule a probabilidade de haver duas ou mais visitas ao site no período de um minuto.
 - Calcule a probabilidade de haver uma ou mais visitas ao site em um período de 30 segundos.
 - Calcule a probabilidade de haver cinco ou mais visitas ao site no período de um minuto.

exercício 13 - resolução

- a) $f(0) = \frac{(7)^0(2,71)^{-7}}{0!} \approx 0,0009$
- b) $1 - f(1) - f(0)$
- $f(1) = \frac{(7)^1(2,71)^{-7}}{1!} \approx 0,0063$
- $1 - f(1) - f(0) \approx 1 - 0,0009 - 0,0063 \approx 0,9927$
- c) 7 chamadas/minuto = 3,5 chamadas/30 segundos
- $1 - f(0) = 1 - \frac{(3,5)^0(2,71)^{-3,5}}{0!} \approx 0,9698$
- d) $1 - f(0) - f(1) - f(2) - f(3) - f(4)$
- $\approx 0,872$

exercício 14

- (Ex. 43 em Anderson et al, p. 231)

exercício 14

43. Os passageiros de uma empresa aérea chegam aleatória e independentemente ao balcão de controle de passageiros de um importante aeroporto internacional. A taxa média de chegada é de 10 passageiros por minuto.

- Calcule a probabilidade de ninguém chegar no período de um minuto.
- Calcule a probabilidade de três ou menos passageiros chegarem no período de um minuto.
- Calcule a probabilidade de ninguém chegar em um período de 15 segundos.
- Calcule a probabilidade de pelo menos um passageiro chegar em um período de 15 segundos.

... 15 acidentes aeronáuticos (*The World Almanac and Book of*

exercício 15

- (Ex. 44 em Anderson et al, p. 231)

exercício 15

44. A cada ano, ocorre uma média de 15 acidentes aeronáuticos (*The World Almanac and Book of Facts, 2004*).

- a. Calcule o número médio de acidentes aeronáuticos por mês.
- b. Calcule a probabilidade de não ocorrer nenhum acidente durante um mês.
- c. Calcule a probabilidade de ocorrer exatamente um acidente durante um mês.
- d. Calcule a probabilidade de ocorrer mais de um acidente durante um mês.

exercício 16

- (Ex. 45 em Anderson et al, p. 231)

exercício 16

45. O National Safety Council (NSC) estima que acidentes de trabalho custem às empresas dos Estados Unidos quase \$ 200 bilhões anualmente em perda de produtividade (*National Safety Council*, março de 2006). Com base nas estimativas do NSC, espera-se que as companhias com

exercício 16

50 funcionários apresentem uma média de três acidentes de trabalho com funcionários por ano.
Responda às seguintes perguntas com relação às companhias com 50 funcionários.

- Qual a probabilidade de não haver acidentes de trabalho durante um ano?
- Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos dois acidentes de trabalho durante um ano?
- Qual é o número esperado de acidentes de trabalho durante seis meses?
- Qual a probabilidade de não haver acidentes de trabalho durante os próximos seis meses?